Loi binomiale.

I. Épreuve de Bernoulli.

Définition :
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues appelées « Succès » et « Échec ». On dit qu'une épreuve de Bernoulli est de paramètre p si la probabilité de l'issue « Succès » est p.

Exemple : On lance un dé cubique supposé équilibré et on considère comme succès l'événement « obtenir un six ». Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Remarque : On utilisera communément la lettre q pour désigner la probabilité d'un échec.
« Succès » et « Échec » sont des événements contraires, on a donc $q=1-p$.

Propriété : Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X, prenant la valeur 1 si S se produit et la valeur 0 sinon, a la loi de probabilité suivante :

k	0	1
P(X=k)	1-p	p

Son espérance est E(X)=p, sa variance est V(X)=p(1-p).
On dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p ou que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

démonstration :
P(X=1)=P(S)=p et P(X=0)=P($\overline{S}$)=1-p
On a alors $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$.
$V(X)=(1-p)\times(0-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)[p+(1-p)]=p(1-p)$

II. Schéma de Bernoulli.

Définition : On appelle schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Un schéma de Bernoulli a deux paramètres : n le nombre de répétitions de l'épreuve et p le paramètre de l'épreuve répétée.

Un schéma de Bernoulli peut être représenté par un arbre ; un résultat est une liste de n issues S ou $\overline{S}$.

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé cubique équilibré.On considère comme succès l'événement obtenir un six.
Cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli de paramètres n=3 et p=1/6.
On peut représenter un schéma de Bernoulli par un arbre.
Un résultat est une liste de 3 issues.
Le chemin $\overline{S}S\overline{S}$ réalise 2 succès sur les 3 répétitions.
Pour obtenir la probabilité d'un chemin, il faut faire le produit des probabilités des issues obtenues à chaque épreuve de Bernoulli.
$P(\overline{S}S\overline{S})=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$.
Pour calculer la probabilité d'obtenir exactement 1 succès, on déterminer la probabilité d'un chemin comportant exactement un succès et on multiplie par le nombre de chemins dans cette situation. Dans notre exemple, nous obtenons donc P(« un succès »)= $\frac{3\times25}{216}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$.

Lorsque n est trop grand, il devient impossible de faire un arbre et de compter le nombre de chemins. On utilise alors des coefficients binomiaux.

III. Coefficients binomiaux.

a. Définition.

Définition : On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli, n $\in \mathbb{N}^*$, représenté par un arbre. Soit un entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle coefficient binomial, ou combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès sur l'arbre représentant l'expérience.
Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Remarque : Si une issue de l'expérience a k succés, elle contient k termes S et n-k termes $\overline{S}$. Compter les issues ayant k succés revient à dénombrer les façons de choisir les places des succès S dans la liste des n termes. D'où le terme de combinaison car on cherche à dénombrer toutes les combinaisons possibles de S et de $\overline{S}$.

Convention : $\binom{0}{0}=1$.

b. Propriétés.

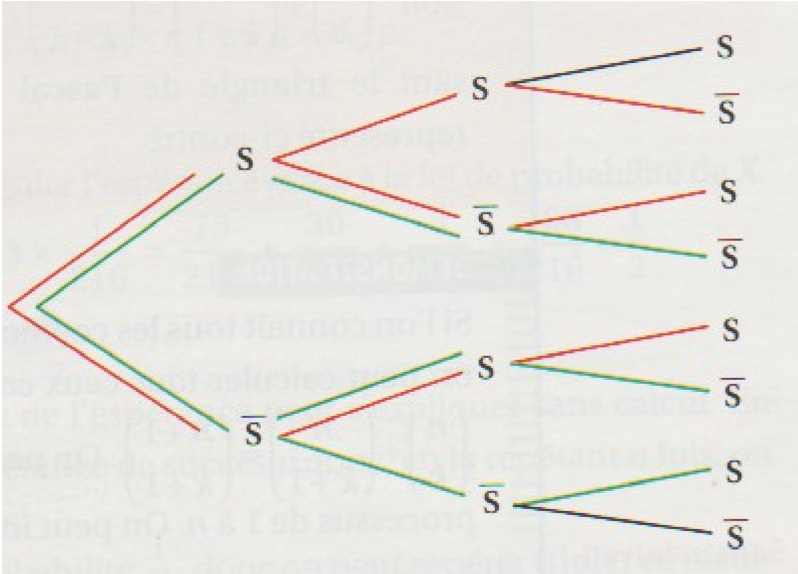
Propriété : Pour tout entier $n \geqslant 0$,
- $\binom{n}{0}=1$
- $\binom{n}{n}=1$
- $\binom{n}{1}=n$

Preuve :
- Un seul chemin conduit à 0 succés lors des n répétitions : $\overline{S}\,\overline{S}..\overline{S}$.
- Un seul chemin conduit à n succés lors des n répétitions : SS..S
- Il y a n chemins réalisant un succès. En effet, les n-uples réalisant un seul succès ne différent que par la place qu'occupe l'unique succès dans la listes des issues. Il y a donc n choix possibles pour placer S.

