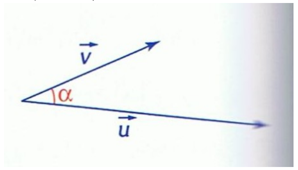
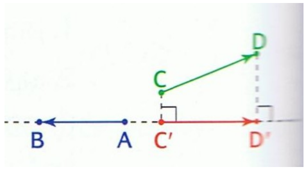
Le produit scalaire dans le plan.

I. Les quatre expressions du produit scalaire.

1. Dans le plan, une unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par:
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors:
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.



3. Si, dans un repère orthogonal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$, alors: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.
4. Si $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.



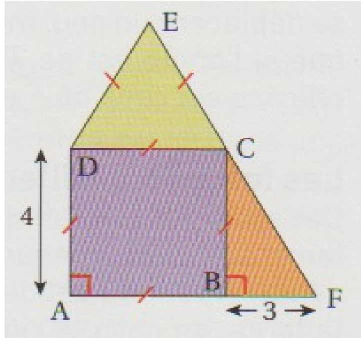
II. Orthogonalité et distance.

Propriété: Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
On a $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

III. Exercices.

Exercice 1:
On considère la figure ci-dessous.



Calculer les produits scalaires.
a. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FA}$ c. $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BF}$ d. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{FB}$

Exercice 2: Dans chaque cas, calculer $\vec{u}.\vec{v}$.
a. $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|=6$
b. $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=4$

Exercice 3: Soit un parallélogramme ABCD tel que AB=6, AD=3 et AC=8.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 : P et Q sont deux points d'un demi-cercle de diamètre [AB]. Les droites (AP) et (BQ) se coupent en un point M.
1. Démontrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$ et que $\overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{BM} = AB^2$.

Exercice 5: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on a: A(2;-1), B(4;2), C(4;0) et D(1;2).
1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
2. Qu'en déduit-on pour les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 6: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), soit A(2;1), B(6;-1), C(7;1) et D(3;3) 4 points.
1. Quelle est la nature du triangle ABC?
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?