Fonctions: dérivation.

I. Dérivée de la composée de deux fonctions.

1. Composée de deux fonctions.

Définition : Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J.
La composée de u par v est la fonction, notée $v \circ u$, définie sur I par
$(v \circ u)(x) = v(u(x))$

Exemple 4 : Déterminer le domaine de définition $v \circ u$ ainsi l'expression de $v \circ u(x)$ dans les cas suivants :
a. $u(x) = x+2$ et $v(x) = x^3$.

b. $u(x) = 3x-4$ et $v(x) = \sqrt{x}$

c. $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

d. $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$

b. Expression de la dérivée.

Propriété : Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie et dérivable sur l'intervalle J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in$ I,
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

Démonstration : Soit x_0 un réel appartenant à I.
Nous voulons montrer que $v \circ u$ est dérivable en x_0.
Soit x un réel appartenant à I, nous voulons donc montrer que la limite de $\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0}$ lorsque x tend vers x_0 existe et est finie.

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$$

Or la fonction u étant dérivable sur I, on a que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)$.

De plus, nous admettrons que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)=u(x_0)$ (cela vient du fait que les fonctions dérivables sont nécessairement continues....mais comme nous n'avons pas encore vu ce qu'était une fonction continue....).

Si $x_0 \in$I, $u(x_0) \in$J, et comme v est dérivable sur J, alors v est dérivable en x_0 et donc,
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}=v'(u(x_0))$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v_\circ u(x)-v_\circ u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)\times v'(u(x_0))$

Ainsi, pour tout $x_0 \in$I, la fonction $v_\circ u$ est dérivable en x_0 et donc la fonction $v_\circ u$ est dérivable sur J et pour tout $x \in$I, $(v_\circ u)'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$.

Exemples : Déterminer la dérivée de la fonction $v_\circ u$ dans les cas suivants:4

a. $u(x)=x^2$, $v(x)=\mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b. $u(x)=3x-2$, $v(x)=\sqrt{x}$ pour tout $x \in]2/3;+\infty[$

c. u(x) = $3x^2+2x-1$, $v(x)=x^9$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Des cas particuliers que nous pouvons retenir....
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

1. $u(ax+b)'=au'(ax+b)$ pour tout $x \in$I
2. $(\mathrm{e}^u)=u'\mathrm{e}^u$
3. Pour tout entier naturel n , $(u^n)'=nu'u^{n-1}$
4. Si u est strictement positive, $\sqrt{(u)}'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

IV. Convexité.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

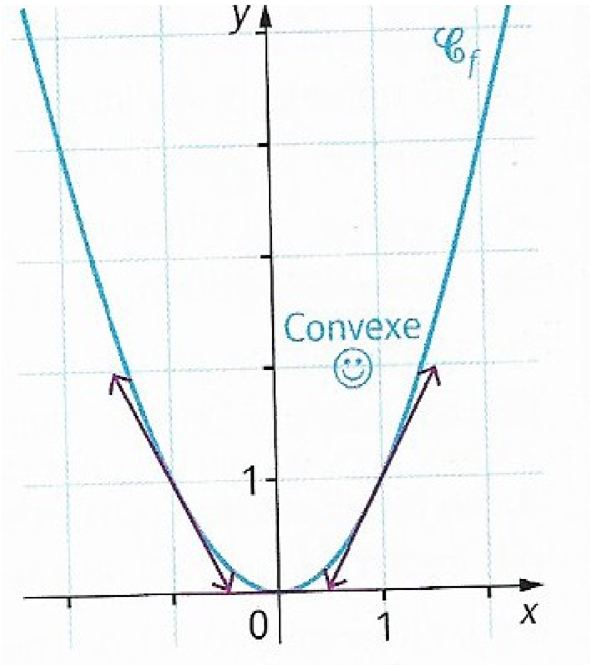
1. Définition.

Définition :

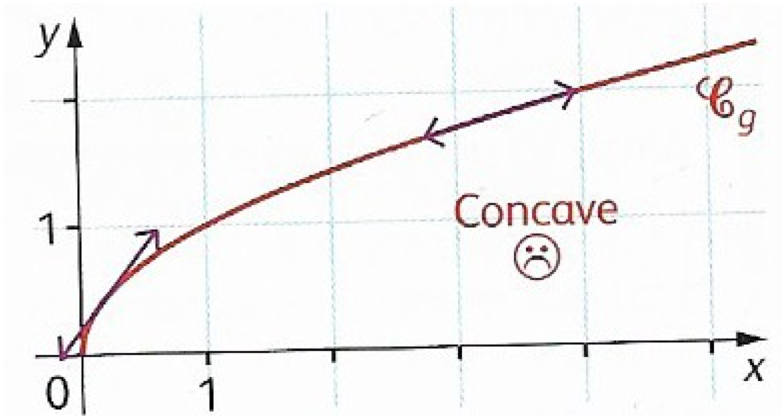
- La fonction f est dite convexe sur l'intervalle I lorsque sa représentation graphique est située entièrement au dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est dite concave sur l'intervalle I lorsque sa représentation graphique est située entièrement en dessous de chacune de des tangentes.