Propriété : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Preuve :
Lorsqu'il y a n-k succès, il y a k succès. Compter les chemins menant à n-k succès revient à compter ceux menant à k échecs. Dénombrer les façons de placer k succés parmi n échecs revient à calculer la combinaison $\binom{n}{k}$.

Exemple : En construisant un schéma de Bernoulli pour n=3,



on obtient :

- $\binom{3}{0} = 1$ en suivant le chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$
- $\binom{3}{3} = 3$ en suivant le chemin SSS
- $\binom{3}{1} = 3$ en suivant les chemins en rouge (ou en utilisant la propriété du cours)
- $\binom{3}{2} = 3$ en suivant les chemins en vert ou en utilisant la propriété : $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}=3$.

c. Triangle de Pascal.

Théoréme : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :
$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Preuve :Sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli pour n+1 répétitions, les chemins qui conduisent à k+1 succés sont :

- ceux qui conduisent à k succès lors des n premières répétitions et à un succés lors de la n+1-ième répétition. Il y en a $\binom{n}{k}$.
- ceux qui conduisent à k+1 succès lors des n premières répétitions puis à un échec lors de la n+1-ième répétition. Il y en a $\binom{n}{k+1}$.

On en déduit que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Exemple : Calculer $\binom{4}{2}$.

$\binom{4}{2}=\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=3+3=6$

Le triangle de Pascal : on peut calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux à l'aide de la relation $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ et du fait que $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, en construisant le triangle de Pascal ci-dessous.

n \ k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

d. Utilisation de la calculatrice.

En utilisant la calculatrice, calculer $\binom{10}{7}$.

TI: math, PRB puis 3 : combinaison.
10 Combinaison 7

CASIO : OPTN, PRB puis nCr
10 C 7

On obtient 120.

IV. Loi binomiale.

Définition :
Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui donne le nombre total de succès.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramétres n et p.
On la note $B(n, p)$.

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n, p)$, alors pour tout entier k compris entre 0 et n , la probabilité que X soit égale à k est : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Démonstration : On sait que tous les chemins comportant k succés sont équiprobables car, en faisant le produit des probabilités des n issues de chaque épreuve de Bernoulli, on obtient k facteurs p (pour k succès) et n-k facteurs 1-p (pour n-k échecs). Leur probabilité est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.
Il suffit ensuite de compter les chemins menant à k succès ; il y en a $\binom{n}{k}$.
On obtient donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple : On lance trois fois un dé cubique équilibré et on considère comme un succés d'obtenir un 6.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès, X suit une loi binomiale $B\left(3,\dfrac{1}{6}\right)$.

Calculer P(X=1).

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{25}{72}.$$

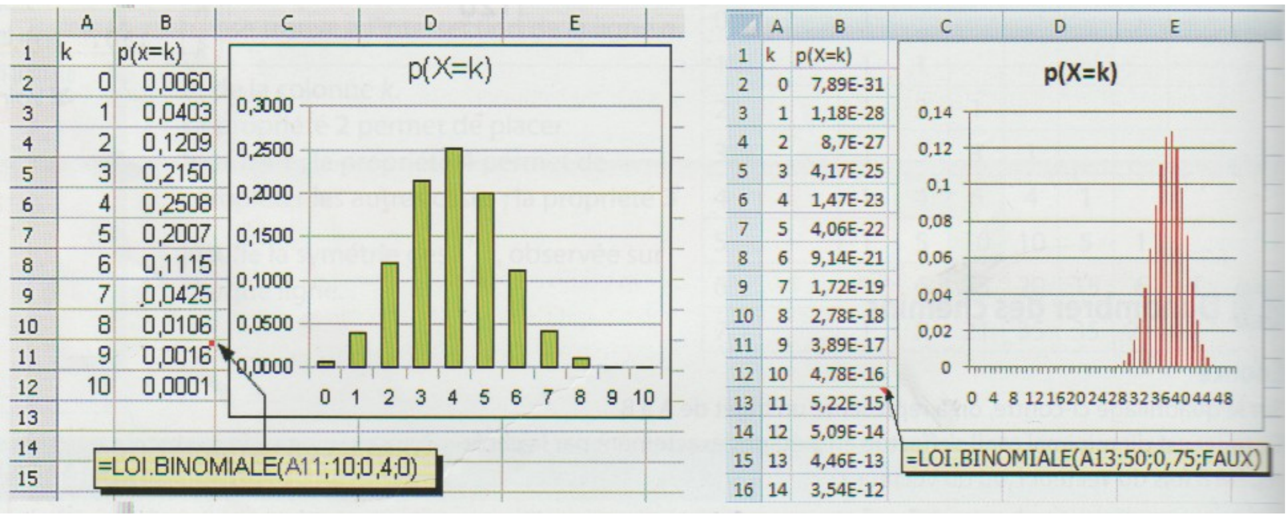
Propriétés : Soit X une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n,p)$.

