Rappel sur la dérivation.

I. Nombre dérivé.

1. Définition.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a .
La fonction f est dite dérivable en a si la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

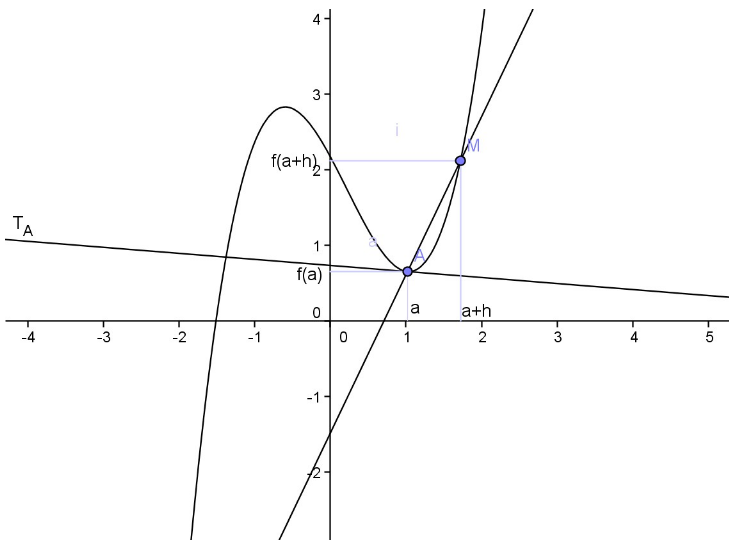
Remarques: En changeant de variable, on obtient une définition équivalente à la précédente:
On dit que f est dérivable en a si la limite lorsque x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.
On note alors $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
$f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a .

2. Tangente.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On considère les points $A(a;f(a))$ et $M(x;f(x))$ de $\mathcal{C}$ avec $x\neq a$.
Alors, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM).

1) Si f est dérivable en A,
Alors les droites (AM) « tendent vers une position limite » quand x tend vers a .

Définition: Si f est dérivable en a , on appelle tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(a;f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de cette tangente est: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.



2) Si f n'est pas dérivable.
On distingue trois cas.

- $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$

On dit que $\mathcal{C}$ admet en A une tangente verticale.

- Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a des limites à droite et à gauche, distinctes, on dit que $\mathcal{C}$ admet deux demi tangentes.

- $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite, même à droite ou à gauche.

II. Fonction dérivée.

1. Définition.

Définition: Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles.
La fonction f est dérivable sur I si f est dérivable sur I en tout réel a de I.
La fonction f' définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.

Remarque: Il peut arrive que f' soit elle-même dérivée sur I et on note f'' sa dérivée; dans ce cas, on dit que f est deux fois dérivables sur I et f'' est la dérivée seconde de f.
Si, à son tour, f'' est dérivable sur I, on note $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite, sous réserve d'existence; on note alors $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dérivées des fonctions usuelles.

I	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	k, où k est un nombre réel	
$\mathbb{R}$	x	
$\mathbb{R}$	x^n, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	
$\mathbb{R}$	e^x	
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	

3. Dérivées et opérations.

Propriété:
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, alors les fonctions $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I et si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I.

Fonction	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée					

Exemple 1 : Déterminer les dérivées des fonctions f , g , h définies de la manière suivante :

$f(x)=\frac{1}{x-4}$ pour $x \in \mathbb{R}\{4\}$, $g(x)=x\mathrm{e}^{x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $h(x)=\frac{3x+2}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exemple 2 : Déterminer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=-3x^4+5x^2+7$

4. Application de la dérivation.

- Sens de variation.
  Théorème: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$.
  - si $f'>0$, sauf en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
  - si $f'<0$, sauf en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
  - si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

- Extremum local.

  Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.
  Dire que $f(c)$ est un maximum local de f en c signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant c tel que pour tout x appartenant à J, $f(x) \leqslant f(c)$.
  De façon analogue, on définit un minimum local de f.
  Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local.

  Théorème: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $c \in I$.
  - **si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c)=0$.**
  - **si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.**

Exemple 3 : Reprendre les fonctions étudiées à l'exemple 1, en étudier leurs variations et préciser si elles ont des extrema locaux.