Corrigé de l'exercice 4 :

Affirmation 1 :
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et déterminons si ces deux vecteurs sont colinéaires.

Nous avons $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$x_{\overrightarrow{AC}}=\frac{5}{7}x_{\overrightarrow{AB}}$ or $\frac{5}{7}y_{\overrightarrow{AB}}=\frac{5}{7}\times-14=-10\neq x_{\overrightarrow{AC}}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés. L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ et déterminons s'il existe un couple de réels $(a\,,b)$ tel que $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}+b\overrightarrow{EF}$.

Nous avons $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}+b\overrightarrow{EF}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5a-7b=-7 \\ 5a-5b=-14 \\ a+3b=21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5a-7b=-7 \\ -2b=7 \\ a=21-3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5a-7b=-7 \\ b=-\frac{7}{2} \\ a=21-3\times\left(-\frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

Nous obtenons alors pour valeurs de a et de b : a = $\frac{63}{2}$ et $b=-\frac{7}{2}$.

Déterminons si ces valeurs vérifient la troisième équation du systéme :

$$\frac{5\times63}{2}-7\times\left(-\frac{7}{2}\right)=182\neq-7$$

Par conséquent, il n'existe pas de couple de réels $(a\,,b)$ vérifiant $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}+b\overrightarrow{EF}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont donc pas coplanaires. L'affirmation 2 est donc fausse.

Affirmation 3 :
Soit d la droite admettant la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=1-3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Déterminons si le point A appartient à la droite d. Pour cela, vérifions s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 2+t=4 \\ -3+2t=1 \\ 1-3t=-5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=2 \\ 2t=4 \\ -3t=-6 \end{cases}\Leftrightarrow\text{¿}\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=2 \end{cases}.$$

Donc A appartient à la droite d .

Déterminons,de même, si le point B appartient à la droite d . Pour cela, vérifions s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 2+t=-3 \\ -3+2t=-13 \\ 1-3t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-5 \\ 2t=-10 \\ -3t=15 \end{cases} \Leftrightarrow\text{¿}\begin{cases} t=-5 \\ t=-5 \\ t=-5 \end{cases} .$$

Donc B appartient à la droite d .

Par conséquent, la droite (AB) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=1-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

L'affirmation 3 est donc vraie.

Affirmation 4 :

La droite (CD) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-1+5t' \\ y=5t' \\ z=1+t' \end{cases} ,\ t' \in \mathbb{R}$$

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes s'il existe un couple de réels (t, t') vérifiant le systéme suivant :

$$\begin{cases} 2+t=-1+5t' \\ -3+2t=5t' \\ 1-3t=1+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t=-1-3+2t \\ t'=\frac{1}{5}(-3+2t) \\ 1-3t=1+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ t'=\frac{1}{5}(-3+2\times 6) \\ 1-3t=1+t' \end{cases}$$

Nous obtenons alors pour valeur de t et t' : t=6 et $t'=\frac{9}{5}$.

Déterminons si ces deux valeurs vérifient la troisième équation :

$1-3t=1-3\times 6=-17$

$1+t'=1+\frac{9}{5}=\frac{14}{5}$

Cela n'est pas le cas, nous pouvons donc conclure que les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.