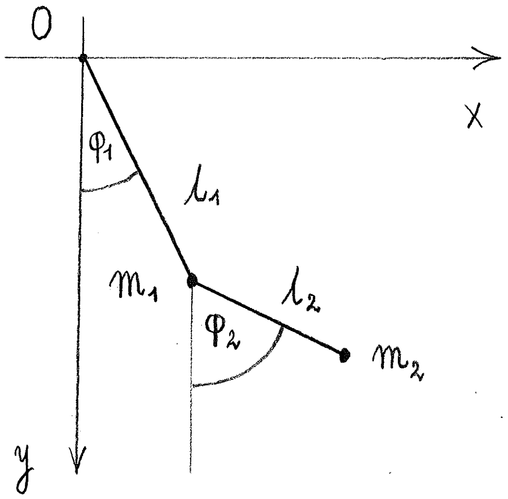
Wahadło podwójne.



Układ dwóch punktów materialnych na płaszczyźnie, dwa równania więzów:

P_1 : m_1 ; x_1, y_1 ; $\underline{F}_1 = [0, m_1 g]$

P_2 : m_2 ; x_2, y_2 ; $\underline{F}_2 = [0, m_2 g]$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2 \end{cases}$$

Równanie więzów w postaci standardowej:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0 \end{cases}$$

Zasada d'Alemberta:

$$\sum_{i=1}^{2} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 ,$$

tzn., biorąc pod uwagę postać sił $\underline{F}_1$ i $\underline{F}_2$:

$$\triangleright \quad m_1 \ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + m_1 (\ddot{y}_1 - g) \cdot \delta y_1 + m_2 \ddot{x}_2 \cdot \delta x_2 + m_2 (\ddot{y}_2 - g) \cdot \delta y_2 = 0 \qquad (I)$$

gdzie przesunięcia wirtualne spełniają warunki:

$$2 x_1 \cdot \delta x_1 + 2 y_1 \cdot \delta y_1 = 0$$

$$2 (x_1 - x_2) \cdot \delta x_1 - 2 (x_1 - x_2) \cdot \delta x_2 + 2 (y_1 - y_2) \cdot \delta y_1 - 2 (y_1 - y_2) \cdot \delta y_2 = 0$$

czyli ostatecznie

$$\triangleright \begin{cases} x_1 \cdot \delta x_1 + y_1 \cdot \delta y_1 = 0 & (\alpha) \\ (x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2) = 0 & (\beta) \end{cases}$$

$$(\alpha): \qquad y_1\,\delta y_1 = -x_1\,\delta x_1 \qquad (\gamma)$$

$$(\beta): \quad x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 - x_2\delta x_1 - (x_1-x_2)\delta x_2 - y_2\delta y_1 - (y_1-y_2)\delta y_2 = 0$$

$$x_2\delta x_1 + (x_1-x_2)\delta x_2 + y_2\delta y_1 + (y_1-y_2)\delta y_2 = 0$$

$$x_2 y_1\delta x_1 + (x_1-x_2)y_1\delta x_2 + y_1 y_2\delta y_1 + y_1(y_1-y_2)\delta y_2 = 0$$

$$x_2 y_1\delta x_1 + (x_1-x_2)y_1\delta x_2 - x_1 y_2\delta x_1 + y_1(y_1-y_2)\delta y_2 = 0$$

$$y_1(y_1-y_2)\delta y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)\delta x_1 - (x_1-x_2)y_1\delta x_2 \qquad (\delta)$$

Równanie (I) mnożymy przez $y_1(y_1-y_2)$ i podstawiamy (γ), (δ):

$$m_1\ddot{x}_1 y_1(y_1-y_2)\delta x_1 - m_1x_1(y_1-y_2)(\ddot{y}_1-g)\delta x_1 +$$
$$+ m_2y_1(y_1-y_2)\ddot{x}_2\delta x_2 + m_2(\ddot{y}_2-g)\left[(x_1y_2-x_2y_1)\delta x_1 - (x_1-x_2)y_1\delta x_2\right] = 0$$

Grupując wyrazy proporcjonalne do δx_1 i δx_2:

$$\left[m_1y_1(y_1-y_2)\ddot{x}_1 - m_1x_1(y_1-y_2)(\ddot{y}_1-g) + m_2(x_1y_2-x_2y_1)(\ddot{y}_2-g)\right]\delta x_1 +$$
$$+ \left[m_2y_1(y_1-y_2)\ddot{x}_2 - m_2(x_1-x_2)y_1(\ddot{y}_2-g)\right]\delta x_2 = 0$$

Teraz δx_1 i δx_2 są zupełnie dowolne. Wobec tego

$$m_1y_1(y_1-y_2)\ddot{x}_1 - m_1x_1(y_1-y_2)(\ddot{y}_1-g) + m_2(x_1y_2-x_2y_1)(\ddot{y}_2-g) = 0$$
$$(y_1-y_2)\ddot{x}_2 - (x_1-x_2)(\ddot{y}_2-g) = 0$$

Bardziej praktyczna postać:

$$\begin{cases} m_1(y_2-y_1)\left[(x_1\ddot{y}_1 - \ddot{x}_1y_1) - gx_1\right] + m_2(x_1y_2-x_2y_1)(\ddot{y}_2-g) = 0 & (1) \\ (y_2-y_1)\ddot{x}_2 - (x_2-x_1)(\ddot{y}_2-g) = 0 & (2) \end{cases}$$

Do tych równań dochodzą dwa równania więzów.

