Proportions et évolutions.

I. Proportion.

Proportion: Rapport relatif de grandeur existant entre une quantité et une autre, entre un nombre et un autre pris comme référence : Une proportion de un volume de riz pour deux d'eau. Quelle proportion d'élèves réussissent leur bac ?

D'aprés le petit Larousse.

En mathématiques, nous parlons de proportionnalité et nous utilisons pour cela les tableaux de proportionnalité.

Pourcentage : Proportion pour cent unités, cent éléments

D'aprés le petit Larousse

a. Calculer un pourcentage.

Exemple 1 : Dans une classe de 32 élèves, 75% sont des filles.
Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

pourcentage	nombre
75	
100	32

$$\frac{75\times 32}{100}=24$$

Dans cette classe, il y a 24 filles.

Méthode : Prendre t% d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

b. Déterminer une proportion.

Exemple 2 : Dans une classe de 32 élèves, il y a 14 germanistes.
Quel est le pourcentage de germanistes dans cette classe ?

pourcentage	nombre
	14
100	32

$$\frac{14\times 100}{32}=43{,}75$$

Dans cette classe, 43,75% des élèves sont germanistes.

Méthode : Pour déterminer une proportion d'un sous ensemble A dans un ensemble E , il faut effectuer le calcul $p=\frac{nombre\ d'invidus\ dans\ \mathrm{A}}{nombre\ d'invidus\ dans\ \mathrm{E}}$

Remarques :
- p est compris entre 0 et 1, lorsqu'il n'est pas exprimé en pourcentage.
- pour exprimer cette proportion en pourcentage, il suffit de la multiplier par 100. p est alors compris entre 0 et 100.

c. Pourcentage de pourcentage.

Exemple 3 : En règle générale, dans les grandes surfaces, 30% des jus de fruits sont des jus d'orange. Parmi les jus d'orange, 65% sont étiquetés pur jus.

1. Dans le magasin A, il y a au total 400 bouteilles de jus de fruits.
   a. Combien y-a-t-il de bouteilles de jus d'orange ?
   b. Combien y-a-t-il de bouteilles de jus d'orange pur jus ?
2. Dans le magasin B, nous noterons x le nombre de bouteilles de jus de fruits.
   a. Exprimer en fonction de x le nombre de bouteilles de jus d'orange.
   b. Exprimer en fonction de x le nombre de bouteilles de jus d'orange pur jus.

Propriété : Soit E un ensemble, soit A un sous-ensemble de E de proportion p_{A}.
Soit B un sous-ensemble de A de proportion p_{B} par rapport à A.
La proportion de B par rapport à E est $p_{\mathrm{A}} \times p_{\mathrm{B}}$.

Démonstration : Soit n_{E}, n_{A} et n_{B} les effectifs respectifs de E, A et B. On a alors
$p_{\mathrm{A}}=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}}$ et $p_{\mathrm{B}}=\frac{n_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{A}}}$

Par conséquent, $p_{\mathrm{A}} \times p_{\mathrm{B}}=\frac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}} \times \frac{n_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{A}}}=\frac{n_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{E}}}$, ce qui correspond à la proportion de B par rapport à E.

Exemple 4 : 45% des élèves d'un lycée sont inscrits à l'association sportive et 40% d'entre eux font du badminton.
Déterminer la proportion d'élèves du lycée pratiquant du badminton au sein de l'association sportive.

II. Taux d'évolution.

En mathématiques, le taux d'évolution permet de quantifier l'évolution d'une grandeur numérique entre deux dates.

D'aprés wikipédia.

a. Variation absolue et variation relative.

Exemple 5 : En janvier 2020, le SMIC mensuel net s'élevait à 1219€ net par mois pour 35 heures hebdomadaires.
En janvier 2021, celui-ci est revalorisé à 1231€.

1. a. De quel montant le SMIC a-t-il augmenté entre janvier 2020 et janvier 2021 ?
   b. Calculer la proportion en pourcentage correspondant à l'augmentation du SMIC sur 2020 par rapport au SMIC de 2020. Cette proportion est appelée taux d'évolution du SMIC entre le 1er janvier 2020 et le 1er janvier 2021.
2. Sur l'année 2020, l'inflation s'est élevée à +1,6% en France.
   Que pensez vous de l'augmentation du SMIC ? Justifier votre propos.

Définition ; On suppose qu'une quantité Q passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A

La variation absolue de Q est $V_A - V_D$.

La variation relative, ou taux d'évolution, de Q est $\frac{V_A - V_D}{V_D}$.

Remarque :

- Si la variation (absolue ou relative) est un nombre positif, on parle d'une hausse.
- Si la variation (absolue ou relative) est un nombre négatif, on parle d'une baisse.
- La variation relative indique ce que représente la variation absolue par rapport à la valeur de départ.
- La variation relative est habituellement exprimée en pourcentage, il suffit pour cela de multiplier par 100.

Exemple 6 : La population d'une ville A passe de 55 000 habitants à 74250 habitants.
La population d'une ville B passe de 12500 habitants à 14375 habitants.
Quelle est la ville connaissant la plus grande expansion ?

Exemple 7 :

b. Coefficient multiplicateur.

Exemple 7 : Dans un magasin, au moment des soldes, le prix de tous les articles est annoncé à -30%.

