Exercices : fonction Ln

Exercice 1: Calculer les réels suivants :

$a=\ln(e^2)$ $b=\ln(e^{-3})$ $c=e^{\ln 5}$ $d=e^{-\ln 3}$ $f=e^{2\ln 7}$ $g=e^{-3\ln 2}$

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln x=3$ b. $2\ln x+6=0$ c. $1-4\ln x=\ln x-9$ d. $(\ln x)^2=1$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $e^x=4$ b. $5e^x+2=8$ c. $e^{2x}-2=0$

Exercice 4: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition :

a. $\ln(x+2)=\ln(2)$ b. $\ln(2x-5)=1$

c. $4\ln(1-x)=8$ d. $\ln(3x+8)=\ln(x)$

Exercice 5: Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de ln2 et/ou ln3.

$a=\ln 12$ $b=\ln\sqrt{8}$ $c=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $d=\ln(2\sqrt{e})$ $f=\ln\left(\dfrac{9}{e}\right)$

Exercice 6: Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln x$, où x est un réel positif.

$a=\ln(x^4)$ $b=\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$ $c=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{e}\right)$ $d=\ln(ex)$ $f=\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{e}}\right)$

Exercice 7: Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme lnA, où A est un réel strictement positif.

a=ln4+ln5 b=ln6-ln7 $c=\dfrac{1}{2}\ln 3-\ln 5$ $d=4\ln 2-\dfrac{1}{2}$ e= $\dfrac{1}{2}(\ln 5+\ln 3)$

Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition :

a. $\ln(x+1)+\ln(x)=0$ b. $\ln(x^2+1)=\ln(x)$

c. $\ln(3-x)\times\ln(x+1)=0$ d. $\ln(5x-6)-2\ln(x)=0$

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln(e^x+1)=\ln 2$ b. $\ln(2e^x+1)=1$ c. $e^{1+\ln x}=2x-1$ d. $e^{2\ln x-3}=x$

Exercice 10: Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2\ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 5 \\ xy=5 \end{cases}$$

Exercice 11: Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inéquation :

a. $0{,}7^n<0{,}01$ b. $1{,}05^n>2$ c. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<10^{-3}$ d. $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\geqslant 0{,}99$

Exercice 12: La suite (u_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $u_0=50$.

a. Exprimer u_n en fonction de n .

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $u_n>9000$?

c. Quels sont les entiers naturels n tels que $u_n<10^{11}$?

Exercice 13: Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée des fonctions suivantes.

a. $f(x)=5x+1-\ln x$ b. $f(x)=x^2\ln x$

c. $f(x)=\frac{\ln x}{2x}$

d. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

e. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

f. $f(x)=\ln(5x-3)$

g. $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$

Exercice 14: Calculer les limites en zéro et en l'infini des fonctions suivantes

a. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ b. $g(x)=x+(\ln x)^2$

c. $h(x)=x^2\ln x-x$ d. $k(x)=\ln x+\frac{1}{x^2}$

Exercice 15: On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=\frac{5x\ln x}{1+x^2}$.

Déterminer les limites de *f* en zéro et en l'infini.
Quelle asymptote peut-on en déduire ?

Exercice 16: Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle]1 ; + ∞[par : $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$.

1. Déterminer les limites de *f* en 1 et en l'infini.
2. Justifier que *f* est dérivable sur l'intervalle]1 ; +∞[et calculer sa dérivée.
3. Étudier le sens de variation de *f*.

Exercice 17: Soit la fonction *g* définie sur]- ∞ ; 0[par : $g(x)=\ln(1-e^x)$.

1. Déterminer les limites de *g* en - ∞ et en 0. Que peut-on en déduire ?
2. Étudier le sens de variation de *g*. Dresser son tableau de variations.
3. Résoudre l'équation $g(x)=-10$

Exercice 18:

1. Soit *u* la fonction définie sur]0 ; +∞[par $u(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

   a. Déterminer les limites de *u* en 0 et en +∞.
   b. Étudier le sens de variation de *u*.
   c. Étudier le signe de $u(x)$
   d. Résoudre l'équation $u(x)=1$.

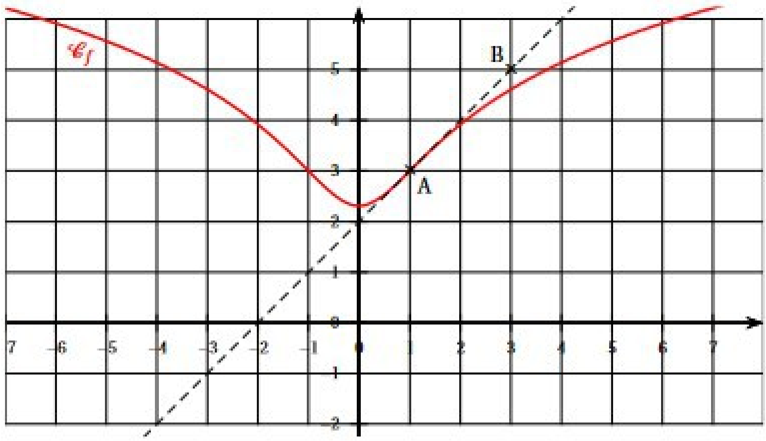
2. Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)$.

   a. Justifier que *f* est définie sur]0 ; 1[.
   b. Déterminer les limites de *f* en 0 et en 1.
   c. Quel est le sens de variation de *f* ?
   d. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de *x*.

