Limites de suites.

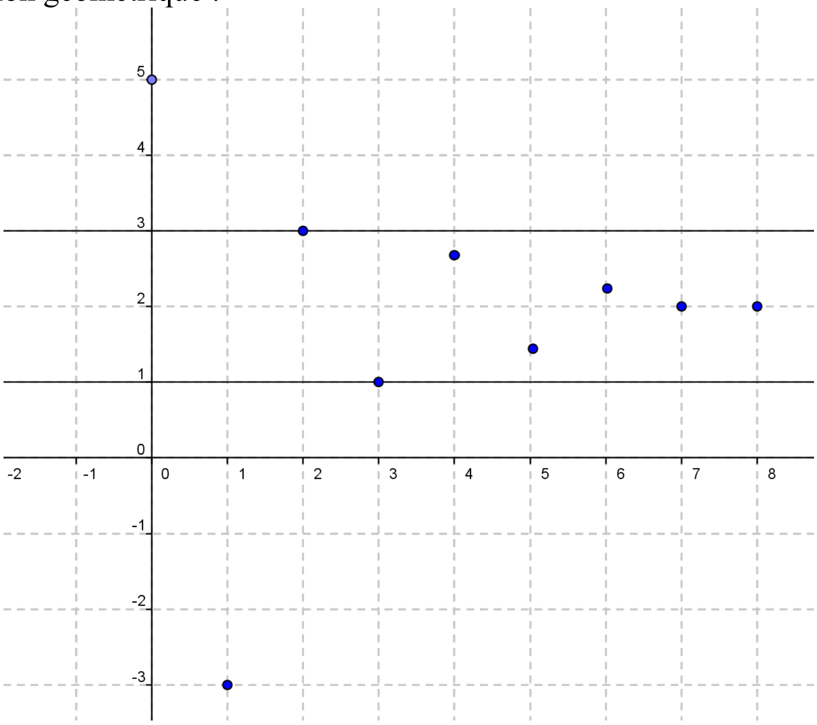
I. Limite finie ou infinie.

a. limite finie.

Définition : La suite (u_n) admet pour limite le réel l si, tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.
On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Vocabulaire : On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l ou que la suite (u_n) est convergente.

Interprétation géométrique :



Pour $n \geqslant N$, $u_n \in$I.

Exemples :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $k \geqslant 1$

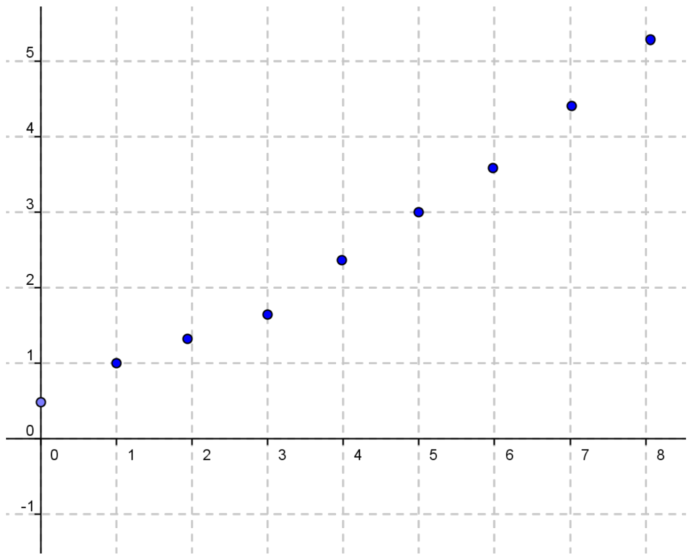
b. limite infinie.

Définition :

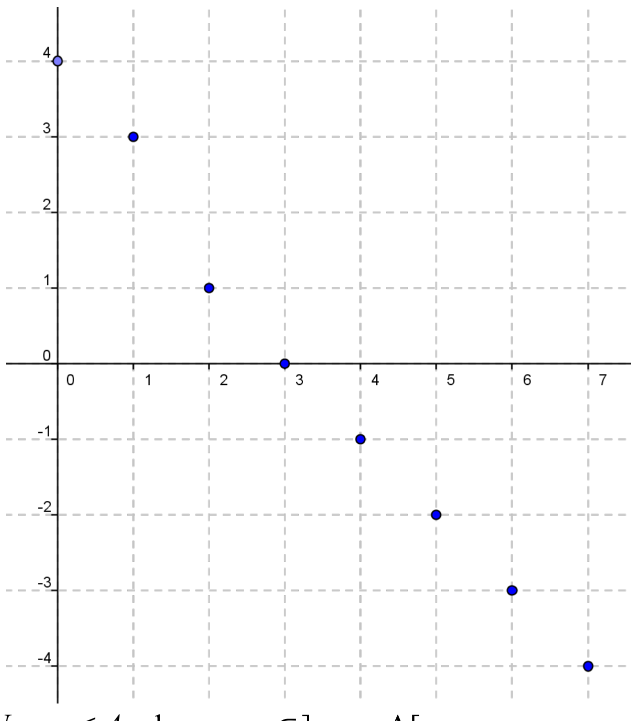
- La suite (u_n) tend vers +∞ quand n tend vers +∞ si tout intervalle de la forme]A ; +∞[contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- La suite (u_n) tend vers -∞ quand n tend vers +∞ si tout intervalle de la forme]-∞;A[contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Vocabulaire : on dit qu'une telle suite diverge vers +∞ (ou –∞).

Interprétation graphique :



Pour $n \geqslant N$, $u_n > A$ donc $u_n \in]A ; +\infty[$.



Pour $n \geqslant N$, $u_n \leq A$, donc $u_n \in]-\infty ; A[$.

Exemples : $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, $k \geqslant 1$

c. Des suites sans limites.

