Le produit scalaire.

I. Définition.

Définition : L'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine se note ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

Définition: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ définie par $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.**
- **Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =0.**

Attention, le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur, mais un nombre réel.
Le produit scalaire n'a pas d'unité.

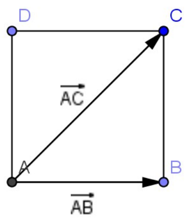
Remarques:

1) Si A, B et C sont trois points distincts du plan, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = AB×AC×cos($\widehat{BAC}$).
2) Le produit scalaire est symétrique en $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   En effet, on sait que $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$.
   Or $\cos(\vec{v},\vec{u})=\cos(-(\vec{u},\vec{v}))=\cos(\vec{u},\vec{v})$.
   Donc $\vec{v}.\vec{u}=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{v},\vec{u})=\|\vec{u}\times\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Un sympathique cas particulier: soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans le même sens, alors $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$ et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, alors $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$ et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

Exemple: Soit ABCD un carré de côté 2 cm.



Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
En utilisant le théorème de Pythagore, on démontre que AC= $\sqrt{8}$ =2 $\sqrt{2}$
On sait que les diagonales d'un carré sont les bissectrices des angles droits.
On sait que $\widehat{BAD}$ =90° d'où $\widehat{BAC}$ =45°.
Par suite $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ =AB×AC×cos($\widehat{BAC}$) = $2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$.

II. Orthogonalité.

a. Vecteurs orthogonaux.

Définition: On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si:

- **soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,**
- **soit les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires, avec O, A, B trois points du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ non nuls.**

b. Propriété.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors cos($\vec{u}$, $\vec{v}$) = 0, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =0.

Étudions la réciproque.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =0.

1) Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2) Considérons $\vec{u}\neq\vec{o}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, alors $\|\vec{u}\|\neq 0$ et $\|\vec{v}\|\neq 0$.
   Il existe O, A, B distincts tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
   Donc $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =0
   ⇔ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ = 0
   ⇔ cos ($\widehat{AOB}$) = 0
   ⇔ $\widehat{AOB} = \pm\frac{\pi}{2}$
   ⇔ Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.
   ⇔ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =0.

III. Avec les coordonnées.

a. Une autre expression du produit scalaire.

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x;y)$ et $(x';y')$.
On cherche à exprimer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de x, y, x', y' .
Soit A et B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$,
alors A a pour coordonnées (x, y) , B a pour coordonnées (x', y') .
Soit (r, θ) le couple de réel tels que $OA=r$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OA})=\theta$. On sait que $x=rcos(\theta)$ et $y=rsin(\theta)$.
Soit (r', θ') le couple de réel tels que $OB=r'$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OB})=\theta'$. On sait que $x'=r'\cos(\theta')$ et $y'=r'\sin(\theta')$.
On a de plus $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\theta'-\theta(2\pi)$,
$\|\overrightarrow{OA}\|=r$
$\|\overrightarrow{OB}\|=r'$

Donc
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= r\cdot r'\cdot\cos(\theta'-\theta)\\ &= rr'(\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta)\\ &= rcos\,\theta\cdot r'\cos\theta'+rsin\,\theta\cdot r'\sin\theta'\\ &= xx'+yy'.\end{aligned}$$

Propriété: Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ dans un repère orthonormal, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

Exemple:Soit A(-2;-3), B(1;1), C(-3; -1) dans un repère orthonormé.
Le triangle ABC est-il rectangle en C ?
Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ puis testons la nullité de $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2+3\\-3+1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1+3\\1+1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 1\times 4+(-2)\times 2=0$.

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux et donc les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires. Donc le triangle ABC est rectangle en C.

Soit $\vec{u}$ un vecteur ayant pour coordonnées $(x;y)$ dans un repère orthonormal.
$\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Définition :
Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
Ce nombre est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et est aussi noté $\vec{u}^2$.

b. Propriétés du produit scalaire.

