Devoir Maison n°6.

Partie A : Un résultat bien utile !

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

- **la suite (u_n) est croissante,**
- **la suite (v_n) est décroissante,**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$**.**

1. On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$
   Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$par $t_n = v_n - u_n$.
   Montrer que la suite (t_n) est décroissante.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geqslant u_n$.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et justifier qu'elles ont la même limite.

Théorème : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Partie B : Mise en application.

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n par :
   $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2}$
   $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < v_n$.
   b. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   c. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) admettent la même limite.