Pour se souvenir.
Géométrie dans l'espace : positions relatives.

I. Droites de l'espace.

a. Détermination.

Comme dans le plan, une droite de l'espace peut être déterminée par :

- deux points A et B distincts. On parle de la droite (AB).
- Un point A et la direction d'une droite d . On parle de la droite passant par A et parallèle à d .

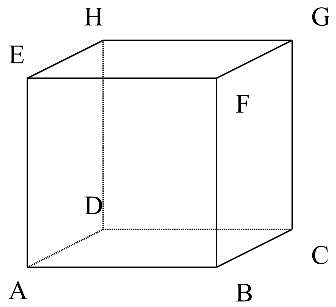
b. Position relative de deux droites.

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
Vocabulaire : Coplanaire signifie dans le même plan.

Deux droites coplanaires peuvent être soit sécantes, soit parallèles.

Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes, ni parallèles.

Exemple 1 : Soit ABCDEFGH un cube.



Les droites (AB) et (DC) sont coplanaires.
Les droites (AB) et (BF) sont coplanaires.
Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.

II. Plans de l'espace.

a. Détermination.

Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un unique plan (ABC).

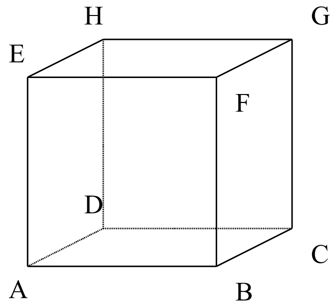
Un plan peut être aussi déterminé par :

- une droite et un point extérieur à la droite.
- Deux droites sécantes.
- Deux droites parallèles distinctes.

b. Position relative de deux plans.

Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.
Deux plans sécants le sont nécessairement suivant une droite.
Deux plans parallèles peuvent être soit confondus, soit strictement parallèles et n'ont alors aucun point commun.

Exemple 2 : Soit ABCDEFGH un cube.

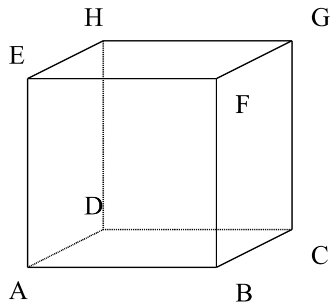


Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
Les plans ((BCG) et (EFG) sont sécants en (FG).

c. Position relative d'une droite et d'un plan.

Une droite et un plan sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, alors ils ont un point d'intersection.

Exemple 3 : Soit ABCDEFGH un cube.



Le plan (ABC) et la droite (EF) sont parallèles.
Le plan (ABC) et la droite (CG) sont sécants en C.

III. Parallélisme.

a. Entre les droites.
Dans le plan, on dit que deux droites sont parallèles si elles n'ont pas de point commun.
Dans l'espace, il y a une condition de plus : elles doivent être coplanaires.

Définition : Deux droites de l'espace sont dites parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

Une propriété essentielle du plan est conservée dans l'espace.
Propriété : Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Propriété ; Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

b. Entre deux plans.

Propriété caractéristique : Deux plans P et Q sont parallèles si et seulement si P contient deux droites sécantes parallèles à deux droites de Q.

Exemple 4: Soit SABC un tétraèdre. Soit I le milieu de [SA], J le milieu de [SB] et K le milieu de [SC]. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Propriété : Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

Propriété : Si deux plans P et Q sont parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.

Exemple 5 : Soit SABC un tétraèdre. Soit I un point appartenant au segment [SA]. Soit P le plan passant par I et parallèle au plan (ABC). P coupe le segment [SB] en J et le segment [SC] en K. Démontrer que les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

c. Entre droite et plan.

Propriété : Si deux plans P et Q sont parallèles et si une droite d est parallèle à P, alors d est parallèle à Q.

Propriété : Si deux droites d et δ sont parallèles et si d est contenue dans un plan P, alors δ est parallèle à P .

Exemple 6: Soit SABC un tétraèdre. Soit I le milieu de [AS] et J le milieu de [SB]. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

Propriété : Si P et Q sont deux plans sécants selon une droite δ et si d est une droite parallèle à P et Q, alors d et δ sont parallèles.

Théorème du toit :
Soient d et d' sont deux droites parallèles, soit P un plan qui contient d et P' un plan qui contient d'. Si P et P' sont sécants suivant une droite Δ , alors Δ est parallèle à d et à d'.

Exemple : Soit SABC un tétraèdre. Soit I le milieu de [SA] et J le milieu de [SB]. Soit H un point de [SC] distinct de son milieu. Les droites (HI) et (AC) se coupent en M et les droites (HJ) et (BC) se coupent en N.
Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.