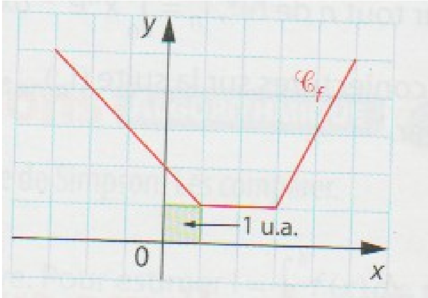
# Intégration : exercices.

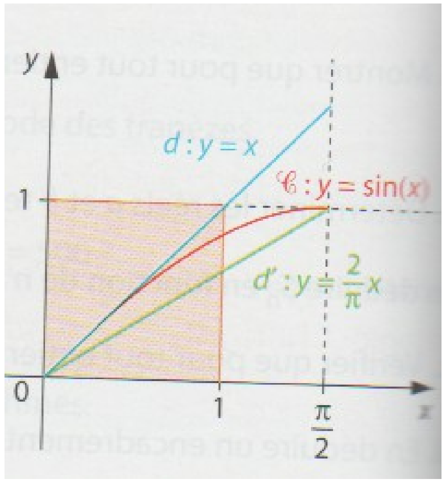
Exercice 1 : La fonction *f* est continue sur [-3;5].




1. Interpréter $\int_a^b f(x)\,dx$ et déterminer sa valeur en utilisant le graphique dans chacun des cas suivants.
   a. $a=1, b=3$ b. $a=-3, b=-1$
   c. $a=3, b=5$ d. $a=-3, b=3$
2. Le repère est orthonormé et l'unité graphique est 0,8 cm. Quelle est l'aire, en cm², de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=5$ .

Exercice 2 : A l'aide du graphique ci-dessous, donner un encadrement de l'intégrale

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$




Exercice 3:
La fonction *f* est continue, positive, paire et périodique de période 4. On donne

$$\int_0^2 f(x)\,dx=3 .$$

Déterminer :

a. $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ b. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ c. $\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

Exercice 4: Soit la fonction *f* définie sur [-1;1] par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ .
On note $C$ la courbe représentative de la fonction *f*.

1. Vérifier que la courbe $C$ est un demi-cercle de centre 0 et de rayon 1.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ .

Exercice 5: Une fonction $f$ admet ce tableau de variations.

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 2 |

Donner des encadrements des intégrales suivantes :

a. $\int_1^2 f(x)\,dx$ b. $\int_2^5 f(x)\,dx$ c. $\int_1^3 f(x)\,dx$

Exercice 6:Soit ϕ la fonction définie sur [0;10] par $\phi(x)=\int_0^x t+2\,dt$

1. Calculer ϕ(0) et ϕ(10).
2. Donner le tableau de variation de ϕ.
3. Dans un repère orthogonal du plan, tracer la courbe représentative de ϕ.

Exercice 7: Soit *f* la fonction définie sur [0;4] par $f(x)=\int_0^x |t-2|\,dt$ .

a. Calculer $f(0)$ , $f(2)$ et $f(4)$ .
b. Donner le tableau de variations de *f*.
c. Dans un repère orthonormé du plan, tracer la courbe représentative de *f*.

Exercice 8: Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t+1$ .

1. Interpréter graphiquement $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\geqslant 0$ .
2. Exprimer $F(x)$ en fonction de $x$ , $x\geqslant 0$ .
3. Déterminer $F'(x)$ pour tout $x\geqslant 0$ .
   Que peut-on dire de F par rapport à $f$ sur [0 ; +∞[ ?

Exercice 9: Soit F la fonction définie par $\mathrm{F}(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 10: Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x^2+3\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^2 2t+4\,\mathrm{d}t$
3. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_1^2 2e^x-5x\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,\mathrm{d}t$
6. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 11:On pose $I=\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ .

1. Calculer I+J
2. Calculer J.
3. En déduire I.

Exercice 12: On considère la fonction $f$ définie sur ]0 ; + ∞ [ par $f(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et , pour un entier $n\geqslant 1$ ,

l'intégrale $\mathrm{I}_n=\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ .

1. Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   Représenter $\mathrm{I}_n$ sur ce graphique.
2. Calculer $\mathrm{I}_n$ pour tout entier, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ .

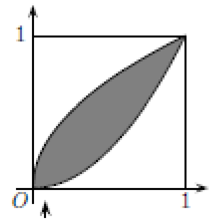
Exercice 13: Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

a. $f(x)=x^2$ , I=[-1,1]
b. $f(x)=x(3x^2-1)^2$ , I=[-1,2]
c. $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ , I=[0,4]
d. $f(x)=\frac{x^2}{(8-x^3)^2}$ , I=[0, 1]

Exercice 14:

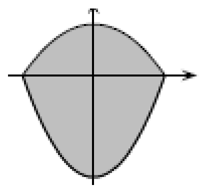
1. Montrer que, pour tout nombre réel $x$, on a : $1-x^2\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1-x^2+x^4$ .
2. Démontrer que $\frac{2}{3}\leqslant\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{13}{15}$

Exercice 15: Dans un repère orthonormé, on considère le domaine D compris entre les courbes d'équations $y=\sqrt{x}$ et $y=x^2$




Déterminer l'aire du domaine D.

Exercice 16: Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x)=x^2-4$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$



Exercice 17: Liban 2014

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle [0; +∞[ par $f(x)=xe^{-x}$.

On note $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle [0; +∞ [.
   Pour tout réel $x$ de l'intervalle [0; +∞[, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle [0; +∞[.
2. Déterminer la limite de la fonction $f$ en +∞. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat?

Partie B

Soit $A$ la fonction définie sur l'intervalle [0; +∞[ de la façon suivante: pour tout réel $t$ de l'intervalle [0; +∞[, $A(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $C$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $A$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $C$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $A$ ?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel $\alpha$ tel que la droite d'équation $x=\alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $C$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

   a. Démontrer que l'équation $A(t)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle [0; +∞[.

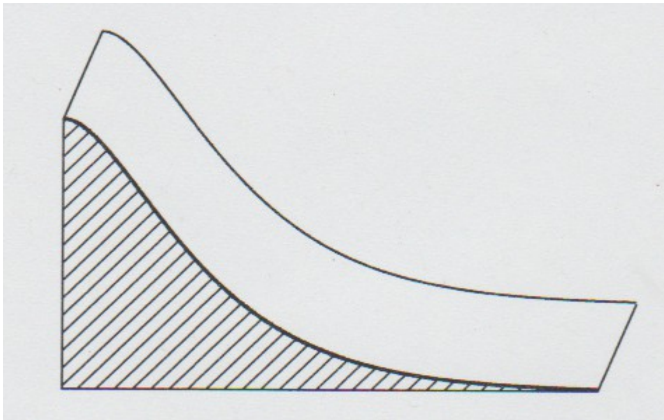
   b. Sur le graphique fourni en annexe sont tracées la courbe $C$, ainsi que la courbe $\Gamma$ représentant la fonction $A$.
   Sur le graphique, identifier les courbes $C$ et $\Gamma$, puis tracer la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel $\alpha$.

   Hachurer le domaine correspondant à $A(\alpha)$.
4. On définit la fonction $g$ sur l'intervalle [0; +∞[ par $g(x)=(x+1)e^{-x}$.
   a. On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle [0; +∞[.
   Pour tout réel $x$ de l'intervalle [0; +∞[, calculer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel $t$ de l'intervalle [0; +∞[, une expression de $A(t)$.
   c. Calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $A(6)$.


Exercice 18 : Polynésie Juin 2015

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

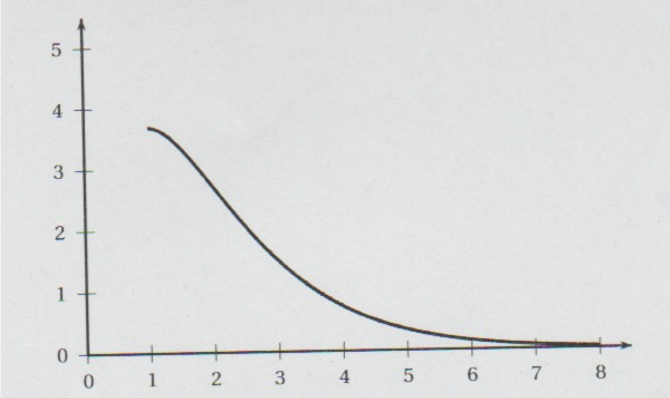
Voici ce schéma :



Partie A : Modélisation.