Exemples :

- La courbe de la fonction carré est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes. La fonction carré est donc convexe sur $\mathbb{R}$

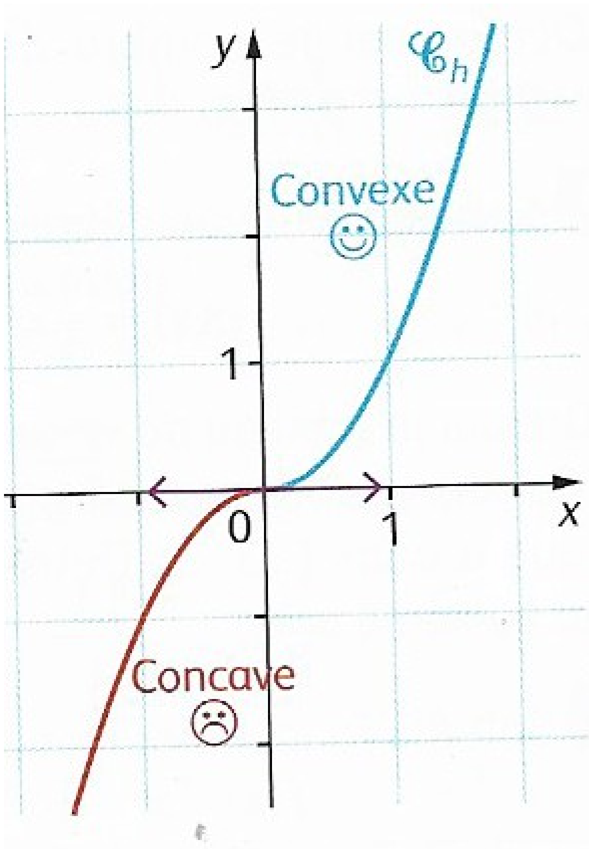


- La courbe de la fonction racinée carrée est située entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes. La fonction racine carrée est donc concave sur [0 ; + ∞[.



2. point d'inflexion.

La courbe de la fonction cube traverse sa tangente au point d'abscisse 0. La fonction cube est concave sur]- ∞ ; 0] et convexe sur [0 ; + ∞[.



L'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

Définition : Le point A de la courbe représentative C_f de la fonction *f* est un point d'inflexion de C_f si au point A, la courbe C_f traverse sa tangente en A.

Remarque : La courbe C_f d'une fonction *f* admet un point d'inflexion en A d'abscisse a quand la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a .

3. Lien avec la dérivée.

On admettra la propriété suivante (illustration graphique avec géogébra au préalable):

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Remarque : L'étude de la convexité apporte des indications sur la façon de croître ou de décroître d'une fonction.
Ainsi, une fonction croissante convexe croît « de plus en plus », comme la fonction carré sur [0 ; + ∞ [. Au contraire, une fonction croissante concave croît « de moins en moins », comme la fonction racine carrée sur [0 ; + ∞[.

La propriété suivante est la conséquence de la propriété précédente.
Nous noterons f'' la dérivée de la fonction f', on parle de la dérivée seconde de la fonction f.
Propriété :
- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.
- La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

Exemple : Soit la fonction f définie sur [0;18] par $f(x)=x^3-24x^2+217x+200$.
1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Étudier la convexité de f et montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion dont vous préciserez les coordonnées.
3. Interpréter les résultats du 2. en terme de rythme de croissance.

4. Et la fonction exponentielle ?

Comme $\exp'(x)=\exp(x)$, on peut dire que la fonction dérivée de la fonction exponentielle est croissante et donc que la fonction exponentielle est convexe.

Propriété : La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

Conséquence : Soit f la fonction exponentielle. Soit C la courbe représentative de la fonction exponentielle. La tangente T à la courbe C en sont point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(x)(x-0)+f(0)$ donc $y=x+1$.
Comme la fonction f est convexe, la courbe C est au dessus de toutes ses tangentes.
On a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.
Or, $x+1>x$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.