Corrigé du bac blanc de Janvier 2024

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. $f(0) = 3 - \dfrac{2}{1+e^0} = 3 - \dfrac{2}{2} = 2$ donc le point B$(0\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

2. **a.** Pour tout réel x, $f'(x) = 0 - \dfrac{0-2e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

   b. L'équation réduite de T est : $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.

   - $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(0) = \dfrac{2\times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{2}$
   - $f(0) = y_{\text{B}} = 2$

   Donc l'équation réduite de T est $y = \dfrac{x}{2} + 2$.

3. La droite T a pour équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$ soit $\dfrac{x}{2} - y + 2 = 0$; elle a donc pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\,;\,-1\end{pmatrix}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\,;\,2-3\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$; il est donc normal à la droite T.

   On en déduit que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. $g(x) = \text{AM}^2 = (x_{\text{M}} - x_{\text{A}})^2 + \left(y_{\text{M}} - y_{\text{A}}\right)^2 = \left(x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(f(x) - 3\right)^2 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \dfrac{2}{1+e^x} - 3\right)^2$

   $= x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{2}{1+e^x}\right)^2 = x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1+e^x)^2}$

2. On détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

   - Limite en $+\infty$

     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (1+e^x)^2 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 0$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   - Limite en $-\infty$

     $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

     $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} (1+e^x)^2 = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{(1+e^x)^2} = 4$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

3. - Pour $x < 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) < g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x < 0$, on a $g'(x) < 0$.
   - Pour $x > 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) > g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$.

4. On dresse le tableau des variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

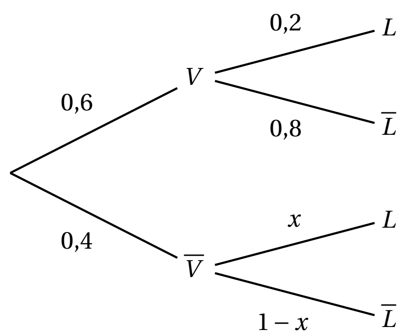
.

5. $AM^2 = g(x)$ et $g(x)$ est minimale pour $x = 0$; AM est minimale pour $x = 0$ donc si M a pour abscisse 0, c'est-à-dire est en B.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1.



2. La probabilité qu'un client choisisse une voiture et qu'il ne prenne pas l'assurance tout risque est $P\left(V \cap \overline{L}\right)$.

$$P\left(V \cap \overline{L}\right) = P(V) \times P_V\left(\overline{L}\right) = 0{,}6 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}48}$$

3. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P\left(\overline{V} \cap L\right)$$

On a $P(V \cap L) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$.
Posons $P\left(\overline{V} \cap L\right) = p$. On a :

$$P(L) = 0{,}12 + p \iff 0{,}42 = 0{,}12 + p \iff p = 0{,}42 - 0{,}12 = \boxed{0{,}3}$$

On a donc bien $P\left(\overline{V} \cap L\right) = 0{,}3$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\overline{V}}(L) = \frac{P\left(\overline{V} \cap L\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0{,}75}$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi une voiture, sachant qu'il a pris l'assurance tout risque est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0{,}29}$$

Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0{,}42 \times 0{,}005 = \boxed{0{,}0021}$$

$$P\left(\overline{L} \cap A\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{V}}(A) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}12 = \boxed{0{,}0696}$$

2. Les évènements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0{,}002\,1 + 0{,}069\,6 = 0{,}071\,7$$

La probabilité que le véhicule loué par un client choisi au hasard ait un accident est donc 0,071 7.
Puisque l'entreprise loue 1 000 véhicules, elle peut s'attendre 72 avaries.

Partie C

1. Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $\boxed{n = 40}$ et $\boxed{p = 0{,}42}$.
2. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(X \geqslant 15)$:

$$\boxed{P(X \geqslant 15) \approx 0{,}768}$$

EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.**

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n + 1$.
Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hrdit : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n + 2 = (n+1) + 1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n + 1$.

b. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n + 1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3. **a.**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5\left(u_n - n - 1\right) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geqslant 5^n$.

$$\begin{aligned}
5^{n+1} \geqslant 5^n \quad & \iff \quad 2 \times 5^{n+1} \geqslant 2 \times 5^n \\
& \iff \quad 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geqslant 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 2 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 1 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
   u=3
   n=0
   while u<10**7:
      u= 5*u-4*n-3
      n=n+1
   return n
```

b.

u	n	u < 10^7
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

EXERCICE 4 **4 points**