Zasada d'Alemberta* dla 1 punktu materialnego na powierzchni.

Rozważmy ruch punktu materialnego po powierzchni $\left[\begin{array}{l} f(\underline{r},t) = 0, \text{ tzn.} \\ f(x,y,z,t) = 0. \end{array}\right.$

Równania opisujące ten ruch mają postać (równania Newtona)

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda \operatorname{grad} f, \\ f(\underline{r},t) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{I}\,a)$$

czyli, po przejściu do współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f(x,y,z,t) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{I}\,b)$$

Równania te można zapisać równoważnie następująco (zasada d'Alemberta):

$$\begin{cases} (m\ddot{\underline{r}} - \underline{F}) \cdot \delta\underline{r} = 0 & (1) \\ f(\underline{r},t) = 0 & (2) \\ \operatorname{grad} f \cdot \delta\underline{r} = 0 & (3) \end{cases} \qquad (\mathrm{II}\,a)$$

gdzie $\delta\underline{r}$ jest dowolnym wektorem spełniającym warunek:

czyli, we współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{cases} (m\ddot{x} - F_x)\,\delta x + (m\ddot{y} - F_y)\,\delta y + (m\ddot{z} - F_z)\,\delta z = 0 & (1) \\ f(x,y,z,t) = 0 & (2) \\ \text{gdzie } \delta x,\ \delta y,\ \delta z \text{ są dowolnymi liczbami spełniającymi warunek} & (\mathrm{II}\,b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0. & (3) \end{cases}$$

Wektor $\delta\underline{r}$ jest tutaj dowolnym wektorem stycznym w punkcie $\underline{r}$ do powierzchni. Wskazuje on kierunki możliwego z uwagi na więzy przesunięcia punktu materialnego z położenia $\underline{r}$ w chwili t.

$\delta\underline{r}$ – przesunięcie wirtualne zgodne z więzami.

* Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

Równoważność równań Newtona (I) i zasady d'Alemberta (II).

(I a) $\Rightarrow$ (II a) : wynikanie oczywiste.

(II) $\Rightarrow$ (I) :

Mnożąc równanie (2) przez dowolny czynnik λ i odejmując je od (1) otrzymujemy

$$(m\ddot{\underline{r}} - \underline{F} - \lambda \operatorname{grad} f) \cdot \delta \underline{r} = 0$$

tzn., we współrzędnych kartezjańskich:

$$(m\ddot{x} - F_x - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \delta x + (m\ddot{y} - F_y - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}) \delta y + (m\ddot{z} - F_z - \lambda \frac{\partial f}{\partial z}) \delta z = 0 . \quad (4)$$

Oczywiście, grad f nie równa się zeru tożsamościowo: $\operatorname{grad} f \not\equiv 0$, bo dla funkcji $f(x,y,z) \equiv c$ równanie $f(x,y,z) = 0$ nie przedstawia powierzchni. (o ile cokolwiek). Załóżmy, że w rozważanym otoczeniu punktu $\underline{r}$ i w czasie t zachodzi $\operatorname{grad} f \neq \underline{0}$. A zatem co najmniej jedna ze składowych: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, jest różna od zera.

Niech np. $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. Wtedy δx można wyznaczyć poprzez $\delta y, \delta z$, które są dowolne. Ustalmy nieokreśloną do tej pory wartość λ przez warunek:

$$m\ddot{x} - F_x - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 . \qquad (5)$$

Wtedy równość (4) przyjmuje postać

$$(m\ddot{y} - F_y - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}) \delta y + (m\ddot{z} - F_z - \lambda \frac{\partial f}{\partial z}) \delta z = 0$$

Z dowolności δy i δz wynika zerowanie się współczynników po lewej stronie:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} - F_y - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ m\ddot{z} - F_y - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

Równości (5) i (6) dają równania (I b).

5.11.04.

Zasada d'Alemberta dla układu N punktów materialnych podlegającego p więzom:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - F_j)\, \delta x_j = 0 & (1) \\ f_k(x,t) = 0 \,, \quad k = 1, 2, \dots, p. & (2) \\ \text{gdzie } \delta x_j \ (j = 1, 2, \dots, 3N) \text{ są dowolnymi liczbami} \\ \text{spełniającymi warunki:} \\ \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. & (3). \end{cases}$$

Równania (3) tworzą jednorodny układ p równań liniowych na 3N przesunięć wirtualnych δx_j: p przesunięć można wyrazić przez 3N − p pozostałych, które są dowolne.

Wstawiając te wyrażenia do (1) otrzymamy warunek znikania formy liniowej 3N−p dowolnych przesunięć. Wynika stąd zerowanie się 3N − p współczynników tej formy.

Wespół z równaniami (2) w liczbie p daje to układ 3N równań na 3N niewiadomych funkcji $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

W rozważaniach tych nie występują siły reakcji. Po wyznaczeniu ruchu można je znaleźć z równań Newtona:

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + F_{Rj} \quad : \quad F_{Rj} = m_j \ddot{x}_j - F_j \,, \qquad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

15.11.04.

Zasada d'Alemberta – sformułowanie wektorowe.

Dany układ N punktów materialnych.

Oznaczenia dla i-tego punktu ($i = 1, 2, \dots, N$):

$\vec{r}_i$ – wektor wodzący

m_i – masa

$\vec{F}_i$ – siła przyłożona do tego punktu (z wyłączeniem sił reakcji).

Układ podlega p więzom holonomicznym dwustronnym:

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Wtedy, podczas ruchu układu, spełnione są następujące zależności:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 & (1) \\ f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. & (2) \end{cases}$$

gdzie $\delta\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) są dowolnymi wektorami spełniającymi warunki

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{grad}_i f_k \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \qquad (3)$$

(3) jest jednorodnym układem p równań na 3N kartezjańskich przesunięć wirtualnych: p przesunięć można wyrazić poprzez 3N-p pozostałych, które są dowolne. Wstawiając te wyrażenia do (1) i korzystając z tej dowolności otrzymujemy 3N-p równań, do których dochodzą równania (2), w liczbie p.

Ostatecznie otrzymujemy 3N równań [różniczkowych] na 3N niewiadomych współrzędnych kartezjańskich punktów.

12.11.03,
25.07.05