Devoir Maison n°3.

Exercice 1 :

1. Simplifier l'écriture suivante : $A=\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x}}$

   $A=\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x}}=e^{x+2-(-x)}=e^{2x+2}$

2. Développer et réduire l'expression suivante :

   $B=(e^{x}-e^{-x})^2-e^{-x}(e^{3x}+e^{-x})$

   $B=(e^{x}-e^{-x})^2-e^{-x}(e^{3x}+e^{-x})=(e^{x})^2-2\times e^{x}\times e^{-x}+(e^{-x})^2-e^{-x}\times e^{3x}-(e^{-x})^2$

   $=\ e^{2}x-2+e^{-2x}-e^{2}x-e^{-2}x=2$

3. Montrer que, quels que soit le réel $x\neq 0$, on a :

   $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

   $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}\times(e^{2x}+1)}{e^{-x}\times(e^{2x}-1)}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

Exercice 2 : Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

Soit C sa courbe représentative et T la tangente à C en son point d'abscisse 0.

1. Étudier le sens de variation de *f* sur ℝ

   La fonction f est définie et dérivable sur ℝ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

   $f'(x)=\dfrac{e^{x}(1+e^{x})-e^{x}\times e^{x}}{(1+e^{x})^2}=\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}>0$

   La fonction f est donc croissante sur ℝ

2. Écrire une équation de la droite T.

   T a pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

   $f'(0)=\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

   $f(0)=\dfrac{1}{2}$

   Donc T a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

3. Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}-f(x)$.

   a. Montrer que, pour tout *x*, $g'(x)=\dfrac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$.

   $g'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}=\dfrac{(1+e^{x})^2}{4(1+e^{x})^2}-\dfrac{4e^{x}}{4(1+e^{x})^2}\ =\ \dfrac{1+2e^{x}+e^{2x}-4e^{x}}{4(1+e^{x})^2}\ =\ \dfrac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$

   b. En déduire le sens de variation de *g*.

   Un carré étant toujours positif, on a $g'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

   c. Calculer $g(0)$.

   $g(0)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

   d. En déduire la position de C par rapport à T.

   On a pour tout $x<0$, $g(x)<0$ et donc $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}-f(x)<0$, par conséquent $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}<f(x)$

C est au dessus de T pour $x<0$

On a pour tout $x>0$, $g(x)>0$ et donc $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)>0$, par conséquent $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}>f(x)$

C est en dessous de T pour $x>0$

Exercice 3:Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$

Initialisation : n=0

D'une part, $\sum_{k=0}^{0}(2k+1)=1$

D'autre part, $(0+1)^2=1$

Par conséquent, l'initialisation est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel n quelconque. Supposons que l'égalité $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$ soit vraie et montrons qu'alors $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=(n+1+1)^2=(n+2)^2$.

$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1=(n+1)^2+2(n+1)+1=n^2+2\mathrm{n}+1+2\mathrm{n}+2+1=n^2+4\mathrm{n}+4=(n+2)^2$

L'hérédité étant vraie, la propriété est donc vraie pour tout n $\in \mathbb{N}$

Nous avons donc démontré que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$