Devoir Maison n°2.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$les équations suivantes :

1. $-x+3x^2-1=0$
   $a=3 \quad b=-1 \quad c=-1$
   $\Delta = (-1)^2-4\times3\times(-1)=13>0$
   Cette équation admet deux solutions :
   $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{6} \qquad x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$
2. $2x(5+2x)=9-2x$
   $\Leftrightarrow 10x+4x^2=9-2x$
   $\Leftrightarrow 4x^2+10x-9+2x=0$
   $\Leftrightarrow 4x^2+12x-9=0$
   $a=4 \quad b=12 \quad c=-9$
   Δ = 12²-4*4*-9=288>0
   Cette équation admet deux solutions.
   $x_1=\frac{-12-\sqrt{288}}{8}$ Et $x_2=\frac{-12+\sqrt{288}}{8}$
3. $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$
   $a=1 \quad b=2\sqrt{3} \quad c=3$
   $\Delta = (2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=12-12=0$
   Cette équation admet une unique solution :
   $x_0=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

Exercice 2 : Le champ d'un agriculteur est un rectangle deux fois plus long que large. Si l'on ajoute 5 mètres à sa longueur et 20 mètres à sa largeur, on obtient une parcelle rectangulaire dont l'aire est un hectare.
Quelle est la superficie de ce champs ?

Soit x la largeur de ce champs, la longueur est alors de $2x$.
$(2x+5)(x+20)=10000$
$\Leftrightarrow 2x^2+40x+5x+100=10000$
$\Leftrightarrow 2x^2+45x-9900=0$
$\Delta = 45^2-4\times2\times(-9900)$ = 81225.
Cette équation admet deux solutions :
$x_1=\frac{-45-\sqrt{81225}}{4}=-82{,}5<0$

$x_2=\frac{-45+\sqrt{81225}}{4}=60>0$
La largeur est de 60m et la longueur est de 120 m.

Exercice 3 :

1. Déterminer les réels b tels que l'équation $3x^2+bx+4=0$ admette une unique solution, que l'on déterminera.
   $\Delta = b^2-4\times3\times4 = b^2-48$
   Cette équation admet une unique solution si $\Delta = 0$
   $b^2-48=0 \Leftrightarrow b^2=48 \Leftrightarrow b=\sqrt{48}$ ou $b=-\sqrt{48}$

2. Choisir deux réels b et c pour que l'équation $3x^2+bx+c=0$ admette deux solutions réelles distinctes.
   $\Delta = b^2-4\times 3\times c$.
   Par exemple, $b=1$, $c=-1$
3. Déterminer l'ensemble des réels c tels que l'équation $2x^2-x+c=0$ n'admette pas de solution réelle.
   $\Delta = (-1)^2-4\times 2\times c = -1-8c$
   Cette équation n'admet pas de solution réelle si $1-8c<0 \Leftrightarrow 8c>1 \Leftrightarrow c>\frac{1}{8}$
   $\Leftrightarrow c \in \left]\frac{1}{8};+\infty\right[$
4. Pour quelles valeurs de a l'équation $x^3+ax^2+x=0$ admet-elle deux solutions distinctes ?
   $x^3+ax^2+x=0$
   $\Leftrightarrow x(x^2+ax+1)=0$
   $x=0$ ou $x^2+ax+1=0$
   $\Delta = a^2-4\times 1\times 1=a^2-4$
   Cette équation admet une unique solution pour a = 2 ou $a=-2$
   Pour $a=2$, la solution est $x_0=-\frac{-2}{2}=-1$, l'équation $x^3+ax^2+x=0$ admet donc deux solutions distinctes.
   Pour $a=-2$, la solution $x_0=\frac{2}{2}$, l'équation $x^3+ax^2+x=0$ admet donc deux solutions distinctes.