Croissance comparée des fonctions puissances et de l'exponentielle en $+\infty$

L'objectif de cette activité est de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Partie A : Expérimenter.

Nous avons vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$.

1. a. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction $x\longmapsto\dfrac{e^x}{x}$.

   b. Quel semble être la limite de cette fonction en $+\infty$?
2. Faire de même avec la fonction $x\longmapsto\dfrac{e^x}{x^2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^{10}}$.

   a. Dans un tableur, remplir la colonne A avec les nombres de 1 à 50.
   b. Écrire une formule dans la cellule B1 donnant l'image de A1 par la fonction f pour pouvoir remplir la colonne B par copier-glisser. Que constate-t-on ? Quelle semble être la limite de f en $+\infty$?
4. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{e^x}{x^{50}}$.

   a. Refaire la même procédure que précédemment pour la fonction g en utilisant la colonne C. Que constate-t-on ? Quelle semble être la limite de g en $+\infty$?
   b. Remplir la colonne D avec les nombres de 10 à 400 avec un pas de 10.
   c. Écrire une formule dans la cellule E1 donnant l'image de D1 par la fonction g, pour pouvoir ensuite remplir la colonne E par copier glisser. Que constate-t-on ? Cela remet-il en cause l'hypothèse de la question 5. a ?

Bilan : Lorsque $n\in\mathbb{N}^*$, quelle semble être la limite de la fonction $x\longmapsto\dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$?

B. Démonstration.

1. Cas $n=1$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

   a. Déterminer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$
   b. En utilisant le fait que pour tout $x\in\mathbb{R}$(résultat démontré dans le chapitre sur la convexité), dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
   c. En déduire que pour tout $x>0$, $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.
   d. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.
2. Cas $n>1$.

   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout x>0, $\dfrac{e^x}{x^n}=\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n\times\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

b. On pose $X=\frac{x}{n}$. On a alors $\frac{e^x}{x^n}=\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{X}\right)^n\times\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

On admet le théorème suivant.

Soient f et g deux fonctions, a , b et c sont des nombres réels ou + ∞ ou - ∞.

Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim_{x\to b} f(x)=c$, alors $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$

A l'aide de ce théorème et du changement de variable proposé ci-dessus, démontrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

Partie C : pour aller plus loin,

L'objectif de cet exercice est de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$.

Posons $X=-x$.

1. Démontrer que calculer $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x$ revient à calculer $\lim_{X\to+\infty}\frac{(-X)^n}{e^X}$.
2. a. Quelle est la limite de $\frac{e^X}{X^n}$ lorsque X tend vers + ∞ ?

   b. En déduire $\lim_{X\to+\infty}\frac{X^n}{e^X}$.

   c. En utilisant le fait que $(-X)^n = (-1)^n\times X^n$, en déduire $\lim_{X\to+\infty}\frac{(-X)^n}{e^X}$.
3. Conclure.