Concentration, lois des grands nombres :
Exercices.

Exercice 1 : La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C d'espérance E(C)=150 et de variance V(C)=900.

1. a. Justifier que $P(|C-150|\geq 60)\leq 0{,}25$.
   b. Interpréter ce résultat en utilisant la consigne.
2. Justifier que la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85.

Exercice 2 : Pauline est en 1ere année de classe préparatoire. Les étudiants de 2e année ont dit que le nombre de feuilles utilisées pour les cours de maths dans l'année suit une loi F d'espérance 1250 et d'écart-type 80. A la rentrée, Pauline a acheté deux paquets de feuilles :

- un paquet de 1000 feuilles qu'elle ouvrira en premier,
- un deuxième paquet de 500 feuilles.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, peut-elle être sûre,à au moins 90%, d'utiliser au moins toutes les feuillles du plus gros paquet mais qu'elle n'ait pas besoin d'acheter un troisième paquet de feuilles pour cette année ?

Exercice 3 : On considère une variable aléatoire X d'espérance 12 et de variance 40.

1. Déterminer la valeur de $t>0$ telle que $\dfrac{V(X)}{t^2}=0{,}4$.
2. En déduire que $P(|X-12|\geqslant 10)\leqslant 0{,}4$
3. En déduire que la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle [2,22] est d'au moins 0,6.
   On dit que [2;22] est un intervalle de fluctuation de X au seuil de 0,6.

Exercice 4 : Sur l'emballage d'une lampe de type LED, on peut lire que sa durée de vie moyenne est de 30 000 heures.
Par ailleurs, les études ont montré que la variance de la variable alèatoire D donnant sa durée de vie est 4 000 000.

1. Majorer $P(|D-30000|\geqslant 5000)$.
2. On admet que pour tout réel $t<30000$, on a $P(D\leqslant 30000-t)=P(D\geqslant 30000+t)$.
   a. Montrer l'égalité $P(D\geqslant 35000)=\dfrac{P(|D-30000|\geqslant 5000)}{2}$.
   b. Peut-on dire qu'il y a au moins 10% de chances que cette ampoule dure 35 000 heures ou plus ?

Exercice 5 : A la fête foraine, toutes les attractions se payent en jetons et certains stands de jeux permettent de gagner des jetons.
On considère deux stands :

- le premier propose un jeu dont le gain en jetons est positif et est donné par une variable aléatoire G_1, d'espérance 0,3 et de variance 0,41.
- le deuxième propose un jeu dont le gain en jetons est positif et est donné par une variable aléatoire G_2 d'espérance 0,25 et de variance 0,5785.

On joue successivement à ces deux jeux que l'on suppose indépendants et on note G le nombre de jetons obtenus au total.

1. Donner l'espèrance et la variance de G.
2. a. Majorer $P(|G-0{,}55|\geqslant 2{,}45)$.
   b. Interpréter le résultat précédent en utilisant le contexte de l'exercice.

Exercice 6 : Dans une ville moyenne de 20 000 habitants, lors d'une consultation portant sur la rénovation du théâtre municipal, 75% des personnes consultées ont émis un avis positif.

1. On interroge n personnes. Pour $1\leqslant k\leqslant n$, la variable X_k donne 1 si la k-iéme personne interrogée est favorable au projet ; 0 sinon.
   Donner la loi de probabilité de X_k, son espérance μ et sa variance V.
2. On note M_n la variable aléatoire moyenne de X_1, X_2, .., X_n.
   a. Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,05 et un risque de 0,1, c'est à dire telle que $P(|M_n-\mu|\geqslant 0{,}05)\leqslant 0{,}1$.
   b. a. Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,01 et un risque de 0,05. Peut-on envisager raisonnablement cette situation ?

Exercice 7 : En se basant sur les statistiques des dernières années, on considère que la loi de la variable aléatoire B donnant le nombre de buts marqués par le joueur Lionel Messi lors d'un match est donnée ci-dessous :

