Jouons !

Commençons par quelques rappels :
Nous considérerons une expérience aléatoire dont on notera Ω l'univers des issues possibles. On supposera cet univers fini.
On notera P une probabilité sur Ω.

Définition: Une variable aléatoire discrète sur Ω est une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$qui à tout élément de Ω fait correspondre un réel.

Définition: Soit Ω l'univers sur lequel a été définie une loi de probabilité P.
On considère une variable aléatoire discrète X sur Ω prenant les valeurs $\{x_1 ; x_2 ; .. ; x_n\}$.
Définir la loi de probabilité de X, c'est donner la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ pour tout i , avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau:

x_i	x_1	x_2	..	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	..	p_n

On a $p_1 + p_2 + .. + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Définitions:
- On appelle espérance mathématique de X le nombre réel
$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + .. + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
- On appelle variance de X le nombre réel
$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + .. + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$
- On appelle écart type de X le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.
La variance d'une variable aléatoire est un indicateur de la dispersion des valeurs prises par X, pondérées par leurs probabilités.

Partie A : Au dé !

1. Xavier décide d'organiser un jeu de dé. Celui-ci consiste à lancer un dé cubique bien équilibré.
Les règles du jeu sont les suivantes :
   - si le nombre obtenu est 5 ou 6, on gagne 6€ ;
   - si le nombre obtenu est 1,2 ou 4, on perd 12€ ;
   - si le nombre obtenu est 3, on gagne 15€.

   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu avec ce jeu.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. En déduire l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

2. Tom décide, à son tour, d'organiser un jeu de dé, mais n'étant pas très inspiré, il reprend le jeu de Xavier et décide de tripler les gains et les pertes.
On note T la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu avec le jeu de Tom.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T.
b. En déduire l'espérance de T.
c. Quelle relation peut- on établir entre X et T ? Et entre E(X) et E(T) ?
3. Yann décide d'organiser également un jeu. Celui ci consiste à lancer un dé cubique bien équilibré.
Les règles du jeu sont les suivantes :
- si le nombre obtenu est pair, on gagne 10€ .
- si le nombre obtenu est 1 ou 3, on perd 8€.
- si le nombre obtenu est 5, on ne gagne ni ne perd.
On note Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu avec ce jeu.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
b. En déduire l'espérance mathématique de Y et interpréter ce résultat.
4. Zoé décide de jouer consécutivement au jeu organisé par Xavier puis par Yann.
On note Z la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par Zoé.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
b. En déduire l'espérance de Z.
c. Quelle relation peut-on établir entre X,Y et Z ? Et entre E(X), E(Y) et E(Z) ?

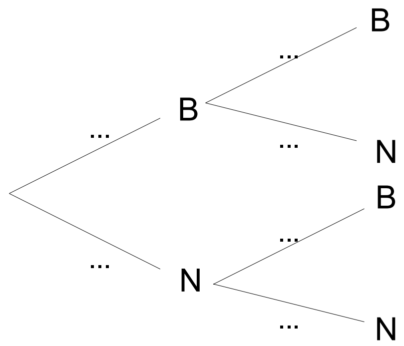
Bilan : Soient X et Y deux variables aléatoires et a un nombre réel.
E(aX) =
E(X+Y) =

Partie B : Dans une urne.
On considère une urne opaque dans laquelle se trouvent cinq boules indiscernables au toucher : trois boules noires et deux boules blanches.
Dans la suite, on notera N l'événement : « On a tiré une boule noire », et B l 'événement : « On a tiré une boule blanche ».

1. Dans un premier temps, on utilisera la règle suivante : tirer une boule noire rapporte 2€ alors que tirer une boule blanche fait perdre 1€. On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu.
a. Déterminer la loi de la variable aléatoire G, puis son espérance mathématique.
b. En déduire la variance de la variable aléatoire G.
Rappel : Si G prend les valeurs g_1 , .., g_n de probabilités respectives $p_{1,..,}\ p_n$, alors
$\mathrm{V}(\mathrm{G})=p_1(g_1-\mathrm{E}(\mathrm{G}))^2+..+p_n(g_n-\mathrm{E}(\mathrm{G}))^2$
2. Dans un deuxiéme temps, on décide de tripler les gains et les pertes. On note U la variable aléatoire donnant le gain algébrique alors obtenu.
a. Déterminer la loi de probabilité de U, puis son espérance mathématique.
b. Calculer la variance de U.
c. Quelle relation peut-on établir entre G et U ? Et entre V(G) et V(U) ?

Bilan : Soit X une variable aléatoire et a un nombre réel.
V(aX) =

3. On décide maintenant de jouer deux fois de suite à ce jeu. On tire alors deux boules au hasard sans remettre la première boule tirée dans l'urne.
a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. On note X et Y les variables aléatoires correspondant aux gains algébriques respectivement obtenus aux 1er et 2e tirage. On note Z=X+Y la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ? Par Y ? Par Z ?
2. Déterminer les lois de probabilité de X, Y et Z.
3. Calculer l'espérance de chacune de ces variables.
4. Calculer la variance de chacune de ces variables aléatoires.
5. Peut-on établir une relation entre V(X), V(Y) et V(Z) ?

4. On décide maintenant de procéder à des tirages avec remise.
   Reprendre les questions 3.a et 3.b dans cette nouvelle situation.

Bilan : Soient X et Y deux variables aléatoires …..................
V(X+Y)=