Devoir Maison n°1.

Exercice 1 : Dans le Périgord, un producteur cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kg de truffes noires par semaine.
On désigne par x le nombre de kilogrammes de truffes traitées chaque semaine et par $f(x)$ le coût unitaire de revient, en euro. Chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450€.
On admet dans la suite du problème que la fonction f est définie sur [0;45] par
$f(x)=x^2-60x+975$.

1. Justifier que le coût de production total, noté $\mathrm{C}(x)$ pour x kg de truffes, est $\mathrm{C}(x)=x^3-60x^2+975x$.
2. Justifier que le bénéfice total, noté $\mathrm{B}(x)$ pour x kg de truffes, est $\mathrm{B}(x)=-x^3+60x^2-525x$.
3. Déterminer la fonction dérivée B' de la fonction B, définie sur l'intervalle [0;45].
4. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0;45].
5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ?

Exercice 2 : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1=\frac{1}{3}$ et $u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}u_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. On pose $v_n=\frac{u_n}{n}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont vous déterminerez le premier terme.
3. Montrer que $u_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n\geqslant 1$.
4. Montrer que $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-2n)$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Soit la fonction python suivante.

```
def borne(epsilon):
    n=1
    while n*(1/3)**n> epsilon:
        n = n+1
    return n
```

   a. Que renvoie l'instruction borne(10**(-3)) ?
   b. Expliquer l'utilité de la fonction borne() ?
   c. Vers quelle grandeur semble tendre la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?