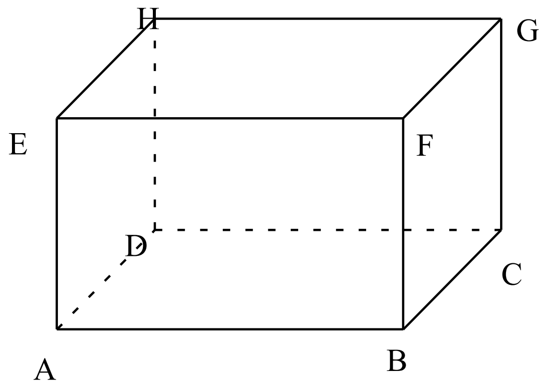
Exercices : produit scalaire.

Exercice 1 : On considère le pavé droite ABCDEFGH ci-dessous tel que AB=8, AD=5 et BC=3.



Les points I et J sont définis par les relations $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DH}$ 3. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CB}$ 4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{EF}$ 6. $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BD}$

Exercice 2: Soit ABCDEFGH un cube. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [EF], [FG] et [BC].

1. Citer deux droites perpendiculaires.
2. Citer deux droites orthogonales mais non perpendiculaires.
3. Citer une droite et un plan orthogonaux entre eux.
4. Justifier que les droites (JK) et (AD) sont orthogonales.
5. Prouver que la droite (GF) est orthogonale au plan (ABI).
6. Citer une autre droite orthogonale au plan (ABI).

Exercice 3 : ABCDEFGH est un cube de côté 1. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [HG].

1. A l'aide des propriétés du cube, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{HJ}$.
2. A l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{EC}$.
3. En déduire l'orthogonalité de certaines droites.
4. Les droites (ID) et (EC) sont-elles orthogonales ?

Exercice4 : ABCDEFGH est un cube de côté 1. I est le milieu de [BC].

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle DGI.
   En déduire sa nature.
2. A l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GD}$.
3. En déduire une valeur approchée de l'angle ($\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GD}$).
4. Déterminer les autres angles du triangle DGI.

Calculer une valeur approchée de l'aire du triangle DGI.

Exercice 5 :

1. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrer que $AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
2. ABCD est un tétraèdre tel que BAC est isocèle en B et DAC est isocèle en D.
   a. Déduire de la question précédente que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
   b. Sans utiliser le produit scalaire, montrer à nouveau que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 6 : ABCD est un tétraèdre régulier d'arête *a*.

1. Exprimer en fonction de *a* les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. Soit I, J, K, L,les milieux respectifs de [AB], [AD], [DC] et [CB]. Justifier que IJKL est un parallélogramme. Que peut-on en dire de plus ?

Exercice 7 : Déterminer les valeurs manquantes :

$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\lVert\vec{u}\rVert$	$\lVert\vec{v}\rVert$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert$	$\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert$
	3	2	4	
5	2			$\sqrt{3}$
8	3	4		

Exercice 8: Dans l'espace, on considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.
Parmi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants, déterminer les couples de vecteurs orthogonaux.

$\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{k}$ $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$ $\vec{w}=-2\vec{i}+\vec{k}$

Exercice 9 : Soient les points A(1;1;1), B(2;0;-2) et C(1;-2;2) trois points dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Donner une mesure en radians à 10^{-2} prés des angles autres que l'angle droit de ce triangle.

Exercice 10 : L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Soient les points $A(1;1;\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.
Soit C le symétrique de A par rapport à O.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 11 : L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Soient les points A(2;3;-1), B(2;8;-1), C(7;3;-1) et D(2;-1;2). Démontrer que les points B, C et

D sont sur la même sphère de centre A.

Exercice 12 : Soient les points A(2;-1;0), B(1;-1;-1) et C(2;0;2) dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

1. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$ et en déduire cos ($\widehat{ABC}$).
2. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Calculer AH et en déduire l'aire du triangle ABC en unités d'aire.

Exercice 13 : Soient les points A(2;1;1), B(6;6;3) et C(2;4;3) trois points dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

Exercice 14 : Soient M(1;-3;1), N(2;5;-1) et P(-2;-3;2) trois points dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Déterminer un vecteur normal au plan (MNP) à coordonnées entières.

Exercice 15 : Dans chaque cas, déterminer une équation de la sphère de centre Ω et de rayon R.

1. Ω(1;2;1) et R=5 2. Ω(-1;3;2) et R=2.

Exercice 16: ABCDEDFGH est un cube de côté . I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [BC].

1. Justifier que (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé de l'espace.
2. a. Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets du cube puis calculer les coordonnées des points I et J.
   b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$.
3. Exprimer d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$ et en déduire un arrondi, au degré prés, de la mesure de l'angle $\widehat{IHJ}$.

Exercice 17:Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A(5;-1;-9), B(7;3;-7), C(9;13;19), D(11;15;13) et E(15;19;1).

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
   b. Que peut-on en déduire pour le point E ?
3. a. Montrer que $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
   b. Que peut-on en déduire pour le point E ?
4. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 18: Plan médiateur d'un segment.
A et B sont deux points distincts de l'espace. I est le milieu de [AB].
On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par I, que l'on note $\mathcal{P}$ dans cet exercice.
Par ailleurs, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace qui sont à égales distances de A et de B.

1. a. Soit M un point appartenant au plan médiateur du segment [AB]. Démontrer, en calculant des carrés scalaires, que MA=MB.
   b. Qu'a-t-on alors démontré quant aux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$?
2. a. On considère un point M de l'espace situé à égale distance de A et de B.
   En transformant l'écriture de MA²-MB², démontrer que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$.
   b. Justifier que la droite (IM) est incluse dans le plan médiateur de [AB].
3. Qu'a-t-on alors finalement démontré quant aux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$?

Exercice 19 : Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points M(1;-1;-1), N(0;3;4) et P(2;0;2).

1. Calculer le produit de $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$ et en déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PMN}$.
2. H est le projeté orthogonal du point N sur la droite (MP). Calculer NH, puis l'aire du triangle MNP.

Exercice 20 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère les points R(1;2;2), S(3;1;-3),T(2;4;2),U(3;0;2) et V(1;1;1).

1. Justifier que R,S et T définissent un plan.
2. La droite (UV) et le plan (RST) sont-ils orthogonaux ?
3. Montrer que $\overrightarrow{RV}=\frac{1}{5}\overrightarrow{RS}-\frac{2}{5}\overrightarrow{RT}$.
4. Que peut-on en déduire pour le point V ?
5. Quel est le projeté orthogonal du point U au plan (RST) ?

Exercice 21 : Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) d'unité 1 cm, on considère les points A(0;-1;5), B(2;-1;5), C(11;0;1), D(11;4;4), I(1;0;0), J(0;1;0) et K(0;0;1).

1. a. Démonter que la droite (AB) est parallèle à l'axe (OI).
   b. La droite (CD) se trouve dans le plan P parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ?
   c. Vérifier que la droite (AB) est orthogonale au plan P .
2. Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde. Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
   A l'instant $t=0$, le point M est en A et le point N est en C.
   On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
   a. Montrer que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0,8t;1+0,6t)$.
   b. Montrer que $M_tN_t^2=2t^2-25,2t+138$
   c. A quel instant la longueur M_tN_t est -elle minimale ?