Devoir Maison n°3.

Exercice 1 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+2x+4}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   f Est définie pour tout réel excepté ceux annulant le dénominateur.
   Résolvons donc l'équation $x^2+2x+4=0$
   $\Delta=4-4\times1\times4=4-16=-12<0$
   Cette équation n'admet pas de solution.
   Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser, en le justifiant, le tableau de signe de la fonction f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$10x$		$-$	0	$+$	
x^2+2x+4		$+$	$\vdots$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2 : Résoudre l'inéquation suivante :

$3x+2<\dfrac{5}{x}$

$\Leftrightarrow\ 3x+2-\dfrac{5}{x}<0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{3x^2+2x-5}{x}<0$

Étudions le signe de $3x^2+2x-5$
$\Delta=4-4\times3\times(-5)=64$
Ce trinôme admet deux racines :

$x_1=\dfrac{-2-8}{6}=-\dfrac{5}{3}$

$x_2=\dfrac{-2+8}{6}=1$

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{3}$		0		1		$+\infty$
$3x^2+2x-5$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$\vdots$	$-$	$\|$	$+$	$\vdots$	$+$	
$\dfrac{3x^2+2x-5}{5}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : On appelle format d'un rectangle le quotient de la longueur L par sa largeur l .
On considère un rectangle ABCD de longueur $\mathrm{AB}=\mathrm{L}$ et de largeur $\mathrm{AD}=l$ telles que $l<\mathrm{L}<2l$.
On construit le carré AEFD dans le rectangle ABCD.

1. En notant x le format du rectangle ABCD, vérifier que $x>1$ et que le format du rectangle EBCF est égal à $\dfrac{1}{x-1}$
   $x=\dfrac{\mathrm{L}}{l}$ or $l<\mathrm{L}$ donc $\dfrac{\mathrm{L}}{l}>1$, par conséquent $x>1$.

$EB = L - l$.
Or $L < 2l$ donc $L - l < l$. Par conséquent, la largeur de EBCF est $L - l$ et sa longueur est l .

Le rectangle EBCF a donc pour format $\dfrac{l}{L-l} = \dfrac{\frac{l}{l}}{\frac{L}{l} - \frac{l}{l}} = \dfrac{1}{x-1}$.

2. ABCD est appelé rectangle d'or s'il a le même format que EBCF.
   Montrer que ABCD est un rectangle d'or si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.
   ABCD est un rectangle d'or s'il a le même format que EBCF, c'est à dire, si et seulement si $x = \dfrac{1}{x-1}$.
   or $x = \dfrac{1}{x-1}$
   $\Leftrightarrow\ x(x-1) = 1$
   $\Leftrightarrow\ x^2 - x - 1 = 0$
   Par conséquent, ABCD est un rectangle d'or si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.
3. En déduire la valeur à donner à x pour que ABCD soit un rectangle d'or. On note ϕ ce nombre réel.
   Résolvons l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times -1 = 5$
   Cette équation admet deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$
   $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$
   x_1 étant négatif, il ne convient pas puisque l'on a vu que $x > 1$
   On a donc $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
4. Montrer que $\phi^4 = 3\phi + 2$
   $\phi^4 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{56+24\sqrt{5}}{16} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$
   $3\phi + 2 = 3\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2} = \dfrac{3+3\sqrt{5}+4}{2} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$
   Par conséquent, $\phi^4 = 3\phi + 2$.
5. Montrer que ABCD est un rectangle d'or si et seulement si EBCF est un rectangle d'or.
   EBCF est un rectangle d'or
   $\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} - 1 = 0$
   $\Leftrightarrow\ \dfrac{1 - (x-1) - (x-1)^2}{(x-1)^2} = 0$
   $\Leftrightarrow\ \dfrac{1 - x + 1 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$
   $\Leftrightarrow\ -x^2 + x - 1 = 0$
   $\Leftrightarrow\ x^2 - x + 1 = 0$
   $\Leftrightarrow$ ABCD est un rectangle d'or.
   Par conséquent ABCD est un rectangle d'or si et seulement si EBCF est un rectangle d'or.

6. Le nombre ϕ est appelé le nombre d'or. Rechercher pourquoi ϕ est parfois appelé divine proportion.