Limites d'une fonction.

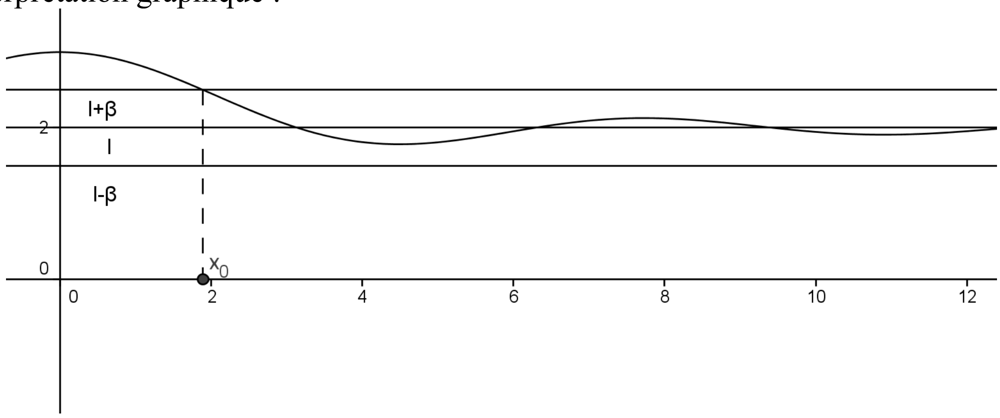
I. Limite d'une fonction en l'infini.

a. limites finies en $+\infty$ ou en - ∞ .

Définition : Soit l un nombre réel.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [r ; +∞[avec r réel.
  Dire que f admet pour limite l en +∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;r]$ avec r réel.
  Dire que f admet pour limite l en –∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
  On écrit alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$

Interprétation graphique :



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

Quelque soit l'intervalle ouvert centré en l, on peut trouver un réel A tel que la courbe représentative de f restreinte à l'intervalle $]A;+\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessus. De plus, la courbe C_f devient aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $y=l$ lorsque x est « assez grand ».

Définition : Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$), on dit que la droite d'équation $y=l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en +∞ (resp en –∞).

Exemples à connaître :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$
  L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction inverse en +∞ et en –∞.
- $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

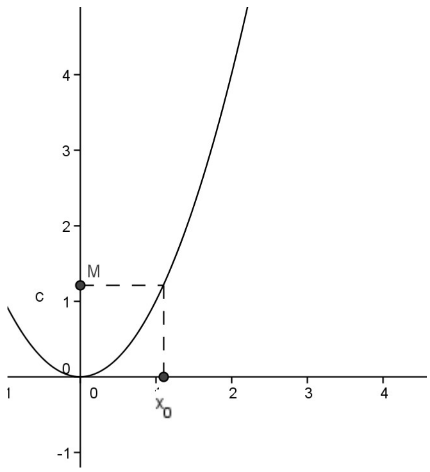
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$ où n $\in \mathbb{N}^*$.

b. Limites infinies en +∞ ou en –∞.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [r ; +∞[avec r un réel.
- Dire qu'une fonction f a pour limite +∞ en +∞ signifie que tout intervalle ouvert]M ; +∞[contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises par tous les x assez grands.
  On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Dire qu'une fonction f a pour limite –∞ en +∞ signifie que tout intervalle ouvert $]-\infty ; M[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x assez grands.
  On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

On aura des définitions analogues pour $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Interprétation graphique :



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Pour toute droite d'équation y=M, on peut trouver une droite d'équation $x=x_0$ telle que la courbe représentative de f restreinte à $]A ;+\infty[$ soit dans la partie colorée ci-dessus.

Exemples à connaître :
- $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x)}=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$, si n est pair.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$, si n est impair.

II. Limite d'une fonction en un réel a .

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

Soit a un nombre réel, borne de l'ensemble de définition de f n'appartenant pas à D_f .