1. Jules a repéré un article coûtant initialement 45€.
   a. Calculer 30% de 45€.
   b. Combien Jules paiera-t-il cet article ?
2. Soit un article à x euros.
   a. Exprimer le montant de l'économie faite grâce aux soldes en fonction de x.
   b. Calculer le prix, après solde, de cet article en fonction de x.

Propriété : Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_D à V_A.
On a $V_A = (1+t)V_D$

Démonstration :

On sait que $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$ donc $t V_D = V_A - V_D$.

Ainsi, $V_A = t V_D + V_D = (1+t) V_D$.

Définition : $1+t$ est appelé coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution t.

Notation : En général, on note $\text{CM} = 1+t$.
On a alors $V_A = \text{CM} \times V_D$

Propriété :

- Dans le cas d'une baisse, t est négatif et CM est un nombre compris entre 0 et 1.
- Dans le cas d'une augmentation, t est positif et CM est un réel supérieur à 1.

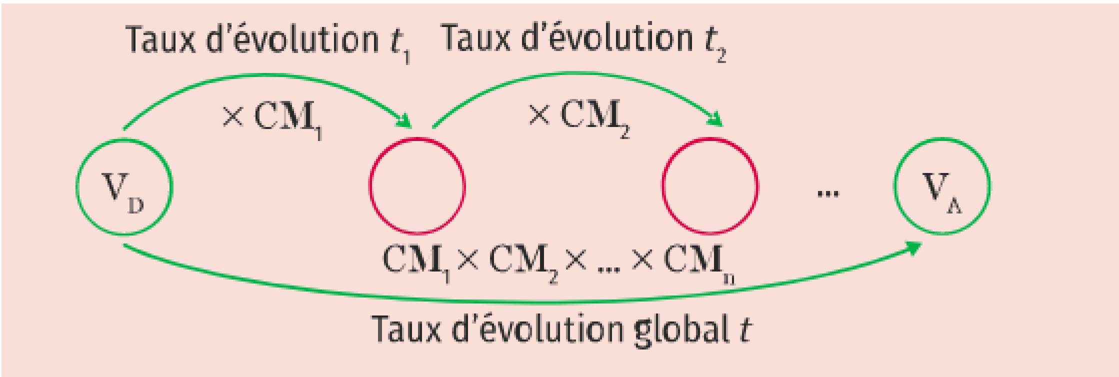
Exemple 8 : Paul a une moyenne de 15 en mathématiques. Il se fixe pour objectif d'augmenter sa moyenne de 15%. Quelle moyenne doit-il atteindre alors ?

c. Évolutions successives.

Exemple 9 :

1. Un journal compte 5000 abonnés en 2016.
   a.L'année suivante, le nombre d'abonnés augmente de 10%. Déterminer le nombre d'abonnés en 2017.
   b. En 2018, le nombre d'abonnés augmente à nouveau de 30% par rapport à l'année précédente. Déterminer le nombre d'abonnés en 2018.
   c. Élise affirme que cela fait une augmentation de 40% en deux ans. A-t-il raison ? Si non, donner l'évolution en pourcentage entre 2016 et 2018.
2. Une quantité augment de 15% puis de 40%.
   a. Donner les coefficients multiplicateurs associés à chacune de ces évolutions.
   b. Par combien cette quantité a-t-elle été multipliée à l'issue de ces deux évolutions ?
   c. En déduire le taux d'évolution correspondant à ces deux évolutions.

Propriété : Soit une quantité Q passant de la valeur V_D, à la valeur V_I puis à la valeur V_A
Soit CM_1 le coefficient multiplicateur permettant de passer de V_D à V_I et CM_2 le coefficient multiplicateur permettant de passer de V_I à V_A, alors le coefficient multiplicateur CM permettant de passer de V_D à V_A est $CM = CM_1 \times CM_2$



Remarque : Connaissant le coefficient multiplicateur, il est alors possible de connaître le taux d'évolution.
En effet, $CM = 1 + t \Leftrightarrow t = CM - 1$.

Exemple 10 : Déterminer le taux d'évolution global d'une valeur suite à une augmentation de 50% puis à une diminution de 50%.

d. Évolutions réciproques.

Définition : Une quantité non nulle V_D subit une évolution de taux t et devient égale à une quantité V_A. Le taux réciproque de t est le taux t' permettant de passer de V_A à V_D.

Exemple 11 : Soit un article coûtant 50€.
Il subit une baisse de 20% puis une hausse de 25%. Quel est alors son prix ?
Que pouvez vous dire ?

Propriété : Le coefficient multiplicateur réciproque CM', associé à l'évolution réciproque t'

est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t .
On a $\mathrm{CM'}=\frac{1}{\mathrm{CM}}$.

Démonstration : Soient t et t' deux évolutions successives non nulles telles que la valeur d'arrivée soit la même que la valeur de départ.
Le coefficient multiplicateur global est alors 1.
On note CM et CM' les coefficients multiplicateurs respectifs des évolutions t et t' .
On a alors $\mathrm{CM}\times\mathrm{CM'}=1$ d'où $\mathrm{CM'}=\frac{1}{\mathrm{CM}}$.

Exemple 12 : Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une augmentation de 60%