b_i	0	1	2	3	4
$P(B=b_i)$	0,41	0,35	0,17	0,06	0,01

1. Calculer l'espérance et la variance de la B.
2. Sur une saison de 50 matchs, on considère B_i le nombre de buts marqués lors du i-iéme match (on suppose que tous les B_i sont indépendants) et $M=\frac{B_1+..+B_{50}}{50}$.
   a. Majorer $P(|M-0,91|\geqslant 1,09)$
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8 : Par hypothèse, lors d'une naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille ou un garçon est la même. On considère 2180000 naissances supposées indépendantes et on note E_i la variable aléatoire égale à 1 si le i-iéme enfant est une fille et 0 sinon.
1. Déterminer $E(E_i)$ et $V(E_i)$.
2. Que représente concrètement la variable aléatoire $M=\frac{E_1+E_2+..+E_{2180000}}{2180000}$?
3. Déterminer une minoration de la probabilité de l'événement $M \in]0,49;0,51[$.
4. En France, de 2016 à 2018, il y a eu 2,18 millions de naissances et la proportion de filles dans ces naissances est inférieure à 0,49 (Source : INSEE). Commenter ce résultat à partir de la réponse à la question 3. et de l'hypothèse d'équiprobabilité de l'énoncé.

Exercice 9 :On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse, en particulier, à l'apparition du chiffre « 6 ». On note p la probabilité d'obtenir 6.
Pour cela, on lance n fois le même dé, n étant un entier naturel non nul.
On note M la fréquence empirique d'apparition du chiffre « 6 » et S le nombre de fois que l'on a obtenu le chiffre « 6 » parmi les n lancers.
1. Exprimer M en fonction de S.
2. En déduire l'espérance et la variance de M.
3. On considère que le dé n'est pas truqué. Déterminer un nombre n_0 de lancers de dé permettant d'affirmer , avec un risque inférieur à 5% que la fréquence empirique d'apparition du chiffre « 6 » diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus 0,01.
4. On lance le dé n_0 fois et on obtient comme fréquence 18%. Que peut-on conclure ?

Exercice 10 : La probabilité qu'un atome se désintègre pendant sa période de demi-vie est 0,5.
On considère 4×10^{24} atomes du même isotope et on appelle X le nombre de ces atomes qui sont désintégrés après une période de demi-vie.
1. a. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?On supposera que les désintégrations d'atomes sont indépendantes les unes des autres.
   b. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
2. On s'intéresse à la probabilité que le nombre d'atomes désintégrés soit égal à 2×10^{24} à $\pm10^{13}$ atomes près.
   a. En utilisant la calculatrice, calculer $P(2\times10^{24}-10^{13}\leqslant X\leqslant 2\times10^{24}+10^{13})$. Que constatez vous ?
   b. Minorer $P(|X-2\times10^{24}|<10^{13}+1)$
   c. Conclure.

Exercice 11 : Lucie et Anatole vont participer à un quiz télévisé de 100 questions portant sur l'économie et la géographie.
Lucie répondra aux 50 questions d'économie et Anatole aux 50 questions de géographie.
Après plusieurs semaines d'entraînement, on constate que le score obtenu aux questions est modélisable par une variable aléatoire :
- L, d'espérance 44 et d'écart-type 3 pour celles d'économie.
- A, d'espérance 42 et d'écart-type 4 pour celles de géographie.

1. Qui de Lucie ou d'Anatole fait le preuve de plus de régularité ? Justifier.
2. a. Donner un argument permettant de penser que les variables aléatoires L et A sont indépendantes.
   b. Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire S=A+T.
3. a. Minorer $P(|S-86|<15)$.

b. Pour gagner un lot, il faut répondre correctement à au moins 72 questions. Que peut-on penser de la probabilité que Lucie et Anatole gagnent un lot ?

Exercice 12 :

X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne un nombre réel fixé $a>0$.

1. Pour tout réel $\lambda\geqslant 0$, on pose $Y=X-\mu+\lambda$.

   a. Démontrer que : $P(X-\mu\geqslant a)\leqslant P(Y^2\geqslant(a+\lambda)^2)$.

   b. Établir que : $E(Y^2)=\sigma^2+\lambda^2$

   c. En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que pour tout réel λ >0, $P(X-\mu\geqslant a)\leqslant\dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(a+x)^2}$.

2. ϕ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\phi(x)=\dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.

   a. Étudier le sens de variation de la fonction ϕ .

   b. Démontrer que ϕ admet un minimum en $x=\dfrac{\sigma^2}{a}$. Quelle est sa valeur ?

   c. En déduire que : $P(X-\mu\geqslant a)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.

3. a. Démontrer que $P(|X-\mu|\geqslant a)\leqslant\dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.

   b.Démontrer que :
   $\dfrac{\sigma^2}{a^2}-\dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}=\dfrac{\sigma^2(\sigma^2+a^2)}{a^2(\sigma^2+a^2)}$.

   c. L'inégalité obtenue à la question 3. a. est -elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev ?