Devoir Maison n°8.

Exercice 1:

Partie A.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble]0;+∞[par $f(x)=1+x^2-2x^2+\ln(x)$.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et en remarquant que $f(x)=1+x^2(1-2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=-4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha \in [1;\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $nf(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle]0;1].

5. On donne la fonction ci-dessous écrite en Python. L'instruction *from lycee import* * permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
        |  b = (a+b)/2
        else :
        |  a=(a+b)/2
          return (a,b)
```

Il s'écrit dans la console d'exécution :
>>> dichotomie(1)
Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l’instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

Partie B.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, par $g(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Démontrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.
2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x=\alpha$.

On admet que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à C_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à la droite C_g au point d'abscisse α .
   Déterminer, en fonction de α , les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α .

Exercice 2 : On appelle la fonction logarithme décimal (notée log) la fonction définie sur]0;+∞[par $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1. a. Montrer que $\log 10^n=n$, pour $n \in \mathbb{Z}$
   b. Montrer que $\log(x^n)=n\log(x)$ pour tout $x \in \ ]0;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$
2. Dresser le tableau de variations de la fonction log, en y faisant apparaître les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Cette question est facultative.
   a. Soit N un entier naturel non nul.
   Montrer que le nombre de chiffres décimal de N est 1+E(log N) où $\mathrm{E}(x)$ représente la partie entière du réel x .
   b. En utilisant la fonction log, déterminer le nombre de chiffres que possède le plus grand nombre premier annoncé à la fin de l'année 2018 grâce au projet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) qui devient ainsi le 51^{e} nombre de Mersenne : $2^{82589933}-1$.