Sommes de deux variables aléatoires :
exercices.

Exercice 1: Lors de l'inscription à un club de sport, les clients paient différents droits d'inscription selon leur tranche d'âge : les adhérents de moins de 20 ans paient 15€ d'abonnement mensuel, les adhérents de plus de 65 ans paient 10€ et les autres paient 30€.
Par ailleurs, il est possible de souscrire une extension d'abonnement qui revient à 5€ supplémentaires pour les boissons à volonté, 15€ pour l'utilisation des appareils de type Cardio et 17€ pour l'inscription aux deux suppléments à la fois.
On choisit au hasard un client du club de sport et on note X la variable aléatoire correspondant au prix total de son abonnement.

1. Proposer une décomposition de X en somme de variables aléatoires dont on donnera une interprétation.
2. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires.

Exercice 2: On considère une urne dans laquelle se trouvent différentes boules de couleur : des rouges, des vertes et des noires.
On tire avec remise trois boules de l'urne.
A chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points.
On note respectivement R,V et N les événements « Obtenir une boule rouge », « Obtenir une boule verte », et « Obtenir une boule noire ».
On note enfin X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant respectivement au nombre de points obtenus aux premier, deuxième et troisième tirages.

1. Calculer les valeurs suivantes :
   $X_2((V;R;N))$, $X_1((N;V;V))$ et $X_3((R;N;R))$
2. On note X la variables aléatoire correspondant au nombre moyen de points obtenus par étape à l'issue de la partie.
   a. Exprimer X en fonction de X_1 , X_2 et X_3 .
   b. Calculer $X((N;V;V))$

Exercice 3 : X et Y sont deux variables aléatoires telles que E(X)=2 et E(Y)=5. Calculer
a. E(3X) b. E(X+Y) c. E(-2Y)

Exercice 4 : X et Y sont deux variables aléatoires telles que E(X)=10 et E(Y)=3.
Calculer E(4X+3Y)

Exercice 5: Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω.
Compléter le tableau de valeurs suivant :

E(X)	E(Y)	E(X+Y)	E(2X-3Y)
	0,2	0,55	
0,12			1,65
		0,23	-1,79

Exercice 6: Soit a un nombre réel.
On donne ci-dessous les lois de probabilité de trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur un univers Ω.

x_i	-5	2	4	12
$P(X=x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,3

y_i	0	3	7

$P(Y=y_i)$	0,3	0,2	0,5

z_i	12	a
$P(Z=z_i)$	0,75	0,25

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z sachant que E(X+2Y)=E(Z)

Exercice 7: Le cinéma de la commune propose différents tarifs :
un tarif plein à 12€, un tarif étudiant à 7€ et un tarif enfant (- 12 ans) à 5€.
Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients bénéficient du tarif enfant et les autres du tarif étudiant.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons à 4€, 23% achètent seulement un paquet de pop-corn taille standard à 5€, 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn en grande taille à 7€. Les autres clients ne souhaitent pas de confiserie.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant au prix payé par ce client pour la place de cinéma et pour l'éventuelle confiserie supplémentaire.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.
   a. Exprimer X en fonction de X_1 et de X_2.
   b. Calculer E(X) et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 8: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.
Compléter le tableau ci-dessous :

V(X)	V(Y)	V(X+Y)	V(3X-Y)
1,4		3	
2,8			39,4
		11,4	53,8

Exercice 9: Lors du bilan de fin d'année, un opticien a établi les résultats suivants quant aux ventes de montures et de verres correctifs réalisées cette année.

Prix monture (en €)	100	200	300
Fréquence (en %)	26	56	18

Prix verre (en €)	20	60	110	220	375
Fréquence (en %)	7	48	22	20	3

On choisit au hasard une facture parmi celles correspondant aux clients ayant acheté une paire de lunettes.
On note Z la variable aléatoire correspondant au prix de la paire de lunettes ainsi que de ses deux verres. On suppose que les deux verres ont le même prix.

1. On note X la variable aléatoire correspondant au prix de la monture et Y la variable aléatoire correspondant au prix d'un verre. Justifier l'égalité Z=X+2Y.
2. Déterminer E(Z). Interpréter le résultat.
3. On suppose les variables X et Y indépendantes.
   Déterminer V(Z) puis en déduire une valeur approchée σ(Z) à 10^{-4} près.

Exercice 10: Deux lycées sont situés dans la même commune. Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examens : 75% des élèves obtiennent le bac avec mention.
Dans le lycée B, seulement 55% des élèves obtiennent le bac avec mention.
On choisit 12 élèves du lycée A et 20 élèves du lycée B.
Le nombre d'élèves de chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à deux tirages avec remise.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires comptant le nombre d'élèves ayant obtenu une mention parmi les élèves du lycée A et du lycée B.

1. Justifier que X et Y suivent deux lois binomiales dont on précisera les paramètres.

2. Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves ayant obtenu une mention parmi tous les élèves interrogés.
   a. Exprimer Z en fonction de X et Y.
   b. Calculer et interpréter E(Z).
   c. Calculer V(Z) et en déduire une valeur approchée de σ(Z) à 0,001 près.

Exercice 11: La majorité des contraventions liées aux infractions au code de la route concernent les contraventions de 4e classe : utilisation du téléphone au volant, feu rouge grillé, non respect de la ligne blanche, non respect du port de la ceinture, chevauchement d'une ligne blanche, …
Le tarif forfaitaire d'une telle contravention s'élève à 135€.
Il est cependant possible de payer la contravention moins chère si 'l'on procède rapidement au paiement. Elle s'élève alors à 90€ et on parle d'amende minorée.
A l'inverse, en cas de retard de paiement, le prix de l'amende augmente et passe alors à 375€. On parle alors d'amende majorée.
Une préfecture transmet les informations suivantes concernant le paiement des contraventions de 4e classe.