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $C$ représentant la fonction $f$ définie sur l'intervalle [1;8] par $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers naturels.

La courbe $C$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.




1. On souhaite que la tangente à la courbe $C$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier $a$.

Partie B : Un aménagement pour les visiteurs.

On admet dans la suite que la fonction *f* introduite dans la partie A est définie pour tout $x \in [1;8]$ par

$f(x)=10xe^{-x}$.

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose , celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

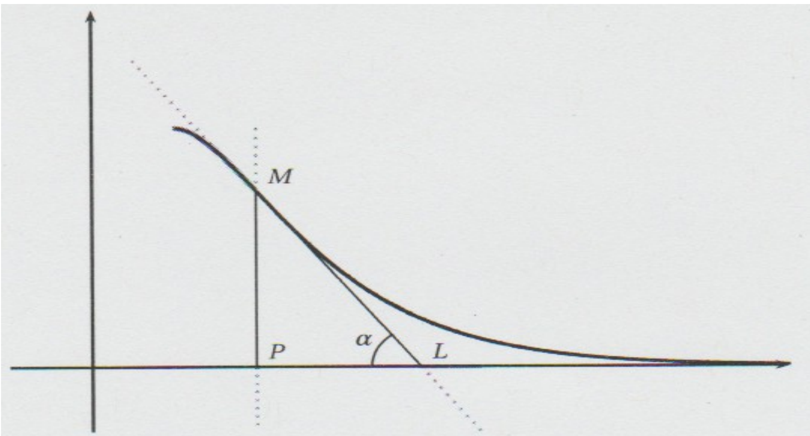
1. soit *g* la fonction définie sur [1;8] par $g(x)=10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Déterminer la fonction dérivée de la fonction *g*.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste.

Partie C : Une contrainte à vérifier.

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $C$ , d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $C$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.




Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle [1;8]. On admet que, pour tout *x* de l'intervalle [1;8], $f'(x)=10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction $f'$ sur l'intervalle [1;8].
2. Soit *x* un réel de l'intervalle ]1;8] et soit M le point d'abscisse *x* de la courbe $C$.
   Justifier que $\tan\alpha=|f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 19: Centres étrangers juin 2012

On considère la suite $(I_n)$ définie pour $n$ entier naturel non nul par : $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. a . Soit *g* la fonction définie sur ℝ par $g(x)=xe^{x^2}$.
   Démontrer que la fonction G définie sur ℝ par $G(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur ℝ de la fonction *g*.
   b. En déduire la valeur de $I_1$.
   c. Pour tout entier naturel $n$ , on définit sur ℝ la fonction $H_n$ par :
   $H_n(x)=x^{n+1}G(x)$.
   Montrer que $H_n$ est dérivable sur ℝ, calculer pour tout réel $x$ , $H'_n(x)$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$ : $I_{n+2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{n+1}{2}I_n$
   d. Calculer $I_3$ et $I_5$.
2. On considère le programme suivant :

```
from math import *
n = 1
u = 1/2*exp(1)-1/2
print(u)
while n<21:
    u = 1/2*exp(1) -(n+1)/2*u
    n = n+2
print(u)
```

Quel terme de la suite $(I_n)$ obtient-on en sortie de cet algorithme

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   c. En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.
   On note $l$ sa limite.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur de $l$.

Exercice 20: I et J sont les intégrales définies par $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$

1. En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relations entre I et J.
2. Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 21: Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathrm{I}_n=\int_0^{\pi} x^2(\cos nx)\,\mathrm{d}x$.

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $\mathrm{I}_n$ en fonction de $n$.

Exercice 22: Soit $(\mathrm{I}_n)$ la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $\mathrm{I}_n=\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

