Exercices: suites: rappel et récurrence.

Exercice 1 : Pour chacune des suites (u_n) définies sur ℕ calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_{10}.

a. $u_n=n^2$ b. $u_n=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ c. $u_n=2+(-1)^n$

Exercice 2: Pour chacune des suites (u_n) définies sur ℕ calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

a. $u_0=0$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n^2+\frac{3}{n+1}$.

b. $u_0=-1$ et pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=4u_{n-1}+2n$.

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n pour tout $n\geqslant 0$:

a. $u_n=n^2+4n$ b. $u_n=2^{n-1}$

Exercice 4: Soit (v_n) la suite définie sur ℕ par $v_n=n^2+2n$.

Exprimer v_{n+1}, v_{2n} et v_{n+4} en fonction de n.

Exercice 5 : La suite (u_n) est définie pour tout $n\geqslant 1$ par $u_n=1+\frac{10}{n}$.

1. En étudiant le signe de $u_{,+1}-u_n$, montrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 1$.
2. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=1+\frac{10}{x}$.

Exercice 6 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-\frac{15}{2}$.

En étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$, déterminer les variations de (u_n).

Exercice 7 : La suite (u_n) est définie pour tout $n\geqslant 0$ par $u_n=\frac{n^2}{2^n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ à partir d'un certain rang à préciser.
3. En déduire les variations de (u_n).

Exercice 8 : Dans un disque de rayon 1, on trace un premier secteur qui est un demi-disque. Le deuxième secteur est la moitié du premier, le troisième secteur est la moitié du deuxième, etc.

1. Quelle portion du disque représente :
   a. L'aire du n-ième disque ?
   b. L'aire totale des n premiers secteurs ?
2. Combien de secteurs faut-il tracer pour recouvrir au moins 90% du disque ? 95% ? 99% ?
3. Quelles limites conjecture-t-on pour la suite des aires des secteurs ? Des aires totales des secteurs ?

Exercice 9: Un nénuphar géant couvre 10m² d'un étang et croît de 8% chaque jour. On désigne par a_n l'aire de ce nénuphar n jours plus tard.
Exprimer a_n en fonction de n et déterminer au bout de combien de temps le nénuphar recouvrera-t-il l'étang si celui-ci a une superficie de 1000m² ; de 10000m² ; de 100000m².

Exercice 10: Soit u_0 =-1 et $u_{n+1}=u_n+n+1$ pour tout $n\geqslant 0$.

1. a. Calculer ses cinq premiers termes.
   b. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_{n+1}-u_n$.
   a. Calculer les 4 premiers termes de (v_n).
   b. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. a. Calculer $v_0+v_1+..+v_{n-1}$ en fonction de n.
   b. Exprimer $v_0+v_1+..+v_{n-1}$ en fonction de u_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11: On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0= 0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}\end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0= 2 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et v_1, v_2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n=v_n-u_n$.
   a. Monter que (d_n) est une suite géométrique.
   b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.
3. Soit $s_n=u_n+v_n$ pour tout $n\geqslant 0$.
   a. Calculer s_0, s_1 et s_2.
   b. Montrer que $s_{n+1}=s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer $U_n=u_0+u_1+..+u_n$ et $V_n=v_0+v_1+..+v_n$.

Exercice 12: On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout n>0, $u_n=n-u_{n-1}$.

1. a. Faire afficher sur une calculatrice la liste des 30 premiers termes de cette suite et les représenter graphiquement.
   b. Que constate-t-on ?
   c. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n pour $n\geqslant 0$ (on distinguera deux cas).
2. On note, pour tout $n\geqslant 0$, $v_n=u_{2n}$.
   a. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
   b. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ? Le démontrer.
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
3. Démontrer les conjectures émises en 1c.

Exercice 13: De nombreux produits radioactifs sont utilisés en médecine.

1. L'iode 131
   On étudie l'évolution au cours du temps d'une population de noyaux d'iode 131 comportant $u_0=10^7$ noyaux à $t=0$ (début de l'observation). On note u_n le nombre d'atomes au bout de n jours. Statistiquement le nombre de noyaux diminue chaque jour d'environ 8,3%.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
   b. Quel est son sens de variation ?
   c. Au bout de combien de jours la population de noyaux a-t-elle diminué de moitié (au moins) ? Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.
2. Un algorithme.
   On utilise aussi d'autres éléments radioactifs en médecine. On suppose qu'ils se désintègrent en moyenne de t chaque jour.
   a. Écrire un algorithme qui demande la valeur de t et affiche la demi vie de l'élément radioactif.
   b. Le programmer et donner la demi-vie de :
   - l'iridium 192 pour lequel t%=0,933%.
   - le cobalt 60 pour lequel t%=0,036%.

Exercice 14: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ et la suite (u_n) définie par $u_0=-5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\geqslant 0$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses et conjecturer le comportement de la suite (u_n) .
2. Déterminer le réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
3. Soit $v_n=u_n-\alpha$ pour tout n .
   a. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
   b. En déduire v_n puis u_n en fonction de n .
   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 15:On pose $S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$ où n est un entier naturel, $n\geq 1$.

1. a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .
   b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
2. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$,
   $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 16: On note $n! = 1\times 2\times \ldots\times n$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul,
$1+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n\times n!=(n+1)!-1$

Exercice 17 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ pour tout n $\in\mathbb{N}$
Démontrer que, pour tout n $\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$

Exercice 18: Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout n$\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{2}{2n+1}$.

Exercice 19 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1=0{,}4$ et pour tout entier $n\geqslant 1$,
$u_{n+1}=0{,}2u_n+0{,}4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 20: (u_n) est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n ,
$u_{n+1}=u_n+2$.
(v_n) est la suite définie par v_0 = 1 et pour tout entier naturel n , $v_{n+1}=v_n+u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Démontrer par récurrence que $v_n=1+n^2$.

Exercice 21:Soit f_n la fonction définie pour tout n $\in\mathbb{N}^*$ par $f_n(x)=x^n$ pour tout x $\in\mathbb{R}$
Démontrer que pour tout n $\in\mathbb{N}^*$, $f_n'(x)=nx^{n-1}$