Exercices : dérivation, convexité.

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x+2$ si $x<-2$ et $f(x)=-x+2$ si $x\geqslant -2$. La fonction f est-elle dérivable en $x=-2$?
Donner une interprétation graphique du résultat.

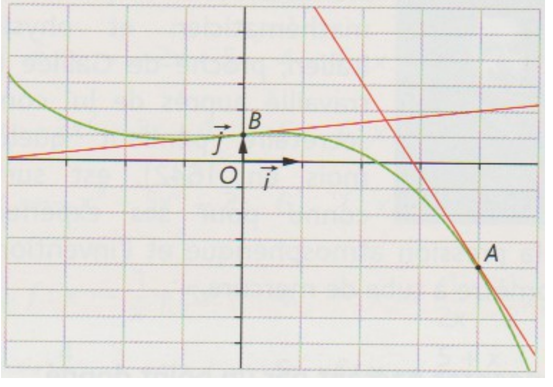
Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=4-0{,}2x$ si $x<10$ et $f(x)=3-0{,}01x^2$ si $x\geqslant 10$.

1. Montrer que f est dérivable en $x=10$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction *f*.

Exercice 3 : Soit E la fonction partie entière , c'est à dire la fonction qui à tout nombre *x* réel fait correspondre l'entier relatif n tel que : $n\leqslant x<n+1$.

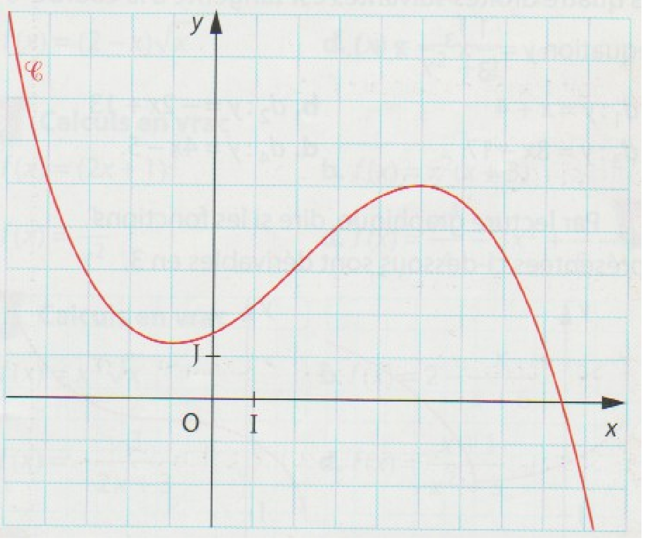
1. Montrer que E(0,1)=0 et E(-0,1)=-1.
2. Prouver que la fonction partie entière n'est pas dérivable en $x=0$.

Exercice 4 : On donne la représentation graphique d'une fonction g définie sur ℝ et de deux de ses tangentes.



Par lecture graphique, donner les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g(4)$ et $g'(4)$.

Exercice 5 : C représente une fonction f dérivable sur ℝ



Déterminer graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a)=0$.

Exercice 6: Dans chacun des cas suivants, donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f*, au point d'abscisse x_0 .

a. $f(x)=2x^3-4x^2-1$; $x_0=2$.

b. $f(x)=\sqrt{x}+1$; $x_0=3$.

c. $f(x)=\dfrac{3}{x}$; $x_0=\sqrt{2}$.

Exercice 7: Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée de la fonction :

$f_1(x)=2x-7$

$f_2(x)=-3x^5+2x^2+7x-1$

$f_3(x)=\dfrac{1}{2x^2-4}$

$f_4(x)=\dfrac{2}{x}-5\sqrt{x}+7$

$f_5(x)=\dfrac{5x^2+\sqrt{x}}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f_6(x)=\dfrac{-4}{x^2+1}$ $f_7(x)=\dfrac{3x+5}{2x-1}$

