Équations différentielles, primitives.

I. Définitions.

Définition : On appelle équation différentielle une équation qui relie la fonction inconnue à ses dérivées successives.

Remarque : Une équation différentielle a pour solution une fonction et non un nombre.

Exemple 1 : Les équations suivantes $5y''-4y'+4y=\cos x$ et $y'-5x.y=\ln x$ sont des équations différentielles d'inconnue y où y est une fonction.

Nous étudierons cette année des équations différentielles particulières.

Définition : Soient a et b deux nombres réels.
L'équation $y'=ay+b$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Définition :Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble des fonctions vérifiant l'égalité.
En particulier , résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre $y'=ay+b$, c'est déterminer toutes les fonctions f , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x , $f'(x)=af(x)+b$

Exemple 1: Soit l'équation $y'=4$.
a. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x-2$ est une solution de cette équation différentielle.
b. Déterminer une autre fonction solution de cette équation.
c. Déterminer l'ensemble des fonctions solution de cette équation.

II. Primitive d'une fonction.

a. Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x \in$ I.
F est alors solution de l'équation $y'=f$.

Exemple 2 :
- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2$ admet la fonction F définie par $F(x)=2x$ comme primitive sur $\mathbb{R}$.
  Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=2x+k$, où k est un nombre réel sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  a. Trouver une primitive de g sur $]0;+\infty[$.
  b. Déterminer l'ensemble des primitives de g sur $]0;+\infty[$.

Théorème :
1. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ où k est un réel.

Démonstration : Démontrons le 2. du théorème.
- Soit G une fonction définie sur I par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ où k est un réel.
Alors, pour tout $x \in$ I, $\mathrm{G}'(x)=\mathrm{F}'(x)=f(x)$.
Donc pour tout réel k, G est une primitive de f.
Réciproquement, soit G une primitive de f, et soit la fonction D définie sur I par $\mathrm{D}(x)=\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)$
Pour tout $x \in$ I, $\mathrm{D}'(x)=\mathrm{G}'(x)-\mathrm{F}'(x)=f(x)-f(x)=0$
Donc D est une fonction constante sur I, donc, il existe k ∈ ℝ tel que pour tout x ∈ I, $\mathrm{D}(x)=k$.
Par conséquent, pour tout $x \in$ I, $\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)=k$, ainsi, pour tout $x \in$ I, $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$.

b. Primitives et fonctions usuelles.

Fonction f	Une fonction Primitive F	Ensemble de définition
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	ℝ
$f(x)=x^n$, $n\neq -1$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	ℝ
$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\mathrm{F}(x)=\frac{x^{-n+1}}{1-n}=\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	]–∞;0[ou]0 ; +∞[
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	ℝ
$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$\mathrm{F}(x)=\sin x$	ℝ
$f(x)=\sin x$	$\mathrm{F}(x)=-\cos x$	

c. Primitives et opérations sur les fonctions.
Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur I de primitives U et V.

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$u+v$	U+V+k, k ∈ ℝ	I

λu , $\lambda \in \mathbb{R}$	λ U+k, $k \in \mathbb{R}$	I
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+k$, $k \in \mathbb{R}$	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ +k, $k \in \mathbb{R}$	$u>0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$ +k, $k \in \mathbb{R}$	u Ne s'annulant par sur I
$u'e^u$	e^u+k , $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$, $k \in \mathbb{R}$	u >0 sur I.

Exemple 3: Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
a. $f(x)=5x^3-4x^2+3x-2$, $x \in \mathbb{R}$.

b. $g(x)=e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

d. Une unique primitive.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une fonction G définie sur I, primitive de f
Soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive de F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$

Démonstration : Soit G une primitive de f sur I, alors toutes les primitives F de f sont de la forme $F(x)=G(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$.
$F(x_0)=y_0$
$\Leftrightarrow G(x_0)+k=y_0$
$\Leftrightarrow k=y_0-G(x_0)$
y_0 et $G(x_0)$ étant définie de manière unique, on a donc que k existe et est unique et donc il existe une unique primitive de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$ et qui est définie par $F(x)=G(x)+k=G(x)+y_0-F(x_0)$

Exemple 4 :
a. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=9x^2-6x+3$ telle que F(1)=4.

b. Déterminer la primitive G de la fonction g définie sur]0;+∞[par $g(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+12x^5$ telle que G(1)=0.

