Les nombres réels.

I. Les ensembles de nombres.

a. Les entiers naturels.

Définition : L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul :0;1;5;89 ;....

Il y a une infinité d'entiers naturels.

Notation : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

b. Les entiers relatifs.

Définition : L'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des nombres entiers positifs, négatifs ou nul : -34;-5;0;12;47 ;....

Notation : on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Propriété : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

c. Les nombres décimaux.

Définition : L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'un quotient $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel.

Notation : On note ID l'ensemble des nombres décimaux.

Exemple 1 : Prouver que les nombres suivants sont des nombres décimaux :
A=32,7 B=-0,0004 C= 52

Propriété : $\mathbb{Z} \subset$ ID.

d. Les nombres rationnels.

Définition : L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Notation : On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Exemple2 : Prouver que les nombres suivants sont des nombres rationnels :
A= -17,3 B=57 $C=\frac{10,3}{0,004}$

Propriété : ID $\subset \mathbb{Q}$

L'inverse n'est pas vrai : prouvons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Nous allons, pour cela, utiliser un raisonnement par l'absurde.

Qu'est ce qu'un raisonnement par l'absurde :
Soit une propriété (P) dont on désire montrer qu'elle est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que cette propriété est vraie et à aboutir à une contradiction.

Nous allons donc supposer que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. .

Alors, il existe un nombre entier relatif a et un nombre entier naturel n tel que que $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$.

Par conséquent, $3a=10^n$.

Or $3a$ est un multiple de 3, donc 10^n être un multiple de 3, autrement dit, 3 doit être un diviseur de 10, ce qui est absurde.

On en conclut donc que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

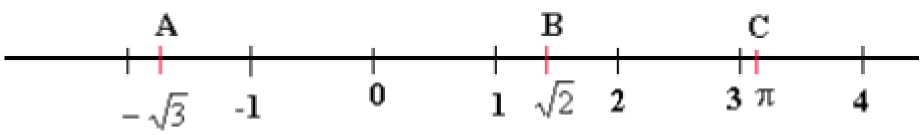
Nous pouvons donc écrire que $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais que $\frac{1}{3} \notin$ ID.

Remarque : il convient de différencier les symboles $\in$ et $\subset$.

- $\in$ signifie « appartient à » et désigne l'appartenance d'un élèment à un ensemble.
  Par exemple : $2 \in \mathbb{N}$ signifie le nombre 2 appartient à l'ensemble des entiers naturels.
- $\subset$ signifie « est inclus dans » et désigne l'inclusion d'un ensemble dans un autre ensemble.
  Par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ signifie que l'ensemble $\mathbb{N}$ est contenu dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ou encore que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$

e. Les nombres réels.

Soit une droite graduée.
A chaque point de la droite, nous pouvons associer un nombre, appelé abscisse de ce point.



Définition : l'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisse des points de la droite graduée.

Notation : On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Exemple 3 : Prouver que les nombres suivants sont des nombres réels :

A= -5 B= 0,75 $C=\frac{5}{7}$ $D=\sqrt{2}$

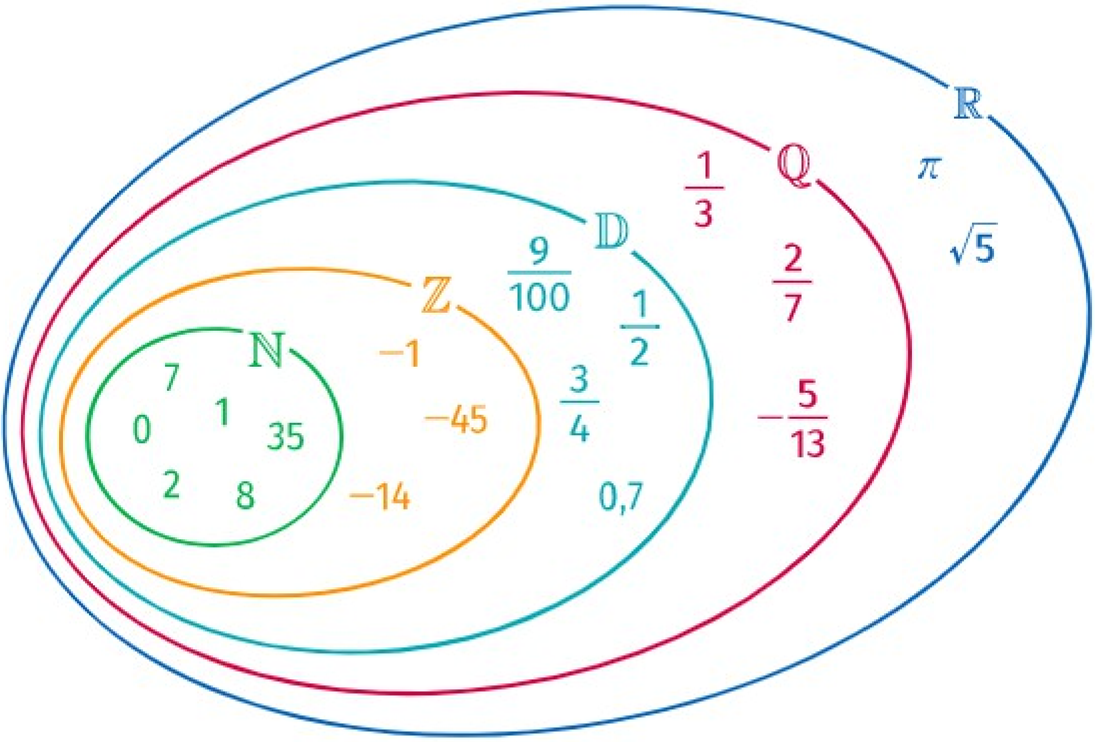
Remarques : tous les nombres connus en classe de seconde sont des nombres réels.

