Exercices : les nombres réels.

Exercice 1 : Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

$A=\frac{1}{2}$ $\quad B=\frac{10-4}{3}$ $\quad C=\sqrt{5}$

$D=-\sqrt{16}$ $\quad E=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $\quad F=\frac{34}{2}-\sqrt{289}$

Exercice 2 : Soit $x\in\mathbb{N}$ Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est fausse ou toujours vraie. Si elle est fausse, donner un contre-exemple et donner le plus petit ensemble qui la rende toujours vraie.

1. $2x+1 \in\mathbb{N}$
2. $2x+1 \in\mathbb{Q}$
3. $3x-7 \in\mathbb{N}$
4. $\frac{x-6}{2} \in\mathbb{Z}$
5. $\frac{x+1}{2} \in\mathbb{R}$
6. $\sqrt{x} \in\mathbb{Q}$

Exercice 3 : On considère un cercle dont le périmètre est un nombre rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

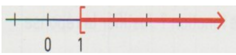
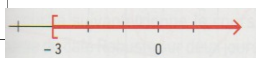
Exercice 4 : Trouver deux nombres irrationnels différents

1. dont le produit est un nombre irrationnel.
2. Dont le produit est un nombre entier naturel.

Exercice 5 : les équations suivantes ont-elles des solutions dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$? dans $\mathbb{R}$? Si oui, laquelle ?

1. $2x+3=0$
2. $3x-1=5$
3. $-3x+64=19$
4. $x^2-2=0$

Exercice 6:Compléter le tableau suivant.

Phrase	Représentation	Intervalle	Inégalité
Ensemble des réels supérieurs ou égaux à 1		[1 ; +∞[	$x\geqslant 1$
			$x\leqslant 2$
			$\frac{-5}{3}<x\leqslant 1$
			
Ensemble des réels strictement positifs			
		$]-\infty;7]$	
Ensemble des réels compris entre -10 et -2			
			$x<0$
Ensemble des réels supérieurs ou égaux à $\frac{-1}{3}$			
		$\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$	

Exercice 7 : x désigne un nombre réel.
Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

a. Si $x<0$, alors x est un nombre négatif.
b. Si x est un nombre négatif, alors $x<2$.
c. Si $x-2\leqslant 0$, alors $x\leqslant 2$.
d. Si $x<4$, alors $x\leqslant 4$.
e. Si $x\in[0\,;\,2]$, alors $x\in[-1;5]$.

Exercice 8 : Recopier et compléter par $\in$ et $\notin$:

a. 1,4 … $[0;\sqrt{2}]$ $\quad$ b. -6... $\left[\frac{7}{3};+\infty\right[$

c. -π...]-3 ; -1[$\quad$ d. -3....] $-\infty$; -3,5[

Exercice 9:

1. On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que. $1<x<4$ et $5\leqslant y\leqslant 6$. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. Même question avec l'ensemble des points $N(x;y)$ tels que $1\leqslant 2x+1\leqslant 4$ et $5<2-5y<6$.

Exercice 10: Résoudre les inéquations suivantes et indiquer la solution sous forme d'un intervalle :

1. $x-4<3$ 2. $2x+3>4$ 3. $4x+1\leqslant x+7$ 4. $-2x+4\geqslant 2x+12$

Exercice 11: Analysons du code.

```python
def appartienta(a,b,x):
    if a<x and x<b:
        return True
    else:
        return False

```

Vous avez écrit ci-dessus une fonction dans le langage de programmation python.
Nous utiliserons ce langage tout au long de votre parcours au lycée.

1. Que renvoie appartienta(4,8,7) ?
2. Que renvoie appartienta(3,6,2) ?
3. Que semble faire ce programme ?

Exercice 12: Dans chacun des cas, écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles le plus grand ensemble auquel appartient x .

1. $x\leqslant 3$ ou $x>0$ 2. $x-6>0$ ou $5x\leqslant 5$
3. $x\leqslant 2$ ou $-4x\leqslant -20$ 4. $7x-4\geqslant 3$ ou $1-x>0$

Exercice 13: Dans chacun des cas, écrire sous forme d'intervalles ou d'intersection d'intervalles le plus grand ensemble auquel appartient x .

1. $x<3$ et $x>-6$ 2. $x\geqslant -5$ et $x\geqslant -7$ 3. $x\geqslant 0$ et $x<0$
4. $x<4$ et $x<-1$

Exercice 14 : Donner la valeur absolue des nombres suivants :

A=2 B=-4 $C=-\sqrt{225}$

$D=\dfrac{-2}{-3}$ $E=3-\dfrac{2}{3}\times(6-4)$

Exercice 15: Calculer les valeurs absolues suivantes :

$A=|17-25|$ B= $|1-\sqrt{2}|$ C = $|-3-\pi|$

Exercice 16: Résoudre les équations suivantes :

1. $|x|=5$ 2. $|x|=-8$ 3. $|x-3|=5$
4. $|x+3|=2$ 5. $|2x+1|=4$

Exercice 17: Dans chaque cas, donner la distance entre les points d'abscisse respectives :

1. -2 et -12 2. 5 et -7 3. $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{7}{6}$

Exercice 18: Quel est le plus petit intervalle auquel appartient x dans chacun des cas suivants :

1. $|x-2|\leqslant 3$ 2. $|x|\leqslant 1$ 3. $|x+2|<4$

Exercice 19: Écriture décimale illimitée.
Un nombre décimal a une écriture limitée, qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres. Examinons ce qui se passe pour des nombres non décimaux.

1. a. Poser à la main la division de 40 par 33 en allant au quotient au dix-millième.
   b. Que remarquez vous ?
   c. Quelles seront les cinq décimales suivantes ?
   On écrit alors que $\dfrac{40}{33}=1,\underline{21}...$, ce qui signifie que l'on répète une infinité de fois la séquence de chiffres 21. Cette écriture est périodique. C'est une écriture décimale illimitée.
2. Écrire de même l'écriture décimale illimitée de $\dfrac{1}{3}$ et de $\dfrac{2}{3}$.
3. a. Poser la division $\dfrac{12}{7}$ jusqu'à observer une périodicité.
   b. Quels sont les restes successifs possibles dans la division d'un entier par 7 ? A partir de quelle décimale est-on sûr de retrouver un reste déjà obtenu en divisant par 7 ?
4. Expliquer pourquoi un nombre rationnel non décimal a une écriture décimale illimitée périodique.
5. On peut montrer inversement que si un nombre a une écriture décimale périodique illimitée, c'est un nombre rationnel.
   Le nombre π a-t-il une écriture décimale illimitée périodique ? Expliquer votre raisonnement.