Z43: Algebra liniowa

Zagadnienie: przekształcenie liniowe, macierze, wyznaczniki

Zadanie: przekształcenie liniowe, jądro i obraz, interpretacja geometryczna.

1 Przestrzeń liniowa

Już w starożytności człowiek próbował opisać przestrzeń, w której żyjemy oraz poznać jej własności. Matematyzacja pojęcia przestrzeni fizycznej nie jest zagadnieniem prostym i jednoznacznym. Punktem wyjścia do poznania różnorodnych przestrzeni fizycznych jest pojęcie przestrzeni liniowej, zwanej również przestrzenią wektorową. Ruch punktów w przestrzeni wyznaczony jest przez funkcje opisujące ich przemieszczenie. Tego typu funkcje nazywamy przekształceniami przestrzeni. Ze względu na prawa zachowania ważną rolę odgrywają przekształcenia liniowe i dlatego ich opisowi należy poświęcić należną uwagę.

Zbiór X z wyróżnionym elementem $\mathbf{0}$ nazywamy *przestrzenia liniową* (albo *wektorową*) nad zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ lub zespolonych $\mathbf{C}$ oznaczanym dalej przez K, jeżeli określone zostały działania *dodawania* elementów zbioru X oraz działanie *mnożenia* elementów zbioru X przez elementy z K spełniające następujące warunki:

(L1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, (L2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$, (L3) $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$, (L4) dla każdego $\mathbf{x}$ istnieje $\mathbf{y}$ takie, że $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$, (L5) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$, (L6) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$, (L7) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$, (L8) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$,
gdzie $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$ i $\alpha,\beta\in K$.

Elementy przestrzeni X nazywamy *wektorami*, a element $\mathbf{0}$ nazywamy *wektorem zerowym*. Elementy zbioru K nazywamy *skalarami*. Z warunków (L1) – (L4) wynika natychmiast, że dla każdego $\mathbf{x}\in X$ istnieje dokładnie jeden element przeciwny $-\mathbf{x}$, tj. spełniający warunek $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

Wektory $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_k$ nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeżeli z warunku

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+...+\alpha_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$$

dla pewnych skalarów $\alpha_1,...,\alpha_k$ wynika, że $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$. W przeciwnym przypadku, a więc, gdy wcześniejsze równanie ma inne rozwiązania niż $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, wektory $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ nazywamy *liniowo zależnymi.* Sumę $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$.

Zbiór wektorów $V \subset X$ nazywamy *liniowo niezależnym*, jeżeli wektory należące do dowolnego skończonego podzbioru V są liniowo niezależne. Zbiór wektorów V *rozpina przestrzeń* X, jeżeli dowolny wektor $\mathbf{x} \in X$ jest kombinacją liniową pewnych wektorów ze zbioru V. Jeżeli zbiór wektorów V jest liniowo niezależny i rozpina przestrzeń X, to mówimy, że zbiór V jest *bazą* przestrzeni X. W szczególności, wektory $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ są bazą w przestrzeni X, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $\mathbf{x} \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $\alpha_1, ..., \alpha_k$ taki, że

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{x}_k.$$

Każda przestrzeń liniowa ma bazę i ilość wektorów w bazie nie zależy od jej wyboru. Jeżeli baza przestrzeni X składa się z k-wektorów, to k nazywamy *wymiarem* przestrzeni X i piszemy $\dim X = k$ (czytamy „wymiar X jest równy k"). Mówimy wtedy, że X jest *przestrzenią k-wymiarową.* Wymiar przestrzeni X oznaczamy przez $\dim X$.

Podzbiór X_0 przestrzeni liniowej X nazywamy *podprzestrzenią liniową*, jeżeli jest zamknięty ze względu na działania w przestrzeni X, tj. $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in X_0$ i $\alpha\mathbf{x} \in X_0$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_0$ oraz $\alpha \in K$.

