Repérage dans l'espace : exercices.

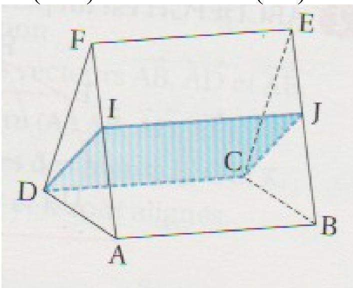
Exercice 1 : Soit ABCDEFGH un cube.

Soient I, J et K les points des segments [AE], [CG] et [BF] tels que $AI=\frac{3}{4}AE$,

$CJ=\frac{1}{2}CG$ et $BK=\frac{1}{4}BF$.

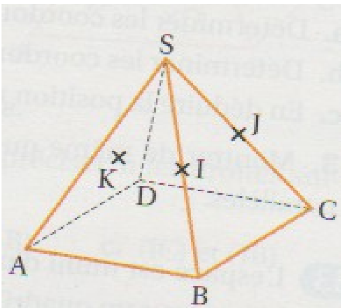
1. Faire un dessin.
2. Les droites suivantes sont-elles sécantes ?
   a. (IJ) et (FB) b. (IK) et (BC) c. (JK) et (DC).
3. a. Citer une droite du plan (ABC) coplanaire à la droite (IK).
   b. Ces droites sont-elles sécantes ou parallèles ?
   c. Déterminer l'intersection de (IK) et (ABC).
4. Mêmes questions avec la droite (KJ), puis la droite (IJ).
5. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).

Exercice 2 : Le prisme droit ABCDEF est coupé par le plan (DCI) où I est un point de (AF). J est le point d'intersection du plan (DCI) et de la droite (EB).



a. Montrer que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.
b. Montrer que les droites (DI) et (CJ) sont parallèles.
c. En déduire la nature du quadrilatère DIJC.

Exercice 3 : SABCD est une pyramide à base carrée. I et J sont les milieux respectifs de [BS] et [CS]. K est un point de la face ADS.



a. Montrer que les plans (IJK) et (ADS) se coupent suivant une droite parallèle à (AD).
b. En déduire la trace de la section de la pyramide par le plan (IJK). Préciser la nature du polygone obtenu.

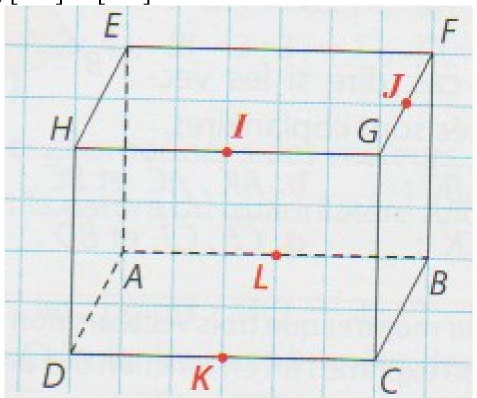
Exercice 4 : On considère un tétraèdre ABCD. Soit I le milieu du segment [AD].

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}$.
2. a. Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   b. En utilisant la relation de Chasles, montrer que :
   $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$.
3. En déduire que les droites (CI) et (EF) sont parallèles.

Exercice 5 : ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [BD] et [CD].
B',C' et D' sont les centres de gravité respectifs des faces ACD, ABD et ABC.

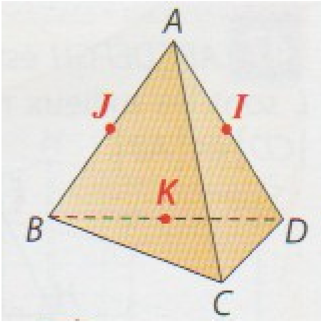
1. Exprimer $\overrightarrow{B'D'}$ en fonction de $\overrightarrow{IK}$.
   En déduire que les droites (B'D') et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer de même que les droites (B'C') et (BC) sont parallèles.
3. Déterminer la position relative des plans (BCD) et (B'C'D').

Exercice 6 : ABCDEFGH est un pavé droit. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [GH], [FG], [CD] et [AB].