$f_8(x)=x\sqrt{x}$

$f_9(x)=(2x^2-5)(7x-1)$

$f_{10}(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^4}$

$f_{11}(x)=\sqrt{x-1}$

$f_{12}(x)=\sqrt{2x^2-5}$
$f_{13}(x)=5\sqrt{5x^2+1}$
$f_{14}(x)=-4\sqrt{x^2+1}$
$f_{15}(x)=2x\sqrt{3x-1}$
$f_{16}(x)=8\sqrt{\dfrac{1}{x}}$
$f_{17}(x)=(x-8)^4$
$f_{18}(x)=(2x-1)^{-3}$
$f_{19}(x)=(5x^2-3)^{13}$
$f_{20}(x)=(x^2+5x+1)^7$
$f_{21}(x)=\dfrac{1}{(6-x)^4}$
$f_{22}(x)=(\sqrt{7}x-4)^{-5}$
$f_{23}(x)=\mathrm{e}^{-2x}$
$f_{24}(x)=(3x+7)\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$
$f_{25}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x+1}-1}$

Exercice 8: Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, soit C_f la courbe représentative de la fonction *f* et T la tangente à C_f au point A d'abscisse 2.

1. Écrire une équation de T.
2. A l'aide d'une étude de signe, déterminer la position de C_f par rapport à T.

Exercice 9: Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ et C_f la courbe représentative de *f*.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse *a, a* réel.
2. Existe-t-il une tangente à C_f :

   a. parallèle à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$.

   b. passant par le point P(0;1) ?

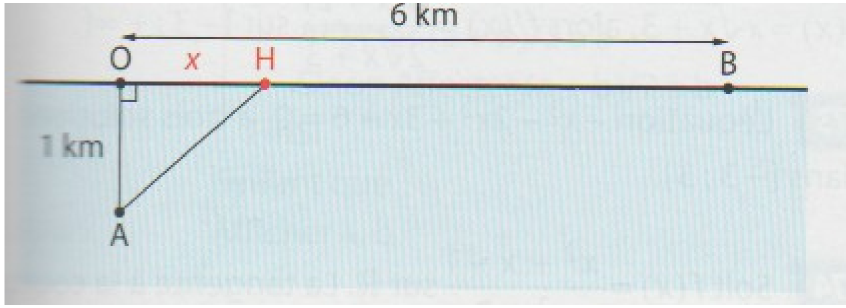
Exercice 10: Étudier les variations des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$, I= $\mathbb{R}$
2. $g(x)=(-4x+7)^{10}$, I= $\mathbb{R}$
3. $h(x)=\sqrt{5x-4}$, I= $\left[\dfrac{4}{5};10\right]$.
4. $\mathrm{i}(x)=\sqrt{9-x^2}$, I=[-3;3].

Exercice 11: Dans chaque cas, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ Calculer $f''(x)$.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{3x^2+2}$
2. $f(x)=x^3+\mathrm{e}^{-x}$
3. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x}$
4. $f(x)=(3x-2)^4$

Exercice 12: On cherche le point H tel que le trajet A-H-B soit le plus rapide possible. Le trajet [AH] en mer est parcouru en canot à une vitesse de 4 $km.h^{-1}$ et le trajet [HB] sur la terre, est parcouru à une vitesse de 5 $km.h^{-1}$.



1. Soit $\mathrm{x}=\mathrm{OH}$, en km, et $t(x)$ la durée totale du parcours de A à B, en heures.
   Montrer que pour $0\leqslant x\leqslant 6$, $t(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{5}(x-6)$.
2. Déterminer $t'(x)$ et établir le sens de variation de t.
3. A quel endroit de la côte le canot doit-il accoster ?

Exercice 13: Soit *f* une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la fonction f' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f''.
Soit a un réel fixé.
On note C_f la courbe représentative de la fonction *f*, A le point de C_f d'abscisse *a* et T la tangente en A à C_f.
A. Un exemple.
Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on a $f(x)=x^3+6x^2-3x+4$ et $a=-2$
.

1. Écrire une équation de la tangente à C_f en A.
2. Montrer que $f(x)-(-15x-4)=(x+2)^3$.
3. En déduire la position de C_f par rapport à T.

B. En général.

1. a. Écrire une équation de la tangente à T en A.
   b. Soit $g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$ pour tout *x* réel.
   Que peut-on dire de T et de C_f si $g(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose que $f''\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
   a. Déterminer le sens de variation de la fonction f'.

b. Calculer $g'(x)$ et en déduire son signe selon que $x \leqslant a$ ou $x \geqslant a$.

c. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$puis le signe de g . Qu'en déduit-on pour C_f et T ?

d. Énoncer la propriété ainsi démontrée.

