Puissances et racines carrées.

I. Puissances d'un nombre réel.

a. Définition .

Définition : Pour tout nombre a et tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note

$a^1 = a$,

$a^2 = a \times a$,

$a^n = a \times a \times .. \times a$ (produit de n termes égaux à a).

Le nombre a^n est appelé la puissance n-ième de a et n est alors appelé l'exposant de a^n .

Convention : soit a un nombre, $a^0 = 1$

Exemple 1 : Calculer les puissances suivantes :

$A = 2^5$ $B = 3^4$ $C = 5^3$

Définition : Pour tout nombre a et tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \times a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times .. \times a}$

Exemple 2 : Écrire sous forme de fraction les puissances suivantes :

$A = 2^{-4}$ B = 10^{-5} C = 3^{-2}

b. Règles de calcul.

Règles de calcul : Soient a et b deux nombres réels non nuls, soient n et p deux nombres entiers.

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$(\mathrm{a}^{\mathrm{n}})^{\mathrm{p}} = \mathrm{a}^{\mathrm{n} \times \mathrm{p}}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Exemple 3 : Écrire sous forme d'une unique puissance :

A= $(-2)^4 \times (-2)^3$

B = $7^{-3} \times 7^8$

$C = \frac{5^4}{5^6}$

$D = \frac{3^{-2}}{3^4}$

$E = (10^{-4})^3$

$F = 5^8 \times 2^8$

c. Puissances de dix et notation scientifique.

Pour tout entier naturel n , $10^n = 10..0$ n chiffres zéro
$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}0..01$ n chiffres zéro.

L'écriture scientifique d'un nombre décimal a est $b \times 10^n$ où b est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n est un nombre entier relatif.

Exemple 4 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :
A = 123 B=54678 $C = 0{,}02$ D=0,000345

II. Racine carrée.

a. Définition.

Définition : La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est égal à a . Elle est notée $\sqrt{a}$.

Remarques :
- le carré d'un nombre est toujours positif.
- Lorsque a est un nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a donc pas de sens.

Exemple 5 :
- La racine carrée de 16 est 4 car $4^2=16$. On écrit $\sqrt{16} = 4$
- La racine carrée de $\frac{4}{25}$ est $\frac{2}{5}$ car $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$. On écrit $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Propriété :
- Pour tout nombre positif a , on a $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$.
- Pour tout nombre négatif a , on $\sqrt{a^2} = -a$

Exemple 6 :
- $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
- $(\sqrt{6})^2 = 6$
- $\sqrt{(-3)^2} = -3$

Définition :
Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Exemple 7 : Indiquer si les nombres suivants sont des carrés parfaits ou pas :
A= 100 B= 47 C=-25

b. Propriétés algébriques.

Propriété : Pour tous nombres positifs a et b , on a
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si de plus b est non nul, on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration :
Soient a et b deux nombres positifs.
$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$
$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=\sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2=a\times b$
Donc, $(\sqrt{a\times b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$.
Par conséquent, $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Remarque : Attention, en général $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Cette propriété va nous permettre de simplifier l'écriture des racines carrées.

Définition : On appelle écriture simplifiée de la racine carrée d'un nombre entier l'écriture $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit entier possible.

Exemple 8: Donner les écritures simplifiées des nombres suivants :
$A=\sqrt{200}$
$\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=\sqrt{100}\times\sqrt{2}=10\sqrt{2}$.
$10\sqrt{2}$ est l'écriture simplifiée de $\sqrt{200}$.
$B=\sqrt{147}$
$C=\sqrt{720}$