Devoir Maison n°9.

Exercice 1 : On considère les fonctions f_k définies sur ℝpar $f_k(x)=x+k\mathrm{e}^{-x}$ où k est un réel strictement positif.

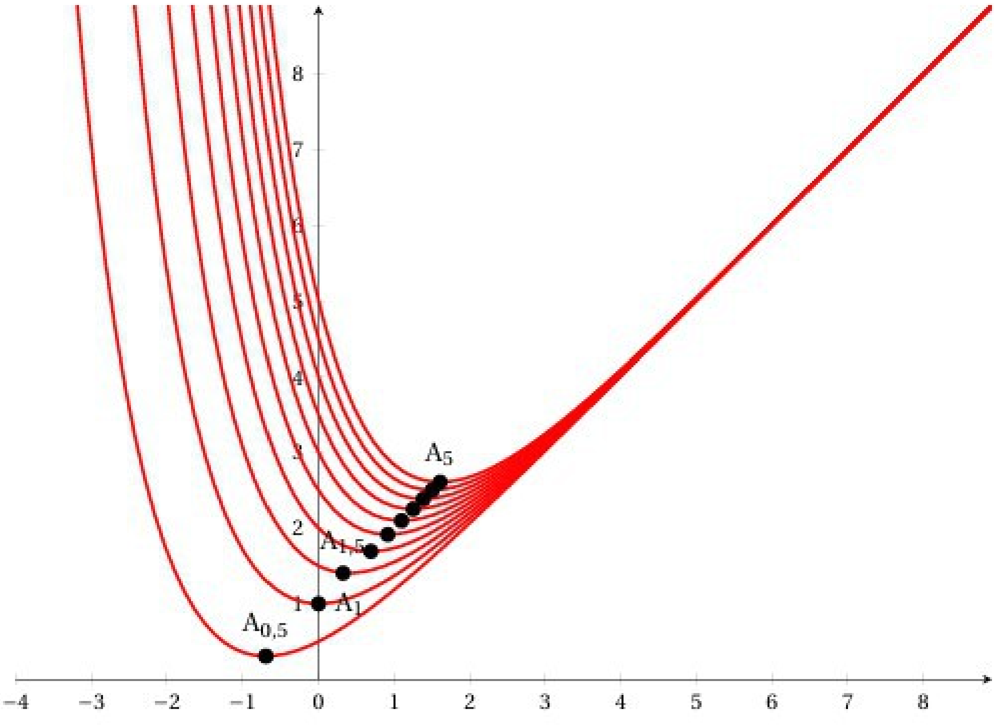
1. On s'intéresse dans cette question au cas k=0,5, donc à la fonction $f_{0,5}$ définie sur ℝpar : $f_{0,5}(x)=x+0{,}5\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Montrer que la dérivée de $f_{0,5}$, notée $f'_{0,5}$ vérifie $f'_{0,5}(x)=1-0{,}5\mathrm{e}^{-x}$.
   b.Montrer que la fonction $f_{0,5}$ admet un minimum en $\ln(0{,}5)$.

Soit k un réel strictement positif. On donne le tableau de variation de la fonction f_k.

Valeurs de x	$-\infty$	ln(k)	$+\infty$
Variations de $f_k(x)$	$+\infty$ ↘	$f_k(\ln k)$	↗ $+\infty$

2. Montrer que pour tout réel positif k, $f_k(\ln k)=\ln k+1$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On note A_k le point de la courbe C_k d'abscisse $\ln k$.
On a représenté ci-dessous quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.



3. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
   Affirmation : Pour tout réel k strictement positif, les points $A_{0,5}$, A_1 et A_k sont alignés.

Exercice 2 :
On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté ci-aprés.
Dans le repère orthonormé (A; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$), on considère les points M, N et p de coordonnées :

$M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée ci-aprés qui est à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dés lors, les trois points définissent le plan (MNP).
4. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   b. Calculer l'aire du triangle MNP.
5. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z=0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées F(1,0,1).
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL=\frac{3\sqrt{105}}{35}$, puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.

A rendre avec la copie :