Introductions aux équations différentielles.

En physique et en svt, on se retrouve dans des situations concrètes qui amènent à des équations. Prenons deux cas particuliers :

1. La chute d'un corps dans le vide.
   Si $v(t)$ désigne la vitesse d'un corps à l'instant t, alors l'accélération du corps est la dérivée $v'(t)$.
   Dans le vide, le corps est soumis uniquement à la force de pesanteur et la loi de Newton (principe fondamental de la mécanique) donne :
   $mv'(t)=\mathrm{P}=mg$
   Soit aussi, $v'(t)=g$
   On a donc une équation dont l'inconnue est une fonction et dont on connaît une expression de sa dérivée.
2. Radioactivité.
   Si on désigne par N(t) le nombre d'atomes de radium à l'instant , alors la quantité d'atomes qui se désintègrent à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présente : $\mathrm{N}'(t)=-a\,\mathrm{N}(t)$
   De la même manière, on a une équation dont l'inconnue est une fonction et qui relie cette fonction avec sa dérivée.
   Résoudre cette équation permet de connaître à chaque instant t le nombre d'atomes $\mathrm{N}(t)$.
   Ceci est par exemple appliqué pour la datation au carbone 14 de matière organique.
   Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'a pris cette désintégration, c'est à dire l'âge de la matière organique.

Nous pouvons remarquer au travers de ces deux exemples un nouveau type d'équation qui relie une fonction et sa dérivée. Les Mathématiques, se mettant au service des sciences, ont développé une théorie pour résoudre ces problèmes.
Ces équations, reliant fonction et dérivée, sont appelées équations différentielles du premier ordre.
L'inconnue cherchée est alors une fonction.

Exercices :
Exercice 1 :

1. Considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5\,\mathrm{e}^{2x}$.
   Montrer que f est solution de l'équation $y'-2y=0$ d'inconnue y.
2. Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+3x^2+2$ est solution de l'équation $y'-2y=-6x^2+6x-4$

Exercice 2 : Déterminer des fonctions f telles que :
a. $f'(x)=6x+2$ b. $f'(x)=x^2-3x+5$ c. $f'(x)=2\,\mathrm{e}^{4x}$
d. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ e. $f'(x)=\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

Exercice 3 : Soit f une solution de l'équation différentielle (E) : $3y'-6y=1$ qui vérifie de plus $f'(1)=2$.
a. Déterminer $f(1)$.
b. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x-2}-\dfrac{1}{6}$ est solution de (E).