3. Reprendre la question B.2 pour $f'' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
4. Applications.

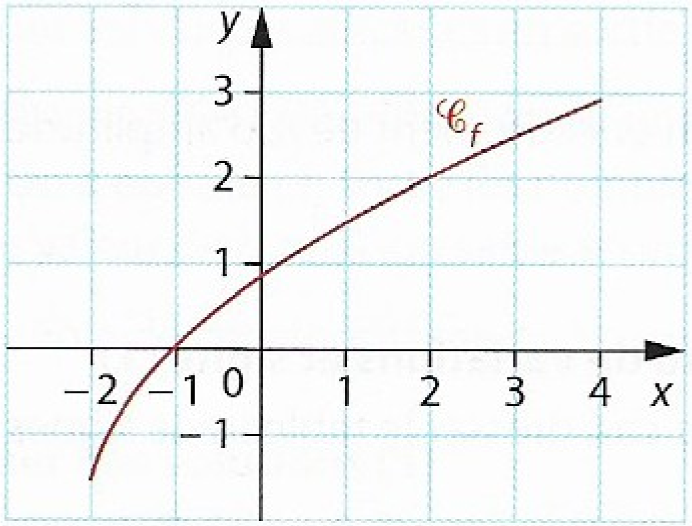
Déterminer la position de C_f par rapport à T dans chacun des cas suivants :

a. $f(x)=2x^4+x^2-3$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$

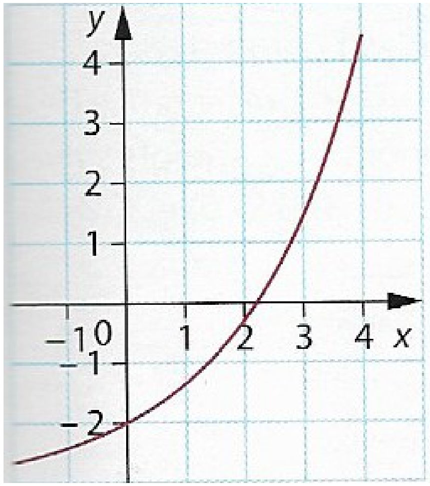
Exercice 14:

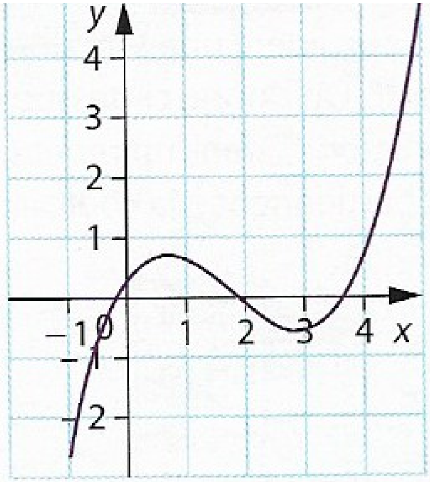
On donne ci-dessous la courbe C représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-2;4].



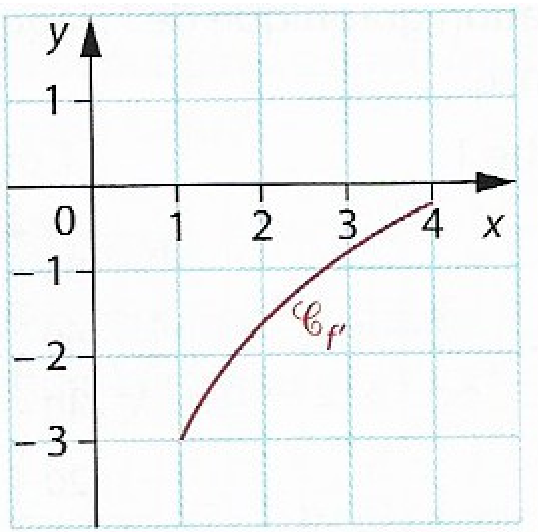
1. A l'aide d'une règle, étudier la position de C par rapport à ses tangentes.
2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur l'intervalle [-2;4] ?
3. La croissance de f est-elle accélérée ou ralentie ?

Exercice 16: Par lecture graphique, étudier la convexité de chacune des fonctions dont la courbe représentative est donnée ci-dessous et préciser les éventuels points d'inflexion de chaque courbe.





Exercice 17: La courbe donnée ci-dessous représente la fonction dérivée f' d'une fonction définie et dérivable sur [1;4].



