Strzelamy i latamy, czyli o prawie Newtona i równaniach różniczkowych cześć II

29 kwietnia 2014

Na lekcjach fizyki w szkole pewnie wszyscy spotkali się ze wzorem na prędkość: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ oraz przyspieszenie $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Pokażemy, że umiejętne skorzystanie z tych pozornie mało spektakularnych wzorów umożliwi napisanie programu komputerowego, który będzie mógł rozwiązywać praktycznie nieograniczoną pulę zagadnień z dynamiki.

Odkrywania praw fizycznych poprzez “komputerowe eksperymentowanie” z równaniami jest celem projektu dydaktycznego iCSE prowadzonego na Uniwersytecie Śląskim. Jako narzędzie proponujemy system Sage [1]. Stanowi on otwartoźródłową integrację systemu algebry komputerowej z językiem Python, ponadto umożliwia rozpoczęcie zabawy od zaraz, korzystając z przeglądarki internetowej i jednej z możliwych opcji dostępu poprzez usługę chmurową [2] lub serwer pojedynczych obliczeń, na którym bazuje interaktywna wersja tego artykułu [3].

1 Równanie Newtona

W poprzednim artykule dowiedzieliśmy się, że można rozwiązywać zagadnienia z zakresu dynamiki Newtona za pomocą metody przybliżonej stosując znane ze szkoły wzory na prędkość w ruchu jednostajnym prostoliniownym oraz przyśpieszenie w ruchu jednostajnie przyśpieszonym. W przypadku dwuwymiarowego zagadnienia, którym jest rzut ukośny, stan układu jest jednoznacznie określony przez cztery liczby: x, y, v_x, v_y. Równania wiążące stan układu w pewnej chwili poźniejszej $t + \Delta t$ ze stanem w chwili t mają postać:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \Delta t \cdot v_x \qquad (1) \\ y(t+\Delta t) &= y(t) + \Delta t \cdot v_y \\ v_x(t+\Delta t) &= v_x(t) + \Delta t \cdot \frac{F_x}{m} \\ v_y(t+\Delta t) &= v_y(t) + \Delta t \cdot \frac{F_y}{m}, \end{aligned}$$

gdzie F_x i F_y są siłami działającymi na punkt materialny o masie m. Jeżeli na ciało działa tylko siła grawitacyjna to mamy $F_x = 0$ i $F_y = -mg$.

Równania te wyprowadzilismy w poprzednim artykule, korzystając ze wzorów na przyśpieszenie i prędkość, napisaliśmy składowe równania Newtona w kierunkach x i y jako:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= v_x \qquad (2) \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= v_y \\ \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= \frac{F_x}{m} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} &= \frac{F_y}{m}, \end{aligned}$$

Takie równania znane są w granicy gdy $\Delta t \to 0$ jako równania różniczkowe. Granica ta oznacza, że wyrażenia typu $frac\Delta x\Delta t$, określane przez matematyków jako ilorazy różnicowe, przechodzą w pochodne po czasie funkcji położenia czy prędkości. Intuicyjnie, możemy zrozumieć tą granicę jeśli sobie przypomnimy, że w układzie (3) zastosowaliśmy przybliżone a nie dokładne wzory na prędkość. Błąd tego przybliżenia maleje do zera jeśli $\Delta t \to 0$. W tej granicy równania te są zapisywane, zastępując symbole Δ symbolami d:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \qquad (3) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{F_x}{m} \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{F_y}{m},
\end{aligned}
$$

Nie wnikają już głębiej w fascynującą dziedzinę matematyki opisującą w ścisły sposób tego typu równania, postarajmy się teraz wykorzystać znajomość algorytmu przybliżonego i rozwiązać ciekawy układ.

2 Modelujemy papierowy samolot

Puszczając papierowy samolot można zauważyć, że czasem zadziera on do góry a czasem leci lotem prostoliniowym. Od czego to zależy? Doświadczenia sugerują, że może prędkość początkowa i tzw. trym, czyli ustawienie lotek może być decydującym czynnikiem. Jaka jest jednak fizyka tego zjawiska?

Papierowy samolot - cóż on ma wspólnego z rzutem ukośnym? Przecież w rzucie ukośnym mamy do czynienia z punktem materialnym a tu jest zdecydowanie rozciągły objekt, do tego jeszcze oddziaływuje w nietrywialny sposób z powietrzem! Zachęcam czytelników do zapytania przypadkowo napotkanego naukowca o to jak obliczyć siły działające na papierowy samolot. Z dużym prawdopodobieństwem dowiecie się, że jest to problem przekraczający możliwości nauki ....

