Fonctions cosinus et sinus : Exercices.

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que la fonction f est periodique et déterminer la période.

Exercice 3 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

a. $f(x)=3\sin(x)+x^2\cos(x)$, $I=\mathbb{R}$

b. $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$, $I=\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

c. $f(x)=(\sin(x))^4$, $I=\mathbb{R}$

d. $f(x)=-5\cos(3x)$, $I=\mathbb{R}$

e. $f(x)=\sqrt{1+\cos^2(x)}$, $I=\mathbb{R}$

f. $f(x)=e^{\sin(x)}$, $I=\mathbb{R}$

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$

a. $\cos(2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin(6x)=-\dfrac{1}{2}$

c. $\sqrt{2}\cos(x-\pi)=1$

d. $\sqrt{2}\sin(2x)+3=4$

Exercice 5 : Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$

a. $\cos(3x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=0$

c. $2\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}=0$

d. $2\cos(3x-\pi)-\sqrt{2}=0$

e. $\cos(x-\pi)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

Exercice 6 : Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I.

a. $\sin(x)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $I=[0;\pi[$

b. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant-\dfrac{1}{2}$, $I=[0;2\pi[$

c. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{2}$, $I=[0;2\pi[$

d $\sin(x+\pi)<0$, $I=[0;2\pi[$

e. $\sqrt{3}-2\sin(x)<0$, $I=]-\pi;\pi]$

f. $2\cos^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1<0$, $I=[0;2\pi[$

Exercice 7 : Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2}{\sin(x)+3}$

1. Justifier que f est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$
2. Déterminer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$
3. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sin(x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer, que pour tout réel x, on a $x\leqslant f(x)\leqslant x+1$ et $f(x+\pi)=f(x)+\pi$
2. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
4. Déterminer les variations de f sur $[0;\pi]$.
   Indication : pour tout réel a, $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$.
5. Tracer Γ sur $[0;2\pi]$.

Exercice 9 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$.

1. Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
4. Déterminer le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a exactement une solution α sur $[0;\pi]$ et donner une valeur approchée de α au millième prés.

Exercice 10 :On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x$.

1. Démontrer que f est 2π périodique.
2. a. Démontrer que pour tout réel x : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

   b. Démontrer que pour tout réel x,
   $f'(x)=-3\sqrt{2}(\sin x)(\cos x)\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
5. a. Montrer que, pour tous réels a et b, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$l'équation $f(x)=0$.

Exercice 11: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ pour $x\neq 0$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que la fonction f est paire.
   Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
3. a. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   b. On note f' la fonction dérivée de f.
   Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
   c. Montrer que pour $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x\cos x-\sin x$.
4. a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g(x)=x\cos x-\sin x$
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0;2\pi]$. On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de la valeur strictement positive α telle que $g(\alpha)=0$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.
5. Soit H_1 et H_2 les courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $\{0\}$ respectivement par $h_1(x)=\frac{1}{x}$ et $h_2(x)=-h_1(x)$.

   a. Donner les coordonnées des points d'intersection de C avec H_1 et avec H_2 pour x appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$

   b. Tracer H_1, H_2 et C pour x compris entre $-\pi$ et 3π.