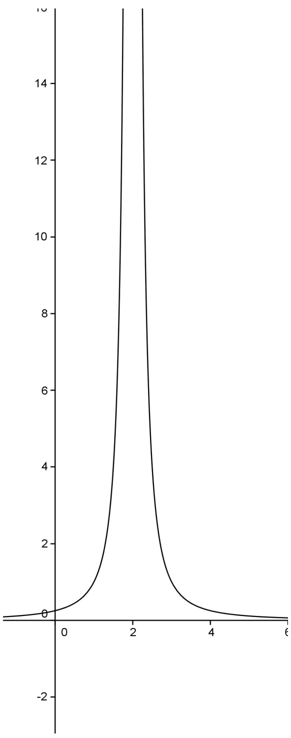
a. limite infinie en a .

Définition :

- dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que pour tout intervalle]M ; $+\infty$[contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x proches de a appartenant à D_f . On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ en a signifie que pour tout intervalle $]-\infty ; M[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x proches de a et appartenant à D_f . On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

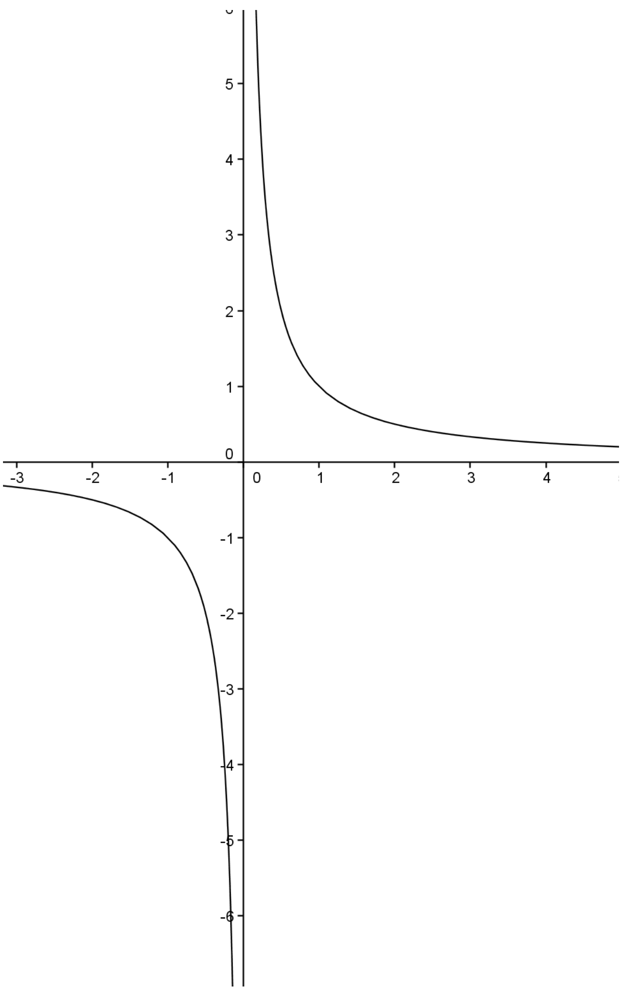
En pratique, on est parfois amené à étudier séparemment les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$. On parle alors de « limite de f à droite en a », notée $\lim_{x \to a,\, x > a} f(x)$ et de « limite de f à gauche en a », notée $\lim_{x \to a,\, x < a} f(x)$.

Interprétation graphique :



$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Pour toute droite d d'équation y=M, on peut trouver un intervalle $]a-\alpha , a+\alpha[$ tel que C_f restreinte à $]a-\alpha , a+\alpha[$ soit dans la partie colorée.



$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Définition : Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un réel a (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

Exemples à connaître :

- $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair.
- $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ Si n est impair.
- $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

b. Limite finie en a .

Définition : Dire qu'un réel l est limite d'une fonction f lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert de centre l contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x proches de a et appartenant à D_f .

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

II. Limites et opérations.

a. Somme, produit et quotient.

a Désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, l et l' sont des réels.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l	l	+∞	-∞	+∞
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
$\lim_{x \to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	+∞	-∞	+∞	-∞	Forme indéterminée

Exemples:

$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 3x = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - 5x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to -\infty} -5x = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	+∞	-∞	+∞
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	+∞	-∞	+∞ ou -∞	+∞	-∞	-∞
$\lim_{x \to a} (fg)(x)$	ll'	+∞ si $l > 0$ -∞ si $l < 0$	-∞ si $l > 0$ +∞ si $l < 0$	Forme indéterminée	+∞	+∞	-∞

Exemple: $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(-3 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \times \lim_{x \to +\infty} -3 + \frac{1}{x} = +\infty \times (-3) = -\infty$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$l \neq 0$	+∞	-∞	0^+	0^-	0
$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	+∞	-∞	Forme indeterminée .