- $E(X)=n\times p$
- $V(X)=n\times p\times(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{n\times p\times(1-p)}$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on obtient :

$E(X)=\dfrac{1}{2}$, $V(X)=\dfrac{5}{12}$, $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{5}{12}}$.

Représentation graphique : Table de valeurs et représentation graphique de la loi binomiale.



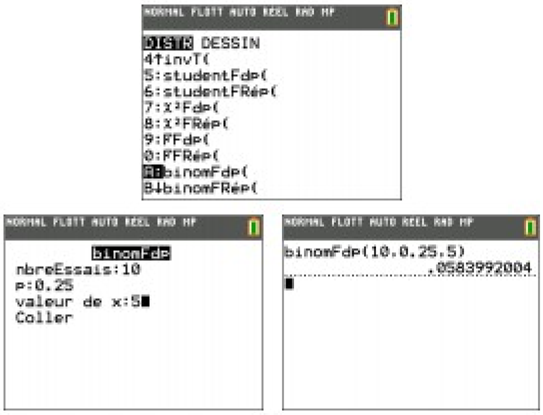
k	p(x=k)
0	0,0060
1	0,0403
2	0,1209
3	0,2150
4	0,2508
5	0,2007
6	0,1115
7	0,0425
8	0,0106
9	0,0016
10	0,0001

k	p(X=k)
0	7,89E-31
1	1,18E-28
2	8,7E-27
3	4,17E-25
4	1,47E-23
5	4,06E-22
6	9,14E-21
7	1,72E-19
8	2,78E-18
9	3,89E-17
10	4,78E-16
11	5,22E-15
12	5,09E-14
13	4,46E-13
14	3,54E-12

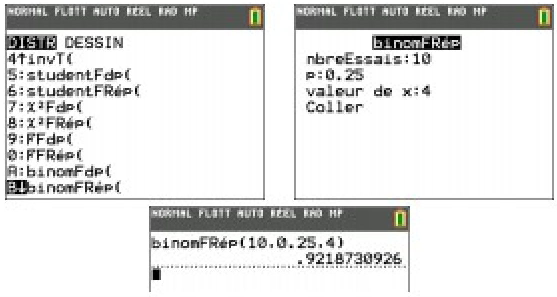
Utilisation de la calculatrice :

- Numworks :
  menu : probabilité, entrer n et p, puis sélectionner la probabilité à calculer.

- TI :

10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès 0.25. *N* suit la loi binomiale de paramètres *n* = 10 et *p* = 0,25. Il faut calculer la probabilité de l'événement « *N* = 5 ». Rubrique **distrib** (touches **2nde** **var**) Sélectionner à l'aide des curseurs **A : binomFdp(** et **entrer** . Renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider avec la touche **entrer**. La séquence a été "collée" dans l'écran de calcul, valider à nouveau avec la touche **entrer**.	

Probabilité de l'événement « *N* ≤ 4 »

Rubrique **distrib** (touches **2nde** **var**) Sélectionner à l'aide des curseurs **.B : binomFRép(** et **entrer**. Renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider avec la touche **entrer**.	

– Casio

Probabilité de l'événement « *N* = 5 »

10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès 0,25. *N* suit la loi binomiale de paramètres *n* = 10 et *p* = 0,25 Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement « *N* = 5 » Dans le menu de Calcul **RUN**. Touche **OPTN** et choix **STAT** (**F5**) puis **DIST** (**F3**) et enfin **BINM** (**F5**) Sélectionner **Bpd** (**F1**) puis renseigner : *Séquence :* **5** **,** **10** **,** **0,25** **)** puis **EXE** Syntaxe de l'instruction : *Bpd(Nombre de succès, nombre de répétitions, probabilité d'un succès)*	

Probabilité de l'événement « *N* ≤4 »

Touche **OPTN** et choix **STAT** (**F5**) puis **DIST** (**F3**) et enfin **BINM** (**F5**) Sélectionner **Bcd** (**F2**) puis renseigner : *Séquence :* **4** **,** **10** **,** **0,25** **)** puis **EXE** Syntaxe de l'instruction : *Bcd(Nombre maximal de succès, nombre de répétitions, probabilité d'un succès)*