2 Przykłady przestrzeni liniowych

1. Przestrzeń $\mathbf{R}^n$ nad zbiorem $\mathbf{R}$ z działaniami

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

i wektorem zerowym $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ jest przestrzenią liniową. Na przykład płaszczyznę można utożsamiać z przestrzenią $\mathbf{R}^2$, zaś to co w języku potocznym nazywamy przestrzenią można utożsamić z $\mathbf{R}^3$. Para wektorów $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ w $\mathbf{R}^2$ jest liniowo niezależna. Dowolny wektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2,$$

a więc zbiór $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ jest bazą. Ogólnie, zbiór wektorów postaci

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ...,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

jest bazą w przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Taką bazę nazywamy *bazą kanoniczną* w $\mathbf{R}^n$. Nie każda para wektorów w przestrzeni $\mathbf{R}^2$ jest bazą. Na przykład wektory $(1, 0)$ i $(2, 0)$ są liniowo zależne i nie tworzą bazy.

2. Przestrzeń $\mathbf{C}^n$ nad zbiorem $\mathbf{C}$ lub nad zbiorem $\mathbf{R}$ z wprowadzonymi poprzednio działaniami dodawania i mnożenia przez skalar i wektorem zerowym $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ jest przestrzenią liniową. W przypadku, gdy przestrzeń $\mathbf{C}^n$ jest określona nad zbiorem $\mathbf{C}$, to podobnie jak poprzednio zbiór $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ jest bazą w tej przestrzeni, a więc jest to przestrzeń n-wymiarowa. Jeżeli przestrzeń $\mathbf{C}^n$ jest określona nad zbiorem $\mathbf{R}$, to zbiór

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_2, ..., i\mathbf{e}_n\}$$

jest bazą w tej przestrzeni, a więc jest to przestrzeń $2n$-wymiarowa.

3. Niech E będzie dowolnym zbiorem i niech X będzie przestrzenią funkcji z E w $\mathbf{R}$. Wtedy przestrzeń X z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą oraz z funkcją $f \equiv 0$ jako elementem zerowym jest przestrzenią liniową. Zauważmy, że jeżeli $E = \{1, 2, ..., n\}$, to $X = \mathbf{R}^n$, bo funkcję $f\colon E \to \mathbf{R}$ możemy utożsamić z ciągiem $(f(1), f(2), ..., f(n))$. Podobnie, jeżeli E jest zbiorem liczb naturalnych, to przestrzeń X jest przestrzenią ciągów nieskończonych. W przyszłości poznamy inne przestrzenie funkcji tworzące przestrzenie liniowe. Poza przypadkiem, gdy E jest zbiorem skończonym, nie można efektywnie wypisać bazy w przestrzeni X.

3 Przekształcenie liniowe

Niech X będzie przestrzenią liniową nad zbiorem K i niech Y będzie przestrzenią liniową nad zbiorem K. Odwzorowanie $S\colon X \to Y$ nazywamy *odwzorowaniem liniowym,* jeżeli

$$S(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha S(\mathbf{x}) + \beta S(\mathbf{y})$$

dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i $\alpha, \beta \in K$. Jeżeli S jest odwzorowaniem liniowym, to często piszemy $S\mathbf{x}$ zamiast $S(\mathbf{x})$.

Przekształcenie liniowe można wyznaczyć wiedząc jak działa na wektorach z dowolnej bazy. Ograniczymy się do odwzorowania liniowego $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Niech $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ będzie bazą w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ i niech $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ będzie bazą w przestrzeni $\mathbf{R}^m$. Dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ wektor $S\mathbf{v}_i$ jest elementem przestrzeni $\mathbf{R}^m$, a więc istnieje ciąg liczb rzeczywistych $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}$ taki, że

$$S\mathbf{v}_i = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + ... + a_{mi}\mathbf{w}_m.$$

Niech teraz $\mathbf{x}$ będzie dowolnym wektorem z $\mathbf{R}^n$. Wtedy istnieją stałe $x_1, ..., x_n$, zwane *współrzędnymi wektora* $\mathbf{x}$ w bazie $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ takie, że

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_n\mathbf{v}_n.$$

Z definicji odwzorowania liniowego otrzymujemy

$$S\mathbf{x} = S(x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_n\mathbf{v}_n),$$

a stąd

$$S\mathbf{x} = x_1 S\mathbf{v}_1 + ... + x_n S\mathbf{v}_n,$$

a więc wyznaczyliśmy wektor $S\mathbf{x}$ znając wartości odwzorowania S na wektorach bazowych. Korzystając z ostatniego wzoru oraz z przedstawienia wektorów $S\mathbf{v}_i$ w bazie $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ możemy również wyznaczyć przedstawienie wektora $S\mathbf{x}$ w bazie $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$:

$$S\mathbf{x} = x_1\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\mathbf{w}_i\Big) + ... + x_n\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\mathbf{w}_i\Big).$$

Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$S\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)\mathbf{w}_i.$$

4 Przykłady przekształceń liniowych

Graficzną reprezentację działania przekształcenia można w Sage otrzymać transformując krzywą daną parametrycznie i rysując obie krzywe za pomocą `parametric_plot`. Na przykład weźmy okrąg jednostkowy:

```
var('t')
x=( cos(t), sin(t) )
```

wykonując przekształcenie następującym poleceniem:

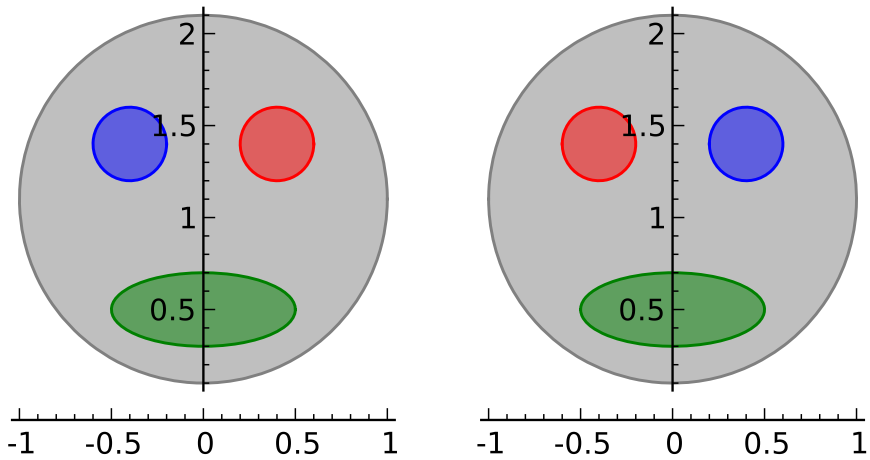
```
y=(x[0]+x[1],x[1]+1)
```

otrzymujemy wektor $y(t)$ dany przez: $(\sin(t) + \cos(t), \sin(t) + 1)$. Wektory $x(t)$ oraz $y(t)$ można narysować używając

```
parametric_plot( x,(t,0,2*pi))+\
parametric_plot( y,(t,0,2*pi))
```

W dalszej części przykładów zostanie użyta funkcja:

```
def show_transform(T1,**reszta):
    var('t')
    Identycznosc=lambda w:w
    k1=vector((cos(t),sin(t)+1+0.1))
    k2=vector((.2*cos(t)+.4, .2*sin(t)+1.4))
    k3=vector((.2*cos(t)-.4, .2*sin(t)+1.4) )
    k4=vector((.5*cos(t),    .2*sin(t)+.5) )
    ks=[k1,k2,k3,k4]
    colors=['gray','red','blue','green']
    pltlist=[]
    for T in [Identycznosc,T1]:
        ks_transformed = map(T,ks)
        p=[ \
        parametric_plot(k,(t,0,2*pi),\
        figsize=3,fill=True,\
        fillcolor=colors[i%len(colors)],\
        color=colors[i%len(colors)],**reszta) \
        for i,k in enumerate(ks_transformed)]
        pltlist.append(sum(p))
    return pltlist
```



Rysunek 1: Przekształcenie liniowe: symetria osiową względem prostej $x = 0$.

