Devoir Maison n°7.

Exercice 1 :

1. a. Résoudre, dans ℝ l'équation, $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

$\Delta=4$

Cette équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$

$x_2=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

b. Résoudre, dans ℝ l'équation, $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x-\frac{1}{2}=0$

$\Delta=3-\frac{4\times 1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

Cette équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{\sqrt{3}-2}{1}=\sqrt{3}-2$

$x_2=\frac{\sqrt{3}+2}{1}=\sqrt{3}+2$

c. Résoudre , dans ℝ l'équation $x^2-1=0$

$\Delta=4$

Cette équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{2}{2}=1$

$x_2=\frac{-2}{2}=-1$

2. Soit a un réel,résoudre, dans ℝ l'équation :

$\sin(a)x^2-2\cos(a)x-\sin(a)=0$

$\Delta=(-2\cos^2(a))-4\times\sin(a)\times(-\sin(a))=4\cos^2(a)+4\sin^2(a)=4(\cos^2(a)+4\sin^2(a))=4$

Cette équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{2\cos(a)-2}{2\sin(a)}$

$x_2=\frac{2\cos(a)+2}{2\sin(a)}$

3. En quoi cette dernière équation généralise les équations de la question 1 ?

Pour la 1. a. , $a=\frac{\pi}{4}$, pour la 1.b. $a=\pi/6$ Et pour la 1. c. , $a=\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement :«le n-ième sondage est positif» est noté V_n ,on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

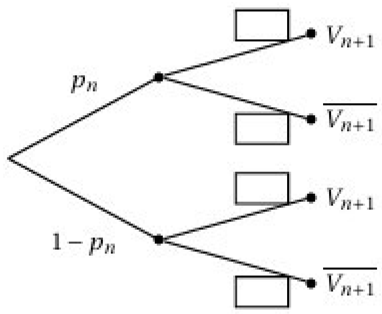
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

• si un sondage est positif,le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;

• si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

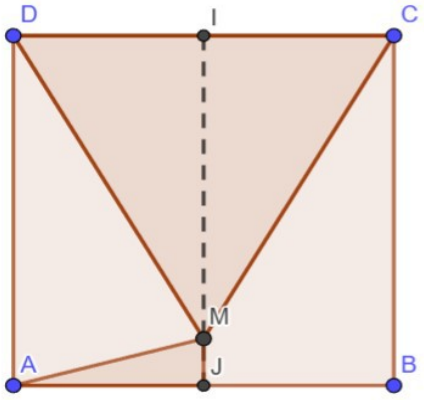
On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1=1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   a. A: «les 2e et 3e sondages sont positifs»;
   $P(A)=P(V_2 \cap V_3)=0{,}6\times 0{,}6=0{,}36$
   b. B:«les 2e et 3e sondages sont négatifs».
   $P(B)=P\left(\overline{V_2}\cap \overline{v_3}\right)=0{,}4\times 0{,}9=0{,}36$
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.
   $p_3=P(V_3)=P(V_2\cap V_3)+P\left(\overline{V_2}\cap V_3\right)=0{,}36+0{,}4\times 0{,}1=0{,}4$
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, montrer que : $p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}1$.
   $p_{n+1}=P(V_n\cap V_{n+1})+P\left(\overline{V_n}\cap V_{n+1}\right)=p_n\times 0{,}6+(1-p_n)\times 0{,}1=0{,}6\,p_n+0{,}1-0{,}1\,p_n=0{,}5\,p_n+0{,}1$
5. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=p_n-0{,}2$
   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   $u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}2=0{,}5\,p_n+0{,}1-0{,}2=0{,}5\,p_n-0{,}1=0{,}5(p_n-0{,}2)=0{,}5\,u_n$
   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1=p_1-0{,}2=0{,}8$
   b. Exprimer p_n en fonction de n.
   (u_n) étant géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1=0{,}8$, on sait que
   $u_n=0{,}8\times 0{,}5^{n-1}$ pour tout n .
   Par conséquent, $p_n=0{,}8\times 0{,}5^{n-1}+0{,}2$
   c. Quelle est la probabilité que le dixième sondage soit positif ?
   Il faut calculer $p_{10}=0{,}8\times 0{,}5^9+0{,}2=0{,}202$

Exercice 3 :
Dans un carré ABCD de côté a , on trace le triangle équilatéral DMC.
I et J sont les milieux respectifs de [DC] et [AB].



1. Montrer que $\widehat{\mathrm{MAJ}}$ a pour mesure $\frac{\pi}{12}$.

   Dans le triangle DMC, les angles mesurent $\frac{\pi}{3}$.

   Donc, $\widehat{\mathrm{ADM}} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$.

   Le triangle DAM est isocèle en D, par conséquent, $\widehat{\mathrm{DAM}}=\widehat{\mathrm{DMA}}$

   Donc $\mathrm{DAM}=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{\frac{5\pi}{6}}{2}=\dfrac{5\pi}{12}$

   Par suite, $\widehat{\mathrm{JAM}}=\widehat{\mathrm{JAD}}-\widehat{\mathrm{MAD}} = \frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$

2. Calculer IM, MJ puis AM en fonction du côté a.
   Dans le triangle DIM, rectangle en I,d'après le théorème de Pythagore, on a :

   $\mathrm{IM}^2=\mathrm{DM}^2-\mathrm{IM}^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$ donc $\mathrm{IM}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

   MJ = IJ – IM = $a-\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$

   Dans le triangle AMJ, rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore, on a :

   $\mathrm{AM}^2=\mathrm{AJ}^2+\mathrm{MJ}^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2(2-\sqrt{3})^2}{4}$

   $= \frac{a^2(1+4-4\sqrt{3}+3)}{4}$

   $= a^2(2-\sqrt{3})$

   Donc $\mathrm{AM}=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   Dans le triangle MAJ, rectangle en J,

   cos($\widehat{\mathrm{MAJ}}$)= AJ/AM= $\dfrac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$$\sin(\widehat{\mathrm{MAJ}}) = \mathrm{MJ}/\mathrm{AM} = \frac{\frac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

¿