Propriétés:
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k ,
1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ **.**
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3) $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Preuve: Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de coordonnées respectives dans un repère orthonormal $(x;y)$, $(x';y')$, $(x'';y'')$.

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
2) Le vecteur $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées $(x'+x'';y'+y'')$.
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= x\times(x'+x'')+y\times(y'+y'')\\ &= xx'+xx''+yy'+yy''\\ &= xx'+yy'+xx''+yy''\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}\ .\end{aligned}$$
3) Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$.
$(k\vec{u})\cdot\vec{v}=kxx'+kyy'=k(xx'+yy')=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

c. Égalités remarquables.

Propriété: si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan, on a les égalités suivantes:
1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 +2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ **donc** $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ **.**
2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 -2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ **donc** $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ **.**
3) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ **donc** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ **.**

Conséquence: les identités fournissent des expressions du produit scalaire en fonction des normes.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

On peut donc calculer un produit scalaire uniquement à partir de distances:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.

Exemple: Soit un triangle ABC tel que AB = 5, AC = 4 et BC = 7.
a. Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b. Déterminer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

a. En utilisant la formule ci-dessous,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) = \frac{1}{2}(5^2+4^2-7^2) = -4$.
b. Or on sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = AB×AC×cos ($\widehat{BAC}$) = 5×4×cos($\widehat{BAC}$).
D'où 5×4×cos ($\widehat{BAC}$) = -4. Par suite, cos($\widehat{BAC}$) = $-\frac{1}{5}$. Donc $\widehat{BAC}$ ≈102°.

Application :
Théoréme de la médiane : Soient A et B deux points du plan et I le milieu de [AB].
Pour tout point M du plan, $MA^2+MB^2=2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}$ **.**

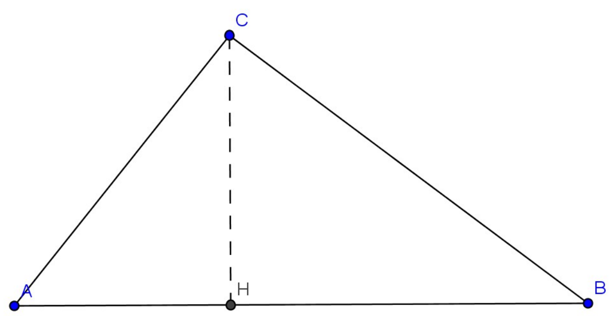
Démonstration :
$MA^2+MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$
Or I est le milieu de [AB], donc $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Donc $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}$.

Exemple : Soit un triangle ABC tel que AB=5, AC=8 et BC= 7. Soit I le milieu de [AB].
Déterminer la longueur CI.

IV. Produit scalaire et projection orthogonale.

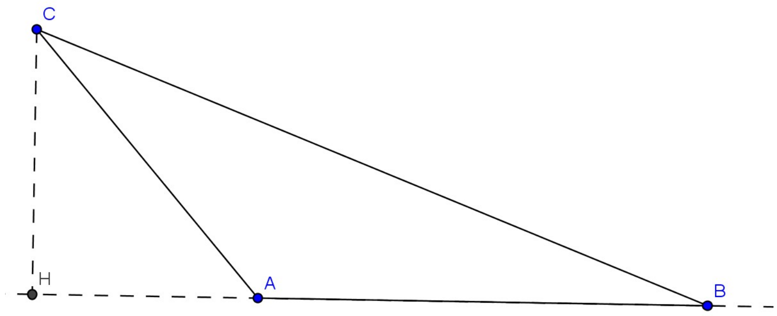
Théorème: Si A, B et sont trois points du plan (A distinct de B et de C) et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ **.**

On distingue deux cas:
1)



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$ si H∈[AB).

