Géométrie dans l'espace.
Partie 2.
Produit scalaire dans l'espace.

I. L'espace comme dans le plan.

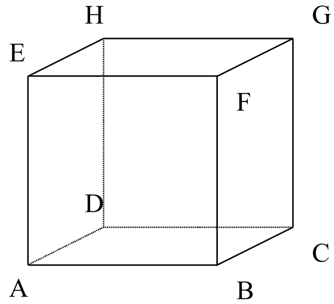
a. Définition.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- Si l'un des vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.
  $\vec{u} \, . \, \vec{0} = \vec{0} \, . \, \vec{v} = 0$.
- Si ces deux vecteurs sont des vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Cette définition prolonge celle donnée dans le plan.

Exemple 1: Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.

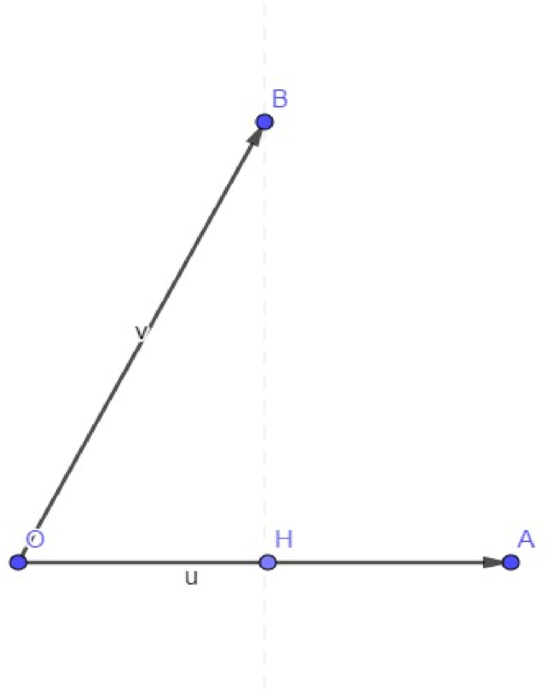


Calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$\overrightarrow{BF} \, . \, \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \, . \, \overrightarrow{AH} = a \times a\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = a^2 .$$

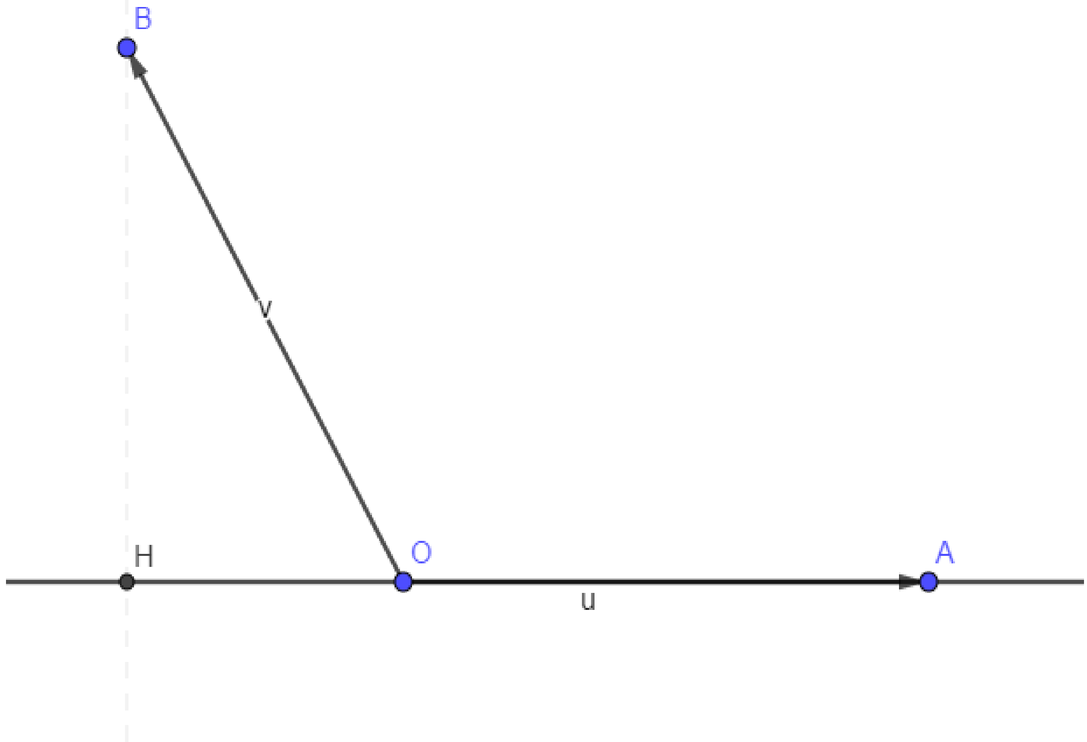
En utilisant le projeté orthogonal: Soient $\vec{u}$ et v deux vecteurs non nuls. Soient trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On a alors que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
Soit H le point de (OA) tel que les droites (BH) et (OA) soient perpendiculaires.
Distinguons deux cas :

