Combinatoire et dénombrement.

I. Cardinal d'ensembles.

a. Définition.

Définition : Soit A un ensemble fini.
Le cardinal de A, noté Card(A), est le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Remarque : il existe d'autres notations pour le cardinal de A, ainsi, il est parfois noté $|A|$ ou #A.

Exemple : Soit A ={Pomme,Poire,Abricot,Fraise,Cerise}
Card(A)=5.

Remarque : Si A = $\varnothing$, alors, Card(A)=0.

b. Principe additif.

Définition : Deux ensembles A et B sont dits disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple : Soit A = {Pomme,Poire,Abricot,Fraise,Cerise}.
Soit B = {Salade, Concombre,Carotte}
Soit C = {Salade, Tomate, Radis}
A et B n'ont aucun élément en commun, donc, $A \cap B = \varnothing$, donc A et B sont disjoints.
B et C ont l'élément Salade en commun, donc $B \cap C \neq \varnothing$, donc B et C ne sont pas disjoints.

$A \cup B$ = {Pomme,Poire,Abricot,Fraise,Cerise, Salade, Concombre,Carotte}
Card($A \cup B$) = 8 = Card(A) + Card(B)

$B \cup C$ = { Salade, Concombre,Carotte, Tomate, Radis}.
Card($B \cup C$} $\neq$ Card(B)+ Card(C). En effet, il ne faut pas compter la salade deux fois !

Propriété (admise) : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A_1, A_2, …, A_n des ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} Card(A_k)$$

Exercice 1 : Les membres d'un club d'escrime se répartissent dans l'une des trois sections suivantes : fleuret, sabre ou épée.
On sait que 19 membres sont en section fleuret et 22 membres sont en section sabre et que 14 membres sont gauchers. 17 sabreurs et 18 épéistes sont droitiers et 7 fleurettistes sont gauchers.
Déterminer la répartition des escrimeurs par section ainsi que le nombre de membres du club.

c. Produit cartésien.

Définition : Soient A et B deux ensembles finis.
Le produit cartésien de A par B est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in A$, et $b \in B$.
Il est noté $A \times B$

Exemple : Soit A = {Pomme,Poire,Abricot,Fraise,Cerise} et B = {1,2}.
Soit $A \times B$ le produit cartésien de A par B.
$A \times B$ = {(Pomme,1),(Poire,1),(Abricot,1),(Fraise,1),(Cerise,1),(Pomme,2) ,(Poire,2) , (Abricot,2) ,(Fraise,2),(Cerise,2)}

Cette définition s'étend au produit d'un nombre quelconque d'ensembles.
Définition : Soient A_1, A_2, …, A_p k ensembles finis.
Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times .. \times A_p$ des k ensembles A_1, A_2, …, A_p est l'ensemble des p_uplets $(a_1, a_2, .., a_p)$

Remarque : $E \times E$ est noté E² et $E \times E \times .. \times E$ est noté E^n

Reprenons l'exemple précédent :
Card(A)=5
Card(B)=2
Card($A \times B$) = 10 = $Card(A) \times Card(B)$

Propriété : Soient A et B deux ensembles finis, alors
$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

Démonstration :

- Supposons que A est vide, alors $A \times B$ ne contient aucun élément et donc $Card(A \times B) = 0$
  De plus Card(A)=0, donc la propriété est vérifiée.
- Supposons que A et B sont non vides tous les deux.
  Notons n=Card(A) et p=Card(B).
  Notons $a_{1,} a_2, .., a_n$ les n éléments de A et $b_{1,} b_2, .. b_p$ les p éléments de B.
  Considérons les ensembles C_i , produit cartésien de A par b_i pour i ∈ {1, 2, .., p}

  Les C_i sont des ensembles finis deux à deux disjoints.
  Pour tout i ∈ {1, …, p}, $Card(C_i) = Card(A)$ =n
  $C_1 \cup C_2 ... \cup C_p$ = $A \times B$
  Donc $Card(A \times B)$ = Card ($C_1 \cup C_2 ... \cup C_p$) = $n + n + .. + n$ = np = $Card(A) \times Card(B)$

Propriétés (admise) :

- Soient A_1, A_2, .., A_k k ensembles finis:
  $Card(A_1 \times A_2 \times .. \times A_k) = Card(A_1) \times Card(A_2) \times .. \times Card(A_k)$
- Soit A un ensemble de cardinal n et soit k ∈ℕ*,
  $Card(E^k) = n^k$

Exercice 2 : L'entrée d'un immeuble est protégée par un digicode. Ce code est constitué de 4 chiffres allant de 0 à 9 puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C. Combien de codes différents peut-on former avec ce système ?

II. Arrangements et permutations.

a. Factorielle.

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
On appelle factorielle n , et on note $n!$ le produit de tous les nombres entiers de 1 à n .
$n!=1\times2\times3\times..\times(n-1)\times n$

Convention : 0!=1.

Exemples :
4 ! = $1\times2\times3\times4=24$
20 ! ≈ $2{,}43\times10^{18}$

b. Arrangements des éléments d'un ensemble.
Soit A un ensemble fini non vide à n éléments.

Définition : Un arrangement de p éléments (ou p-arrangement) d'un ensemble A est un p-uplet d'éléments distincts de A.

Exercice 3 : Soit A = { b ,j , n, o, u, r} un ensemble.
(b, o, n) est un arrangement à trois éléments de A.
(j, o, u, r) est un arrangement à quatre éléments de A.
(b, o, n, j, o, u, r) n'est pas un arrangement de A, en effet, la lettre r est répétée 2 fois.
Toutefois, c'est un 7-uplet de A .

1. Trouver, à la main, le nombre d'arrangements à deux éléments de A.
2. Trouver, à la main, le nombre d'arrangements à trois éléments de A.
3. Quelle formule pourriez vous écrire pour déterminer le nombre d'arrangement à p éléments de A.

Propriété :
Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n.
Le nombre d'arrangements à p éléments de A est :
$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration :
Un p-arrangement est constitué de p éléments différents de A.
Sachant que A contient n éléments différents, il y a n possibilités différentes pour le premier élément du p-arrangement, n-1 pour le deuxième, n-2 pour le troisième, ….n -p+1 pour le dernier.
Il y a donc $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)$ p-arrangements différents.
De plus, $\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)\times(n-p)\times\ldots\times2\times1}{(n-p)\times\ldots\times2\times1}$
$= n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)$
Donc, il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements différents issus d'un ensemble à n éléments.

Exercice 4: Le tableau final d'un tournoi de judo met en présence quinze athlètes.
Le palmarès désigne la gagnante, ainsi que les 2éme, 3éme, 4éme et 5 iéme au classement final.
Combien de palmarès différents peut-il exister,

c. Permutations.

Définition : Soit A un ensemble à n éléments.
On appelle permutation de A un arrangement de A à n éléments.

Exemple : On considère l'ensemble E={a,b,c}
(a,b,c) est une permutation de E.
(b,a,c) est une permutation de E.
Déterminer le nombre de permutations de E.

Propriété : Soit A un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de A est $n!$.

Exercice 5 : Louise possède 10 livres différents : 5 livres de mathématiques, 3 livres de théâtre et 2 livres d'histoire. Elle souhaite les ranger verticalement sur une étagère.

1. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?
2. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

III. Parties d'un ensemble et combinaisons.

a. Partie d'un ensemble.

Définition : Soit A un ensemble fini.
Dire qu'un ensemble B est une partie de A signifie que tous les éléments de B sont des éléments de A.

On note B $\subset$A.
On dit aussi que B est un sous-ensemble de A ou encore que B est contenu dans A.

Remarques :
1. Il ne faut pas confondre un p-uplet avec une partie d'un ensemble.
Par exemple : soit A = {a,b,c,d}.
B={a,b}={b,a} est un sous ensemble de A.
(a,b) et (b,a) sont deux 2-uplets distincts de A.
Les accolades désignent un ensemble, l'ordre n'a pas d'importance.
Les parenthèses désignent un p-uplet, l'ordre est important.
2. $\emptyset$est une partie de tout ensemble.

b. Combinaisons.

Définition : Soit A un ensemble de cardinal n et soit p un entier naturel inférieur ou égal à n.
On appelle combinaison de p éléments de A toute partie de A ayant p éléments.

Exemple : Soit A={rouge,bleu,vert,violet,orange}
B={rouge,bleu,vert} et C={vert,violet,bleu} sont deux combinaisons de A à 3 éléments.

Déterminer une combinaison à p éléments d'un ensemble à n éléments revient à constituer un ensemble de p éléments parmi n, ce qui revient à déterminer une issue ayant p succès parmi n possibilités.
En effet, soit A = { a_1 , a_2 , ..., a_n } où les a_i sont deux à deux distincts.
Considérons que mettre l'élément a_i dans une combinaison B est un succès et que de ne pas le mettre soit un échec, alors, si B est une combinaison à p éléments, il convient de choisir p

succès parmi les n possibilités.

En nous souvenant du chapitre sur la loi binomiale, nous obtenons donc qu'il existe $\binom{n}{p}$ combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Déterminons la formule de $\binom{n}{p}$, nombre de combinaisons de p éléments de A.

Soit C une combinaison particulière de p éléments de A.

Comptons le nombre de p-arrangements différents contenant les p éléments de C.
Nous avons donc un ensemble de p éléments, donc il existe p ! arrangements possibles contenant les p éléments de C.

Sachant qu'il existe $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de A, nous pouvons en déduire que :

$\frac{n!}{(n-p)!} = \binom{n}{p} \times p!$.

Donc, par suite, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Propriété :

Le nombre de combinaisons de p éléments de A, noté $\binom{n}{p}$, est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Pour rappel, $\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lite « p parmi n ».

Pour rappel : Pour tout entier $n \geqslant 0$,

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$

Pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 5 : Neuf amis souhaitent constituer une équipe de beach-volley de 4 joueurs.
a. Combien d'équipes différentes peuvent-ils constituer ?
b. Redah s'étant blessé, il ne peut pas jouer. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Redah ?
c. On sait de plus qu'Elise souhaite absolument participer. Combien d'équipes différentes comprenant Elise peut-on constituer ?

Exercice 6:Soit A={1;2;3}.
Combien A contient-il de parties ?

Théorème : Soit A un ensemble fini à n éléments, le nombre de parties de A est égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Démonstration :
D'une part, soit A un ensemble à n éléments.
Il existe des sous-ensembles à 0, 1, …, n éléments, et il existe $\binom{n}{p}$ parties à p éléments.
Donc, il existe $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p}$ sous-ensembles de A.
D'autre parts, soit A = { a_1 , a_2 , …, a_n } où les a_i sont deux à deux distincts.
Soit B une sous partie de A. B est constitué des éléments de A.
Donc, pour tout a_i , il y a deux choix : soit a_i est dans B, soit a_i n'est pas dans B.
Cela donne dont au total 2^n parties différentes. Il y a ainsi autant de parties de A que de n-uplet de {0;1}, soit 2^n
Donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.