16.12.02

Przejście do współrzędnych (uogólnionych) φ_1, φ_2.

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + l_2 \sin\varphi_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 = y_1 + l_2 \cos\varphi_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_1 = -l_1 \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \\ \dot{y}_2 = -l_1 \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x}_1 = l_1 \left(-\sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1\right) = $$
$$= l_1 \left(\cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2\right)$$

$$\ddot{y}_1 = -l_1 \left(\cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1\right) = $$
$$= -l_1 \left(\sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2\right)$$

$$\ddot{x}_2 = l_1 \left(-\sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1\right) + l_2 \left(-\sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \cos\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2\right) = $$
$$= l_1 \left(\cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2\right) + l_2 \left(\cos\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - \sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2\right)$$

$$\ddot{y}_2 = -l_1 \left(\cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1\right) - l_2 \left(\cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \sin\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2\right) = $$
$$= -l_1 \left(\sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2\right) - l_2 \left(\sin\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + \cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2\right)$$

▷ $x_1 y_2 - x_2 y_1 =$

$$= l_1 \sin\varphi_1 \cdot (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) - (l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2)\, l_1 \cos\varphi_1 =$$

$$= l_1^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + l_1 l_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - l_1^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - l_1 l_2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 =$$

$$= l_1 l_2 (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) = l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

▷ $x_1 \ddot{y}_1 - \ddot{x}_1 y_1 =$

$$= -l_1^2 \sin\varphi_1 \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2) - l_1^2 (\cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2) \cos\varphi_1 =$$

$$= -l_1^2 \left[(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)\, \ddot{\varphi}_1 + (\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1)\, \dot{\varphi}_1^2 \right] =$$

$$= -l_1^2 \ddot{\varphi}_1$$

▷ $(y_2 - y_1)\, \ddot{x}_2 - (x_2 - x_1)\, \ddot{y}_2 =$

$$= l_2 \cos\varphi_2 \cdot \left[l_1 (\cos\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2) + l_2 (\cos\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - \sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2) \right] +$$

$$+ l_2 \sin\varphi_2 \cdot \left[l_1 (\sin\varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2) + l_2 (\sin\varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + \cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2) \right] =$$

$$= l_2 \Big[l_1 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)\, \ddot{\varphi}_1 +$$

$$+ l_2 (\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)\, \ddot{\varphi}_2 +$$

$$- l_1 (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)\, \dot{\varphi}_1^2 +$$

$$- l_2 (\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_2)\, \dot{\varphi}_2^2 \Big] =$$

$$= l_2 \left[l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1^2 \right]$$

▷ $(y_2 - y_1)\, \ddot{x}_2 - (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 - g) =$

$$= l_2 \left[l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1^2 + g \sin\varphi_2 \right]$$

Kombinując równania (1) i (2) otrzymujemy

$$m_1(x_2-x_1)\left[(x_1\ddot{y}_1-\ddot{x}_1y_1)-gx_1\right]+m_2(x_1y_2-x_2y_1)\ddot{x}_2=0 \qquad (1')$$

Wykorzystując wzory na str. 3 i 4 wyliczamy lewą stronę równania (1'):

$$m_1 l_2\sin\varphi_2\left(-l_1^2\ddot{\varphi}_1-g\,l_1\sin\varphi_1\right)+$$

$$+\,m_2 l_1 l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left[l_1(\cos\varphi_1\cdot\ddot{\varphi}_1-\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1^2)+l_2(\cos\varphi_2\cdot\ddot{\varphi}_2-\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2^2)\right]=$$

$$=-l_1l_2\left\{m_1\sin\varphi_2\cdot(l_1\ddot{\varphi}_1+g\sin\varphi_1)+\right.$$

$$\left.-\,m_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left[l_1(\cos\varphi_1\cdot\ddot{\varphi}_1-\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1^2)+l_2(\cos\varphi_2\cdot\ddot{\varphi}_2-\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2^2)\right]\right.$$

Stąd równanie (1'):

$$l_1\left[m_1\sin\varphi_2-m_2\cos\varphi_1\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]\ddot{\varphi}_1+$$

$$-\,m_2l_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\cos\varphi_2\cdot\ddot{\varphi}_2+$$

$$+\,m_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot(l_1\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}_1^2+l_2\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_2^2)+$$

$$+\,m_1g\sin\varphi_1\sin\varphi_2=0.$$

Równanie (2):

$$l_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2-l_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\dot{\varphi}_1^2+g\sin\varphi_2=0.$$

17.12.02