# Somme de variables aléatoires.

Nous considérerons dans ce chapitre une expérience aléatoire dont on notera Ω l'univers des issues possibles. On supposera cet univers fini.
On notera P une probabilité sur Ω.

## I. variables aléatoires et opérations.

**Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles associées à une même expérience aléatoire sur un univers fini Ω.**
**Soit *a* un nombre réel.**

- **Soit Z la variable aléatoire définie sur Ω par Z( ω) = X( ω) + Y ( ω) pour tout ω appartenant à Ω.**
  **Cette variable aléatoire est appelée somme des variables aléatoires X et Y. On la note Z=X+Y.**
- **Soit Z la variable aléatoire définie sur Ω par Z( ω)= a X( ω) pour tout ω appartenant à Ω.**
  **On la note** $Z=aX$

## II. Linéarité de l'espérance.

**Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω et** $a$ **un nombre réel.**

- **E(X+Y)=E(X)+E(Y)**
- $E(aX)=aE(X)$

Exemple 1 :

On lance deux dés : un dé jaune cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé vert tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Soit X et Y les variables aléatoires donnant respectivement les résultats affichés par le dé jaune et le dé vert.
a. Donner les lois de probabilités de X et de Y ainsi que leurs espérances.
b. Que représente la variable aléatoire X+Y ?
c. Calculer E(X+Y). Interpréter le résultat.
d. Que représente la variable aléatoire 3X ?
e. Calculer E(3X). Interpréter le résultat.

## III. Variance.

1. Propriété.

**Propriété : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Notons V(X) sa variance.**
**Soit** $a \in \mathbb{R}$
**Alors,** $V(aX)=a^2 V(x)$

Exemple 2: Soit X une variable aléatoire vérifiant V(X)=9.
Cacluler V(2X). En déduire l'écart-type de la variable aléatoire 2X.

2. Variables aléatoires indépendantes.

**Définitions : Soient $\mathrm{X}_1$ , $\mathrm{X}_2$ , .., $\mathrm{X}_n$ , n variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\mathrm{E}_1$ , $\mathrm{E}_2$ , .., $\mathrm{E}_n$ .**
**On dit que $\mathrm{X}_1$ , $\mathrm{X}_2$ , .., $\mathrm{X}_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in \mathrm{E}_1$ , $x_2 \in \mathrm{E}_2$ , .., $x_n \in \mathrm{E}_n$ :**
$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1=x_1 \cap \mathrm{X}_2=x_2 \cap .. \cap \mathrm{X}_n=x_n)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1=x\,1)\times \mathrm{P}(\mathrm{X}_2=x_2)\times .. \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_n=x_n)$

**Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors : V(X+Y)=V(X)+V(Y).**

Remarque : Si X et Y ne sont pas indépendantes, alors, l'égalité n'est pas vraie.

Exemple 3 : Reprenons l'exemple 1.
a. Déterminer V(X) et V(Y).
b. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
c. Calculer V(X+Y).

## IV. Applications .

1. Applications à la loi binomiale.

Exemple 3:
On lance 10 fois un dé cubique bien équilibré. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de six obtenus.
a. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
b. Soit $\mathrm{X}_\mathrm{i}$ la variable aléatoire valant 1 si le dé a fait un six lors du i-ème lancer, et 0 sinon. Quelle loi suit la variable aléatoire $\mathrm{X}_\mathrm{i}$ ? Déterminer $\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$
c. Les variables $\mathrm{X}_1$ , $\mathrm{X}_2$ , .., $\mathrm{X}_n$ sont-elles indépendantes ?
d. Exprimer X en fonction de $\mathrm{X}_1$ , $\mathrm{X}_2$ , .., $\mathrm{X}_n$ .
e. En déduire E(X) et V(X).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ .
X peut être décomposée en une somme de $n$ variables aléatoires indépendantes $\mathrm{X}_1$ , $\mathrm{X}_2$ , .., $\mathrm{X}_n$ suivant une loi de Bernoulli de paramètres $p$ .
Pour tout i ∈ {1, .., n}, $\mathrm{X}_\mathrm{i}$ suit la loi suivante :

| | | |
|---|---|---|
| $x_\mathrm{i}$ | 1 | 0 |
| $\mathrm{P}(\mathrm{X}_\mathrm{i}=x_\mathrm{i})$ | p | 1-p |

Par conséquent,
$\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{i})=1\times p+0\times(1-p)=p$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{i})=p(1-p)^2+(1-p)(0-p)^2=(1-p)((1-p)p+p^2)=(1-p)p$

Nous savons que $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+..+\mathrm{X}_n$ ,
donc $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)+..+\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=p+p+..+p=np$
$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{V}(\mathrm{X}_2)+..+\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)=p(1-p)+p(1-p)+..+p(1-p)=np(1-p)$

**Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.**
$\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$
$\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(-1)$

2. Échantillons de n variables aléatoires identiques et indépendantes.

**Définition : Une liste $(\mathrm{X}_{1,}\mathrm{X}_{2,..,}\mathrm{X}_n)$ de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associé à cette loi.**

Exemple 4 : Soit un dé cubique bien équilibré : une face porte le nombre 1, deux faces portent le nombre 2 et trois faces portent le nombre 3.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre obtenu dont la loi est donnée par le tableau suivant :

| $x_\mathrm{i}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_\mathrm{i})$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

Un échantillon de taille 4 de la loi suivie par X est la liste $(\mathrm{X}_1;\mathrm{X}_2;\mathrm{X}_3;\mathrm{X}_4)$ où chacun des $\mathrm{X}_\mathrm{i}$ suit la loi de X. Cela correspond concrètement à la liste des quatre résultats de quatre lancers du dé.

Soit $(\mathrm{X}_{1,}\mathrm{X}_{2,..,}\mathrm{X}_n)$ un échantillon de taille $n$ .
Soit $\mathrm{S}_n=X_1+X_2+..+X_n$ la somme de ces $n$ variables aléatoires et
$\mathrm{M}_n=\frac{S_n}{n}=\frac{\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+..+\mathrm{X}_n}{n}$ la moyenne de ces n variables aléatoires.

$\mathrm{X}_{1,}\mathrm{X}_{2,..,}\mathrm{X}_n$ suivent la même loi, par conséquent, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)=..=\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$
Nous obtenons donc en utilisant les propriétés de linéarité de l'espérance :
$\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+..+\mathrm{X}_n)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)+..+\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=n\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}\in\{1,2,..,\mathrm{n}\}$
$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)=\frac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)}{n}=\frac{n\,\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{i})}{n}=\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}\in\{1,2,..\mathrm{n}\}$

De plus, $\mathrm{X}_{1,}\mathrm{X}_{2,..,}\mathrm{X}_n$ étant indépendantes , nous obtenons donc que :
$\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+..+\mathrm{X}_n)=\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\mathrm{V}(\mathrm{X}_2)+..+\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)=n\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}\in\{1,2,..,\mathrm{n}\}$
$\mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)=\frac{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}{n^2}=\frac{n\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{i})}{n^2}=\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{i})}{n}$ où $\mathrm{i}\in\{1,2,..,\mathrm{n}\}$