Exercices : limites de suite.

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes définies sur ℕ par :

1. $u_n=3n-5$
2. $u_n=-4n+2$
3. $u_n=\frac{1}{n+1}$
4. $u_n=-n^2-5n$
5. $u_n=\frac{n^2-5n+3}{n^2+6}$
6. $u_n=\sqrt{n^2+n+1}$
7. $u_n=\frac{\sqrt{n}-2}{n+4}$
8. $u_n=\frac{-3+6n^2}{2n+1}$
9. $u_n=\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}$
10. $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

Exercice 2: La suite (u_n) est définie sur ℕ* par $u_n=\frac{\sin n}{n}$.

1. Montrer que pour tout n ∈ℕ*, $\frac{-1}{n}<\frac{\sin n}{n}<\frac{1}{n}$.
2. En déduire la limite de (u_n)

Exercice 3: Démontrer que les suites u et v suivantes sont convergentes et déterminer leurs limites.

a. $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ b. $v_n=\frac{\cos n}{n^2}$

Exercice 4: La suite (u_n) est définie sur ℕ par $u_n=n^2-n+1$.

1. Montrer que $u_n>n$ pour tout n ∈ℕ
2. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 5: La suite (u_n) est définie pour tout n ∈ℕ par : $u_n=\frac{4n}{5(n+3)(n+1)^2}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n=\frac{4n}{5(n+3)}$ pour tout n ∈ℕ est bornée.
2. En déduire un encadrement de u_n .
3. En déduire la limite de u_n .

Exercice 6: Dans chacun des cas ci-dessous, étudier d'abord la limite de la suite géométrique (u_n) , puis celle de la suite (v_n) .

1. $u_n=1{,}25^n$ et $v_n=1+\left(\frac{5}{4}\right)^n$
2. $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sqrt{n+2}$
3. $u_n=\left(\frac{-1}{4}\right)^n$ et $v_n=\left(\frac{-1}{4}\right)^n\times\left(\frac{2n+1}{3n-4}\right)$
4. $u_n=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ et $v_n=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\times(-2)^{n-3}$

Exercice 7: On considère la suite (u_n) définie par $u_0=161$ et pour tout n ∈ℕ, $u_{n+1}=0{,}6u_n+8$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) en +∞.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-20$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de (u_n) .

Exercice 8: On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout n de ℕ, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-6$.

1. a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b. Montrer que pour tout n de ℕ, $u_n=-5\left(\frac{1}{3}\right)^n+6$.
   c. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient pour tout entier $n\geqslant 1$,

$nw_n=(n+1)w_{n-1}+1$ et $w_0=1$.

On obtient le tableau suivant :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	
1	3	5	7	9	11	13	15	17

a. Détailler le calcul de w_9 .

b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou prise d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2012} .

Exercice 9: On considère la suite (u_n) définie pour tout n $\in\mathbb{N}$par $u_0=-3$ et $u_{n+1}=\sqrt{3+\dfrac{u_n}{2}}$.

a. Démontrer que, pour tout n $\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n\leqslant 2$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et conjecturer sa limite à la calculatrice.

Exercice 10: On considère la suite (u_n) définie pour tout n $\in\mathbb{N}$par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

a.A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) .

b. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 11: Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$par $u_0=-5$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+3$.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+3$.

1. Construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé.
2. Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .
3. Déterminer le réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
   Que représente α graphiquement ?
4. Soit $v_n=u_n-\alpha$, pour tout $n\geqslant 0$.
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique.
   b. En déduire v_n , puis u_n en fonction de n .
5. Démontrer les conjectures faites à la question 2.

Exercice 12: Bac

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation $u_{n+1}=au_n+b$ (a et b sont des réels non nuls tels que $a\neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison *a*.
2. En déduire que si *a* appartient à l'intervalle]-1;1[, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dés qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1}=0{,}75\,h_n+30$.
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 13:Bac

Partie A

On considère la fonction suivante :

```
def calcul(p):
    u= 5
    for i in range(p+1):
        u=0.5u+0.5(k-1)-1.5
    return u
```

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$, et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=0,5\,u_n+0,5\,n-1,5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. A l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,38

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$.
   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0,1\,u_n-0,1\,n+0,5$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=10\times 0,5^n+n-5$.
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).