Exercices : loi binomiale.

Exercice 1 : On dispose d'une urne composée de deux boules noires, deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète deux fois de suite l'opération de manière identique et indépendante.

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A: « on tire deux boules noires » ;
   B: « on tire deux boules rouges » ;
   C: « on tire deux boules rouges de même couleur ».

Exercice 2 : Une chaîne de restauration rapide effectue une analyse du temps mis par un client pour prendre sa commande.Elle aboutit au classement des clients en trois catégories :

- R: le client rapide, le temps de commande est de 10 secondes.
- C: le client classique, le temps de commande est de 15 secondes.
- H: le client hésitant, le temps de commande est de 30secondes.

On suppose que les clients se répartissent de la façon suivante : 75% de classiques, 10% de rapides et 15% d'hésitants.
Trois clients se présentent successivement à la caisse et on suppose que leur temps d'attente sont indépendants.

1. Faire un arbre pondéré correspondant à la situation.
2. Quelle est la probabilité que les trois clients soient rapides ?
3. On appelle D la variable aléatoire correspondant au temps total de commande pour trois clients.
   a. Déterminer la loi de probabilité de D.
   b. Déterminer l'espérance de D.

Exercice 3 : Le cycle d'allumage d'un feu tricolore est le suivant :

- feu vert pendant 20 secondes ;
- feu orange pendant 5 secondes ;
- feu rouge pendant 35 secondes.

Un automobiliste rencontre trois feux (identiques à celui décrit ci-dessus) qui fonctionnent de manière indépendante.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   A: « l'automobiliste rencontre trois feux verts » ;
   B: « l'automobiliste rencontre un seul feu rouge » ;
   C: « l'automobiliste rencontre au moins un feu vert ».

Exercice 4 : Marie se rend dans une bibliothèque qui contient 10000 livres, dont 5000 sont des romans policiers, 3000 des romans historiques et le reste des livres de poésie.
Elle choisit au hasard deux livres ; le grand nombre de livres permet de considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que Marie ait pris deux livres de poésie.
3. Calculer la probabilité que Marie ait pris exactement un roman policier.
4. Calculer la probabilité que Marie n'ait pris aucun roman historique.
5. Marie prétend qu'elle a plus de chances d'avoir au moins un livre de poésie que d'avoir exactement un roman historique. A-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 5 : Un sac contient trois jetons rouges numérotés de 1 à 3, quatre jetons verts numérotés de 1 à 4 et un jeton noir numéroté 1. A l'aide de l'expérience consistant à tirer un jeton au hasard dans le sac, on définit différentes épreuves de Bernoulli. Préciser dans chaque cas le paramètre p.
a. L'issue est un succès si le jeton tiré est rouge.
b. L'issue est un succès si le jeton tiré est numéroté 1.
c. L'issue est un succès si le jeton tiré est rouge ou numéroté 1.
d. L'issue est un échec si le jeton tiré est noir.
e. L'issue est un échec si le jeton tiré est vert ou numéroté 2.

Exercice 6 : Dans chaque cas, justifier si l'expérience décrite permet de définir un schéma de Bernoulli.
a. On lance six fois de suite un dé équilibré à six faces.
b. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « pile ».
c. On tire au hasard dix boules dans un sac contenant dix boules rouges et dix boules vertes.
d. On tire les yeux bandés, trois flèches dans une cible.

Exercice 7 :

1. Déterminer sans calculatrice les coefficients binomiaux suivants.
   a. $\binom{17}{0}$ b. $\binom{17}{1}$ c. $\binom{17}{17}$ d. $\binom{17}{16}$
2. On donne $\binom{17}{8} = 24310$.
   En déduire $\binom{17}{9}$ et $\binom{18}{9}$.

Exercice 8 : La combinaison $\binom{n}{k}$ donne le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.
Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre de façons de faire les choix suivants.
a. On désigne au hasard 2 délégués dans une classe de 35 élèves.
b. A la fin d'un match, on désigne au hasard 3 joueurs parmi les 11 d'une équipe de football pour un test anti-dopage.
c. On invente un accord au piano en jouant trois notes au hasard d'une octave.
d. On sépare 20 enfants pour former deux équipes de 10.

Exercice 9 : On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}$.

1. Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, S_1, S_2, S_3 et S_4.
   Conjecturer une expression de S_n en fonction de n.
2. Écrire la somme S_5 en utilisant une propriété du cours. Justifier que $S_5 = 2S_4$.
3. a. Montrer de même que $S_{n+1} = 2S_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   b. En déduire S_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 10 : Au concours du saut en longueur, un sportif français sait qu'il mord la ligne aléatoirement une fois sur trois. Un saut est réussi s'il ne mord pas. Une série de saut comprend trois tentatives.

1. Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un schéma de Bernoulli.
   a. Construire l'arbre de probabilité des trois tentatives en notant S un saut réussi et en précisant la probabilité de chaque issue.
   b. Quelle est la probabilité que le sportif morde ses essais ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un essai ?
   d. Quelle est la probabilité qu'il mordre les deux premiers et réussisse le troisième ?
   e. Quelle est la probabilité qu'il ne réussisse qu'un seul essai ?
2. On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   b. Retrouver alors la probabilité que le sportif ne réussisse qu'un seul essai.

Exercice 11 : On lance deux dés cubiques bien équilibrés . On gagne si les deux chiffres des deux dés sont identiques.

1. Calculer la probabilité de gagner.
2. On répète quatre fois l'expérience et on définit la variable aléatoire X donnant le nombre de parties gagnées.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité de ne pas gagner.
   c. Déterminer la probabilité de gagner deux fois.