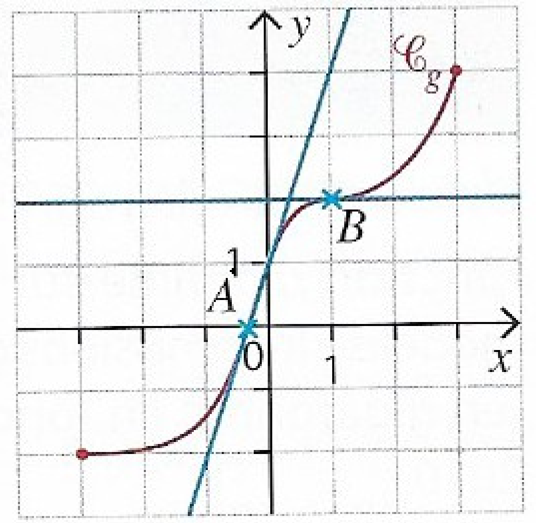
1. a. Par lecture graphique, donner le signe de f' .

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f .

2. a. Par lecture graphique, donner le sens de variation de f' .

b. f est-elle concave ou convexe sur [1;4] ?

Exercice 18: Soit g la fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [-3;3] dont la représentation graphique C_g dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.
A et B sont les points de C_g de coordonnées respectives (-0,3;0) et (1;2).



1. Déterminer graphiquement la convexité de g et préciser les éventuels points d'inflexion de C_g
2. Établir, à partir du graphique, les tableaux de variation complets de g et de g', ainsi que le tableau de signe de g''.

Exercice 19: Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-6;5] dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

x	-6	-2	1	2	5
$f(x)$	4	0	2	0	-2

1. Dresser le tableau de variations de f sur [-6;5].
2. Déterminer la convexité de la fonction f.
3. Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.

Exercice 20: Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$
1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire, que pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 21: Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $f(x)=\sqrt{x}$.
1. Étudier la convexité de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que pour tout x de [0 ; + ∞[, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

   En déduire que $\sqrt{2} \leqslant 1{,}5$

Exercice 22: Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois. On estime le coût fabrication de q bibliothèques à : $C(q)=0{,}1q^3+50q+200$ en euros.
Chaque bibliothèque est vendue 320 €.
1. a. Déterminer le coût de fabrication de 12 bibliothèques.
b. L'ébénisterie dégage-t-elle des bénéfices pour la fabrication et la vente de 12 bibliothèques ?
2. On note $B(q)$ le bénéfice en euro obtenu par la fabrication et la vente de q bibliothèques.
a. Montrer que $B(q)=-0{,}1q^3+270q-200$.
b. Étudier les variations de B sur l'intervalle [10;40].
c. En déduire le nombre de bibliothèques que l'ébénisterie doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal.
3. a. Calculer la dérivée seconde de la fonction B et étudier son signe.
b.Sur l'intervalle [30;40] peut-on qualifier la décroissance du bénéfice de ralentie ou d'accélérer ?

Exercice 23: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=0{,}5x^4+x^3-18x^2+2$.
1. Déterminer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
2. a. Étudier le signe de $f''(x)$.
b. En déduire la convexité de la fonction f.
c. La courbe C_f admet-elle des points d'inflexion ?

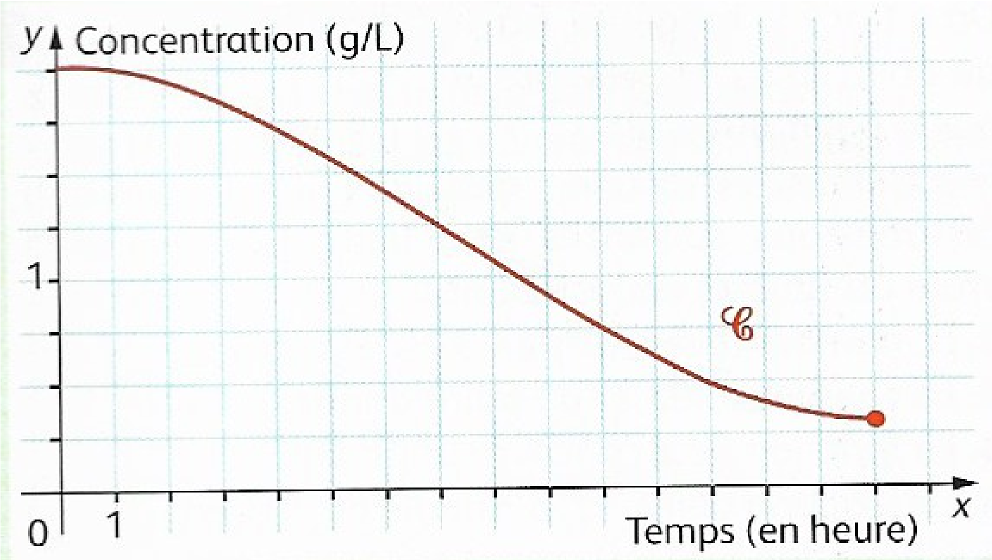
Exercice 24: On considère la fonction f définie sur [1,5;5] par $f(x)=\frac{x^3+1}{x-1}$.

