Exercices :
Équations différentielles.

Exercice 1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a. $f(x)=3x^2+x-6$

b. $f(x)=x^4-4x^3-5x^2+\frac{7}{3}x+2$

c. $f(x)=2x-4+\frac{3}{x^2}$

d. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

e. $f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

f. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

g. $f(x)=\frac{5x^2}{(x^3+1)^2}$

h. $f(x)=e^{3x+1}$

i. $f(x)=(x+4)e^{x^2+8x-4}$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur I=[0 ; + ∞[par $f(x)=\frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x)=\frac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x)=\frac{3x^2-x-5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 3 : Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+2$ telle que F(1)=0.

Exercice 4 : Déterminer la primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=12x^5-9x^2+6x-3$ telle que G(0)=4.

Exercice 5 : Déterminer la primitive H de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1/2\}$ par $h(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Exercice 6 : Résoudre l'équation différentielle $y'=3y$.

Exercice 7 : Résoudre l'équation différentielle $2y'+y=0$

Exercice 8 : Rechercher la fonction f solution de l'équation différentielle $2y'+5y=0$ sachant que $f(0)=3$.
Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe.

Exercice 9 : Soit (E) l'équation $2y'+y=1$.
a. Résoudre (E).

b. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(-1)=2$
c. Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles :

a. $\begin{cases} y'=2y+3 \\ y(0)=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4y'=2y-3 \\ y(5)=-1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3y'+4y-6=0 \\ y(-1)=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3u'=u+6 \\ u(0)=5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5p=2p'-\frac{1}{4} \\ p(0)=1 \end{cases}$

Exercice 11 : Soit f la solution de l'équation différentielle (E) : $3y'-6y=1$ telle que $f'(1)=2$.
a. Déterminer f(1)
b. Déterminer la solution f .

Exercice 12 : Soit (E) l'équation différentielle $2y'=3y+6x+1$

1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x)=ax+b$ est solution de (E).
2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice13 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'+3y=3e^{-3x}(-6x+1)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-3x}(-9x^2+3x+19)$

1. Dresser le tableau de variation de g . Préciser les limites.
2. Montrer que la fonction g est solution de (E).
3. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'+3y=0$
4. Résoudre alors (E).
5. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en $\frac{1}{3}$.

Exercice 14 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=e^{2x}$.

1. Démonter que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'-2y=0$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 15 : On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $y'=3y-5y^2$

1. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $v=\frac{1}{u}$ est solution de (E') : $y'=-3y+5$.
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 16 : Deux cuves A et B sont séparées par une membrane poreuse. On injecte 10 cm^3 d'un

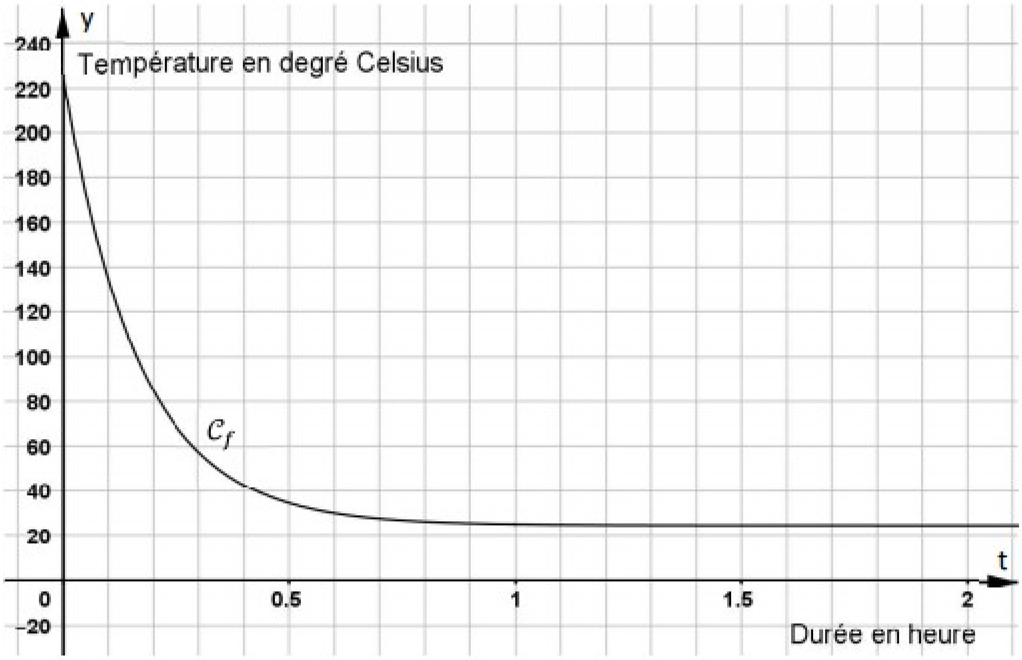
gaz dans la cuve A à un instant $t=0$ alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur.
On appelle respectivement $A(t)$ et $B(t)$ le volume en cm^3 de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant t (exprimé en heures) . On a donc A(0)=10 et B(0)=0.
On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur [0 ; + ∞[et vérifient les équations différentielles $A'(t)=-5A(t)+2B(t)$ et $B'(t)=2A(t)-2B(t)$.
On définit de plus sur [0 ; + ∞[deux fonctions f et g par $f(t)=A(t)+2B(t)$ et $g(t)=-2A(t)+B(t)$.

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Déterminer, pour tout $t\geqslant 0$, $f'(t)$ et $g'(t)$ et en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y'=a$.
3. Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t\geqslant 0$, $f(t)$ et $g(t)$.
   En déduire $A(t)$ et $B(t)$

Exercice 17 : Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; +∞[. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t , exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0{,}5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+6y=150$.

1. a. Préciser la valeur de $f(0)$.
   b. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$.
   c. En déduire que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $f(t)=200\,e^{-6t}+25$
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît,
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution dans [0 ; +∞[.
   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
4. Soit la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



Avec la précision permise par le graphique, lire T_0 .
On donnera une valeur approchée sous forme d'un nombre entier de minutes.

5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.
Ainsi, pour un entier naturel n , D_n désigne la diminution de la température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la (n+1)-ième après sa sortie du four.
On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$.
a. Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
b. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200\,e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1})$
En déduire le sens de variation de la suite (D_n) , puis la limite de la suite (D_n) .
Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?