Combinatoire, dénombrement :
les exercices.

Exercice 1 : L'éclairage d'un local est assuré par un ensemble A d'ampoules électriques commandées par un ensemble I d'interrupteurs.
Comparer les cardinaux de A et I dans chacun des cas suivants.

1. Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il n'y a pas de va-et-vient (système permettant d'éteindre et d'allumer une lampe à partir de deux interrupteurs placés d'un bout à l'autre d'une pièce ou d'un couloir).
2. Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il y a un va-et-vient.
3. Certains interrupteurs commandent plusieurs ampoules et il n'y a pas de va-et-vient.

Exercice 2 : On considère les ensembles A = {7;10;13;15} et B={3;10;12;15;19;22}.
Donner les éléments des ensembles A∪B et A∩B.

Exercice 3 : On considère l'ensemble A={3;5;12;17;22}.
Déterminer l'ensemble B tel que A∩B= {3;17} et A∪B={3;4;5;12;13;17;22;25}

Exercice 4 : Soient A et B deux ensembles tels que Card(A)=12, Card(B)=15 et Card(A∩B)=7.
Calculer Card(A∪B)

Exercice 5 : Un centre périscolaire propose trois activités aux jeunes qui le fréquentent : aide aux devoirs, arts visuels et musique, chaque inscrit devant choisir au moins une activité.
On sait que 45 inscrits demandent au moins de l'aide aux devoirs, 66 font au moins de la musique et 72 au moins des arts visuels.
Six jeunes sont inscrits aux arts visuels et à l'aide aux devoirs et à la musique , 12 à l'aide aux devoirs et à la musique.
Enfin, 15 jeunes sont inscrits aux trois options.
Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

Exercice 6 : Soient A et B deux ensembles disjoints tels que Card(A)=11 et Card(B)=8.
Calculer Card(A∪B) et $\mathrm{C}ard(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$.

Exercice 7 : Soient A l'ensemble des lettres {m ;a ;t ;h ;s} et B l'ensemble {0;1}.

1. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$?
2. Énumérer tous ces éléments.

Exercice 8 : On considère les ensembles A={u;w} et B={0;1}
Déterminer $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\times\mathrm{A}$.

Exercice 9 : Soit E l'ensemble { π, $\sqrt{2}$, 4}.
Lister tous les éléments de E².

Exercice 10 : On considère l'ensemble A des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ dans un repère sont des entiers vérifiant les conditions suivantes :
$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 6 \\ 0\leqslant y\leqslant 12 \end{cases}.$$
Montrer que A est le produit cartésien de deux ensembles E et F que l'on définira et dont on donnera le cardinal.

Exercice 11: Dans une machine à laver, le sélecteur de températures et le sélecteur de durée comportent chacun trois positions.
De combien de programmes de lavages dispose-t-on avec cette machine à laver ?

Exercice 12 : L'adresse IP est un numéro qui identifie chaque ordinateur connecté à internet. Une adresse de type IPV4 est composée de 4 nombres compris entre 0 et 255 inclus.

1. Est-ce suffisant pour identifier cinq milliards d'ordinateurs de manière unique ?
2. De nouvelles adresses, dites IPV6, utilisant six nombres compris entre 0 et 255 inclus voient le jour. Combien d'adresses IPV6 existe-t-il ?

Exercice 13 : En France, les préfixes des numéros de téléphone sont attribués à des opérateurs téléphoniques. Par exemple, tous les numéros commençant par 06 51 sont initialement associés à Free Mobile.
On rappelle qu'en France, un numéro de téléphone est composé de dix chiffres compris entre 0 et 9 inclus.

1. Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8. Combien cela représente-t-il de numéros ?
2. Bouygues Télécom s'est vu attribuer les numéros débutant par 06 58 jusqu'à 06 68 inclus ainsi que les numéros commençant par 06 69 suivis d'un chiffre compris entre 0 et 7 inclus. Combien cela représente-t-il de numéros de téléphone différents ?

Exercice14 : Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On sait que Card(A∪B)=23 et $Card(A\times B)=132$. Déterminer Card(A) et Card(B) sachant que Card(A)<Card(B).

Exercice 15 : Soit n un entier naturel. Simplifier les écritures suivantes :

A = $(n+1)\times n!$ B = $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}$ C = $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$

Exercice 16: Soit n un entier naturel.
Écrire à l'aide de factorielles les nombres suivants :
A = $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)$
B = $n(n+1)(n+2)\ldots 2n$

Exercice 17: Soit A l'ensemble {b,i,e,n}.

1. Donner tous les arrangements à deux éléments de A.
2. Combien d'arrangements à 3 éléments de A existe-t-il ?
3. Combien y a-t-il de permutations de A ?

Exercice 18: Marion a révélé que son mot de passe est composée de toutes les lettres de son prénom, placées dans un ordre différent.