On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l\neq0$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\neq0$	0	$+\infty$	l'>0	0	0	$+\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	FI	Forme indéterminée.

On peut construire 3 tableaux similaires avec f(x)<0, g(x)<0 ; f(x)<0, g(x)>0 ; f(x)>0 et g(x)<0.

Exemple:

$\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=2$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x^2}=0$

b. polynômes.

Pour lever les indéterminations, nous utiliserons sensiblement les mêmes techniques que celles vues avec les suites.

Nous retiendrons les règles suivantes, que l'on peut facilement redémontrer grâce aux règles de calculs.

Règle 1: En +∞ et en -∞, un polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Justification: Soit f la fonction polynôme définie sur ℝ par $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+..+a_1 x+a_0$ avec $a_n\neq0$.

Lorsque $x\neq0$, $f(x)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+..+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)$.

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n x}=0$, …, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_1}{a_n x^{n-1}}=0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0}{a_n x^n}=0$.

Nous obtenons $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+..+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)=1$.

Par suite, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

Exemples:

$\lim_{x\to+\infty} 5x^2-6x+1=\lim_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4=\lim_{x\to-\infty} 4x_3=-\infty$

Nous admettrons la règle suivante:

Règle 2: En +∞ et en -∞, la limite de la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{a_n x^n+..+a_0}{b_p x^p+..+b_0}$ $(a_n\neq 0, b_p\neq 0)$ **est celle de** $x\mapsto\frac{a_n x^n}{b_p x^p}$ **.**

Exemples:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-7x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$$

c. composée de deux fonctions.

Rappel : soient f et g deux fonctions telles que pour $x\in D_g$, $g(x)\in D_f$.
La fonction qui à *x* associe $f(g(x))$ est appelée la fonction composée de f par g et on la note $f\circ g$.
Notons $h=f\circ g$.

On admettra le théoréme suivant :
Théoréme : Soient f, g, h trois fonctions telles que $h=f\circ g$.
Soient a , b et c désignant +∞, –∞ ou un réel.
Si $\lim_{x\to a}g(x)=b$, $\lim_{x\to b}f(x)=c$, alors $\lim_{x\to a}h(x)=c$.

Exemples : Etudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}$ $+\infty$
2. $\lim_{x\to\frac{1}{3}, x>\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ $+\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x}{x-2}}$ $\sqrt{2}$

IV. Théorémes de comparaison.

a. Théoréme des gendarmes.

Théoréme : Soient f, g et h trois fonctions.

1. Si pour tout *x* appartenant à un intervalle [α ; $+\infty$ [, on a $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=l$, alors $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l$.
2. Si pour tout *x* appartenant à un intervalle] $-\infty$; α [, on a $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et si $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}h(x)=l$, alors $\lim_{x\to-\infty}g(x)=l$.

Preuve :
Soit J un intervalle ouvert contenant l.
Il existe un réel A tel que pour tout *x*, $x>A$, $f(x)\in$J.
De même il existe B ∈ℝ tel que pour tout *x*, $h(x)$ ∈J.
Soit C tel que C>A et C>B, alors pour tout x , $x>C$ => $f(x)\in$J et $h(x)\in$J.
Or $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ donc $g(x)$. Ce qui démontre que $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l$

Exemple : Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x}$

b. Comparaison à l'infini.

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle [A ; +∞[et telles que pour tout $x \in$[A ; +∞[, $f(x) \geqslant g(x)$ et tel que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Alors pour tout intervalle de la forme]M ; +∞[contient toutes les valeurs $g(x)$ et donc aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand car $g(x) \leqslant f(x)$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

De même en –∞.