Możemy jednak spróbować dokonać pewnych idealizacji. Po pierwsze trzeba się zastanowić jak podejdziemy do oddziaływania powietrza na samolot. Możemy rozwiązać niezwykle trudne do analizy równania aerodynamiki. Zdecydowanie przekroczyło by to ramy tego artykułu. Jakie więc mamy inne możliwości? Możemy skorzystać z pewnych praw z znanych z mechaniki lotu. Niestety mechaniki lotu nie uczy się w szkołach a prawa nie mają charakteru fundamentalnych praw przyrody a raczej są rozsądnymi przybliżeniami rzeczywistości. W aerodynamice wyróżnia się dwie podstawowe siły działające na objekt poruszający się w powietrzu: siłę oporu oraz siłe nośną. Ta pierwsza jest nam dobrze znana z rozważań lotu pocisku przez powietrze. Wiemy, że działa ona w kierunku przeciwnym do wektora prędkości. Druga siła jest siłą działającą w kierunku prostopadłym do wektora prędkości i jest zwana siłą nośną. Mechanika lotu podaje empiryczne wzory pozwalające obliczyć te siły dla dobrze opływanych objektów. Oba wzory zakładają kwadratową zależność od prędkości. Ponadto dla pewnej klasy dobrze opływanych objektów - tzw. skrzydeł, siły te zależą od kątą natarcia - czyli ustawienie skrzydła względem wektora prędkości oraz oczywiście od gęstości powietrza i rozmmiaru. Oznacza to, że jeśli mamy dane skrzydło i dany kąt natarcia to mamy dwa efektywne współczynniki, które pozwalają wyliczyć obie siły. Za chwilę skorzystamy z tego faktu.

Wyobraźmy teraz sobie szybowiec, a papierowy samolocik jest właśnie szybowcem, lecący z pewną prędkością chwilową. Po pierwsze zakładamy, że nie wykonujemy zakrętów. Dopuszczamy tylko nurkowanie i wznoszenie się. W pewnym przybliżenu można traktować szybowiec jako skrzydło, które ma pewną siłę nośną i siłę oporu oraz ogon. Zadaniem ogona jest utrzymanie skrzydła pod pewnym kątem do nacierającego powietrza. Jak on to robi? Zawsze stara się tak ustawić by stateczniki poziome (pionowe nas nie interesują, bo nie skręcamy) były równoległe do wektora prędkości. Ustawiając się przekręca nieco cały samolot. Jako, że ogon znajduję się daleko z tyłu to dysponuje dość dużą dzwignią. W naszym modelu zakładamy idealny ogon - jest bardzo maly i bardzo daleko od skrzydeł, tak by siły na niego działające były zaniedbywalne przy siłach działających na skrzydło, ale moment siły był na tyle duży by samolot ustawiał się natychmiastowo w pozycji - "ogon idealnie z tyłu". Sterowanie kierunkiem lotu odbywa się poprzez zmianę kąta zaklinowania satecznika poziomego. Jeśli pilot pociągnie drążek do siebie to ustawia sie on w dół co powoduje taki obrót calego samolotu by "ogon był równoległy do prędkości". Zauważmy, że skrzydło samolotu jest ustawione wzgledem lini łączącej jego środek z ogonem pod pewnym katem. Jest to tzw. kąt zaklinowania skrzydła. Z reguły ma on małą dodatnią wartość. Jeżeli teraz będziemy rozważać lot szybowca dla pewnego stałego ustawienia drążka sterowego. Papierowy samolot jest rówież w niezłym przybliżeniu takim właśnie przypadkiem.

W takiej sytuacji będziemy mieli zagwarantowane, że kąt natarcia skrzydła będzie zawsze ten sam. Wtedy będziemy mieli w ciągu całego lotu, niezależnie od tego czy samolot nurukje czy się wznosi, proste formuły na siły aerodynamiczne. Siła nośna będzie równa $C_z v^2$ a siła oporu $C_x v^2$. Stałe C_x, C_z, są zwane współczynnikami sił, odpowiednio, oporu i nośnej. W takim przypadku możemy sie pokusić o zmodyfikowanie, naszego programu do obliczania trajektorii rzutu ukośnego tak by opisywał on zachowanie się naszego szybowca.

Ponieważ siły aerodynamiczne działają w kierunkach prostopadłcyh Układ współrzędnych

3 Czy możemy obliczyć donośność armaty Flak 88m?

```
x0,y0,vx0,vy0 = 0,0,10,10
g = 9.81
t_end = 2
Fx = 0
Fy = -m*g
n = 200
tab = [[x0,y0]]
delta_t = t_end/n
for i in range(1,n):
    x  = x0 + vx0*delta_t
    y  = y0 + vy0*delta_t
    vx = vx0 + Fx/m*delta_t
    vy = vy0 + Fy/m*delta_t
    x0, y0, vx0, vy0 = [ x, y, vx, vy]
    tab.append([x0,y0])
p2 = list_plot(tab,figsize=4)
p2.show()
```

Literatura

[1] http://sagemath.org

[2] http://cloud.sagemath.com

[3] http://visual.icse.us.edu.pl/Warsztaty