Exercice 12 : Une classe compte 30 élèves, dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève sans se rappeler quels élèves il a précédemment interrogés.
Soit n un entier positif ou nul ; on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées au cours de n cours consécutifs.

1. Quelle loi de probabilité de X ?
2. Quelle est la probabilité que, sur 10 cours consécutifs soient interrogées 4 filles exactement ? Au moins 4 filles ?
3. Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 13 : Dans un fête foraine, pour une mise de 8€, un joueur est invité à lancer 10 fois de suite une pièce de monnaie supposée équilibrée. Si le joueur obtient 10 face, il reprend sa mise et empoche 5000€. Dans le cas contraire, il ne gagne rien et abandonne sa mise.

1. Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu vous semble-t-il équitable ? Joueriez vous ?
2. Devant la trop faible participation des joueurs, l'organisateur décide de ramener la mise à 4€. Pourra-t-il maintenir longtemps ce jeu ? Expliquer.
3. Déterminer au centime près quelle devrait être la mise pour que le jeu soit vraiment équitable ?

Exercice 14 : Deux joueurs A et B s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que A gagne une partie est 0,6. A et B jouent neuf parties ; le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties. Soit X la variable donnant le nombre de parties gagnées par B.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Écrire l'événement « B gagne le tournoi » à l'aide de X puis calculer sa probabilité.

Exercice 15 : Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est 2/3 et celle qu'il soit au rouge ou à l'orange est 1/3. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. a. Exprimer T en fonction de X.
   b. Déterminer E(T) et interpréter ce résultat.
3. L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il arrive en retard.

Exercice 16 : Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limiter les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant mes 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet coûte 10 euros ; en cas de fraude, l'amende est de 100 euros. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. On suppose que p=0,05.
   a. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité Z=400-110X. Calculer E(Z).
2. a. La fraude systématique est-elle favorable ou non pour Théo ?
   b. Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?

Exercice 17 : Chez un fabricant de calculatrices, une étude a montré que 2% des produits ont un défaut. Un professeur a commandé 34 de ces calculatrices pour ses élèves. Les probabilités que ces calculatrices aient des défauts sont indépendantes. On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de calculatrices défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. a. Déterminer à l'aide de la calculatrice (si elle n'est pas défectueuse:-)) la probabilité qu'aucune calculatrice ne soit défectueuse.
   b. En déduire la probabilité qu'au moins une calculatrice soit défectueuse.
   c. Déterminer la probabilité qu'au moins deux calculatrices soient défectueuses.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette loi. Interpréter ce résultat.

Exercice 18 : Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but de ses joueurs. Il a remarqué que pour une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

- 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
- 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire ses deux séries de cinq ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des séries sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs au but réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

1. a. Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but à l'entraînement.
   b. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X\geqslant 8$, sinon il y a échec.
   Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est 0,61.
3. Chaque joueur participe à dix séances d'entraînement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de sucés d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ces 10 entraînements. On donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près.
   Calculer pour un joueur la probabilité :
   a. de n'avoir aucun échec lors des dix séances ;
   b. d'avoir exactement 6 sucés ;
   c. d'avoir au moins un sucés.
4. Déterminer le nombre minimal d'entraînements auxquels doit participer le joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

Exercice 20 : Rapid le lièvre et Dosman la tortue lancent un dé : s'il tombe sur 6, le lièvre gagne et le jeu s'arrête. S'il tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne si elle parvient à avancer de n cases (n entier non nul).
Les lancers se poursuivent jusqu'à ce qu'il ait un gagnant. On note $P_n(T)$ (respectivement $P_n(L)$) la probabilité que la tortue (respectivement le lièvre) gagne.

A. Étude du cas n=4.

1. a. Lequel des concurrent vous paraît-il favorisé ?
   b. Calculer $P_4(T)$ puis $P_4(L)$. Aviez vous raison ?
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.
   a. La loi de X est-elle binomiale ? Déterminer la loi de X et la présenter dans un tableau.
   b. Combien de lancers faut-il en moyenne pour avoir un vainqueur ?
3. Dix parties indépendantes sont jouées. Quelle est la probabilité que la tortue gagne 5 fois exactement ? Au moins deux fois ?

B. Le valeur de n n'est plus fixée.

1. Calculer $P_n(T)$ et déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.
2. Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties jouées. Pour quelles valeurs de n la tortue peut-elle espérer gagner au moins 9 parties sur 10 ?

Exercice 21 : Soit X une variable aléalatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n=45 et p=0,32.

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant a)\geqslant 0{,}025$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.
2. Pour les valeurs de a et b trouvées dans la question 1., déterminer une valeur approchée de $\mathrm{P}(a\leqslant \mathrm{X}\leqslant b)$.

Exercice 22 : On estime que 12,7% des Français sont gauchers. On considère une classe de 35 élèves.
Soit X la variable alèatoire donnant le nombre de gauchers dans la classe.
Le choix des élèves est assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer le plus petit nombre entier a tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant a)\geqslant 0{,}95$
3. Dans la classe, il y a 7 gauchers. Cela est-il étonnant ?

Exercice 23 : Antilles-Guyane septembre 2015
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas du jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0;1].
Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événement suivants :
R: la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J: la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puissent être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 24 : Asie Juin 2013
Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.
Partie A
Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.
10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides. On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A ».
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B ».
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité de l'événement $B\cap\overline{S}$?
   b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B
Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.