Corrigé du DM 4.

Exercice 2 : Les fonctions avec un paramètre.
Rappel :
Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite paire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=f(x)$
Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite impaire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=-f(x)$

Soit λ un réel non nul fixé et g_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g_\lambda=\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$.

Soit Γ_λ la courbe représentative de g_λ dans un repère.

1. Étudier la parité de la fonction g_λ .

   Le domaine de définition étant $\mathbb{R}$, il est symétrique par rapport 0.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(-x)=\mathrm{e}^{-\lambda(-x)^2}=\mathrm{e}^{-\lambda x^2}=g_\lambda(x)$.

   Nous pouvons en déduire que la fonction g_λ est paire

2. Déterminer le sens de variation de g_λ .

   Déterminons la dérivée de la fonction g_λ .

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'_\lambda(x)=-\lambda\times 2x\times \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$

   $\mathrm{e}^{-\lambda x^2}>0$ pour tout x , donc le signe de $g'_\lambda(x)$ dépend du signe de λ et du signe de $-2x$
   .

   Nous distinguerons deux cas :

   Cas 1 : λ est positif.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_\lambda(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

   Cas 2 : λ est négatif.

x	?		0		?
$g_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_\lambda(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

3. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ . En déduire la convexité de g_λ .

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''_\lambda(x)=-2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x^2}+(-2\lambda x)(-2\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x^2}=(-2\lambda+4\lambda^2x^2)\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$

   Pour tout x , donc le signe de $g''_\lambda(x)$ dépend du signe de de $-2\lambda+4\lambda^2x^2$

   Étudions le signe de $-2\lambda+4\lambda^2x^2$.

$\Delta=0-4\times(4\lambda^2)\times-2\lambda=128\lambda^3$.

Distinguons trois cas :

cas 1 : $\lambda<0$,alors $\Delta<0$ et $-2\lambda+4\lambda^2x^2$ n'admet pas de racine, et est donc du signe de a sur $\mathbb{R}$

Donc, $-2\lambda+4\lambda^2x^2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ Ainsi, $g''_\lambda(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ La fonction g_λ est donc convexe sur $\mathbb{R}$

Cas 2 : $\lambda=0$, alors $\Delta=0$, et $x_0=0$ est la racine de $-2\lambda+4\lambda^2x^2$.

Donc, $-2\lambda+4\lambda^2x^2\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ Ainsi, $g''_\lambda(x)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ La fonction g_λ est donc convexe sur $\mathbb{R}$

Cas 3 : $\lambda>0$, alors $\Delta>0$, et donc $x_1=\dfrac{-\sqrt{128\lambda^3}}{8\lambda^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{128\lambda^3}}{8\lambda^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ sont les racines de $-2\lambda+4\lambda^2x^2$.

La fonction g''_λ est donc positive sur $]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};+\infty[$ et négative sur $]-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[$, nous pouvons donc conclure que g_λ est convexe sur $]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};+\infty[$, et est concave sur $]-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}};\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}[$.

4. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points d'inflexion?Si oui, en donner l'abscisse.

   En reprenant l'étude menée dans la question précédente, nous pouvons en déduire que Γ_λ n'admet pas de point d'inflexion si $\lambda\leqslant 0$

   Si $\lambda>0$, Γ_λ admet deux points d'inflexion aux points d'abscisse $\dfrac{-1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

5. Tracer la représentation graphique de la fonction Γ_λ .

Exercice 2 :

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude, la population est de 100000 insectes. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel , le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400000.

Partie A: Étude d'un premier modèle en laboratoire.

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire,en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60% chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes,exprimé en millions,au bout de n mois. On a donc $u_0=0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :$u_n=0{,}1\times 1{,}6^n$.

   D'un mois à l'autre, la population augmente de 60%, on a donc

   $u_{n+1}=\left(1+\dfrac{60}{100}\right)\times u_n=1{,}6\times u_n$

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison 1,6 et de premier terme $u_0=0{,}1$. Par conséquent, pour tout n $\in\mathbb{N}$, $u_n=0{,}1\times 1{,}6^n$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,6. et de premier terme $u_0=0{,}1$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. En utilisant votre calculatrice,déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n>10$.
   $n=10$
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.
   Non, puisqu'au bout de 10 ans, il y aura plus de 100000000 insectes et que la suite est croissante.

Partie B: Étude d'un second modèle.

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes,les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite f définie par: $v_0=0{,}1$ et,pour tout entier naturel n ,$v_{n+1}=1{,}6v_n-1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n ,v_n est le nombre d'insectes,exprimé en millions,au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
   Au bout d'un mois, on a $v_1=1{,}6\times v_0-1{,}6v_0^2=0{,}144$, soit 144 000 insectes.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1{,}6x-1{,}6x^2$.

   a. Résoudre l'équation $f(x)=x$.

   $f(x)=x$

   $\Leftrightarrow 1{,}6x-1{,}6x^2=x$

   $\Leftrightarrow -1{,}6x^2+0{,}6x = 0$

   $\Leftrightarrow x(-1{,}6x+0{,}6)=0$

   Cette équation admet deux solutions : $x=0$ et $x=\dfrac{0{,}6}{1{,}6}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$

   La fonction f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$,

   $f'(x)=1{,}6-3{,}2x$

   $1{,}6-3{,}2x>0$

   $\Leftrightarrow x>\dfrac{1{,}6}{3{,}2}$

   Par conséquent, $f'(x)\geqslant 0$ pour $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et donc f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
3. a. Montrer par récurrence que,pour tout entier naturel n , $0\leqslant vn\leqslant vn+1\leqslant\frac{1}{2}$

   Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.

   Initialisation : nous savons que $v_0=0{,}1$ et $v_1=0{,}144$ donc l'initialisation est vraie.

   Hérédité : soit un entier k , supposons que $0\leqslant v_k\leqslant v_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0\leqslant v_{k+1}\leqslant v_{k+2}\leqslant\frac{1}{2}$.

   Nous savons que $0\leqslant v_k\leqslant v_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}$

   En appliquant la fonction f , laquelle est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, nous obtenons :

$f(0) \leqslant f(v_k) \leqslant f(v_{k+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4$

Cela nous donne donc, $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 0{,}4 \leqslant 0{,}5$

L'hérédité est vérifiée, nous pouvons donc en déduire que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n .

b.Montrer que la suite (v_n) est convergente.

La suite (v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

Nous savons que la suite (v_n) converge et est bornée entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, nous savons que $0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}$.

De plus, (v_n) est croissante, donc, $l = \frac{3}{8}$

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

3/8=0,375<0,4, par conséquent, l'équilibre est préservé.

4. On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
Def seuil(a) :
    v = 0,1
    n = 0
    while v<a :
        v = 1,6*v-1,6*v*v
        n = n +1
    return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?

On obtient une boucle infinie puisque la condition est toujours vérifiée.

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35). Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice

Le nombre renvoyé par la fonction est 6. Nous pouvons donc dire qu'au bout de 6 ans, la population d'insectes dépasse les 350 000 individus.