2)

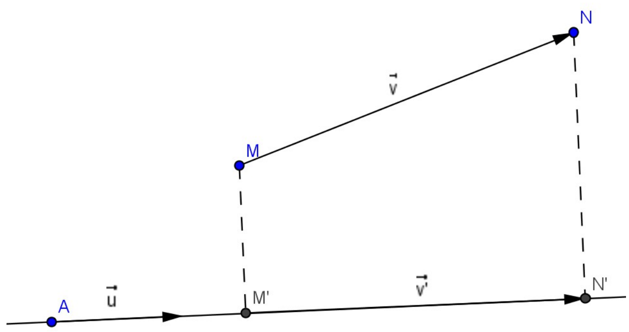


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\ =\ -AB\times AH$ si H∉[AB).

Il existe une manière similaire de calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Théorème-définition: soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire d'un axe (A, $\vec{u}$) et $\vec{v}$ un vecteur.

- **Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v'}$ colinéaire à $\vec{u}$ tel que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\overrightarrow{v'}$.**
  On l'appelle projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur (A, $\vec{u}$).
- **$\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur (A, $\vec{u}$) si et seulement si $\overrightarrow{v'}\ =\ (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$.**
- **Si $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$, alors $\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{M'N'}$ où M' et N' sont les projetés orthogonaux de M et N sur (A, $\vec{u}$).**

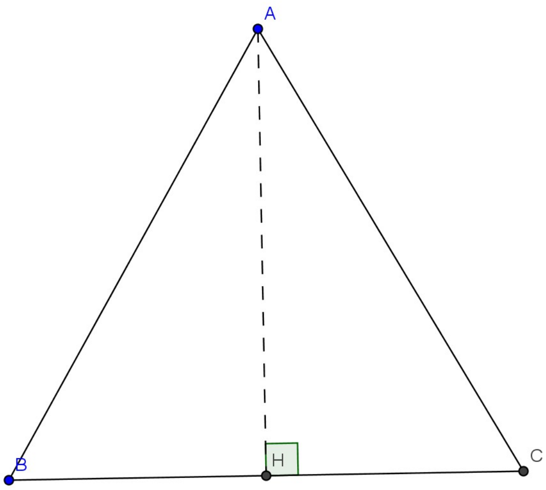


Preuve:

- Tout vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ s'écrit $\vec{v}=k\vec{u}$ avec $k\in\mathbb{R}$
  Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=k\|\vec{u}\|^2=k$ puisque $\vec{u}$ est unitaire.
  Donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{v'}=\vec{u}\cdot\vec{v}$ si et seulement si $k=\vec{u}\cdot\vec{v}$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de $\overrightarrow{v'}$
- Si $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$ et si M' et N' sont respectivement les projetés orthogonaux de M et N sur l'axe (A, $\vec{u}$), alors $\overrightarrow{M'N'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{u}$.
  De plus, $\overrightarrow{M'N'}\cdot\vec{u}\ =\ (\overrightarrow{M'M}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN'})\cdot\vec{u}\ =\ \overrightarrow{M'M}\cdot\vec{u}+\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}+\overrightarrow{NN'}\cdot\vec{u}$.
  Or les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, d'où $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u}$ =0.
  Les vecteurs $\overrightarrow{NN'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, d'où $\overrightarrow{NN'}\cdot\vec{u}$ =0.
  Par suite, on a $\overrightarrow{M'N'}\cdot\vec{u}\ =\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}$.

Ce qui prouve que le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$ sur (A, $\vec{u}$).

Application: Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2.
Soit H le milieu de [BC].
Déterminer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.



Puisque ABC est un triangle équilatéral, la médiane et la hauteur issue de A sont confondus.
Par suite, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=\ BH\times BC=1\times 2=2$.
On sait que les droites (BH) et (AH) sont orthogonales, donc H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AH). Par suite, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}=\ AH^2$.
On détermine AH en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH.
On a $AH^2=AB^2-BH^2=2^2-1^2=3$.
Donc, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ = 3.