Devoir Maison n°1.

Exercice 1 : Dans le Périgord, un producteur cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kg de truffes noires par semaine.
On désigne par x le nombre de kilogrammes de truffes traitées chaque semaine et par $f(x)$ le coût unitaire de revient, en euro. Chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450€.
On admet dans la suite du problème que la fonction f est définie sur [0;45] par
$f(x)=x^2-60x+975$.

1. Justifier que le coût de production total, noté $\mathrm{C}(x)$ pour x kg de truffes, est $\mathrm{C}(x)=x^3-60x^2+975x$.
   Soit f la fonction coût unitaire, pour obtenir le coût total, il faut donc multiplier $f(x)$ par x
   $\mathrm{C}(x)=x\times f(x)=x\times(x^2-60x+975)=x^3-60x^2+975x$

2. Justifier que le bénéfice total, noté $\mathrm{B}(x)$ pour x kg de truffes, est $\mathrm{B}(x)=-x^3+60x^2-525x$.
   Le bénéfice est la différence entre la recette et les coûts.
   Or, un kilo de truffes est vendu 450 euros, donc la recette pour x kilos de truffes vendues est donc de $450x$.
   Par suite, $\mathrm{B}(x)=450x-\mathrm{C}(x)=450-(x^3-60x^2+975x)=-x^3+60x^2-525x$.
3. Déterminer la fonction dérivée B' de la fonction B, définie sur l'intervalle [0;45].
   La fonction B est une fonction polynôme de degré trois définie sur l'intervalle [0;45], elle est donc dérivable sur l'intervalle [0;45].
   Pour tout $x\in[0;45]$, $\mathrm{B}'(x)=-3x^2+2\times60x-525=-3x^2+120x-525$.
4. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0;45].
   Pour déterminer les variations d'une fonction, il faut étudier le signe de sa dérivée.
   La fonction B' est une fonction polynome du second degré. Nous allons donc calculer son discriminant.
   $\Delta=b^2-4ac$ = 120²-4*(-3)*(-525)=8100>0
   $\mathrm{B}'(x)$ admet donc deux racines :
   $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-120-\sqrt{8100}}{-6}=35$
   $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-120+\sqrt{8100}}{-6}=5$

x	0		5		35		45
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	0	↘	250	↗	12250	↘	8775

5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ?
   Le bénéfice est maximale pour 35 kilogrammes de truffes, il est alors de 12250€.

Exercice 2 : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1=\dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}u_n$ pour tout $n\geqslant1$.

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

$u_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$u_3=\frac{3}{6}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$

$u_4=\frac{4}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{4}{81}$.

2. On pose $v_n=\frac{u_n}{n}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont vous déterminerez le premier terme.

   $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1}=\frac{u_n}{3n}=\frac{1}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{3}$

3. Montrer que $u_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   (v_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=\frac{1}{3}$, on a que

   $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   Or $u_n=v_n\times n$

   Par conséquent, $u_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n\geqslant 1$.

4. Montrer que $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-2n)$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

5. Soit la fonction python suivante.

```python
def borne(epsilon):
    n=1
    while n*(1/3)**n> epsilon:
        n = n+1
    return n
```

   a. Que renvoie l'instruction borne(10**(-3)) ?
   b. Expliquer l'utilité de la fonction borne() ?
   c. Vers quelle grandeur semble tendre la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?