Une suite n'a pas nécessairement de limite.
Par exemple :

- soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $(u_n)=(-1)^n$,
- soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\sin n$

II. Limites et opérations..

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$

a. limite d'une somme.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. limite d'un produit.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	l>0	l<0	l>0	l<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ Ou $-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

c. Quotient.

Supposons que pour tout n $\in\mathbb{N}$, $v_n\neq 0$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l>0$	$l>0$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	l'>0	l'<0	l'>0	l'<0	0^+	0^-	0^+	0^+	$\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	l/l'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI

Application : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n=3n^2+n-5$, $v_n=3n^2-n-5$ et $w_n=\frac{3n+5}{-2n+7}$.

Déterminer les limites de (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Remarque : parfois, il est nécessaire de modifier la forme de la suite afin d'en déterminer la limite. En général, il suffit de procéder à des factorisations et à des simplifications.

III. Limites et comparaison.

a. Théorème des gendarmes.

On admettra le théorème suivant.

Théorème : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, soit N un entier et l un réel.
Si pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple : Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+\cos n}{n+3}$.

b. théorème de comparaison.

Théorèmes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites et N un entier naturel tels que pour tout entier n>N, $u_n \leqslant v_n$.

1. si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n+\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve :
Nous allons prouver le 2., le 1. se prouve de manière similaire.
$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
Soit A un réel, donc il existe p $\in \mathbb{N}$ tel que pour tout n>p, $v_n < A$.
Or pour tout n, $u_n < v_n$, donc pour tout $n > p$, $u_n <$ A et donc $u_n \in]-\infty, A[$
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$.
Étudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

IV. Limites des suites arithmétiques et géométriques.

a. Suites arithmétiques.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout n $\in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = u_0 + nr$

- si $r > 0$, $\lim_{n\to+\infty} nr = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- si $r < 0$, $\lim_{n\to+\infty} nr = -\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. Suites géométriques.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
Alors pour étudier la limite de u_n , nous allons commencer par étudier $\lim_{n\to+\infty} q^n$.

- Etudions tout d'abord $\lim_{n\to+\infty} q^n$, q>1.
  q étant supérieur à 1, on peut dire qu'il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.

Donc, nous allons étudier $(1+a)^n$ et montrer par récurrence que pour tout réel $a>0$,
on a : pour tout n $\in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
Soit n $\in \mathbb{N}$, montrons que P_n : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
*initialisation : n=0
$(1+a)^0=1$ et $1+0\times a=1$ d'où $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$.
donc P_0 est vraie.
*Hérédité : Soit n $\in \mathbb{N}$ Supposons que P_n est vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie.
On sait que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
$(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)$
d'où $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$ car 1+a>0
<=> $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2$
<=> $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2$
or $na^2 \geqslant 0$, d'où $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.
Par suite P_{n+1} est vraie et donc pour tout n $\in \mathbb{N}$, P_n est vraie.
On a donc pour tout n $\in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
Or, on a montré que l'on pouvait écrire $q=1+a$, $a>0$.
Soit $q^n=(1+a)^n$ et donc $q^n \geqslant 1+na$
Or $\lim_{n\to+\infty} 1+na=+\infty$ d'où par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

- Etudions $\lim_{n\to+\infty} q^n$, q=1.
  Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $q^n=1^n=1$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$.
- Etudions $\lim_{n\to+\infty} q^n$, -1<q<1.
  * dans le cas où q=0, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
  * dans le cas où 0<q<1, on a $\frac{1}{q}>1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n}=+\infty$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
  * dans le cas où -1<q<0, on a pour tout n $\in \mathbb{N}$, $-|q^n| \leqslant q^n \leqslant |q^n|$.
  $0<|q|<1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} |q^n|=0$ et $\lim_{n\to+\infty} -|q^n|=0$, donc d'aprés le théoréme des gendarmes,
  $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Etudions $\lim_{n\to+\infty} q^n$, $q \leqslant -1$.
  Les valeurs q^n appartiennent alternativement aux intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$ selon la parité de n. La suite de terme générale q^n n'admet donc pas de limite.

Théoréme : Soit la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$ avec q $\in \mathbb{R}$

- si q>1, $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- si q=1, $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$
- si -1<q<1, $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$
- si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Application aux suites géométriques : Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0=-2$ et de raison q=3, soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1=10$ et de raison $q=\frac{-1}{2}$ et soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0=7$ et de raison $q=-2$.
Déterminer, si elles existent, les limites des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

V. Etude des suites monotones.

a. Vocabulaire.

Définition :

- dire qu'une suite (u_n) est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Un tel nombre M est appelé un majorant de la suite (u_n).
- dire qu'une suite (u_n) est minorée signifie qu'il existe un réel m tel que pour n $\in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Un tel nombre m est appelé un minorant de la suite (u_n).
- Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Exemples :

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \sqrt{n}$.
   Pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$ donc (u_n) est majorée par 3.
2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$.
   Pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. La suite (v_n) est majorée par 1 et minorée par 0, elle est donc bornée.

Remarques :

- toute suite croissante est minorée par son premier terme.
  En effet, on a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant .. \leqslant u_n \leqslant ..$
- toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
  En effet, on a $v_0 \geqslant v_1 \geqslant .. v_n \geqslant ..$

b. Convergence.

On admettra le théoréme suivant.

Théoréme :

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n^n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée par 1.
3. Conclure.

Propriété :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve : On prouvera le 1er point, le deuxième point se prouvant de manière analogue.
Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Donc pour tout A $\in \mathbb{R}$, il existe N tel que $u_n > A$.
La suite (u_n) étant croissante, on a pour tout n>N, $u_n > A$ et donc pour tout A, l'intervalle]A ; $+\infty$[contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty .$$