Soit C la courbe représentative de la fonction f.
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g(x)=2x^3-3x^2-1$
1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$
3. En déduire le tableau de signes g sur $\mathbb{R}$ puis sur [1,5;5].
Partie B : Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x de [1,5;5], on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

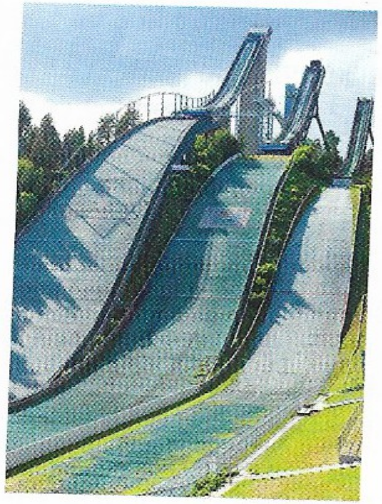
2. En déduire le tableau de signes de f' sur [1,5;5].
3. Construire le tableau de variations de f sur [1,5;5].
4. Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir que pour tout réel de [1,5;5],
$f''(x)=2+\frac{4}{(x-1)^3}$.
5. La fonction f est-elle convexe ou concave sur [1,5;5] ?

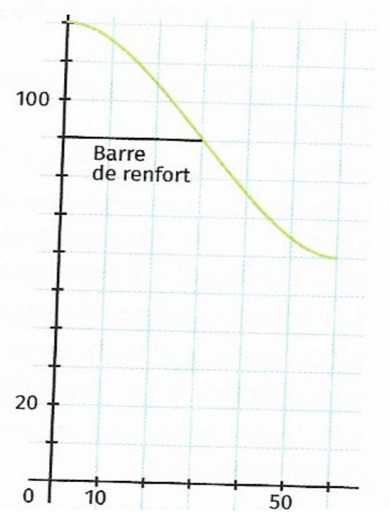
Exercice 25: On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe C suivante.



Partie A : Étude graphique.
Avec la précision permise par le graphique, indiquer :
1. La concentration à l'instant initial.
2. L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,5g/L
Partie B : Étude théorique.
On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction *f* définie sur [0;15] par :
$f(x)=0{,}001\,x^3-0{,}0225\,x^2+2$ où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration en g/L du médicament dans le sang.
1. Étudier les variations de la fonction f sur [0;15].
2. Justifier que l'équation $f(x)=0{,}4$ admet une unique solution α sur [0;15]. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,1.
3. a. Exprimer la dérivée seconde $f''(x)$ en fonction de x.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur [0;15] et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de C.
Partie C : Interprétation des résultats.
En s'aidant des résultats obtenus, répondre aux questions suivantes.
1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,4g/L. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de la concentration ralentit-elle ?

Exercice 26: Une commune des Alpes demande à un ingénieur de modéliser le futur tremplin de saut à ski avec les contraintes suivantes :
- les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales.
- La fonction qui modélise le tremplin est définie sur [0;60] par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec a, b, c et d réels.





1. a. Déterminer la fonction dérivée f' sur [0;60].
   b. Déterminer les nombres dérivées de f en 0 et en 60.
   c. En déduire la valeur de c ainsi qu'une expression de b en fonction de a.
2. a. Déterminer les images de 0 et 60 par f.
   b. Déduire de ce qui précède les valeurs de a, b et d ainsi que l'expression de $f(x)$.
3. a. Étudier la convexité de f sur [0;60].
   b. Déterminer la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion. A quelle hauteur devra-t-elle être placée ?