Limites et continuité.
Exercices

Exercice 1 : Étudier les limites en +∞ et en - ∞ des fonctions suivantes. Indiquer leurs éventuelles asymptotes.

1. $f(x)=-2x^4+3x^2+x$, D_f = ℝ
2. $f(x)=\frac{1}{4}x^3+x^2-9x$, D_f = ℝ
3. $f(x)=\frac{x^2+5x-9}{x-3}$, D_f =ℝ\{3}
4. $f(x)=\frac{4x-2}{2x+3}$, D_f = ℝ\ {-3/2}

Exercice 2 : Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-3x+1}{x-2}$

On souhaite étudier la limite de *f* en 2.

1. Déterminer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to 2} -3x+1$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2$.
   Pouvez vous en déduire $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-3x+1}{x-2}$?
2. Dresser le tableau de signe de $x-2$.
3. Recopier et compléter :
   a. $\lim\limits_{x\to 2} -3x+1$ et $\lim\limits_{x\to 2, x<2} x-2$ donc $\lim\limits_{x\to 2 x<2} \frac{-3x+1}{x-2}$.
   b. $\lim\limits_{x\to 2} -3x+1$ et $\lim\limits_{x\to 2, x>2} x-2$ donc $\lim\limits_{x\to 2, x>2} \frac{-3x+1}{x-2}$.

Exercice 3 : Étudier la limite en *a* de la fonction f définie sur D_f .

1. $f(x)=\frac{2x}{x+5}$, D_f = ℝ\{5}, $a=5$.
2. $f(x)=\frac{x^2-5x+2}{(x-1)^2}$, D_f = ℝ\{1}, $a=1$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=\frac{6x^2+3x-5}{2x^2+7}$.

Démontrer que la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur ℝ{5} par $f(x)=\frac{6x-29}{x-5}$.

1. Étudier les limites de f en +∞ et en $-\infty$.
   En déduire l'équation d'une asymptote horizontale à C_f .
2. Étudier la limite de f en 5.
   En déduire l'équation d'une asymptote horizontale verticale à C_f .

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=\sqrt{x^2+5}-x^2$.

1. En utilisant votre calculatrice, conjecturer la limite de f en +∞.
2. Montrer que pour tout réel positif *x*, $f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-x\right)$.
3. En déduire la limite de la fonction f en +∞

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie sur ℝpar $f(x)=x-1+5\sin^2(x)$.

1. Montrer que pour tout $x\in$ℝ, $x-1\leqslant f(x)\leqslant x+4$.
2. En déduire les limites de f en +∞ et en –∞.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur ℝ{2} par $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-2}$. On souhaite déterminer la limite de f en 2.

1. Expliquer pourquoi les règles opératoires mènent à une forme indéterminée.
2. Déterminer les racines du polynôme $x^2-7x+10$, puis le factoriser.
3. Simplifier alors l'expression de $f(x)$ pour $x\neq 2$ et en déduire la limite de f en 2.

Exercice 9 : Soit la fonction *f* définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{x^2-6x+5}{x+2}$.

1. Démontrer que C_f admet une asymptote verticale d.
2. a. Déterminer l'équation de l'asymptote horizontale d' à la courbe C_f .
   b. Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite d' .

Exercice 10:Soit g la fonction définie sur ℝ{3} par $g(x)=\frac{2x-1}{x-3}$.

1. a. Déterminer l'ensemble D des nombres réels tels que $g(x)\geqslant 0$.
   b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les limites de g à gauche et à droite en 3.

2. Soit f la fonction définie sur D par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-3}}$.

   a. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
   b. Étudier la limite de la fonction f en 3.

Exercice 11 : Soit h la fonction définie sur ℝ par $h(x)=x+1+\dfrac{4}{1+e^x}$.

Étudier les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 12 : Soit la fonction *f* définie sur ℝ $f(x)=\dfrac{3e^x-5}{2e^x+7}$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f(x)=\dfrac{3-5e^{-x}}{2+7e^{-x}}$.

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice 13 :

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$.

En étudiant les limites de *f en* $+\infty$ et en $-\infty$, déterminer les asymptotes de C_f .

Exercice 14 : Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.
1. $f(x)=e^{2x+1}$
2. $g(x)=e^{-4x+2}$
3. $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 15 : Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=e^x-x$.
1. Étudier la limite de f en $-\infty$.
2. a. Factoriser $f(x)$ par e^x .

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 : Étudier la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.
1. $f(x)=x+2-e^x$.
2. $g(x)=x\,e^{-x}$
3. $h(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$
4. $k(x)=e^{2x}-x\,e^x$

Exercice 17 : Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
1. Déterminer la limite en $-\infty$, puis en $+\infty$ de la fonction *f*.
   En déduire les équations des asymptotes à la courbe C_f .
2. On se propose d'étudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite d'équation $y=1$.

   a. Montrer que $f(x)-1=\dfrac{-2}{e^x+1}$.

   b. En déduire le signe de $f(x)-1$ puis la position de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y=1$.
3. Étudier la position relative de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y=-1$.

Exercice 18 : Déterminer une limite à l'aide d'un nombre dérivé.

On se propose d'étudier la limite en 0 de la fonction *f* sur ℝ* par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

1. a. Expliquer pourquoi les règles opératoires mènent à une forme indéterminée.
   b. Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite de la fonction f en 0.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction exponentielle.
3. Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé, le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.
4. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

Exercice 19 :Soit f la fonction définie sur ℝ{1} par $f(x)=\dfrac{2+\sin(x)}{x-1}$.