Théorème : Soient f et g deux fonctions définies sur [A ; +∞[.

Si pour tout x dans [A ; +∞[, $f(x) \leqslant g(x)$

- si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

On a les mêmes résultats quand x tend vers –∞.

Exemple : Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x + \cos x$

c. Croissances comparées.

Nous avons démontré les deux résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

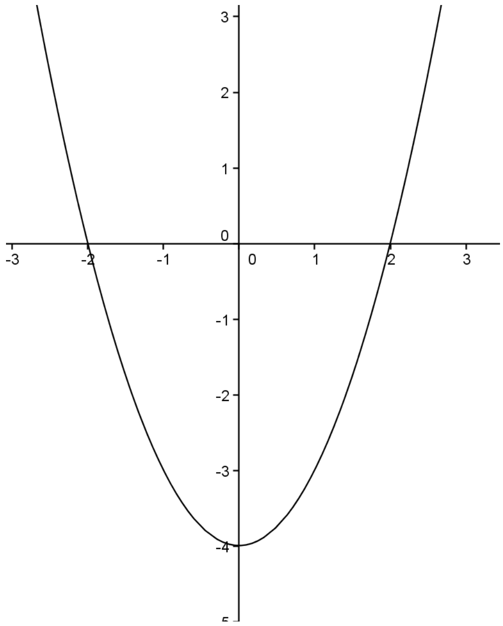
V. Continuité.

a. Définition.

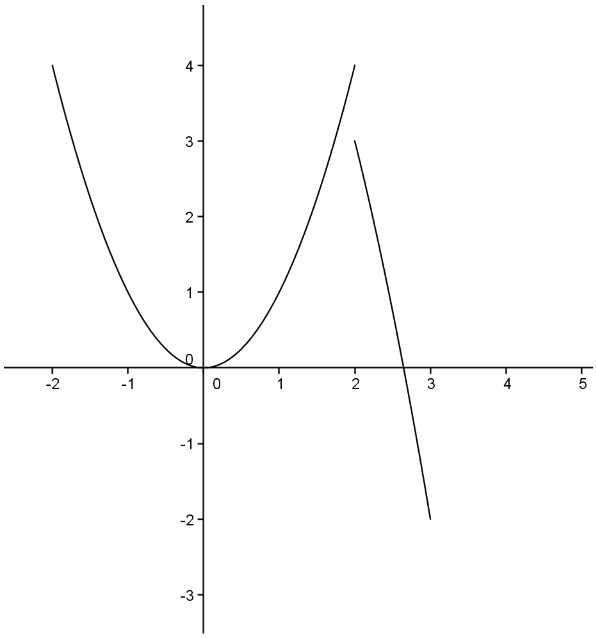
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- soit a un réel de I . La fonction f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est continue sur I si elle est continue en a pour tout réel a de I.

Illustration graphique :



Sur l'intervalle [-2;2], on peut tracer la courbe f sans lever le crayon, elle ne présente pas de « saut ». f est continue sur l'intervalle [-2;2].



On ne peut pas tracer C_f sans lever le crayon. f n'est pas continue sur l'intervalle [-2;3]. La courbe présente un saut au point d'abscisse 2. f n'est pas continue en 2 : elle est discontinue en 2.

Exemples :

- les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction racine carré est continue sur $[0\ ;+\infty[$.
- Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
- La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par :

$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ si $x\neq 2$, $f(x)=3$ si $x=2$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b. continuité et opérations.

Des théorèmes d'opérations sur les limites, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriété :
- si u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I, $u+v$, λu ($\lambda \in \mathbb{R}$), uv sont continues sur I.
- Si u est une fonction continue en a et v est continue en $u(a)$, alors $v \circ u$ est continue en a .
- Si u est une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J sur lequel v est continue, alors $v \circ u$ est continue sur I.

c. Continuité et dérivabilité.

Utilisons l'approximation affine pour démontrer que si f est dérivable en a, alors f est continue en a .

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\epsilon(h)$ où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h)=0$.

De plus, $\lim_{h \to 0} f'(a)h=0$ et $\lim_{h \to 0} h\epsilon(h)=0$.

