Devoir Maison n°4.

Exercice 1:

1. Résoudre l'inéquation $x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$

$$x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	‖	$+$	⋮	$+$	
x		$-$	‖	$+$	⋮	$+$	
$x-1^2$ ¿ ¿ ¿		$-$	‖	$+$	⋮	$+$	

S= $]0;+\infty[$

2. En déduire que pour tout réel $a>0$, $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$

   Donc, d'après la question précédente, pour tout $a>0$, $a+\frac{1}{a}-2\geqslant 0 \Leftrightarrow a+\frac{1}{a}\geqslant 2$

3. Montrer alors que, pour tous réels strictement positifs a et b , on a :
   - $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

     Soient a et b deux réels positifs, notons $\mathrm{A}=\frac{a}{b}$.

     A est strictement positif, donc d'après la question précédente : $\mathrm{A}+\frac{1}{\mathrm{A}}\geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

   - $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

     $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

     En utilisant le point précédent, on obtient $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

Exercice 2 :

Le gazon d'un champ de 5000 m² est envahi par des pissenlits qui détruisent 20% de la surface en un an.

Chaque automne, Catherine arrache 250 m² de pissenlits afin de semer de la pelouse.

On pose $p_0=5000$ la surface initiale en m² de pelouse et p_n la surface à la fin de n années où n ∈N

1. Calculer la surface de la pelouse au bout d'une et deux années.

   $p_1=5000\times 0{,}8+250=4250$

$p_2 = 4250 \times 0{,}8 + 250 = 3650$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n.

   Les pissenlits détruisant 20% de la pelouse, il ne reste plus, d'une année sur l'autre, que 80% de la pelouse. De plus, Catherine replante 250m² de pelouse, donc, on obtient, pour tout n,

   $p_{n+1} = p_n \times 0{,}8 + 250$

3. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = p_n - 1250$

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

   $$v_{n+1} = p_{n+1} - 1250 = p_n \times 0{,}8 + 250 - 1250 = p_n \times 0{,}8 - 1000 = 0{,}8\left(p_n - \frac{1000}{0{,}8}\right) = 0{,}8(p_n - 1250) = 0{,}8\, v_n$$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

   b. Déterminer v_0

   $v_0 = p_0 - 1250 = 5000 - 1250 = 3750$

   c. Exprimer v_n en fonction de n

   $v_n = 3750 \times 0{,}8^n$

   d. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

   $p_n = v_n + 1250 = 3750 \times 0{,}8^n + 1250$

4. Quelle sera l'aire du gazon sans pissenlit au bout de 10 ans ?

   $P_{10} = 1652{,}7$

   L'aire du gazon sans pissenlit au bout de 10 ans sera d'environ 1653m².

5. Dans combien d'années la surface du gazon sera-t-elle inférieure à 1000 m² ? Justifier.

   Pour tout n, $0{,}8^n > 0$

   Donc $3750 \times 0{,}8^n > 0$

   Par suite, $p_n > 1250$.

   La surface du gazon ne sera donc jamais inférieure à 1000 m².