4.1 Symetria osiowa

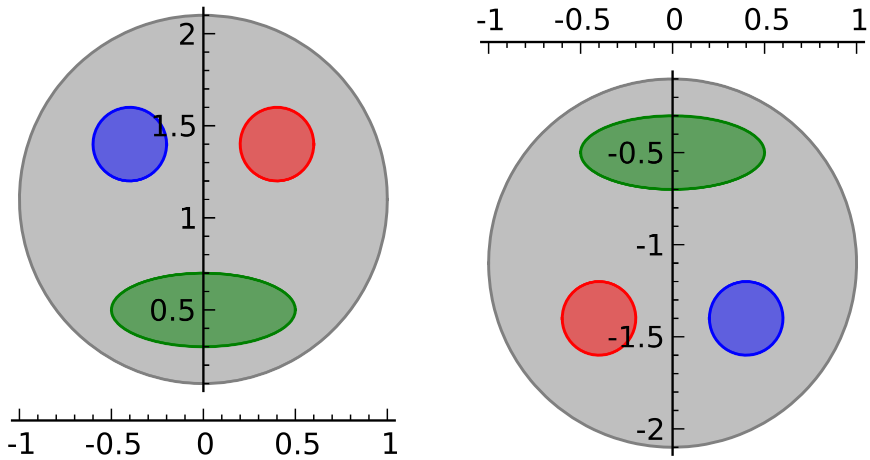
Rozważmy odwzorowanie liniowe : $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ określone na wektorach bazowych $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ wzorami $S(1,0) = (-1,0)$, $S(0,1) = (0,1)$. Wtedy S jest symetrią osiową względem prostej $x = 0$.

```
Tlin=lambda (x,y):vector((-x,y))
pltlist=show_transform(Tlin)
```

4.2 Symetria względem punktu $(0,0)$

Rozważmy odwzorowanie liniowe : $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ określone wzorami $S(1,0) = (-1,0)$, $S(0,1) = (0,-1)$. Wtedy S jest symetrią względem punktu $(0,0)$.

```
Tlin=lambda (x,y):vector((-x,-y))
pltlist=show_transform(Tlin)
```

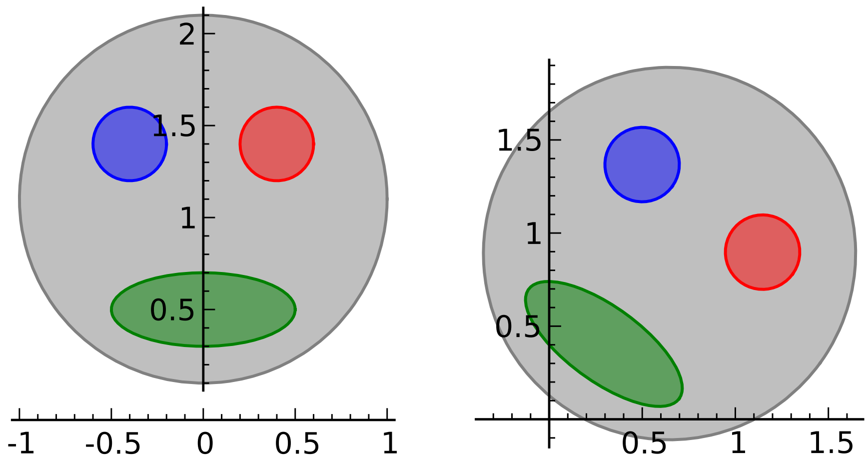


Rysunek 2: Symetria względem punktu $(0, 0)$.

4.3 Obrót

Niech α będzie ustalonym kątem. Wtedy odwzorowanie liniowe : $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ określone wzorami $S(1, 0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $S(0, 1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ jest obrotem względem początku układu współrzędnych o kąt α przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

```
phi=pi/5
Tlin=lambda (x,y):vector((cos(phi)*x+sin(phi)*y,\
                          -sin(phi)*x+cos(phi)*y ))
pltlist=show_transform(Tlin)
```

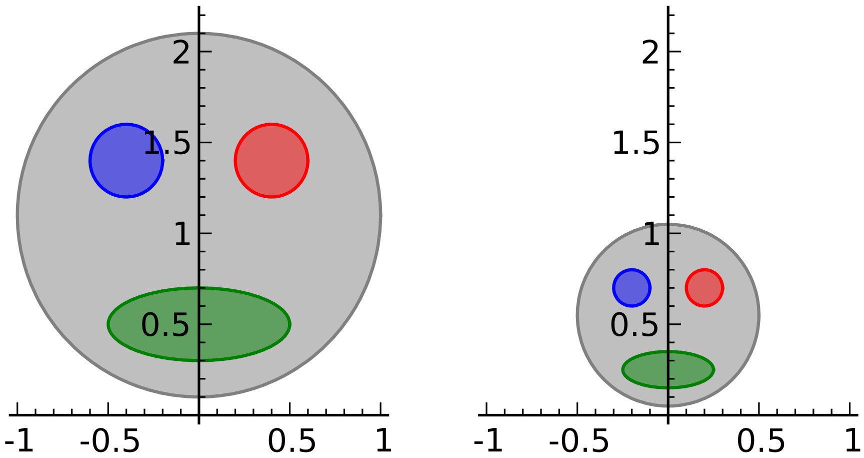


Rysunek 3: Obrót o $\pi/5$.

