Les Fonctions.
Résoudre des équations et des inéquations graphiquement.

I. Définitions et vocabulaire.

a. Des exemples.

1. Soit ABCD un carré. On note x la longueur du segment [AB]. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du carré ABCD.
   x Représentant la longueur d'un segment, x est nécessairement positif et donc est définie sur l'intervalle]0 ; +∞[. On dit donc que la fonction f est définie sur l'intervalle]0 ; +∞[ou encore que $]0;+\infty[$ est le domaine de définition de la fonction f.
   $f(3)$ désigne l'image de 3 par la fonction f, c'est à dire l'aire d'un carré de côté 3.
   $f(3)=9$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$par $g(x)=3x-1$. g est une fonction affine.
   $g(5)=14$. On dit que 14 est l'image de 5 par la fonction g.

b. Cas général.

Définition : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ Lorsque, à chaque réel x appartenant à D, on associe un seul réel y , on définit une fonction f sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$

On note : f : D → $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$

On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f ou que x a pour image $f(x)$.
D s'appelle l'ensemble de définition de f. On dit que f est définie sur D.

c. Antécédent.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
Si le réel x a pour image un réel y , on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

Remarque :
- Par une fonction, un réel peut avoir plusieurs antécédents.
- Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f a une seule image par f.

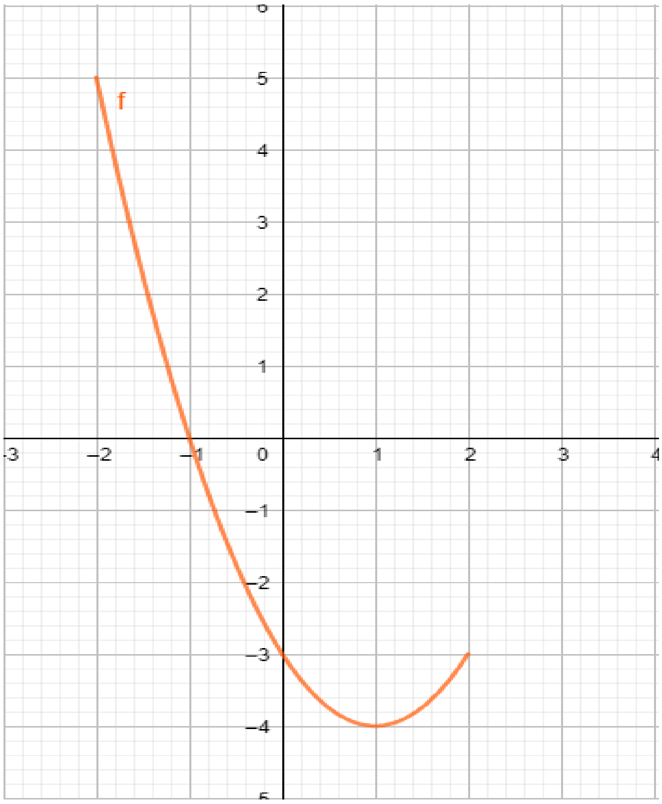
III. Représenter graphiquement une fonction.

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Définition :On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D.
Dans un repère, la courbe d'équation $y=f(x)$ est l'ensemble des points du plan dans les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'égalité $y=f(x)$.
Cette courbe est la courbe représentative de la fonction f

Autrement dit, cela signifie que l'ordonnée y d'un point d'abscisse x de la courbe représentative de la fonction f vaut $f(x)$: la courbe est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où x parcourt l'ensemble de définition D de la fonction f .

Exemple 1 :
On considère la fonction f définie sur [-2;2] par $f(x)=(x-1)^2-4$
La courbe représentative de la fonction f est la courbe d'équation $y=(x-1)^2-4$ tracée ci-dessous.



1. Le point A(1;4) appartient-il à la courbe représentative de f ? Justifier votre réponse par un calcul.
2. Le point B(-1;0,01) appartient-il à la courbe représentative de f ? Justifier votre réponse par un calcul.

Exemple 2 : Soit h la fonction définie sur [-3;3] par $h(x)=3-0{,}5\,x^2$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$y=h(x)$									

2. A l'aide des coordonnées des points établis dans le tableau précédent, tracer la représentation graphique de la fonction h . Attention, il est interdit d'utiliser la règle pour tracer la courbe.

III. Parité.

a. Ensemble de définition symétrique.

