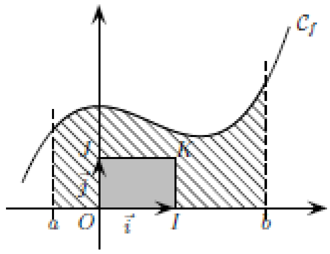
Intégration.

I. Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue et positive.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on définit les points I, J, K tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et OIKJ soit un rectangle.
L'aire du rectangle OIKJ définit alors l'unité d'aire (u.a.).



Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

L'intégrale de a à b de f est le réel, noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

a et b sont appelés les bornes de l'intégrale et x la variable d'intégration. x est une variable muette : elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par d'autres lettres. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

Exemple 1 : Déterminer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^2 3\,\mathrm{d}x$ b. $\int_{-1}^3 x+2\,\mathrm{d}x$ c. $\int_{-2}^3 |x|\,\mathrm{d}x$.

Exemple 2 : Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^4 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x .

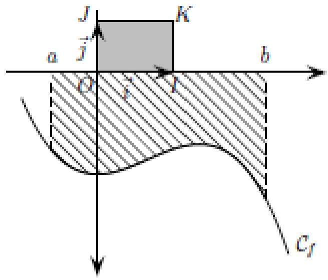
Remarque : Pour toute fonction f continue et positive, et pour tout a , on a $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

II. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle [a; b] est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

a. Intégrale d'une fonction continue positive.

Définition : Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$, on définit l'intégrale de a à b de f par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-A$ où A est l'aire du domaine D délimité par la courbe C représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



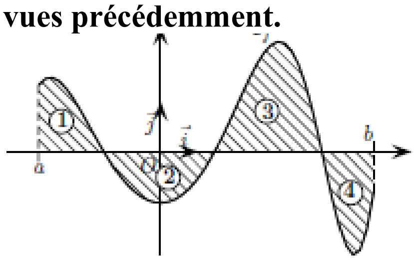
Exemple 3 : Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^2 -5\,\mathrm{d}x$

$B=\int_1^3 -2x+1\,\mathrm{d}x$

b. Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Définition : Si f est une fonction continue changeant de signe sur $[a;b]$, on découpe l'intervalle en intervalles partiels sur lesquels f garde un signe constant et on applique les définitions vues précédemment.



Exemple 4: Calculer l'intégrale suivante $C=\int_0^6 -0{,}5x+1\,\mathrm{d}x$.

Dans le cas où a et b sont quelconques :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I,

si $a\geqslant b$, on prendra par convention $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

si $a=b$, on prendra par convention $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

III. Intégrales et primitives.

Théorème : Soit f est une fonction continue un intervalle I, la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Démonstration :
Preuve : Nous restreindrons cette démonstration au cas où f est strictement croissante sur l'intervalle I = $[a;b]$.
Soit x_0 et x_0+h deux réels de $[a;b]$
On a $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $F(x_0+h)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
1er cas : h>0.
On a alors $hf(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant hf(x_0+h)$

<=> $f(x_0)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$

f étant continue, on a $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

2éme cas : h<0.
$-hf(x_0+h)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant -hf(x_0)$

<=> $-f(x_0+h)\geqslant\dfrac{F(x_0)-F(x_0+h)}{h}\geqslant -f(x_0)$

<=> $f(x_0+h)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F_{(x_0)}}{h}\leqslant f(x_0)$

On obtient donc en utilisant les mêmes arguments que précédemment :

$\lim\limits_{h\to 0,\, h<0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

Donc, pour tout $x_0 \in [a;b]$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

D'où F est dérivable sur $[a;b]$, et pour tout $x\in [a;b]$, $F'(x)=f(x)$.

Propriété : Soit f une fonction définie, continue, positive sur un intervalle $[a;b]$.
Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Preuve :
Soit f une fonction définie, continue et positive sur $[a;b]$, alors d'après le théorème précédent, la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
Si F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, alors il existe k $\in\mathbb{R}$tel que $G(x)=F(x)+k$ pour tout $x\in [a;b]$.
Or $G(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $k=-F(a)$.