Propriété : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

L'inverse n'est pas vrai.

Le nombre π ne peut pas s'écrire sous forme d'un nombre rationnel.
C'est le cas également pour le nombre $\sqrt{2}$. Nous démontrerons cette propriété un peu plus tard dans l'année.

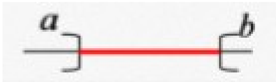
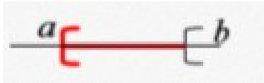
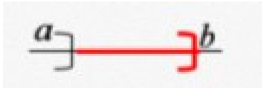
f. Pour Conclure.



II. Intervalles.
On distingue deux types d'intervalles : les intervalles bornés et les intervalles illimités.

a. Intervalles bornés.

Ensemble des réels tels que	Représentation graphique	Notation
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a;b]$ Intervalle fermé

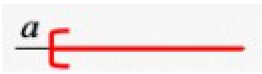
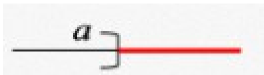
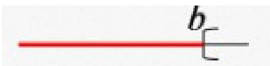
$a<x<b$		$]a;b[$ Intervalle ouvert
$a\leqslant x<b$		$[a;b[$
$a<x\leqslant b$		$]a;b]$

Exemple 4 :

- [3;12] désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $3\leqslant x\leqslant 12$
- $\left]-4;\frac{3}{2}\right]$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $-4<x\leqslant\frac{3}{2}$

Remarque : Pour un intervalle borné $[a;b]$ (par exemple), on dit que $b-a$ est l'amplitude de l'intervalle.

b. Intervalles illimités.

Ensemble des réels tels que	Représentation graphique	Notation
$a\leqslant x$		$[a;+\infty[$
$a<x$		$]a;+\infty[$
$x\leqslant b$		$]-\infty;b]$
$x<b$		$]-\infty;b[$

Exemple 5 :

- $]-\infty;3]$ désigne l'ensemble des réels x tels que $x\leqslant 3$
- $]2;+\infty[$ désigne l'ensemble des réels x tels que $x>2$

Remarques :

- les symboles $+\infty$ et - ∞ indiquent que l'intervalle n'est pas limité à gauche ou à droite.
- Ce ne sont pas des nombres réels. Les crochets en $+\infty$ et en $-\infty$ sont donc toujours ouverts.

c. Réunion et intersection d'intervalles.

Définition : Soit I et J deux intervalles.

- la réunion de I et J, notée I $\cup$J, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J.

- l'intersection de I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J.

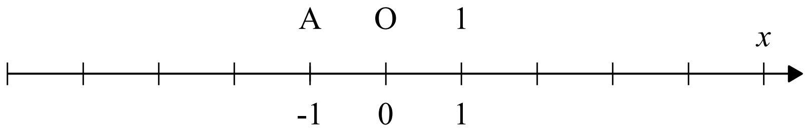
Exemple 6 : Soit I=[3;7] et J=[4;10].
Représenter graphiquement $I \cup J$ et $I \cap J$.

III. Valeur absolue.

a. valeur absolue et distance.

Définition : Sur une droite graduée munie d'une origine O, on considère un point A d'abscisse a .
La valeur absolue de a , notée, $|a|$, est le nombre réel égal à la distance OA.

Exemple 7 :



$|-1|=OA=1$

Propriété : La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre $|a|$ tel que
$|a| = a$ si $a \geqslant 0$
$-a$ si $a<0$

Exemple 9 :
$|-12| =$
$|7| =$

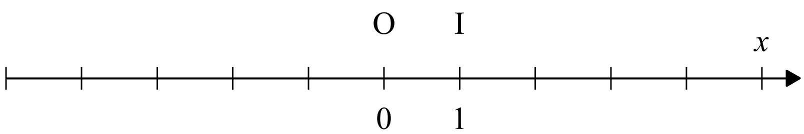
b. Distance entre deux nombres réels.

Exemple 10 :
1. Sur une droite graduée, placer les points A, B et C d'abscisses respectives -5,2 et 7.
2. Calculer les distances AB et BC.
3. Quelle formule pourriez vous établir ?

Propriété : Soit deux points A et B d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée munie d'une origine O.
La distance entre A et B est égale à $|a-b|$

c. Intervalle et valeur absolue.

Exemple 11 :



1. Placer le point A d'abscisse $a=2$.
2. Colorer l'intervalle $[a-r, a+r]$ où $r=3$
3. Soit x un nombre réel, abscisse d'un point M. Quelle inégalité doit vérifier x pour

que M soit situé sur l'intervalle que vous venez de colorer.

4. Écrire cette inégalité en utilisant une valeur absolue (si cela n'est pas encore fait).

Propriété : Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif.
$x \in [a-r;a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leqslant r$

Dans ce cas, le nombre a est appelé le centre de l'intervalle et le nombre r le rayon de l'intervalle.