# Fonction Logarithme.

## I. En lien avec la fonction exponentielle.

Théorème-définition :

1. l'équation $\exp(x)=t$ , où t$\in$ ]0 ;$+\infty$[, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$
2. Il existe une fonction définie sur ]0 ; +∞[ qui à tout réel t, $t>0$ , associe l'unique réel $x$ tel que $\exp(x)=t$ .
   Cette fonction est appelée fonction logarithme népérien, elle est notée ln.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 1/e | 1 | 2 | e | 3 | $e^2$ | 4 | $e^3$ |
| $x$ | -1 | Ln 1 | Ln 2 | 1 | Ln 3 | 2 | Ln 4 | 3 |

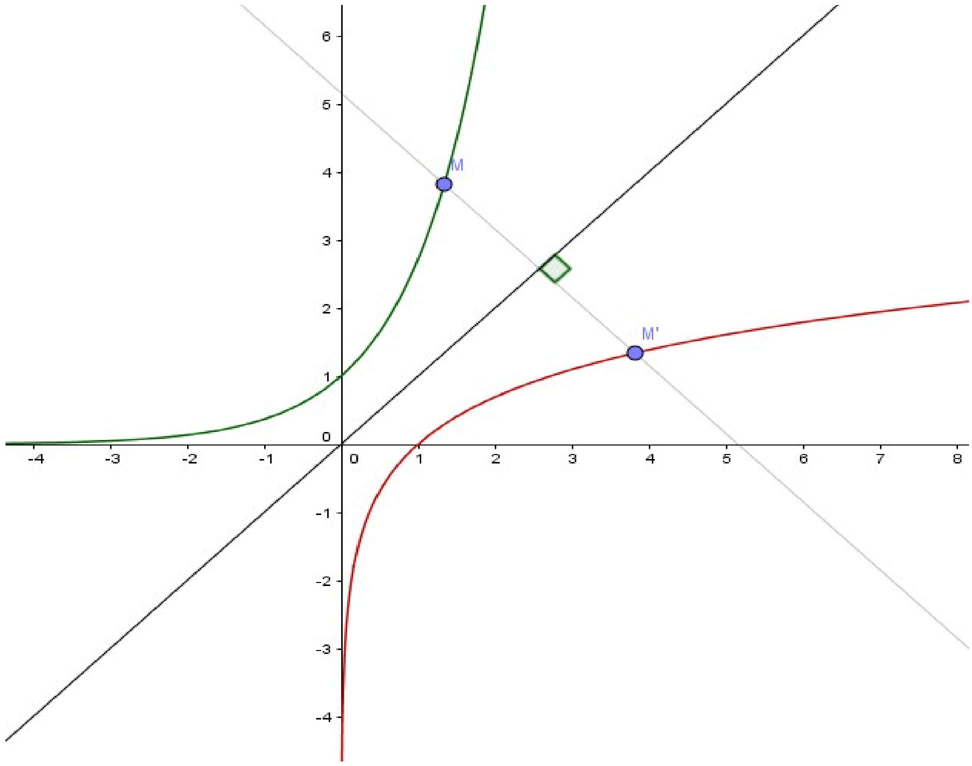
Ln est donc la fonction définie sur ]0 ; +∞[ telle que, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in ]0 ; +\infty[$ :
$\exp(x)=t$ <=> $x=lnt$
ou $e^x=t$ <=> $x=lnt$

Conséquences directes :

- ln est définie sur ]0 ; +∞[
- Pour $x>0$ , $lnx=0$ <=> $x=1$
- Pour $x>0$ , $y>0$ , $\ln(x)=\ln(y)$ <=> $x=y$
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x))=x$ ou $\ln(e^x)=x$ .
- Pour $x>0$ , $\exp(lnx)=x$ ou $e^{lnx}=x$ .

Représentation graphique :

Corollaire : Dans un repère orthonormé, les courbes $C: y=\exp(x)$ et $R: y=lnx$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$




Conséquence : La fonction ln vérifie une relation fonctionnelle.

Propriété :

1. Pour tous réels strictement positifs $x$, $y$, $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.
2. Pour tout réel $x>0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$.
3. Pour tous réels strictements positifs $x$, $y$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$.
4. Pour tout réel $x>0$ et pour tout entier relatif p, $\ln(x^p)=p\ln(x)$.
5. Pour tout réel $x>0$, $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$.

Preuve :

1. Soient $x, y$ deux réels strictement positifs.
   Posons $A=\ln(xy)$ et $B=\ln x+\ln y$.
   $\exp(A)=\exp(\ln(xy))=xy$.
   $\exp(B)=\exp(\ln x+\ln y)=\exp(\ln x)\times\exp(\ln y)=xy$.
   On a donc exp(A)=exp(B).
   On a donc, A=B d'où $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ pour tout $x, y>0$
2. Soit $x>0$, en utilisant 1), on a :
   $\ln\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
   <=> $\ln(1)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
   <=> $0=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
   d'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$.
3. Soient $x, y>0$, en utilisant 1) et 2), on a :

$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$.