III. Équation $y'=ay$

Définition : L'équation $y'=ay$ s'appelle une équation linéaire homogène à coefficient constant.

Théorème : Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'=ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{K}\,\text{e}^{ax}$, où K est un réel quelconque.

Démonstration :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{K}\,\text{e}^{ax}$. Démontrons que f est solution de (E).
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=\text{K}\,a\,\text{e}^{ax}$.
  Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=a.\text{K}\,\text{e}^{ax}=af(x)$ et donc f est solution de l'équation différentielle $y'=ay$.
- Montrons qu'il n'existe pas d'autres fonctions solution de (E).
  Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E), alors pour $x \in \mathbb{R}$,
  $g'(x)=ag(x) \Leftrightarrow g'(x)-ag(x)=0$
  Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=\frac{g(x)}{\text{e}^{ax}}=g(x)\text{e}^{-ax}$.
  ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $\phi'(x)=g'(x)\text{e}^{-ax}-ag(x)\text{e}^{-ax}=\text{e}^{-ax}(g'(x)-ag(x))=0$
  Par conséquent, ϕ est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel K tel que $\phi(x)=g(x)\text{e}^{-ax}=\text{K}$
  Nous obtenons donc que $g(x)=\text{K}\,\text{e}^{ax}$, ce qui montre que toutes les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x)=\text{K}\,\text{e}^{ax}$.

Exemple 5 : Résoudre les équations suivantes :
a. $y'=8y$

b. $y'-7y=0$

IV. Équation $y'=ay+b$

Théorème : Soient a et b deux nombres réels non nuls.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'=ay+b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{K}\,\text{e}^{ax}-\frac{b}{a}$ où K est un réel quelconque.

Démonstration :

- Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$. Montrons que f est solution de (E).
  f est dérivable et pour tout $x \in$ ℝ $f'(x)=\mathrm{K}\,a\,\mathrm{e}^{ax}$
  Or pour tout $x \in$ℝ, $af(x)+b=a\left(\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}\right)+b=a\,\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-b+b=a\,\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}=f'(x)$
  Donc f est bien solution de (E).
- Montrons qu'il n'existe pas d'autres fonctions solution de (E).
  Soit g une fonction définie sur ℝ solution de (E). Donc pour tout $x \in$ℝ, $g'(x)=ag(x)+b$ .Soit ϕ la fonction définie sur ℝ par $\phi(x)=g(x)+\frac{b}{a}$.
  La fonction ϕ est dérivable sur ℝ et pour tout $x \in$ ℝ,
  $\phi'(x)=g'(x)=ag(x)+b=a\left(g(x)+\frac{b}{a}\right)=a\phi(x)$.
  Nous pouvons donc en déduire que ϕ est solution de l'équation $y'=ay$.
  Donc d'aprés le III, ϕ est de la forme $\phi(x)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}$ où K est un nombre réel.
  Par suite, pour tout $x \in$ ℝ, $g(x)=\phi(x)-\frac{b}{a}=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$, ce qui montre que toutes les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$.

Exemple 6: Soit (E) l'équation différentielle $y'+5y=3$.
a. Résoudre (E).
$y'=-5y+3$

b. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0)=5$.

V. Équation $y'=ay+g$ où g est une fonction.

Définition : L'équation $y'=ay+g$, où $a \in$ ℝ et g est une fonction, est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
Le second membre est g , car $y'-ay=g$
L'équation homogène associée est $y'=ay$

Théorème : Soit (E) : $y'=ay+g$ où g est une fonction continue.
On note f_p une solution particulière de (E).
Alors, toutes les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $f=f_h+f_p$ où f_h est solution de l'équation homogène associée : $f_h=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}$, K ∈ ℝ.

Remarque : Ce théorème permet de retrouver les solutions du théorème du IV où la solution générale de l'équation différentielle $y'=ay+b$ est $f(x)=\mathrm{K}\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$.

Exemple 7: Soit (E) l'équation différentielle $y'=2y+8x+10$.
la fonction g définie sur ℝ par $g(x)=8x+10$ est le second membre de cette équation.
1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x)=ax+b$ soit solution de (E).

2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E)