Devoir Maison n°1.
Corrigé

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(3x-1)(x+2)(4x-5)=0$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.
   $3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$
   $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
   $4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$
   L'ensemble des solutions est donc $S=\{\frac{1}{3};2;\frac{5}{4}\}$

2. $(-x+2)^2-(5x-3)^2=0$
   Factorisons l'expression en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
   $(-x+2)^2-(5x-3)^2=0$
   $\Leftrightarrow [(-x+2)+(5x-3)][(-x+2)-(5x-3)]=0$
   $\Leftrightarrow (4x-1)(-6x+5)=0$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.
   $4x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$
   $-6x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$
   L'ensemble des solutions est donc $S=\{\frac{1}{4};\frac{5}{6}\}$

3. $\frac{4}{x}+\frac{1}{2}=0$
   $\Leftrightarrow \frac{4}{x}=\frac{-1}{2}$
   $\Leftrightarrow x=\frac{4\times 2}{-1}=-8$
   L'ensemble des solutions est donc $S=\{-8\}$

Exercice 2 : Développer et réduire les expressions suivantes :

A = $(-2x+4)(x-5)$
  = $-2x^2+10x+4x-20$
  = $-2x^2+14x-20$

B $=(-5x+1)^2$
  = $25x^2-10x+1$

C $=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2$
  = $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$

Exercice 3 : On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

1. Justifier le fait que la fonction f soit définie sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.
   f est définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, excepté la valeur de x telle que $x+2=0$
   Or $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Par conséquent, f est définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2. En traçant la représentation graphique de la fonction soit avec votre calculatrice, soit avec le logiciel Géogebra, dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

3. Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$ tels que $a\leqslant b$.

a. Montrer que $f(b)-f(a)=\dfrac{a-b}{(b+2)(a+2)}$.

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{b+2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a+2}{(b+2)(a+2)}-\frac{b+2}{(a+2)(b+2)}=\frac{a-b}{(b+2)(a+2)}$$

b. Quel est le signe des nombres $a-b$, $b+2$ et $a+2$.

$a\leqslant b \Leftrightarrow a-b\leqslant 0$. Par conséquent $a-b$ est négatif.

$a \in]-2;+\infty[$, donc $a\geqslant -2$, donc $a+2\geqslant 0$. Par conséquent, $a+2$ est positif.

$b \in]-2;+\infty[$, donc $b\geqslant -2$, donc $b+2\geqslant 0$. Par conséquent, $b+2$ est positif.

c. En déduire le signe de $f(b)-f(a)$

$f(b)-f(a)$ étant le produit de deux positifs par un négatif, $f(b)-f(a)$ est de signe négatif.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]-2;+\infty[$

Nous savons que $a\leqslant b$ et que, par conséquent,

$f(b)-f(a)\leqslant 0$ donc $f(b)\leqslant f(a)$.

Nous pouvons en déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-2;+\infty[$

4. Résoudre l'équation $f(x)=4$.

$f(x)=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}=4$

$\Leftrightarrow x+2=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}-2=-\dfrac{7}{4}$

$S=\{-\dfrac{7}{4}\}$

5. En utilisant un tableau de signes, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 2$.

$f(x)\leqslant 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}\leqslant 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}-2\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2(x+2)}{x+2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x-3}{x+2}\leqslant 0$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x-3$	$+$	‖	$+$	0	$-$	
B	$-$	‖	$+$	$\vdots$	$+$	
C	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Par conséquent $S=\left]-\infty;-2\right[\cup \left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$