Définition : Un ensemble de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport 0 si pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

Exemple 3 : Les ensembles suivants sont-ils symétriques par rapport à 0 ?

1. [-4;4]
2. [-5;2]
3.]–∞ ; -2[∪]2 ; + ∞ [.

b. Fonctions paires.

Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite paire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=f(x)$

Exemple 4 : soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=x^2$.

Démontrer que f est une fonction paire.

Exemple 5 : Donner trois exemples de fonctions paires.

Propriété : La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c. Fonctions impaires.

Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite impaire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=-f(x)$

Exemple 6 : soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=x^3$.
Démontrer que f est une fonction paire.

Exemple 7 : Donner trois exemples de fonctions paires.

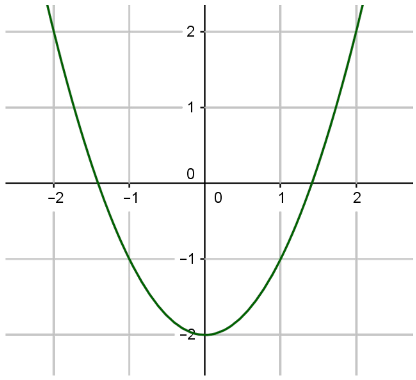
Propriété : La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

III. Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.
Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur un ensemble D. Soient C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère.

1. Résoudre $f(x)=k$, k étant un nombre réel.

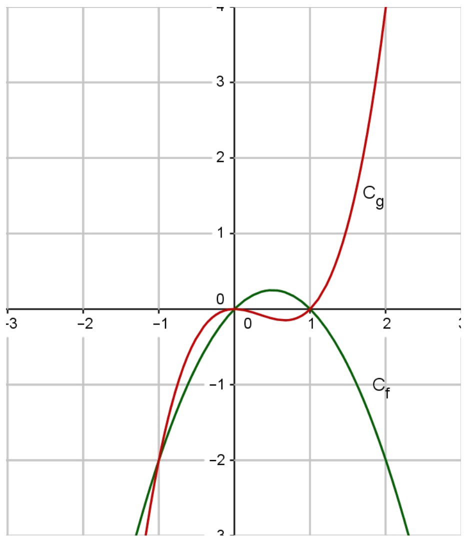
Dans un repère, les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont les abscisses des points d'ordonnées k de la courbe C_f représentant *f*.

Exemple 8: Résoudre graphiquement l''équation $f(x)=-1$.
f(x)=x²-2



2. Résoudre $f(x)=g(x)$.

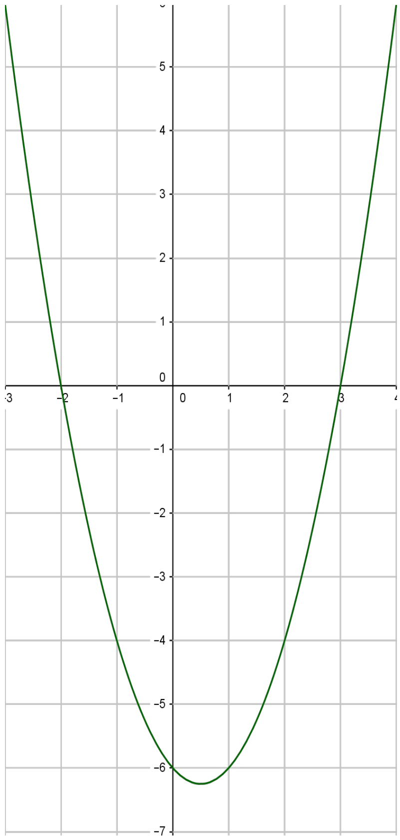
   Dans un repère, les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g représentant *f* et *g*.
   Exemple 9: Résoudre $f(x)=g(x)$.
   $f(x)=-x^2+x$
   $g(x)=x^3-x^2$



3. Résoudre $f(x)<k$, k étant un nombre réel.

Dans un repère, les solutions de l'inéquation $f(x)<k$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'ordonnées strictement inférieure à k .

Exemple 10: Résoudre $f(x)<0$
$f(x)=(x-3)(x+2)$



4. Résoudre $f(x)<g(x)$
   Dans un repère, les solutions de l'inéquation $f(x)<g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en dessous de la courbe C_g .

Exemple 11: Résoudre $f(x)<g(x)$
$f(x)=x^2$, $g(x)=2x$