1. Combien cela donne-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités si le mot de passe n'est en fait constitué que de quatre caractères ?

Exercice 19: Dans une pièce de théâtre, il y a six rôles à pourvoir, qui peuvent être joués par n'importe lesquelles des douze personnes de la troupe.
Combien de distributions possibles des rôles peut-on avoir ?

Exercice 20: Pour réviser ses devoirs à venir, Mathilde décide d'organiser son week-end : ce samedi, elle fera une heure de mathématiques, une heure de physique-chimie, une heure de philosophie et une heure de LVA.

1. Combien d'emplois du temps différentes Mathilde peut-elle avoir ?
2. Mathilde décide de regrouper les mathématiques et la physique-chimie en un seul blac. Combien a-t-elle alors d'emplois du temps possibles ?

Exercice 21: Un ensemble A possède 720 permutations. Quel est le cardinal de A ?

Exercice 22 On considère l'ensemble A = {a,b,c,d,e}

1. Écrire toutes les parties de A à deux éléments.
2. Écrire tous les couples de A.

Exercice 23: Au poker, on appelle « main » tout ensemble de cinq cartes.
On considère un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant l'as de pique ?

Exercice 24: Une urne contient 15 boules blanches indiscernables au toucher. Il y a trois boules blanches numérotées de 1 à 3, cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 et sept boules vertes numérotées de 1 à 7.
On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. On note B l'ensemble des boules blanches, R celui des boules rouges et V, celui des boules vertes.
   a. Donner le nombre de tirages simultanés de trois boules :
   - dans B
   - dans R
   - dans V.

   b. En déduire le nombre de tirages unicolores dans l'urne.

Exercice 25: Le proviseur d'un lycée doit constituer un groupe de cinq élèves pour aller présenter leur lycée dans les collèges voisins.

1. Six élèves sont candidats. Combien de manières de constituer le groupe y a-t-il ?
2. Dix élèves sont candidats dont quatre sont en seconde et six en terminale. Le groupe de représentants doit être composé de deux élèves de seconde et de trois élèves de terminale.
   a. Parmi les candidats, combien peut-on former de couples d'élèves de seconde ? De triplets d'élèves de terminale ?
   b. Conclure.

Exercice 26:

1. Traduire les nombres suivants en nombres de parties d'ensemble :
   a. $\binom{6}{1}$ b. $\binom{12}{12}$ c. $\binom{7}{2}$ d. $\binom{7}{5}$
2. Calculer les nombres précédents :
   a. A l'aide de la calculatrice.
   b. Sans la calculatrice.

Exercice 27: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. En utilisant une formule du cours, montrer que $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.
2. Retrouver cette relation à l'aide d'un argument de dénombrement.

Exercice 28: Résoudre les équations suivantes d'inconnues $n \in \mathbb{N}$

1. $\binom{n}{3}=3$ 2. $\binom{n}{2}=\binom{n}{3}$ 3. $2\binom{n}{2}=3\binom{n}{3}$

Exercice : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On place n points sur un plan de telle manière que trois points ne sont jamais alignés.

1. On relie deux à deux tous les points par une arête. Combien d'arêtes a-t-on tracées ?
2. On classe les n points en deux groupes de taille k et n-k.
   Chaque point du premier groupe est alors relié à chaque point du second groupe par une arête. Combien d'arêtes a-t-on tracées ?

Exercice 29: Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débuteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

1. Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
2. Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrain et de sept attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes peut-il former avec des nouvelles contraintes ?

Exercice 30: Lors de la seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés incompréhensibles pour leurs opposants. Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier,on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé. Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine était une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configuration différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peur être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ?
3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.
   a. Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?
   b. Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux par deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?
4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

Exercice 31:

On considère l'entier $n \geqslant 2$ et l'ensemble E={1,2,..,n}.

Un dérangement de E est une permutation de E qui ne laisse aucun élément de E à sa place. Le nombre de dérangements de E se note D_n .

1. En écrivant tous les dérangements possibles pour $n=2$, puis pour $n=3$, déterminer D_2 , puis D_3 .
2. Dans cette question, on suppose que $n=4$.
   a. Quelles sont les valeurs possibles pour le premier élément d'un dérangement de E ?
   b. Combien y a-t-il de dérangements commençant par 2 et 1 ?
   c. Déterminer le nombre de dérangements dont le premier élément est 2 et le deuxième est différent de 1.
   d. En déduire D_4 .
3. On admet que, pour tout $n \geqslant 3$: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.
   a. Calculer D_5 .
   b. Écrire une fonction Python dérangement d'argument n qui renvoie D_n .
4. Un employé facétieux a préparé dix enveloppes adressées à dix personnes différentes de façon aléatoire dans les enveloppes.
   a. Quelle est la probabilité que tous les courriers arrivent à la bonne adresse ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'aucun courrier n'arrive chez le bon destinataire ?