Devoir Maison n°6.

Exercice 1 :

1. On donne $\cos(x)=-0{,}8$ et $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$.

   Déterminer $\sin(x)$.

   Nous utiliserons la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

   $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
   $\Leftrightarrow (-0{,}8)^2+\sin^2(x)=1$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=1-0{,}64$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=0{,}36$

   Donc $\sin(x)=0{,}6$ ou $\sin(x)=-0{,}6$

   $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$, donc $\sin(x)\geqslant 0$, par conséquent $\sin(x)=0{,}6$

2. On donne $\sin(x)=\frac{2}{3}$ et $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$

   Déterminer $\cos(x)$

   $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
   $\Leftrightarrow \cos^2(x)+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$
   $\Leftrightarrow \cos^2(x)=1-\frac{4}{9}$
   $\Leftrightarrow \cos^2(x)=\frac{5}{9}$

   Donc $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos(x)=\frac{-\sqrt{5}}{3}$

   $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, donc $\cos(x)>0$, par conséquent $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. On donne $\cos(x)=0{,}6$ et $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

   Déterminer $\sin(x)$

   $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
   $\Leftrightarrow 0{,}6^2+\sin^2(x)=1$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=1-0{,}36$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=0{,}64$

   Donc $\sin(x)=0{,}8$ ou $\sin(x)=-0{,}8$

   $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi$, par conséquent $\sin(x)\leqslant 0$, donc $\sin(x)=-0{,}8$

Exercice 2 Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan.
Soit A(-2;-2) et B(1;7) deux points.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   (AB) a pour équation une équation du type $y=mx+p$ où m s'appelle le coefficient directeur de la droite (AB) et p l'ordonnée à l'origine.

   $m=\frac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_b-x_{\mathrm{A}}}=\frac{7+2}{1+2}=3$

   Donc (AB) a pour équation $y=3x+p$

   Déterminons la valeur de p

   A $\in$ (AB), donc $y_{\mathrm{A}}=3x_{\mathrm{A}}+p \Leftrightarrow -2=3\times -2+p \Leftrightarrow p=-2+6=4$

Donc la droite (AB) a pour équation $y=3x+4$.

2. Le point C(-1;1) appartient-il à la droite (AB) ?
   C $\in$(AB) si et seulement si les coordonnées de C vérifient l'équation de la droite (AB).
   $3\times(-1)+4=-3+4=1=y_C$
   Donc C appartient à la droite (AB).
3. Soit le point D(1;-1). Déterminer l'équation de la droite d passant par le point D et parallèle à (AB).
   La droite d étant parallèle à la droite (AB), elles ont le même coefficient directeur.
   Donc d a pour équation $y=3x+p$
   D $\in$ d, donc $-1=3\times1+p \Leftrightarrow p=-4$
   Donc d a pour équation $y=3x-4$
4. Soit d' la droite d'équation $y=-x+4$. Les droites d et d' sont-elles perpendiculaires? Justifier.
   Deux droites sont perpendiculaire si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.
   $m_d\times m_d'=3\times(-1)=-3$
   Donc d et d' ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 3 : Les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.
Une chocolaterie fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao est de 85%. A l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, …
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

A la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on définit les événements suivants :
A: « La tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A . »
C: « La tablette de chocolat est commercialisable.»
On note *x* la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Faire un arbre pour représenter la situation.

2. Montrer que $P(C)=0{,}03x+0{,}95$
   $P(C)=P(A\cap C)+P(\overline{A}\cap C) = x\times0{,}98+(1-x)\times0{,}95=0{,}03x+0{,}95$
3. A l'issue de la production, on constate que 96% des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.
   P(C)=0,96
   $\Leftrightarrow 0{,}03x+,095=0{,}96$
   $\Leftrightarrow 0{,}03x=0{,}01$
   $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$
   Par conséquent $1-x=\frac{2}{3}=\frac{2\times1}{3}=2\times x$.
   Donc, la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

4. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

$P(A\cap C)=\frac{1}{3}\times 0{,}95=\frac{19}{60}$

$P(A)=\frac{1}{3}$

$P(C)=0{,}96$

$P(A)\times P(C)=\frac{1}{3}\times 0{,}96=\frac{8}{25}\neq\frac{19}{60}$

Par conséquent, A et C ne sont pas indépendants.

5. Une tablette n'est pas commercialisable, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaîne A ?

$P_{\overline{C}}(A)=\frac{P\left(A\cap\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0{,}05}{0{,}04}=\frac{5}{12}$.