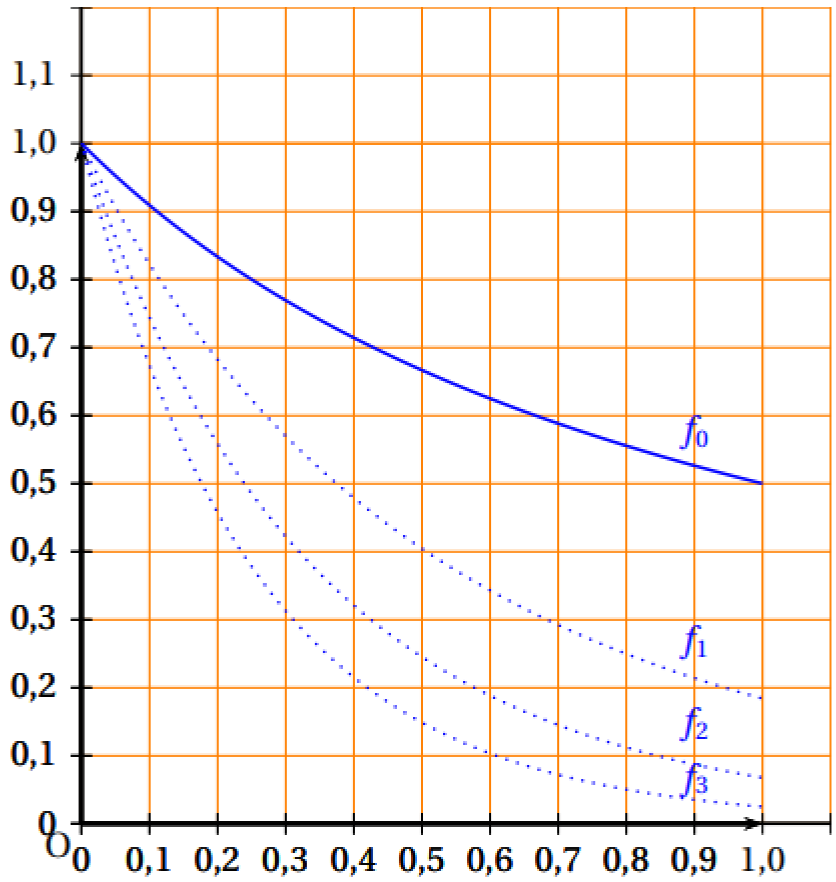
1. Calcul des premiers termes de la suite.
   a. Calculer $\mathrm{I}_0$ et $\mathrm{I}_1$.
   b. Exprimer $\mathrm{I}_2$ en fonction de $\mathrm{I}_1$, puis en déduire $\mathrm{I}_2$.
   c. Exprimer $\mathrm{I}_3$ en fonction de $\mathrm{I}_2$, puis calculer $\mathrm{I}_3$.
2. Étude de la suite.
   a. Démontrer que, pour tout entier $n$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
   b. Étudier le sens de variation de la suite I.
   c. Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite.
   a. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\mathrm{I}_{n+1}$ en fonction de $\mathrm{I}_n$.
   b. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n\mathrm{e}}$
   c. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)$

Exercice 23: mai 2012

On considère les suites $(\mathrm{I}_n)$ et $(\mathrm{J}_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par : $\mathrm{I}_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

et $\mathrm{J}_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions $f_n$ définies sur l'intervalle [0;1] par $f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeurs de $n$.




   a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite $(\mathrm{I}_n)$ en expliquant la démarche.
   b. Démontrer cette conjecture.
2. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle [0;1], on a :
   $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
   b. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_n)$ et $(\mathrm{J}_n)$ sont convergentes et déterminer leur limite.
3. a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$ :
   $\mathrm{I}_n=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-\mathrm{J}_n\right)$
   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n$

Exercice 24: mai 2012

Partie A :

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle ]0 ; + ∞[ par $g(x)=2x^3-1+2\ln x$ .

1. Etudier les variations de la fonction $g$ sur l'intervalle ]0 ; + ∞ [.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$ . Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction $g$ sur l'intervalle ]0 ; +∞[.

Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle ]0 ; + ∞ [ par $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$ .

On note C la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan, muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ).

1. Déterminer les limites de la fonction $f$ en 0 et en + ∞.
2. Démontrer que la courbe $\mathrm{C}$ admet pour asymptote oblique le droite Δ d'équation $y=2x$ .
   Étudier la position relative de la courbe $\mathrm{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ .
5. Tracer la courbe C dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ). On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C : Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe $\mathrm{C}$ , la droite d'équation Δ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=n$ .

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm², est donnée par :
   $$\mathrm{I}_n=2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
2. a. Calculer l'intégrale $2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b. En déduire l'expression de $\mathrm{I}_n$ en fonction de $n$ .
3. Calculer la limite de l'aire $\mathrm{I}_n$ du domaine D quand $n$ tend vers +∞.