4. Soit $x$ un réel strictement positif, p $\in\mathbb{Z}$
   Posons $A=lnx^p$ et $B=plnx$.
   $\exp(A)=\exp(lnx^p)=x^p$.
   $\exp(B)=\exp(plnx)=\exp(lnx)^p=x^p$
   d'où exp(A)=exp(B) => A=B => $lnx^p=plnx$.
5. Pour $x>0$, $lnx=\ln(\sqrt{x^2})=2\ln(x)$,
   d'où $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}lnx$.

Application : Ecrire les réels suivants à l'aide de ln2 et de ln3.
A=ln144 A=4ln2+2ln3
$B=\ln 81+\ln(3\sqrt{3})$ $B=\frac{11}{2}\ln 3$

## II. Dérivabilité.

1. Approximation affine au voisinage de 1.

   Grâce à l'étude graphique faite précédemment, nous avons constaté que la courbe représentative de la fonction ln admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur 1. Cela permet de conjecturer la dérivabilité de ln en 1 avec ln'(1)=1.
   D'où la propriété suivante :

   Propriété :
   - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$.
   - $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=1$

2. Fonction dérivée.

   Déterminons la dérivée de la fonction $n\geqslant 2$
   Soit $a>0$ et $h$ proche de 0.

$$\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}=\frac{\ln(a+(1+h/a))-\ln(a)}{h}=\frac{\ln(a)+\ln(1+h/a)-\ln(a)}{h}=\frac{\ln(1+h/a)}{h/a}\times 1/a\ .$$

d'où $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{a}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}=\frac{1}{a}\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}=\frac{1}{a}$

D'où la fonction ln est dérivable sur ]0 ; +∞[ et $(\ln(a))'=\frac{1}{a}$.

Propriété : ln est dérivable sur ]0 ; +∞[, et pour $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Conséquences :

- Corollaire 1 :
  - la fonction ln est continue sur ]0 ; +∞[.
  - la fonction ln est strictement croissante sur ]0 ; +∞[
  - Pour tous réels $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b)$ <=> $a < b$.
  - Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) > 0$ <=> $x > 1$

    $\ln(x) < 0$ <=> $0 < x < 1$

Exemple : Résoudre dans ℝles équations et inéquations suivantes :

A. $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 6$ => $x = 3$.

B. $\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$ => S=]-1;1[.

* Corollaire 2 : Soit I un intervalle de ℝ Si $u$ est une fonction dérivable sur I et strictement positive sur I, alors $f = \ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in$ ℝet pour tout $x$ appartenant à I, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : Déterminer sur quel intervalle chacune des fonctions suivantes est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = \ln(2x-1)$ $\quad$ $g(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

# III. Limites.

1. Limites de la fonction ln.

Théorème :

a. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad$ b. $\lim_{x \to 0, x > 0} \ln(x) = -\infty$

Démonstration :

a. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Montrons que pour tout A appartenant à ]0 ; +∞[, il existe $x_0$ tel que pour tout $x$ supérieur à $x_0$, $\ln x > A$.

Or $\ln x > A$

<=> $x > e^A$

En prenant $x_0 = e^A$, on a donc pour tout $x$ supérieur à $e^A$, $\ln(x) > A$, d'où $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

b. Montrons que $\lim_{x \to 0, x > 0} \ln(x) = -\infty$.

Pour $x > 0$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\lim_{x \to 0, x > 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ d'où $\lim_{x \to 0, x > 0} \ln(x) = -\infty$

Nous obtenons donc pour tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de la fonction ln.

2. Croissances comparées.

Théorème :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x\ln x = 0$
- Pour tout entier $n \geqslant 2$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n}$ = 0 et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^n \ln(x)$ = 0.

Preuve :

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ .

Utilisons un changement de variable : $x = \mathrm{e}^X$ <=> $X = \ln x$ .

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ .

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ .

- Montrons que $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x\ln x = 0$ .

$$x\ln x = \frac{-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{-\ln X}{X}$$ en posant $X = \dfrac{1}{x}$ .

$$\lim_{x\to 0, x>0} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} -\ln\frac{X}{X} = 0$$

- Pour tout $n \geqslant 2$ , $\dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}}$ = 0 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n}$ = 0

  Pour tout $n \geqslant 2$ , $x^n \ln(x) = x\ln(x) \times x^{n-1}$

  $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x\ln(x)$ = 0 et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{n-1} = 0$ , donc $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^n \ln(x)$ = 0