Par conséquent, $\lim_{h \to 0} f(a+h)=f(a)$.

Par suite, $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$.

Propriété: Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .
Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Attention, la réciproque est fausse !

Propriété: Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

d. Applications aux suites.

Propriété : Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $a \in$ I, alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n)=f(a)$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{4n+1}{n+3}$. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\sqrt{u_n}$.
a. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
b. En déduire la limite de la suite (v_n) .

Théorème du point fixe :
Soient f une fonction définie continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in$ I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $l \in$ I, alors l est solution de l'équation $f(x)=x$.

Preuve : On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs

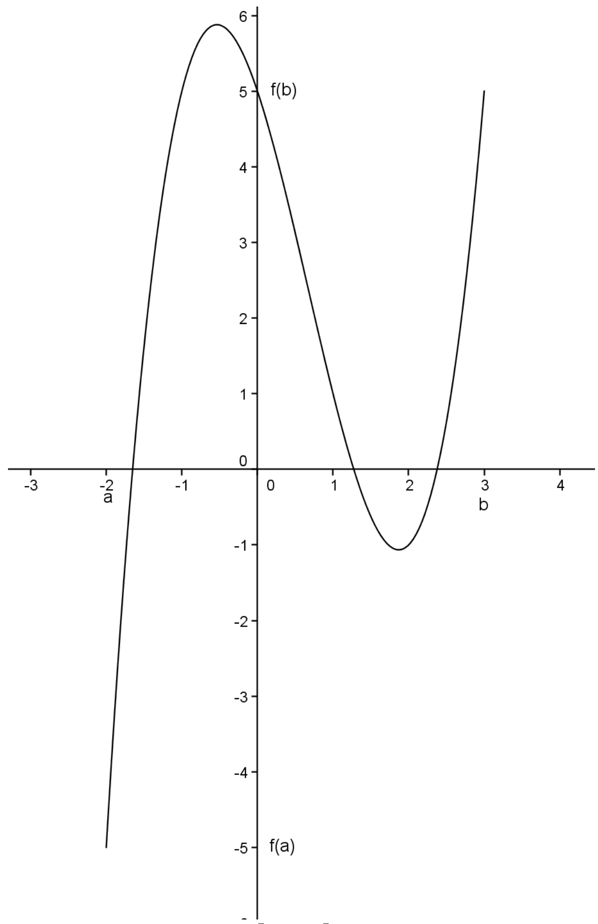
dans I. Soit (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers un réel $l \in$I.
On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$. Or d'après la propriété précédente,
$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$ donc $f(l)=l$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{3}{u_n+1}$.
Nous admettrons que la suite (u_n) converge et que pour tout entier n , $u_n \in [0;3]$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .

VI. Théorème des valeurs intermédiaires.

a. Théorème :
On admettra le théorème suivant :

Théorème : Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I, soient a et b deux réels appartenant à I. Pour tout réel k , compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



Autrement dit, f prend au moins sur $[a;b]$ toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

b. Application à la résolution d'équations.

Corollaire : Si f est une fonction continue strictement monotone sur [a,b], alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $[a;b]$.

Preuve :
Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ et un réel k tel que $f(a)<k<f(b)$.
D’après le TVI, l'équation $f(x)=k$ admet donc une solution sur $[a;b]$. Il reste à prouver que cette solution est unique.
Supposons que si on avait deux réels distincts c et c' (c<c') tels que $f(c)=f(c')=k$. Il y aurait une contradiction avec le fait que f est strictement croissante. La solution est donc unique.
Même démonstration si f est décroissante.

Exemple : Soit f la fonction ayant le tableau de variations suivant sur l'intervalle [-3;6] :

x	-3		0		6
$f(x)$	4	↘	0	↗	3

L'équation $f(x)=2$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle [-3;6].

c. Extension au cas d'un intervalle quelconque.
Le théorème précédent s’étend au cas d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non borné.

Théorème de la bijection : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, λ et μ étant les limites de f aux bornes de I, λ et μ désignant des réels, $+\infty$, $-\infty$, alors pour tout réel compris entre λ et μ, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans l'intervalle I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2-1$.
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.