- $H \in [OA)$



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=OA.OH$

– H $\notin$[OA)



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=-OA.OH$

b. Propriétés algébriques.

Règles de calcul : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel k ,

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $k\vec{u}.\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})=(\vec{u}.k\vec{v})$ bilinéarité du produit scalaire.
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$.
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

Remarque : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}+\vec{v}\|\times\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Conséquence : pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Exemple 2 :
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=5$. De plus, on a que $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{22}$.
Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$? Arrondir le résultat au degré près.

On a, d'une part, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}[9+25-22] = 6$.
D'autre part, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$, donc $6=3\times5\times\cos(\vec{u},\vec{v})$
Ainsi, $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{6}{15}$
On obtient donc $(\vec{u},\vec{v})=66^\circ$

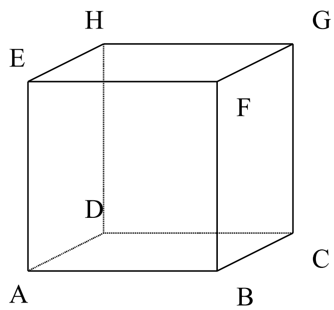
II. Orthogonalité.

a. Droites orthogonales.

Définition : Deux droites de l'espace sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

Remarque : Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

Exemple 3 : Soit ABCDEFGH un cube.



Les droites (AB) et (GC) sont orthogonales.

b. Vecteurs orthogonaux.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si :

- l'un des deux vecteurs est nul,
- si les deux vecteurs sont des vecteurs non nuls, soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

Remarque : $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Théorème : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Preuve : Immédiat avec la définition du produit scalaire.

c. Orthogonalité entre une droite et un plan.

Définition : Dans l'espace, une droite d est dite orthogonale à un plan P lorsque la droite d est orthogonale à toute droite du plan P.

Théoréme : Si une droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P , alors D est orthogonale à toute droite du plan P .

Preuve :
Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes de P , de vecteurs directeurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. d_1 et d_2 sont orthogonales par hypothése à la droite D , de vecteur directeur $\vec{u}$.
On a donc $\vec{u}.\vec{v_1}=\vec{u}.\vec{v_2}=0$.
Soit Δ une droite quelconque du plan P , soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ . Δ , d_1 et d_2 étant coplanaires, les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{v_1}+b\vec{v_2}$.
$\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(a\vec{v_1}+b\vec{v_2})=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux et donc D et Δ sont orthogonales.

Conséquence : Pour montrer qu'une droite D est orthogonale à un plan P , il suffit d'établir qu'un vecteur directeur de la droite D est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs du plan P .

Exemple 4 : Soit ABCDE une pyramide à base carrée de sommet E telle que les faces EAB,EBC,ECD et EAD sont des triangles isocèles en E. On note O le centre du carré ABCD.
Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).