1. En utilisant votre calculatrice, étudier les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
2. a. Démontrer que pour tout réel $x>1$,

   $\dfrac{1}{x-1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{3}{x-1}$

   b. Démontrer que pour tout réel $x<1$,

   $\dfrac{3}{x-1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x-1}$

   c. A l'aide de ces inégalités et des théorèmes de comparaison, justifier les conjectures émises à la question 1.

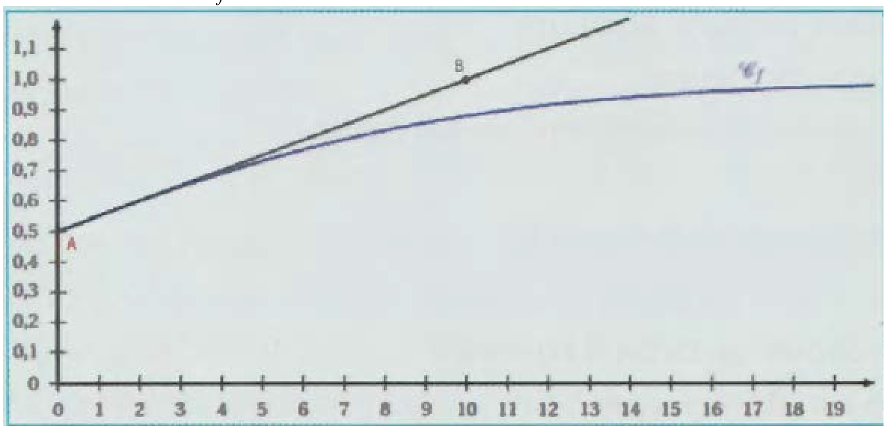
Exercice 20 : Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=3x\,e^{x}-e^{2x}$

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=e^{2x}(3x\,e^{-x}-1)$.
2. En déduire la limite de g en +∞.

Exercice 21 : On injecte, par piqûre intraveineuse, une dose de médicaments dans le sang à l'instant $t=0$.
On note $Q(t)$ la quantité de médicament, dans une unité adaptée, présente dans le sang à l'instant t, en heure. On admet que $Q(t)=1{,}8\,e^{-1{,}2t}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction Q sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. a. Étudier la limite de la fonction Q en –∞.
   b. Interpréter la limite obtenue.

Exercice 22 : Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{-bx}}$.
La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
La courbe C_f passe par le point A(0; 0,5).
La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point B(10 ; 1).



Partie A.

1. Justifier que $a=1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-bx}}$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{b\,e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B
La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par : $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$.
Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur [0;+∞[.
   b. Calculer la limite de la fonction p en +∞.
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé. Pour déterminer l'année au cours de laquelle cela se produit, on utilise cet algorithme au début duquel on affecte la valeur 0 à la variable A.
   a. Compléter cet algorithme.
   Tant que …........... ;
   A = A +1
   b. Dresser un tableau de suivi des variables. En quelle année, le marché sera-t-il saturé ?

Exercice 23 : La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x\leqslant 2 \\ 7 & \text{si } x>2 \end{cases}$.
La fonction f est-elle continue sur ℝ ?

Exercice 24 : La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x\leqslant 3 \\ -x+14 & \text{si } x>3 \end{cases}$.
La fonction f est-elle continue sur ℝ ?

Exercice 25 : La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x\leqslant 0 \\ x+17 & \text{si } x>0 \end{cases}$.
La fonction f est-elle continue sur ℝ ?

Exercice 26 : Soit f une fonction continue sur ℝdont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-3				-7

Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 27 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$
2. Justifier alors que $f(x)=2$ admet trois solutions sur l'intervalle [-4;4].

Exercice 28 : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3+3x-5$.

1. Justifier que l'équation $h(x)=0$ n'admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 29 : L'équation $e^{3x+1}=3x$ admet-elle au moins une solution réelle ?

Exercice 30 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Démontrer que, pour tout réel k , l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution réelle que l'on notera a_k .
4. Déterminer un encadrement de a_1 à 10^{-2} près.
5. Déterminer un encadrement de a_{10} à 10^{-3} près.

Exercice 31 :
Partie A
Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g .
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée a , et que a appartient à [-1;0].
   En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}$.

1. a. Démontrer que pour tout réel $x>1$, $1<x<x^2<x^3$.
   b. En déduire que pour tout réel $x>1$, $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$.
   c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$
   d. En déduire la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
2. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)=(-2x^3+x^2-1)e^{-2x+1}$
3. A l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 32 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=4$ et, pour tout n $\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{6}{u_n+1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout n $\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$
2. Montrer que pour tout $x\in[0;6]$, $f(x)\in[0;6]$.
3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel l . Déterminer la valeur de l .

Exercice 33 : Soit la fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$
3. a. Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est positive et décroissante.
   b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, en déterminer la limite.

Exercice 34 : type bac

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; +∞[, on a :
   $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
   On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe

C_f est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1)+x^2=0$.

On note g la fonction définie sur [0 ; +∞[par $g(x)=e^x(x-1)+x^2$.

On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; +∞[, puis dresser le tableau de variations de g sur [0 ; +∞[.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice 35 : type bac.

Un biologiste s'intéresse à l'évolution d'une population d'une espèce animale sur une ile du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette ile si la population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par $u_0=0,6$ et $u_{n+1}=0,75\,u_n(1-0,15\,u_n)$ où, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021, puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;1] par $f(x)=0,75\,x(1-0,15\,x)$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur [0;1].
3. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle [0;1].

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

4. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Déterminer la limite l de la suite (u_n) .
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

   a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

   b. le biologiste a programmé en langage python la fonction *menace()* ci dessous :

```
def menace() :
    u = 0,6
    n = 0
    while u>0,02 :
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
   return u
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction *menace()*.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.