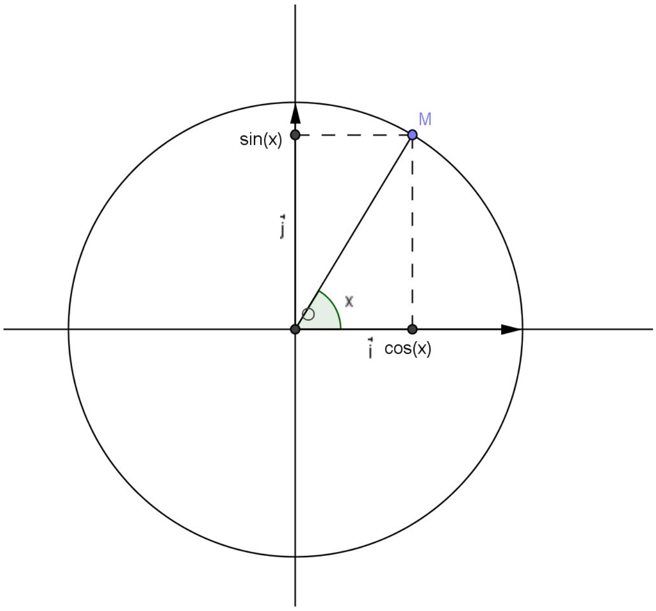
# Les fonctions cosinus et sinus.

## I. Définition.

- La fonction cosinus est la fonction, qui à tout réel $x$ , associe le réel $\cos x$ .
- La fonction sinus est la fonction, qui à tout réel $x$ , associe le réel $\sin x$ .

Notation : $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $x \to \cos x$ $\qquad$ $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $x \to \sin x$




## II. Dérivabilité.

Propriété :

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction -sin.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cos.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$

Propriété :
Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $-u' \times \sin(u)$
- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u' \times \cos(u)$ .

Exemple :Déterminer les dérivées des fonctions $f$ , $g$ et $h$ suivantes définies par :
$f(x) = \cos(5x^2 + 2x + 1)$ , $x \in \mathbb{R}$
$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , $x \in \ ]0 ; +\infty[$

$h(x)=\frac{\cos(5x+1)}{x}$ , $x\in\ ]0;+\infty[$

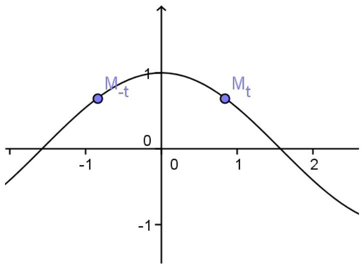
## III. Variations et représentation graphique.

1. Parité.

- Pour tout nombre réel $t$ , $\cos(-t)=\cos(t)$ . On dit que la fonction cosinus est paire.
- Pour tout nombre réel $t$ , $\sin(-t)=-\sin(t)$ . On dit que la fonction sinus est impaire.

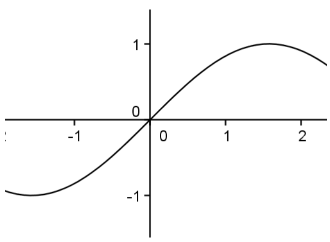
Interprétation géométrique :
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ).

1)




Soit $t\in\mathbb{R}$ Soit $M_t$ $(t;cost)$ et M' $(-t;\cos(-t))$ .
M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction cos.
$\cos(-t)=\cos(t)$ Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{j}$ ).
D'où la représentation graphique de la fonction cosinus admet pour axe de symétrie l'axe (O, $\vec{j}$ ).

2)



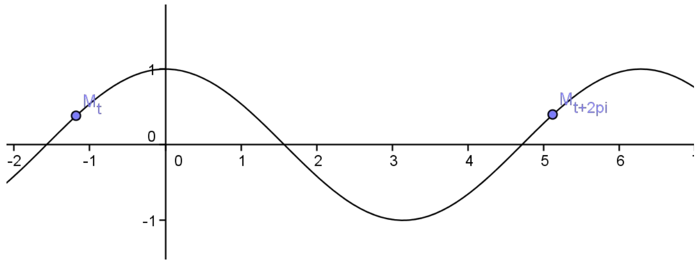

Soit $t\in\mathbb{R}$ Soit $M_t$ $(t;\sin t)$ et M' $(-t;\sin(-t))$ .
M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction sin.
$\sin(-t)=-\sin(t)$ Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'origine.
D'où la représentation graphique de la fonction sinus admet pour l'origine O pour centre de

symétrie.

2. Périodicité.

Pour tout nombre réel t, $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ et $\sin(t+2\pi)=\sin(t)$ .
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2\pi$ ou $2\pi$ -périodique.

conséquence graphique :




Soit t $\in \mathbb{R}$
Soit $M(t;\cos t)$ et $M'(t+2\pi;\cos t+2\pi)$ . M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction cos.
$\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ Donc $\overrightarrow{MM'} = 2\pi\ \vec{i}$ .
Il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur $2\pi$ . On obtient la courbe sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ , k $\in \mathbb{Z}$
Il en est de même pour la courbe représentative de la fonction sinus.

3. Tableaux de variations.

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période $2\pi$ , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude $2\pi$ .
On choisit l'intervalle $]-\pi;\pi]$ centré en O.

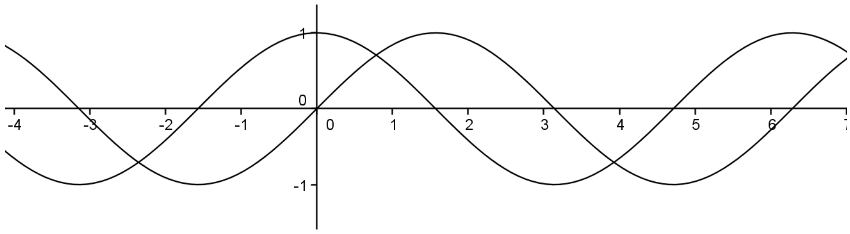
- La fonction sinus.

| $x$ | $-\pi$ | | $-\pi/2$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 |

- La fonction cosinus.

| $x$ | $-\pi$ | | 0 | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | 1 | ↘ | $-1$ |

4. Courbes représentatives.
En utilisant les propriétés de parité et de périodicité vues auparavant, on obtient dans un repère orthogonal deux sinusoïdes.




## IV. Primitives.

Propriété :
- La fonction cos admet pour primitive la fonction sin sur $\mathbb{R}$
- la fonction sin admet pour primitive la fonction -cos sur $\mathbb{R}$

Propriété : Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
- La fonction $u'\cos(u)$ , définie sur I, admet pour primitive la fonction cos(u) sur I.
- La fonction $u'\times\sin(u)$ définie sur I admet pour primitive la fonction $-\cos(u)$ sur I.

Exemple : Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

## IV. Limites.

Propriétés :
- Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}=0$

# V. Résolution d'équations et d'inéquations.

## 1. Valeurs remarquables.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | | | | |
| $\sin x$ | | | | | |

## 2. Résolution d'équations.

- $\cos x = \cos a$ .
  Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les réels $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k'\pi$ , $k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}$

  Exemple: Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- $\sin x = \sin a$ .
  Les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les réels $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k'\pi$ , $k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}$

  Exemple: Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ .

3. Résolution d'inéquations.

Exemple : Résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :

$\cos(x) < \frac{1}{2}$

$\sin(x) > \frac{-\sqrt{2}}{2}$