Les triangles EAB et EAD étant isocèles E, nous avons que EA=EB et EA=ED, donc EB=ED, et ainsi, le triangle EBD est isocèle en E.
Or O est le milieu de [BD], donc (EO) est la médiane issue de E du triangle EBD et donc également la hauteur. Donc les droites (EO) et (BD) sont perpendiculaires.
De même, en utilisant les triangles EAB et EBC, nous pouvons en déduire que le triangle EAC est isocèle en E et ainsi que les droites (EO) et (AC) sont perpendiculaires.
Les droites (AC) et (BD) étant contenues dans le plan (ABC), nous pouvons en déduire que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).

Exemple 5: Soit ABCEFGH un cube.
Montrer que les droites (BG) et (EC) sont orthogonales.

Calculons $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EC}$
$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BG} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FC}$.
Or, d'une part, les diagonales du carré BCGF sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FC}$ = 0.
D'autre part, la droite (EF) et le plan (BFC) sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EF}$ = 0.
Ainsi, nous obtenons que $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EC}$ = 0, et donc les droites (BG) et (EC) sont orthogonales.

c. Vecteur normal à un plan.

Définition : Soit P un plan, on appelle vecteur normal à P, tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite orthogonale au plan P.

Remarque : Pour qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ soit normal à un plan P, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.

Propriété : Soit A un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

Preuve :
- Soit M un point du plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite d orthogonale à P, (AM) est alors une droite du plan P. d est orthogonale à toute droite de P donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$, alors :
  soit M est confondu avec A,
  soit (AM) est orthogonale à d, avec d droite de vecteur directeur $\vec{n}$, c'est à dire que M appartient au plan contenant A et orthogonal à d.

Exemple : Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} . \overrightarrow{AB} = 0$ est le plan orthogonal à (AB) passant par I, appelé plan médiateur de [AB].
C'est aussi l'ensemble des points équidistants de A et B.

III. Avec les coordonnées.

a. Base orthonormée.

Définition : une base orthonormée de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants , $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

Remarque : Dans le plan, une base est constituée de deux vecteurs, nous sommes en dimension 2. Dans l'espace, une base est constituée de trois vecteurs, nous sommes en dimension 3.

b. Repère orthonormé.

Définition : Soit O un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé un repère orthonormé de l'espace.

c. Les calculs.

Propriété : L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

- Soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors

  $\vec{u} . \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple 4 : L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Soient les points $A(1; 1; \sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.
Soit C le symétrique de A par rapport à O.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

C est le symétrique de A par rapport à O, donc O est le milieu du segment [AC].

Ainsi (x_C, y_C, z_C) vérifie $\begin{cases} \frac{1 + x_C}{2} = 0 \\ \frac{1 + y_C}{2} = 0 \\ \sqrt{2} + z_C = 0 \end{cases}$, ainsi, nous obtenons $\begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -1 \\ z_C = -\sqrt{2} \end{cases}$

$AB = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + (-\sqrt{2} - 1)^2 + (0 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + (-\sqrt{2} + 1)^2 + (0 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Donc ABC est isocèle en B.

AC= $\sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 4 + 8} = \sqrt{16} = 4$

Donc AC²=16

Or $AB^2 + BC^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 16$

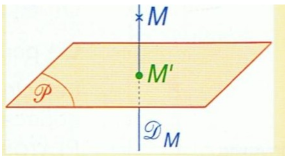
Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, nous pouvons en conclure que le triangle ABC est rectangle en B.

Exemple 5 : Soient A(0;-1;2), B(-1;0;2), C(1;2;3) et D(-4;-3;2) quatre points dans un repère orthonormé du plan (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
La droite (AB) est-elle orthogonale au plan (BCD) ?

IV. Projeté orthogonal d'un point.

a. Sur un plan.

