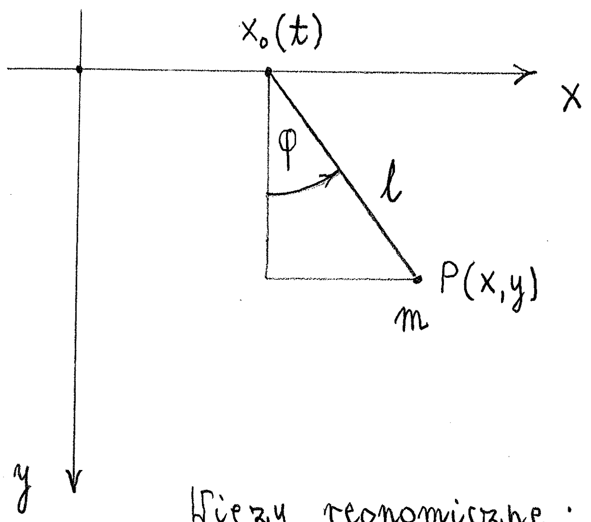
Znaleźć przy pomocy równań Lagrange'a i przedyskutować ruch (przy małych wychyleniach) płaskiego wahadła matematycznego, którego punkt zawieszenia wykonuje na prostej poziomej leżącej w płaszczyźnie ruchu wahadła zadane drgania harmoniczne.



$$x_0(t) = a \sin \omega t$$

Oznaczenia:

$$\alpha := \frac{a}{l}$$

$$\omega_0^2 := \frac{g}{l}$$

Więzy reonomiczne; układ o jednym stopniu swobody; współrzędna uogólniona: φ.

Przyjmujemy warunki początkowe: $\varphi(0) = 0, \quad \dot\varphi(0) = 0.$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 + \dot y^2 \right), \qquad V = -mgy;$$

$$\begin{cases} x = x_0 + l \sin\varphi = a \sin\omega t + l \sin\varphi \\ y = l \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x = \dot x_0 + l \cos\varphi \cdot \dot\varphi = a\omega \cos\omega t + l \cos\varphi \cdot \dot\varphi \\ \dot y = -l \sin\varphi \cdot \dot\varphi \end{cases}$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 = a^2\omega^2 \cos^2\omega t + 2al\omega \cos\omega t \cos\varphi \cdot \dot\varphi + l^2 \dot\varphi^2$$

▷ $L(\varphi, \dot\varphi; t) = T(\varphi, \dot\varphi; t) - V(\varphi) =$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot\varphi^2 + 2\alpha\omega \cos\omega t \cos\varphi \cdot \dot\varphi + 2\omega_0^2 \cos\varphi + \alpha^2\omega^2 \cos^2\omega t \right).$$

$$L(\varphi, \dot\varphi; t) =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot\varphi^2 + 2\alpha\omega \cos\omega t \cos\varphi \cdot \dot\varphi + 2\omega_0^2 \cos\varphi + \alpha^2\omega^2 \cos^2\omega t \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[2 \left(\alpha\omega \cos\omega t \cdot \dot\varphi + \omega_0^2 \right) \cos\varphi \right] =$$

$$= - m l^2 \cdot \left(\alpha\omega \cos\omega t \cdot \dot\varphi + \omega_0^2 \right) \sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{2} m l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial\dot\varphi} \left(\dot\varphi^2 + 2\alpha\omega \cos\omega t \cos\varphi \cdot \dot\varphi \right) =$$

$$= m l^2 \left(\dot\varphi + \alpha\omega \cos\omega t \cos\varphi \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \left[\ddot\varphi - \alpha\omega \left(\omega \sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi \cdot \dot\varphi \right) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} =$$

$$= m l^2 \left[\ddot\varphi - \alpha\omega \left(\omega \sin\omega t \cos\varphi + \cancel{\cos\omega t \sin\varphi \cdot \dot\varphi} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\cancel{\alpha\omega \cos\omega t \cdot \dot\varphi} + \omega_0^2 \right) \sin\varphi \right] =$$

$$= m l^2 \left(\ddot\varphi - \alpha\omega^2 \sin\omega t \cos\varphi + \omega_0^2 \sin\varphi \right)$$

Stąd równanie Lagrange'a dla funkcji $\varphi = \varphi(t)$:

► $$\ddot\varphi + \omega_0^2 \sin\varphi = \alpha\omega^2 \sin\omega t \cos\varphi$$

Przy małych wychyleniach $\varphi \ll 1$: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$:

$$\ddot\varphi + \omega_0^2 \varphi = \alpha\omega^2 \sin\omega t$$

Przybliżenie małych wychyleń.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \alpha \omega^2 \sin \omega t \qquad (1)$$

Ogólne rozwiązanie niejednorodnego równania (1) jest sumą ogólnego rozwiązania $\varphi_0(t)$ równania jednorodnego

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \qquad (0)$$

stowarzyszonego z równaniem (1) oraz jakiegoś szczególnego rozwiązania $\varphi_1(t)$ wyjściowego równania (1).

Równanie (0) jest spełnione przez liniowo niezależne funkcje $\sin \omega_0 t$ i $\cos \omega_0 t$, a zatem ogólne rozwiązanie ma postać

$$\varphi_0(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t .$$

Szczególnego rozwiązania równania (1) szukamy w postaci

$$\varphi_1(t) = C \sin \omega t .$$

Podstawienie do (1) daje

$$- C \omega^2 \sin \omega t + C \omega_0^2 \sin \omega t = \alpha \omega^2 \sin \omega t$$

skąd

$$C = \alpha \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

$$\varphi(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \alpha \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

Dowolne na razie stałe A i B są określone przez warunki początkowe.

▷ $$\varphi(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + \alpha\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$$

Przyjmujemy warunki początkowe

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot\varphi(0) = 0.$$

$$\varphi(0) = B \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

$$\varphi'(0) = A\omega_0 + \alpha\frac{\omega^3}{\omega_0^2-\omega^2} \quad \Rightarrow \quad A = -\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$$

A zatem

▶ $$\varphi(t) = \alpha\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \sin\omega t\right)$$

$$\varphi(t) = \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left[\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \sin(\omega t+\pi)\right]$$

Ruch wahadła jest superpozycją dwóch drgań harmonicznych, jednego o częstości własnej ω_0 i drugiego o częstości wymuszonej ω.

<u>Granica $\omega \to \omega_0$:</u> $\omega = \omega_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0.$

$$\varphi(t) = \alpha\frac{1}{\omega_0}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t\right)$$

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0}\frac{(\omega_0+\varepsilon)^2}{(2\omega_0+\varepsilon)\varepsilon} \sim \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\omega\sin(\omega_0 t) - \omega_0\sin(\omega t) = (\omega_0+\varepsilon)\sin(\omega_0 t) - \omega_0\sin(\omega_0 t+\varepsilon t) =$$

$$= \omega_0\sin(\omega_0 t) + \varepsilon\sin(\omega_0 t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)\cos(\varepsilon t) - \omega_0\cos(\omega_0 t)\sin(\varepsilon t) \sim$$

$$\sim \varepsilon\sin(\omega_0 t) - \varepsilon\omega_0 t\cos(\omega_0 t) = \varepsilon\left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right)$$

$$\varphi(t) \simeq \frac{1}{2}\alpha\left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right)$$ szczątkowy opis rezonansu

18.01.03