Devoir Maison n°6.

Le problème 1 est obligatoire et le problème 2 est pour ceux et celles qui veulent chercher un peu plus !

Probléme 1 :
Partie A : Un résultat bien utile !

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :
- **la suite (u_n) est croissante,**
- **la suite (v_n) est décroissante,**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n$ **= 0.**

1. On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$
   Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$par $t_n=v_n-u_n$.
   Montrer que la suite (t_n) est décroissante.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geqslant u_n$.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et justifier qu'elles ont la même limite.

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Partie B : Mise en application.
1. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n par :
   $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..+\frac{1}{n^2}$
   $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.
   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0=-1$ et $v_0=2$, et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n<v_n$.
   b. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   c. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) admettent la même limite.

Problème 2 (Approfondissement):

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$vérifiant la propriété suivante, appelée équation fonctionnelle :
Pour tous réels x , y , $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
Partie A : Analyse.
Soit g une fonction vérifiant les hypothèses précédentes.
1. Démontrer que $g(0)=0$ et que g est impaire.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $g(n)=n\alpha$, où $\alpha=g(1)$.
   b. En déduire que, pour tout entier relatif k , $g(k)=k\alpha$.

3. Déduire de la question 2 et de l'équation fonctionnelle que, pour tout nombre rationnel q, $g(q)=q\alpha$.
4. Dans cette question, on admet que, pour tout réel x, il existe une suite de nombre rationnels convergeant vers x.
   On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite de nombres rationnels convergeant vers x_0.
   a. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=g(x_0)$
   b. En déduire que $g(x_0)=\alpha x_0$.
   c. En déduire la nature de la fonction g.

Partie B : Synthèse.
Démontrer que les fonctions linéaires vérifient l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, puis conclure.