Définition : Soit un point M de l'espace et P un plan ne contenant par le point M.
Il existe une unique droite D passant M et orthogonale au plan P
Soit M' le point d'intersection de D et de P.
M' est appelé le projeté orthogonal de M sur le plan P.



Définition : Soit un point M de l'espace et P un plan ne contenant pas le point M.
On appelle distance du point M au plan P la longueur, notée $d(M, P)$, la plus courte entre le point M et tout point A du plan P

Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur le plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration : Soit un point M, et un plan P ne contenant pas le point M , Soit M' le projeté orthogonal du point M sur P
Soit A un point quelconque du plan P.
Le triangle AMM' est donc rectangle en M', ainsi AM est l'hypoténuse de ce triangle et donc, MM'<AM quelque soit le point M.
Donc M', projeté orthogonal de M sur P est le point le plus proche de M sur P.

b. Sur une droite.

Définition : Soit un point M de l'espace et d une droite ne contenant par le point M.
Il existe une unique droite d' passant M et orthogonale à la droite d
Soit M' le point d'intersection de d et de d'
M' est appelé le projeté orthogonal de M sur la droite *d*.

Définition : Soit un point M de l'espace et d une droite ne contenant pas le point M.
On appelle distance du point M à la droite d la longueur, notée $d(M, d)$, la plus courte entre le point M et tout point A de la droite d.

Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur la droite d est le point de d le plus proche de M.

V. Équations cartésiennes et paramétriques d'un plan.

a. Équation cartésienne.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit le vecteur $\vec{n}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A le point de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$.

M appartient au plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$
<=> $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$
<=> $a(x - x_A) + b(y - y_B) + c(z - z_C) = 0$
<=> $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$
<=> $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement, soit E l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ dont les coordonnées vérifient $ax + by + cz + d = 0$ (*), où $(a, b, c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.
Supposons que $a \neq 0$, alors $A\left(\frac{-d}{a} ; 0 ; 0\right)$ appartient à E.

(*)<=> $a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0$ <=> $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$ avec $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Donc si M a des coordonnées vérifiant (*), alors ce point appartient à un plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$.

Propriété :

- Si $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors une équation du plan P orthogonal à $\vec{n}$ est $ax + by + cz + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$
- Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est une équation du plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemples :

1. Soit P le plan d'équation $3x + 2y - z + 7 = 0$.
   Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal au plan P ?
2. Soit P le plan passant par le point A(1;2;0) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une équation cartésienne de P.
   $x + 4y + 2z - 9 = 0$.

Plans parallèles.
Soient P_1 et P_2 deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.
Dire que P_1 et P_2 sont perpendiculaires signifie qu'une droite orthogonale à l'un et une droite orthogonale à l'autre sont parallèles. Cela revient à dire que P_1 et P_2 sont perpendiculaires si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires.

Exemple : Soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $2x - 3y + 5 = 0$ et $-4x + 6y - 3 = 0$.

Montrer que P_1 et P_2 sont strictement parallèles.

c. Plans perpendiculaires.

Soient P_1 et P_2 deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.
Dire que P_1 et P_2 sont perpendiculaires signifie qu'une droite orthogonale à l'un et une droite orthogonale à l'autre sont orthogonales. Cela revient à dire que P_1 et P_2 sont perpendiculaires si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux.

Exemple : Soit P_1 : $3x+2y-z+7=0$ et P_2 : $-2x+3y+9=0$ deux plans.

1. Démontrer que P_1 et P_2 sont perpendiculaires.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ, intersection des plans P_1 et P_2.

d. Projeter orthogonalement un point sur un plan.

Soit A(-1;-1;3) un point de l'espace, soit P le plan d'équation cartésienne $x-y+z-9=0$
Soit H le projeté orthogonale de A sur P.

1. Que peut-on dire des droites (AH) et du plan P ?
2. Déterminer un vecteur normal du plan P? En déduire un vecteur directeur de la droite (AH).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH).
4. Déterminer le point d'intersection des droites (AH) et D.

En déduire les coordonnées de H.