On a donc pour tout $x\in [a;b]$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$.

Soit en prenant $x=b$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.

t étant une variable muette, on obtient $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Remarque : La quantité $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ se note souvent $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ et ainsi

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Exemple 5: Déterminer les intégrales suivantes :

$A=\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$

$B=\int_{-2}^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

$C=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

IV. Propriétés.

a. Linéarité.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un nombre réel quelconque.
Pour tous nombres réels a et b appartenant à I,

- $\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

On parle de la linéarité de l'intégrale.
Démonstration :Soient F et G deux primitives sur I respectivement de f et g .
Alors F+G est une primitive de $f+g$ sur I et λF est une primitive de λ f sur I.

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=[F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x=[\lambda F(b)-\lambda F(a)]=\lambda(F(b)-F(a))=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 6: On considère les intégrales A et B définies par :

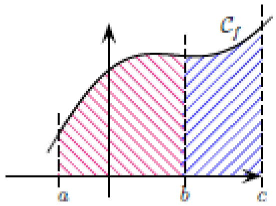
$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ et $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

Calculer A+B

b. Relation de Chasles.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous nombres réels a et b , c appartenant à I,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



Exemple 7: Déterminer la valeur de l intégrale suivante :

$A=\int_{-2}^{5} |x|-2 \,\mathrm{d}x$

c. Positivité.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à I tel que $a \leqslant b$.

1. **Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.**
2. **Si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.**

Justification :Soit $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ exprime l'aire en unités d'aire sous C_f , donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

c. Ordre.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à I tel que $a \leqslant b$.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : Soit ϕ une fonction définie sur $[a;b]$ par $\phi(x)=g(x)-f(x)$.

Pour tout $x \in [a;b]$, $\phi(x)\geqslant 0$ d'où d'après le 1, $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc

$\int_a^b g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

On a donc par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 8:

1. Démontrer que pour tout réel $t \in [0;1]$, on a $\frac{t}{1+t^2}\leqslant t$
2. En déduire que $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$

d. Valeur moyenne.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ $(a\neq b)$. La valeur moyenne de la fonction *f* sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ <=> $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mu(b-a)$.

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel μ tel que le rectangle de dimension μ et $b-a$ ait la même aire que le domaine D délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

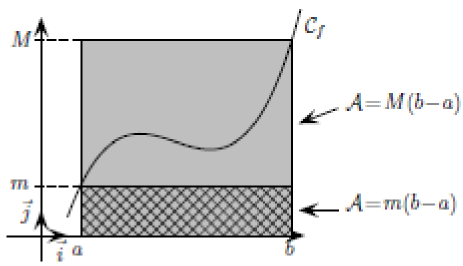
Exemple 8: Déterminer la valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$.

$\mu=\frac{1}{2\pi}$

e. Inégalités de la moyenne.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels appartenant à I tel que $a\leqslant b$.
S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors

$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$



Démonstration : Pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$ et donc, d'aprés la propriété de l'ordre des intégrales :

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}x$$

Or $\int_a^b m \,\mathrm{d}x = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$, d'où l'encadrement de la moyenne.

Exemple 9: Soit f la fonction définie sur [1;2] par $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [1;2].
2. Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$, $\frac{\mathrm{e}^2}{4} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{x^2} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire un encadrement de $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

V. Intégration par parties.

Théorème : Soient u et v deux fonctions définies, dérivables et dont les dérivées sont continues sur un intervalle $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v(x)'\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a,b]$.
La fonction uv est donc dérivable et continue et on a de plus que la fonction $(uv)'$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$:
pour tout $x \in [a,b]$, $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
Ainsi, en passant à l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b u(x)v(x)d\,x = \int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction uv étant une primitive de la fonction $(uv)'$, on obtient :

$$[u(x)v(x)]_b^a = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Et ainsi, on a $\int_a^b u(x)v(x)'\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 10: Calculer les intégrales suivantes :

A = $\int_0^3 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ B = $\int_{-1}^2 2x(8x+2)^2\,\mathrm{d}x$ C = $\int_0^1 4x\,\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$