Montant de l'amende en €	90	135	375
Fréquence observée (en %)	79	15	6

Afin d'étudier de manière plus précise ces données, on prélève cent dossiers concernant les amendes de 4e classe. On suppose que le nombre d'amendes est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise.
Pour tout entier k ∈ {1 ;..;100}, on appelle X_k la variable aléatoire correspondant au montant payé par le k-iéme dossier prélevé.

1. On note S_{100} la variable aléatoire correspondant au montant total payé par les cent contrevenants.
   Exprimer S_{100} en fonction des variables aléatoires X_k .
2. En moyenne, sur cent contrevenants aux infractions de 4e classe, quel est le montant total payé ?
3. Calculer σ(S_{100}). On arrondira le résultat au millième.
4. On note M_{100} la variable correspondant au paiement moyen par amende des cent contrevenants choisis.
   Calculer σ(M_{100}).On arrondira le résultat au millième.

Exercice 12: Un restaurant propose différents choix de menus.

- 64% des clients ne souhaitent pas manger d'entrée, alors que 22% des clients choisissent l'entrée à 9€. Les autres choisissent l'entrée à 11€.
- 76% des clients commandent le plat composé de viande dont le prix s’élève à 19€. Les autres choisissent le plat de poisson coûtant 22€.
- Enfin, 10% des clients mangent une crêpe en dessert à 8€, 38% des clients désirent manger le dessert au chocolat à 6€, 30% commandent le dessert aux fruits à 7€ et 22% ne souhaitent pas manger de dessert.

On choisit un client du restaurant au hasard.
On note respectivement X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant aux prix payés pour l'entrée, pour le plat et pour le dessert.

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 .
2. On note X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.
   Exprimer X en fonction de X_1 , X_2 et X_3
3. En déduire le prix moyen payé par chaque client.
4. On choisit maintenant 10 clients de ce restaurant. On suppose que le nombre de clients du restaurant est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise.
   En moyenne, sur ces dix clients, à combien le prix total s'élève-t-il ?

Exercice 13: On considère un jeu sur une machine de casino se déroulant en deux manches. Il n'y a que deux possibilités à chaque tour : gagner 5€ et ne rien gagner.

- Au premier tour de jeu, 10% des joueurs remportent 5€. Les autres perdent.
- Au second tour de jeu, si le joueur a gagné 5€ au premier tour , ses chances de les remporter de nouveau sont de 15%. Si, à l'inverse, il avait perdu au premier tour, ses chances de gagner au second tour s’élèvent alors à 65%.

On note X_1 la variable aléatoire correspondant au gain du premier tour et X_2 celle correspondant au gain du second tour.
Pour tout entier k ∈ {0;5}, on note A_k l'événement « Le joueur a remporté k € au premier tour} et B_k l'événement « Le joueur a remporté k€ au second tour ».

1. Construire un arbre pondéré adapté à la situation.
2. En déduire les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 .

3. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles identiquement distribuées ?
4. Calculer $P((X_1=0)\cap(X_2=0))$ et $P(X_1=0)\times P(X_2=0)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Dans le casino concurrent, les règles de ce jeu sont légèrement différentes :
   - au premier tour, 10% des joueurs remportent 5€, les autres perdent.
   - au second tour, 60% des joueurs ayant remporté 5€ au premier tour les gagnent à nouveau.
   Parmi ceux ayant perdu au premier tour, 60% des joueurs gagnent 5€ lors du second tour.
   On note Y_1 la variable aléatoire correspondant au gain du premier tour et Y_2 celle correspondant au gain du second tour.
   a. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires Y_1 et Y_2.
   b. Ces variables aléatoires sont-elles identiquement distribuées ? Indépendantes ? Justifier.

Exercice 14: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.
On souhaite montrer que E(XY)=E(X)E(Y).
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z=X\times Y$.
On notera dans la suite $\mathrm{Val}_X = \{ x_1, .., x_r \}$ l'ensemble des valeurs prises par X, $\mathrm{Val}_Y = \{ y_1, .., y_s \}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Val_Z l'ensemble des valeurs prises par Z.
Attention, pour $z \in \mathrm{Val}_Z$, il peut exister plusieurs couples $(x;y)$ tels que $z=x\times y$.

On va donc regrouper ces différents couples dans un ensemble qu'on notera A_z : pour tout $z \in \mathrm{Val}_Z$, on pose $A_z=\{(x,y)\in \mathrm{Val}_X\times \mathrm{Val}_Y \textit{ tels que } z=x\times y\}$.
A_z est donc l'ensemble des couples de valeurs de X et de Y dont le produit vaut z.

1. Justifier que les ensembles A_z sont deux à deux disjoints.
2. A quoi la réunion de tous les ensembles A_z tels que $z \in A_z$ correspond-elle ?
3. Démontrer que pour tout $z \in \mathrm{Val}_Z$, $P(Z=z)=\sum_{(x,y)\in A_z} P((X=x)\cap(Y=y))$.
4. Montrer que $P(Z=z)=\sum_{z\in Val_Z}\sum_{(x,y)\in A_z} P((X=x)\cap(Y=y))$.
5. En déduire que E(Z)=E(X)E(Y)