4.4 Jednokładność

Ustalmy $k > 0$. Wtedy odwzorowanie liniowe : $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ określone wzorem $S\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ jest jednokładnością w skali k względem początku układu współrzędnych.

```
k=0.5
Tlin=lambda (x,y):vector((k*x,k*y))
pltlist=show_transform(Tlin)
pltlist[0].axes_range(-1,1,0,2.2)
pltlist[1].axes_range(-1,1,0,2.2)
```



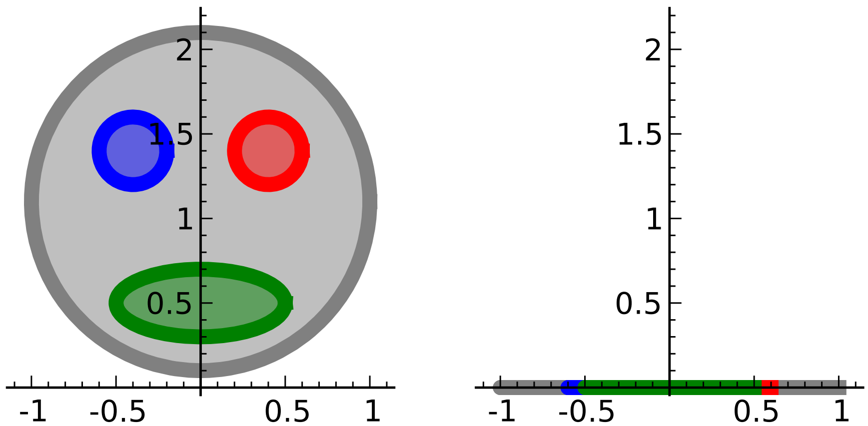
Rysunek 4: Jednokładność dla $k = 0.5$.

4.5 Rzut

Niech $S\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Wtedy S jest rzutem prostopadłym z $\mathbf{R}^3$ na $\mathbf{R}^2$.

Pokażmy to graficznie dla $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$

```
Tlin=lambda (x,y):vector((x,0))
pltlist=show_transform(Tlin,thickness=5)
pltlist[0].axes_range(-1.1,1.1,0,2.2)
pltlist[1].axes_range(-1.1,1.1,0,2.2)
```



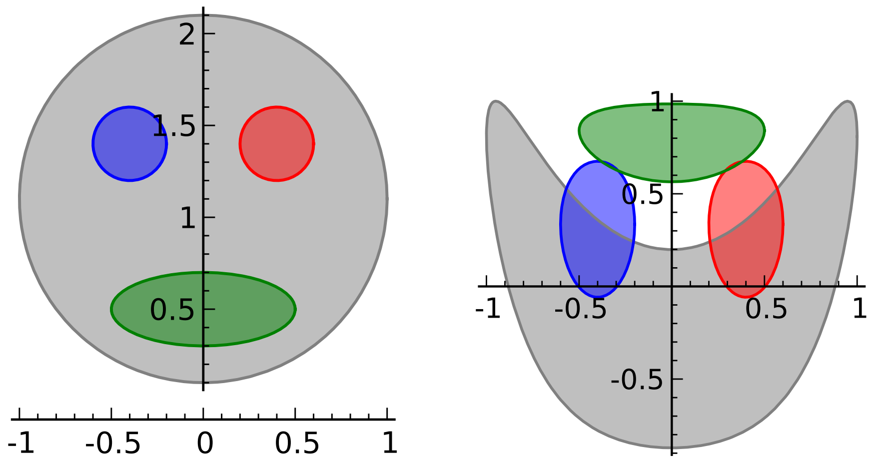
Rysunek 5: Rzut równoległy na oś x.