Pour chacun des plans suivants, proposer deux couples différents de vecteurs directeurs :
a. Plan (ABC) b. plan (IFB) c. Plan (IJK) d. Plan (EIA)
e. Plan (AGH) f. plan (DLI).

Exercice 7 : ABCD est un tétraèdre. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AD], [AB] et [BD].



Dans chaque cas, dire si les vecteurs considérés sont coplanaires.

a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{JK}$ b. $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

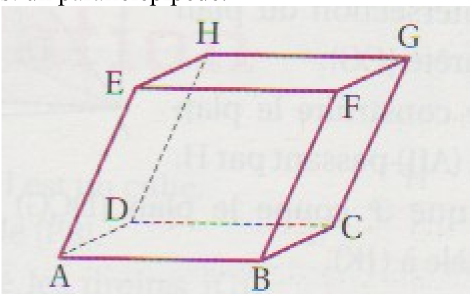
c. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ d. $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 8 : ABCD est un tétraèdre. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.

Démontrer que les points D, I, J et F sont coplanaires.

Exercice 9 : ABCDEFG est un parallélépipède.



1. Exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs suivants :
   a. $\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{DB}$ c. $\overrightarrow{AG}$ d. $\overrightarrow{EB}$ e. $\overrightarrow{HB}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EH}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont coplanaires, et proposer un plan contenant des représentants de ces trois vecteurs.

Exercice 10 : ABCD est un tétraèdre. Le point M est tel que : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1.a. Démontrer que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que M est un point du plan (ABC).

2. A quel plan appartient le point N tel que $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{DN}=\vec{0}$.

Exercice 11 : ABCD est un tétraèdre. Soient I et J les points tels qe $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, K et L les milieux de [BC] et [BD].

On étudie les positions relatives des droites (KL) et (LJ) de deux façons différentes.

1. Par le calcul vectoriel.
   a. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{KL}$.
   b. Justifier que (KI) et (LJ) sont sécantes en un point Ω. Construire Ω.
   c. Montrer que A, B, Ω sont alignés.
2. Avec des coordonnées.
   a. Expliquer pourquoi (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$) est un repère de l'espace et donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
   b. Écrire une représentation paramétrique des droites (KI) et (LJ).
   c. Montrer qu'elles sont sécantes en un point Ω.
   d. Montrer que A, B, Ω sont alignés.

Exercice 12: ABCEDFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [DC], [AD] et [EF]. On munit l'espace du repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

1. Déterminer les coordonnées des points F, I, J et K.
2. On veut étudier la position relative des droites (JK) et (IF).
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IF}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les droites (JK) et (IF) ?
   c. Justifier la position relative de (JK) et (IF).
3. Reprendre la question 2 avec les droites (JG) et (AF).

Exercice 13 : L'espace est muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Soient A(1;2;3), B(-2;3;6), C(-3;-2;2) et D(-6;-1 ;4). Démontrer que ABDC est un parallélogramme.

Exercice 14 : L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1;-5;1), B(-1;2;4), C(3;4;-1) et D(-2;3;2).
Soient I et J les milieux respectifs des segments [BD] et [AC], et G le centre de gravité du triangle ABC.

Soit le point K défini par $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, G et K.
2. Justifier que le point K appartient au segment [IJ]. On précisera sa position sur ce segment.

Exercice 15 : L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si oui, préciser la valeur de k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\\frac{1}{2}\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\sqrt{2}+1\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3+2\sqrt{2}\\4+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 16 : L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?
a. A(2;-3;1), B(0;1;2) et C(-4;9;4).
b. A(3;10;-1), B(117;49;-76) et C(-35;-3;24).

Exercice 17 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient les points $A(1;1;\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.
Soit C le symétrique de A par rapport à O.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 18 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient les points A(2;3;-1), B(2;8;-1), C(7;3;-1) et D(2;-1;2). Démontrer que les points B, C et D sont sur la même sphère de centre A.

Exercice 19 : L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points A(-1;0;-1), B(2;2;0), C(0;-1;2) et D(4;3;-2).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils coplanaires ?
3. Que peut-on en déduire pour les points A, B , C et D ?