

Devoir Maison n°7.

Exercice 1 :

1. a. Résoudre, dans \mathbb{R} l'équation, $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

$$\Delta = 4$$

Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$$

- b. Résoudre, dans \mathbb{R} l'équation, $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{2} = 0$

$$\Delta = 3 - \frac{4 \times 1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-2}{1} = \sqrt{3}-2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}+2}{1} = \sqrt{3}+2$$

- c. Résoudre, dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - 1 = 0$

$$\Delta = 4$$

Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

2. Soit a un réel, résoudre, dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sin(a)x^2 - 2\cos(a)x - \sin(a) = 0$$

$$\Delta = (-2\cos^2(a)) - 4 \times \sin(a) \times (-\sin(a)) = 4\cos^2(a) + 4\sin^2(a) = 4(\cos^2(a) + \sin^2(a)) = 4$$

Cette équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{2\cos(a)-2}{2\sin(a)}$$

$$x_2 = \frac{2\cos(a)+2}{2\sin(a)}$$

3. En quoi cette dernière équation généralise les équations de la question 1 ?

Pour la 1. a. , $a = \frac{\pi}{4}$, pour la 1.b. $a = \pi/6$ Et pour la 1. c. , $a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

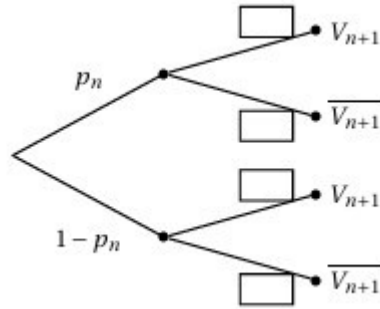
L'événement : «le n -ième sondage est positif» est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - a. A: «les 2e et 3e sondages sont positifs»;
 $P(A) = P(V_2 \cap V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$
 - b. B: «les 2e et 3e sondages sont négatifs».
 $P(B) = P(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = 0,9 \times 0,9 = 0,81$
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.
 $p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P(\overline{V_2} \cap V_3) = 0,36 + 0,4 \times 0,1 = 0,4$
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, montrer que : $p_{n+1} = 0,5 p_n + 0,1$.

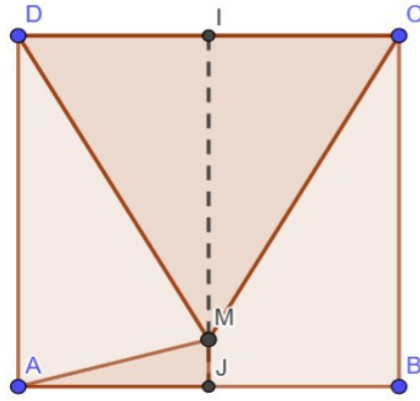
$$p_{n+1} = P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\overline{V_n} \cap V_{n+1}) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,6 p_n + 0,1 - 0,1 p_n = 0,5 p_n + 0,1$$
5. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$
 - a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5 p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5 p_n - 0,1 = 0,5 (p_n - 0,2) = 0,5 u_n$$
 Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$
 - b. Exprimer p_n en fonction de n .
 (u_n) étant géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = 0,8$, on sait que

$$u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} \text{ pour tout } n.$$
 Par conséquent, $p_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2$
 - c. Quelle est la probabilité que le dixième sondage soit positif ?
 Il faut calculer $p_{10} = 0,8 \times 0,5^9 + 0,2 = 0,202$

Exercice 3 :

Dans un carré ABCD de côté a , on trace le triangle équilatéral DMC.
 I et J sont les milieux respectifs de [DC] et [AB].



1. Montrer que \widehat{MAJ} a pour mesure $\frac{\pi}{12}$.

Dans le triangle DMC, les angles mesurent $\frac{\pi}{3}$.

(IM) est la bissectrice de l'angle \widehat{DMC} , donc $\widehat{DMI} = \frac{\pi}{6}$

Donc, $\widehat{ADM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Le triangle DAM est isocèle en D, par conséquent, $\widehat{DAM} = \widehat{DMA}$

$$\text{Donc } \widehat{DAM} = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Par suite, } \widehat{JAM} = \widehat{JAD} - \widehat{MAD} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

2. Calculer IM, MJ puis AM en fonction du côté a .

Dans le triangle DIM, rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IM^2 = DM^2 - DI^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ donc } IM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$MJ = IJ - IM = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$$

Dans le triangle AMJ, rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AM^2 = AJ^2 + MJ^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2(2-\sqrt{3})^2}{4}$$

$$= \frac{a^2(1+4-4\sqrt{3}+3)}{4}$$

$$= a^2(2-\sqrt{3})$$

$$\text{Donc } AM = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Dans le triangle MAJ, rectangle en J,

$$\cos(\widehat{MAJ}) = AJ/AM = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$\sin(\widehat{\text{MAJ}}) = \text{MJ}/\text{AM} = \frac{\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

i