4.6 Przekształcenie nieliniowe

Przekształcenie nieliniowe $S\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ może zawierać dowolne funkcje współrzędnych punktów. Zobaczmy jak będzie wyglądać figura wyjściowa po działaniu przekształcenia $S(x_1, x_2) = (x_1, \sin(2x_2))$. W Sage funkcja defniujące wygląda następująco:

```
Tnonlin=lambda (x,y):vector((x,sin(y*2)))
pltlist=show_transform(Tnonlin)
```

Na rysunku 6 widzimy podstawowe różnice w działaniu powyższego przekształcenia a poprzednimi liniowymi: obrazy trzech nieprzecinających się okręgów mogą się przecinać a rozciąganie i przesuwanie figur zachodzi w niejednorodny sposób.



Rysunek 6: Przekształcenie nieliniowe $S(x_1, x_2) = (x_1, \sin(2x_2))$.

4.7 Iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^n$

Niech $(a_1, ..., a_n)$ będzie ustalonym wektorem w przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Odwzorowanie $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ określone wzorem

$$S\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

jest odwzorowaniem liniowym, zaś sumę $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ nazywamy *iloczynem skalarnym* wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{x}$. Iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ oznaczamy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ lub $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$.

W Sage możemy pokazać, że definiując:

```
var('y1 y2 c x1 x2 a1 a2')
x=vector([x1,x2])
y=vector([y1,y2])
a=vector([a1,a2])
wlasnosci=[(x+y).dot_product(a)==x.dot_product(a)+y.dot_product(a)\
 , (c*x).dot_product(a)==c*x.dot_product(a)]
```

zachodzą następujące własności:

- $(x_2 + y_2)a_2 + (x_1 + y_1)a_1 = a_1x_1 + a_1y_1 + a_2x_2 + a_2y_2$ ma wartość logiczną: `bool(wlasnosci[0])`$=$ True

- $a_1cx_1 + a_2cx_2 = (a_1x_1 + a_2x_2)c$ ma wartość logiczną: `bool(wlasnosci[1])=` True

4.8 Iloczyn skalarny w $\mathbf{C}^n$

Niech $(a_1, ..., a_n)$ będzie ustalonym wektorem w przestrzeni $\mathbf{C}^n$. Określmy odwzorowanie $S\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ wzorem

$$S\mathbf{z} = z_1\bar{a}_1 + z_2\bar{a}_2 + ... + z_n\bar{a}_n,$$

gdzie $\bar{a}_i$ jest liczbą sprzężoną do a_i. Odwzorowanie S jest liniowe. Sumę $\langle \mathbf{z}, \mathbf{a} \rangle = z_1\bar{a}_1 + z_2\bar{a}_2 + ... + z_n\bar{a}_n$ nazywamy *iloczynem skalarnym* wektorów $\mathbf{z}$ i $\mathbf{a}$. Jeżeli zamiast odwzorowania S rozważymy odwzorowanie

$$T\mathbf{z} = a_1\bar{z}_1 + a_2\bar{z}_2 + ... + a_n\bar{z}_n,$$

to $T(\mathbf{z} + \mathbf{z}') = T\mathbf{z} + T\mathbf{z}'$ oraz $T(\alpha\mathbf{z}) = \bar{\alpha}\, T\mathbf{z}$. Odwzorowanie spełniające powyższe dwa warunki nazywamy *antyliniowym*.

4.9 Przestrzenie funkcji

Niech X będzie przestrzenią funkcji z E w $\mathbf{R}$ i niech φ będzie dowolną funkcją z E w E. Wtedy odwzorowanie $S\colon X \to X$ określone wzorem $Sf(x) = f(\varphi(x))$ jest odwzorowaniem liniowym.

5 Jądro i obraz przekształcenia

Niech $S\colon X \to Y$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy zbiór

$$\operatorname{Ker} S = \{\mathbf{x} \in X\colon\ S(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

nazywamy *jądrem* odwzorowania S, a zbiór

$$\operatorname{Im} S = \{S(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}$$

nazywamy *obrazem* odwzorowania S. Jądro i obraz przekształcenia liniowego są podprzestrzeniami liniowymi, odpowiednio, przestrzeni X i Y.

Jeżeli $\operatorname{Ker} S = \{\mathbf{0}\}$, to odwzorowanie S jest różnowartościowe, a więc z warunku $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y})$ wynika, że $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Wymiar jądra i obrazu odwzorowania S spełniają warunek

$$\dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Im} S = n.$$