Devoir Maison n°5.

*Vous ferez l'exerice ainsi qu'un des deux exercices 2. L'exercice 2 ** est à destination de ceux et celles qui envisagent de faire une CPGE ou une prépa intégrée.*

Exercice 1 :

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours. Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f , définie sur [0 ; + ∞[par $f(x)=10\,e^{u(x)}$ où u est une fonction définie sur [0;+∞[par : $u(x)=-e^{2-\frac{x}{10}}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur [0;+ ∞ [et on note f' sa fonction dérivée.

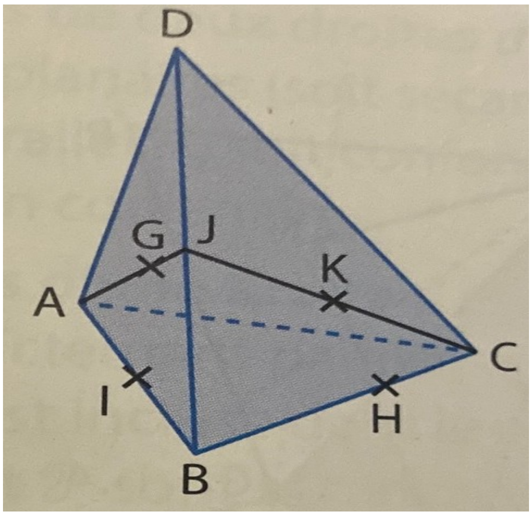
1. Montrer que, pour tout x positif, on a $f'(x)=-u(x)e^{u(x)}$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[.
2. Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après 20 jours de repousse ?
3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f'' la fonction dérivée de la f' .

   a. Montrer que, pour tout x positif, $f''(x)=\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1+u(x))$.

   b. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0 ; +∞[.

   c. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

Exercice 2* : Soit ABCD un tétraèdre. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BD] et [CJ]. Soient les points G et H tels que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



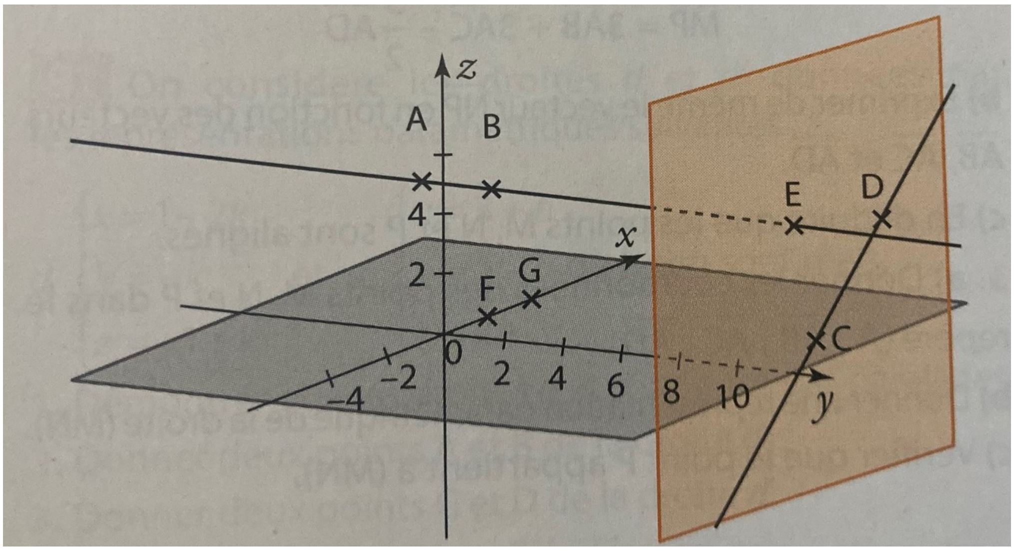
1. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $(B, \overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})$.
2. a. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{IK}=a\overrightarrow{IG}+b\overrightarrow{IH}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les points G, H, I et K ?
3. a. Déterminer les représentations paramétriques des droites (IG) et (HK).
   b. Déterminer la position relative des droites (IG) et (HK).

Exercice 2 ** :

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) d'unité 1 cm, on considère les points A(0;-1;5), B(2;-1;5), C(11;0;1) et D(11;4;4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de cm par seconde, et un point N se déplace de sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la même vitesse.

On note M_t et N_t , les positions des points M et N au bout de t secondes.



1. Montrer que les coordonnées des points M_t et N_t en fonction de t sont $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0{,}8t;1+0{,}6t)$.
2. Soit P le plan passant par le point C et dirigé par les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
   a. Montrer que la droite (CD) est incluse dans le plan P.
   b. Soit E(11;-1;5).
   Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CE}=a\vec{j}+b\vec{k}$.
   c. Vérifier que la droite (AB) coupe le plan P en E.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
3. a. Montrer que :
   $M_tN_t^2=2t^2-25{,}2t+138$
   b. A quel instant la longueur M_tN_t est-elle minimale ?