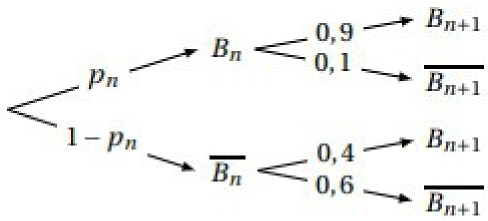
Corrigé du devoir Maison n°7.

Exercice 1 : Dans une ville de province, des vélos sont mis à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de vélo, contrôle leur état chaque mardi.
Partie A :
On estime que :

- lorsqu'un vélo est en bon état un mardi, la probabilité qu'il le soit encore le mardi suivant est de 0,9.
- lorsqu'un vélo est en mauvais état un mardi, la probabilité qu'il soit en bon état le mardi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état des vélos lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'événement « le vélo est en bon état n semaines aprés sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, le vélo est en bon état. On a donc $p_0=1$.

1. Calculer p_1 et p_2
   $p_1=0,9\times p_0=0,9$
   $p_2=0,9\times p_1+0,4\times(1-p_1)=0,9\times 0,9+0,4\times 0,1=0,85$
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



   En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,5\,p_n+0,4$.
   $p_{n+1}=p_n\times 0,9+(1-p_n)\times 0,4=0,9\,p_n+0,4-0,4\,p_n=0,5\,p_n+0,4$
3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n\geqslant 0,8$.
   Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n\geqslant 0,8$.
   Initialisation :
   $p_0=1\geqslant 0,8$, donc l'étape d'initialisation est vraie.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un réel k tel que $p_k\geqslant 0,8$. Montrons qu'alors $p_{k+1}\geqslant 0,8$.
   $p_k\geqslant 0,8$
   $\Leftrightarrow 0,5\,p_k\geqslant 0,5\times 0,8$
   $\Leftrightarrow 0,5\,p_k+0,4\geqslant 0,4+0,4$
   $\Leftrightarrow p_{k+1}\geqslant 0,8$
   L'hérédité est donc vraie.
   Nous pouvons donc conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\geqslant 0,8$
   b. A partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager de faire pour valoriser la fiabilité du parc ?
   L'entreprise peut dire qu'au moins 80% du parc de vélo est en bon état.
4. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par . $u_n=p_n-0,8$
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   $u_{n+1}=p_{n+1}-0,8=0,5\,p_n+0,4-0,8=0,5\,p_n-0,4=0,5(p_n-0,8)=0,5\,u_n$.
   donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0=p_0-0,8=0,2$
   b. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n$. Par conséquent, $p_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}8$

c. En déduire la limite de la suite (p_n) .

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0 \times 0{,}2 + 0{,}8 = 0{,}8$

Partie B.

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'un vélo est indépendant de celui des autres.
- La probabilité qu'un vélo soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 vélos, associe le nombre de vélos en bon état

Le nombre de vélos du parc étant très important, le prélèvement de 15 vélos peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   On choisit au hasard et de manière indépendante 15 vélos.
   La probabilité de choisir un vélo en bon état est de 0,8.
   Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de vélos en bon état dans le lot de 15.
   X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}8$.

2. Calculer la probabilité que les 15 vélos soient en bon état.
   $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 15) = 0{,}035$
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 vélos soient en bon état dans un lot de 15.
   $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 10) = 0{,}939$
4. On admet que E(X)=12. Interpréter ce résultat.
   En moyenne, il y a 12 vélos en bon état sur les 15 vélos que comporte le lot.

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x+3) - 1$.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire. .

On considère la fonction g définie sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-\frac{3}{2}$.

   $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}^+} 2x+3 = 0^+$. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}^+} \ln(2x+3) = -\infty$.

   Par suite, $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}^+} g(x) = -\infty$.

   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$.

   Déterminons la dérivée de la fonction g sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$

   $g'(x) = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}$

   Pour tout $x \in \left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$, $2x+3 > 0$

   $-2x-1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

x	$-\frac{3}{2}$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0{,}19$	$\searrow$	$-\infty$

3. a. Démontrer que, dans l'intervalle $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

   La fonction g est définie, continue et décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$.

   $g(-0{,}5)=0{,}19$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

   Or $0 \in [0{,}19;+\infty[$.

   Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   $0{,}25\leqslant\alpha\leqslant0{,}26$

Partie B : Étude de la suite (u_n).

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1;\alpha]$, alors $f(x)\in[-1;\alpha]$.

   $f(-1)=\ln(2x\times-1+3)-1=\ln(1)-1=-1$

   $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$. (On rappelle que α est solution de l'équation $g(x)=0$).

   $-1\leqslant x\leqslant\alpha$

   $\Leftrightarrow f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha)$

   $\Leftrightarrow -1\leqslant f(x)\leqslant\alpha$

   Donc $f(x) \in [-1;\alpha]$

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

   Initialisation :

   $u_0=0$

   $u_1=\ln(2\times0+3)-1=\ln(3)-1=0{,}09$

   Par conséquent, l'étape d'initialisation est vraie.

   Hérédité :

   Supposons qu'il existe un entier k tel que $-1\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant\alpha$ et montrons qu'alors $-1\leqslant u_{k+1}\leqslant u_{k+2}\leqslant\alpha$

   $-1\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant\alpha$

   Par croissance de la fonction f sur $\left]\frac{-3}{2};+\infty\right[$, on a $f(-1)\leqslant f(u_k)\leqslant f(u_{k+1})\leqslant f(\alpha)$

   et donc, $-1\leqslant u_{k+1}\leqslant u_{k+2}\leqslant\alpha$.

   L'hérédité est vraie, donc pour tout n, on a $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

   La suite (u_n) est croissante et majorée par α, elle est donc convergente.