Exercice 20 : Bac

Soit f une fonction définie et dérivable sur ℝ On considère les points A(1;3) et B(3;5).

On donne ci-dessous C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe C_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x)=\ln(ax^2+1)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B :

On admet que la fonction f est définie sur ℝpar $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. En utilisant le tableau de variations, déterminer l'ensemble des valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x)=3+\ln 2$.

Partie C.

On rappelle que la fonction f est définie sur ℝpar $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f .
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction est convexe.

Exercice 21 : Bac

Partie A :

On considère la fonction f définie pour tout réel x de [0;1] par $f(x)=e^{-x}+\ln(x)$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur [0;1]. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à [0;1], on a : $f'(x)=\dfrac{1-x\,e^{-x}}{x}$.
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à [0;1], on a $x\,e^{-x}<1$
   En déduire le tableau de variation de f sur [0;1].
4. Démontrer qu'il existe un unique réel l appartenant à]0;1] tel que $f(l)=0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0=\dfrac{1}{10}$, $b_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=e^{b_n}$ et $b_{n+1}=e^{-a_n}$.

a. calculer a_1 et b_1. On donnera les valeurs approchées à 10^{-2} près.

2. b. On considère ci-dessous la fonction termes, écrite en langage Python.

```
Def termes(n) :
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n):
        c= …..
        b …..
        a = c
   return (a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier la fonction de telle sorte que la fonction termes renvoie le couple a_n, b_n.

2. On rappelle que la fonction $x \rightarrow \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur ℝ
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$
   b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle]0;1], et que $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$.
   a. Démontrer que $f(\mathrm{A}) = 0$.
   b. Déterminer A-B.

Exercice 22 : Bac

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x) = x\ln(x) - x - 2$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur]0;+∞[.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à]0;+∞[, on $f'(x) = \ln(x)$.
   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
   c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle]0;+∞[.
   d. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la tangente T.
2. a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
   b. Démontrer que la limite de la fonction f en +∞ est égale à +∞.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle]0;+∞[.
4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle]0;+∞[.
   On note α cette solution.
   b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle]4,3;4,4[.
   c. en déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle]0;+∞[.
5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage Python.
   On rappelle que la fonction log du module mtah (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
Def  seuil(pas) :
    x=4,3
    while x*log(x)-x-2<0 :
        x = x*pas
    return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil(0,01) ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice .

Exercice 23 : Bac

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{4}x$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x)=\frac{e^x-3}{4(e^x+1)}$.

   b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

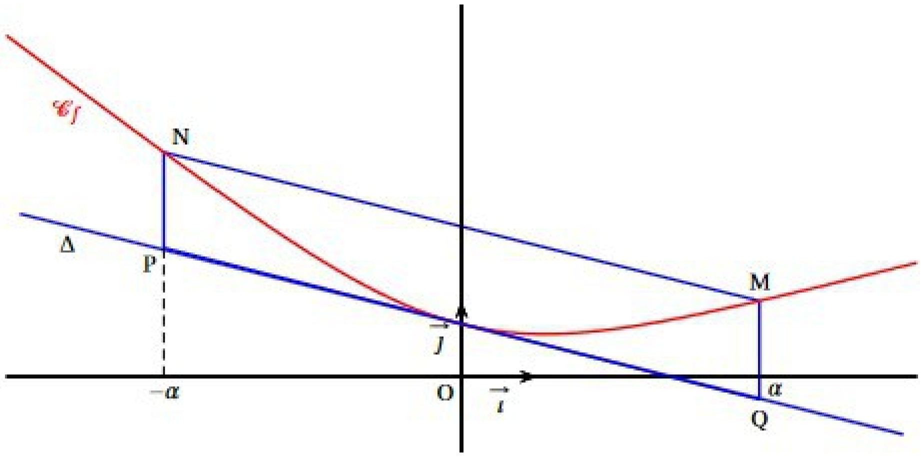
   c. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle [2;5].

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$et pour tout réel x , $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe C_f la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe C_f d'abscisses respectives a et $-a$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives a et $-a$.



1. a. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

   b. En déduire que la portion de la courbe C_f sur *l'intervall* e$[-a\,;a]$ est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2. a. Montrer que $f(-a)=\ln(e^{-a}+1)+\frac{3}{4}a$

   b. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.