Corrigé Devoir Maison n°9.

Exercice 1 : Thomas Malthus, économiste anglais du début du XIXe siécle, a travaillé sur l'évolution de la population en Angleterre.
En 1800, la population anglaise était de 8,3 millions d'habitants. Bien que très pauvre en majorité, toute la population arrivait tant bien que mal à se nourrir.
Thomas Malthus prévoit que cette situation ne pourra pas durer au cours du temps. Il émet les hypothèses suivantes :

- la population en Angleterre augmente chaque année de 2%.
- la production agricole anglaise aidée par des avancées techniques, permet de nourrir 400 000 habitants de plus par an.

1. Traduire les hypothèses de Thomas Malthus en choisissant deux suites dont on donnera les éléments caractéristiques (nature, premier terme, raison).
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la population anglaise, exprimée en millions, en $1800+n$ et v_n la population anglaise, exprimée en millions, que la production agricole permet de nourrir en $1800+n$.
   D'aprés la consigne, $u_0=8{,}3$ et $v_0=8{,}3$.
   De plus, $u_{n+1}=u_n\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=u_n\times 1{,}02$. Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.
   De plus, $v_{n+1}=v_n+0{,}4$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4.
2. En utilisant les hypothèses de Malthus, à combien est estimée la population de l'Angleterre en 1810 et le nombre de personnes pouvant être nourries cette année-là ?
   (u_n) étant une suite géométrique, nous obtenons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=8{,}3\times 1{,}02^n$.
   En 1810, il y aurai donc $u_{10}=8{,}3\times 1{,}02^{10}$ $\approx 10{,}11765$, soit environ 10,11 millions d'habitants en Angleterre.
   (v_n) étant une suite arithmétique, nous obtenons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n=8{,}3+0{,}4\times n$.
   En 1810, il y aurai donc $v_{10}=8{,}3+0{,}4\times 10=12{,}3$, la production agricole permet donc de nourrir 12,3 millions d'individus.

3. A l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, afficher les termes des deux suites et déterminer la première année pour laquelle la population ne peut plus être suffisamment nourrie suivant l'hypothèse formulée par Malthus ?

n	u_n	v_n
79	39,67	39,9
80	40,47	40,3

   En 1880, la population ne pourra plus être suffisamment nourrie.
4. Que préconise Malthus pour éviter une catastrophe démographique ?
   Malthus préconise ainsi une régulation volontaire des naissances, la « contrainte morale » : les couples prévoyants, en retardant l'âge du mariage et en pratiquant la chasteté jusqu'au mariage, seraient enclins à n'avoir que le nombre d'enfants qu'ils sont certains de pouvoir entretenir. (source wikipédia).

Exercice 2 : Soient A et B deux points du plan tels que AB=10. Soit I le milieu du segment [AB].

1. Montrer que pour pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ = MI² – 25.
   Soit un point M.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 25.$

2. En déduire :

a. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 24$.

$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 24$

$\Leftrightarrow MI^2-25=24$

$\Leftrightarrow MI^2 = 49.$

$\Leftrightarrow MI = 7.$

Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon 7.

b. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\leqslant 0$.

$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}\leq 0$

$\Leftrightarrow MI^2-25\leqslant 0$

$\Leftrightarrow MI^2\leqslant 25.$

$\Leftrightarrow MI\leqslant 5.$

Donc M appartient au disque de centre I et de rayon 5.

c. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} > 0$.

$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}>0$

$\Leftrightarrow MI^2-25>0$

$\Leftrightarrow MI^2>25.$

$\Leftrightarrow MI>5.$

Donc M appartient au plan privé du disque de centre I et de rayon 5.

Exercice 3 : Soit un triangle ABC.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC, soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1. a. Qu'est ce que le centre de gravité d'un triangle ?

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes du triangle.

b. Qu'est ce que le centre du cercle circonscrit d'un triangle ?

Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle passant par les points A, B et C. Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point d'intersection des médianes du triangle.

c. Qu'est ce que l'orthocentre d'un triangle ?

L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle.

d. Tracer un triangle ABC, puis les points O, G et H. Que peut-on conjecturer ?

On remarque que O, G et H sont alignés.

2. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

a. En remarquant que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}$, montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}).$

b. En déduire que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de A.

$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) = OC^2-OB^2.$

Or O appartient à la médiatrice de [BC], donc, OB=OC.

Par suite, $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = 0.$

Donc les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires, par conséquent, M appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

c. Montrer de la même façon que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de B et en déduire que M est confondu avec H.

$\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) = OC^2-OA^2$

Or O appartient à la médiatrice de [AC], donc, OA=OC.

Par suite, $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{AC} = 0.$

Donc les droites (BM) et (AC) sont perpendiculaires, par conséquent, M appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC.

Donc M est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B du triangle ABC.
Les hauteurs étant concourantes en un unique point, qui est l'orthocentre du triangle ABC, nous pouvons en déduire que M est confondu avec H.

3. En admettant que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, montrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ et conclure.
   Nous avons donc que
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})\\&=3\ \overrightarrow{OG}\ +\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\\&=3\overrightarrow{OG}\ .\end{aligned}$$
   Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ étant colinéaires, nous pouvons en déduire que les points O, G et H sont alignés.