BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Janvier 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation d'une calculatrice en mode examen est autorisée

Chaque exercice devra être fait sur une copie séparée.

Tournez la page S.V.P.

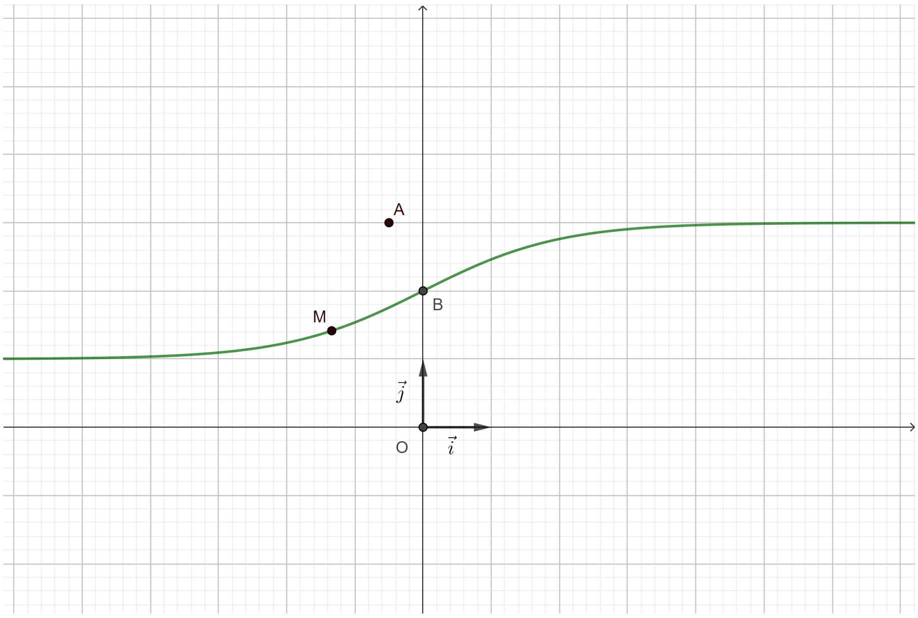

FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction f

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, représentée dans la figure page suivante. Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$.

1. Démontrer que le point B(0; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B. Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
3. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

Soit x un réel quelconque. On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x ; f(x))$. On pose

$$g(x) = AM^2$$

1. Démontrer que
$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. On admet de plus que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 0$. Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise de location propose à ses clients deux types de véhicules : des voitures et des camionnettes. Par ailleurs, un client peut prendre l'assurance tout risque. On sait que :

- 60 % des clients choisissent une voiture ; parmi eux, 20 % prennent l'assurance tout risque.
- 42 % des clients prennent l'assurance tout risque.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- V : « le client choisit une voiture ;
- L : « le client prend l'assurance tout risque ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse une voiture et qu'il ne prenne pas l'assurance tout risque.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une camionnette et qu'il prenne l'assurance tout risque est égale à $0,30$.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'assurance tout risque.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi une voiture ? Arrondir à $0,01$ près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'assurance tout risque, la probabilité que son véhicule ait un accident est égale à $0,12$. Cette probabilité n'est que de $0,005$ si le client prend l'assurance tout risque. On considère un client. On note A l''évènement : « le client a un accident ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right)$.
2. L'entreprise loue 1 000 véhicules.
   À combien d'accidents peut-elle s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'assurance tout risque est égale à 0,42. On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'assurance tout risque.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'assurance tout risque.

EXERCICE 3 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   b. À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, déterminer quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite(   ) :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 4 **4 points**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points.

$$A(4;1;-5), B(-3;-13;16), C(-1;0;1), D(4;5;2), E(7;3;-2), F(0;-2;1)$$

- *Affirmation 1* : les points A, B, C sont alignés.
- *Affirmation 2* : les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.
- *Affirmation 3* : la droite (AB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{array}\right.$$

- *Affirmation 4* : les droites (AB) et (CD) sont sécantes.