Devoir Maison n°4.

Exercice 1 : Les fonctions avec un paramètre.
Rappel :
Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite paire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=f(x)$
Définition : Une fonction f , définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite impaire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x)=-f(x)$

Soit λ un réel non nul fixé et g_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g_\lambda=e^{-\lambda x^2}$.

Soit Γ_λ la courbe représentative de g_λ dans un repère.

1. Étudier la parité de la fonction g_λ .
2. Déterminer le sens de variation de g_λ .
3. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ . En déduire la convexité de g_λ .
4. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points d'inflexion?Si oui, en donner l'abscisse.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction Γ_λ .

Exercice 2 :
Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude, la population est de 100000 insectes. Pour préserver l'équilibre du milieu naturel , le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400000.
Partie A: Étude d'un premier modèle en laboratoire.
L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire,en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60% chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes,exprimé en millions,au bout de n mois. On a donc $u_0=0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :$u_n=0{,}1\times1{,}6^{n.}$
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En utilisant votre calculatrice,déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n>10$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

Partie B: Étude d'un second modèle.
En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes,les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite f définie par: $v_0=0{,}1$ et,pour tout entier naturel n ,$v_{n+1}=1{,}6v_n-1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n ,v_n est le nombre d'insectes,exprimé en millions,au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1{,}6x-1{,}6x^{2.}$

   a. Résoudre l'équation $f(x)=x.$

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

3. a. Montrer par récurrence que,pour tout entier naturel n , $0\leqslant vn\leqslant vn+1\leqslant\frac{1}{2}$

   b.Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

4. On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
Def seuil(a) :
        v = 0,1
        n = 0
        while v<a :
                v = 1,6*v-1,6*v*v
                n = n +1
        return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35). Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice