Devoir Maison n°10.
Corrigé.

Exercice 1 : Soit ABCD un parallélogramme.

Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$ (AC²-AB²-AD²)

En utilisant la formule vue dans le cours, nous avons que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2|-AB^2-BC^2) = \frac{1}{2}(AC^2-AB^2-BC^2)$$

Or ABCD est un parallélogramme, donc BC=AD.

Par conséquent, $\overrightarrow{AB} \ . \ \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2)$

Exercice 2 : Soit MNP un triangle et I le milieu de [NP].

Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M si et seulement si $MI=\frac{NP}{2}$

MNP est rectangle en M

$\Leftrightarrow NP^2=MP^2+MN^2$

$\Leftrightarrow NP^2=\|\overrightarrow{MP}\|^2+\|\overrightarrow{MN}\|^2$

$\Leftrightarrow NP^2=\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IP}\|^2+\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IN}\|^2$

$\Leftrightarrow NP^2=MI^2+2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IP}+IP^2+MI^2+2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IN}+IN^2$

$\Leftrightarrow NP^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IN})+2\left(\frac{NP}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow NP^2-\frac{NP^2}{2}=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}.\vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{NP^2}{2}=2\,MI^2$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{NP^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI=\frac{NP}{2}$

Exercice 3 : On considère la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

   $u_2=\frac{2}{1}\times u_1=\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

   $u_3=\frac{3}{6}\times u_2=\frac{3}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

   $u_4=\frac{4}{9}\times u_3=\frac{4}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{81}$

2. On pose $v_n=\frac{u_n}{n}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

   En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$v_{n+1}=\frac{u_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{3n}u_n=\frac{1}{3}\times\frac{u_n}{n}=\frac{1}{3}v_n$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{3}$

3. Montrer que $u_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   Par conséquent, pour tout $n\geqslant 1$, $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=(\frac{1}{3})^n$.

   Par suite, $u_n=n\times v_n=n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

4. Montrer que $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-2n)$ pour tout entier $n\geqslant 1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

   $u_{n+1}-u_n=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-3n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=(n+1-3n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=(1-2n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

   Pour tout $n\geqslant 1$, $1-2n<0$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}>0$ donc, $u_{n+1}-u_n<0$.

   Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

5. On considère la fonction suivante :

```
def limite(epsilon) :
     n=1
     while n*(1/3)**n>epsilon :
          n = n+1
     return n
```

   a. Que renvoie `limite(` 10^{-2} `) ? 6`

   b.Que renvoie `limite(` 10^{-4} `)` ? 11

   c. Vers quelle valeur semble tendre la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

   Cette suite semble tendre vers 0