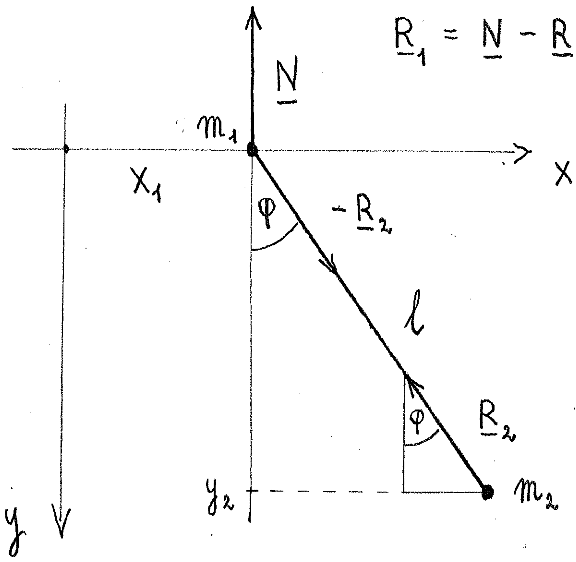
Wahadło ze ślizgającym się punktem zawieszenia. <u>Równania Newtona.</u>



$$\underline{R}_1 = \underline{N} - \underline{R}_2$$

<u>Więzy:</u> $y_1 = 0$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

Niezależne współrzędne zgodne z więzami: x_1, φ.

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + l \sin\varphi \\ y_2 = + l \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \;; & \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \dot{y}_2 = - l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \;; & \ddot{y}_2 = - l \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$

Równania ruchu w ujęciu wektorowym:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_1 + \underline{R}_1 & \underline{F}_1 &= [0, +m_1 g], & \underline{R}_1 &= [R_{1x}, R_{1y}] \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_2 + \underline{R}_2 & \underline{F}_2 &= [0, +m_2 g], & \underline{R}_2 &= [R_{2x}, R_{2y}] \end{aligned} \qquad (0)$$

Zależności dla sił reakcji:

$$\underline{R}_1 = \underline{N} - \underline{R}_2 \;: \qquad R_{1x} = - R_{2x} \;: \quad \blacktriangleright \quad \frac{R_{1x}}{R_{2x}} = -1.$$

$$+\frac{R_{2x}}{R_{2y}} = \operatorname{tg}\varphi \;: \quad \blacktriangleright \quad \frac{R_{2x}}{R_{2y}} = + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Równania ruchu dla współrzędnych kartezjańskich (rzutujemy (0) na osie):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = R_{1x} \\ m_2 \ddot{x}_2 = R_{2x} \\ m_2 (\ddot{y}_2 - g) = R_{2y} \end{cases}$$

$$m_1(\ddot{y}_1 - g) = R_{1y}, \quad \ddot{y}_1 = 0 : \quad R_{1y} = -m_1 g.$$

$$-m_1 g = -N - R_{2y}$$

$$N = +m_1 g + m_2(\ddot{y}_2 - g)$$

$$= +(m_1 + m_2) g + m_2 \ddot{y}_2$$

Znając ruch: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$, wyznaczymy siły reakcji $\underline{R}_1$, $\underline{R}_2$, $\underline{N}$.

Zasada d'Alemberta dla układu dwóch punktów materialnych na płaszczyźnie, przy dwóch równaniach więzów.

$P_1 : \quad m_1, \quad x_1, y_1 \; ; \qquad \underline{F}_1 = [\, F_{1x}, F_{1y} \,] \, .$

$P_2 : \quad m_2, \quad x_2, y_2 \; ; \qquad \underline{F}_2 = [\, F_{2x}, F_{2y} \,] \, .$

$$\begin{cases} f(x_1, y_1; x_2, y_2) = 0, \\ g(x_1, y_1; x_2, y_2) = 0. \end{cases}$$

Zasada d'Alemberta :

$$(m_1 \ddot{x}_1 - F_{1x})\,\delta x_1 + (m_1 \ddot{y}_1 - F_{1y})\,\delta y_1 + \\ + (m_2 \ddot{x}_2 - F_{2x})\,\delta x_2 + (m_2 \ddot{y}_2 - F_{2y})\,\delta y_2 = 0$$

gdzie $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$ są dowolnymi przesunięciami wirtualnymi spełniającymi warunki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2 = 0 & (\alpha) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial g}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\delta x_2 + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}\delta y_2 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Dla wahadła ze ślizgającym się punktem zawieszenia :

$\underline{F}_1 = [\, 0, -m_1 g \,]$

$\underline{F}_2 = [\, 0, -m_2 g \,]$

$f(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv y_1 = 0$

$g(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$

Zasada d'Alemberta:

$$m_1 \ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + m_1 (\ddot{y}_1 + g) \cdot \delta y_1 +$$
$$+ m_2 \ddot{x}_2 \cdot \delta x_2 + m_2 (\ddot{y}_2 + g) \cdot \delta y_2 = 0$$

gdzie przesunięcia wirtualne spełniają warunki

$$\delta y_1 = 0 \qquad (\alpha')$$

$$-2(x_2 - x_1)\,\delta x_1 - 2(y_2 - y_1)\,\delta y_1 + 2(x_2 - x_1)\,\delta x_2 + 2(y_2 - y_1)\,\delta y_2 = 0$$
$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0 \qquad (\beta')$$

Biorąc pod uwagę warunki $y_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$ otrzymujemy

$$m_1 \ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \cdot \delta x_2 + m_2 (\ddot{y}_2 + g) \cdot \delta y_2 = 0, \qquad (a)$$
$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + y_2\, \delta y_2 = 0. \qquad (b)$$

Mnożymy równanie (a) przez y_2:

$$m_1 \ddot{x}_1 y_2 \cdot \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 y_2 \cdot \delta x_2 + m_2 (\ddot{y}_2 + g) \cdot y_2 \delta y_2 = 0$$

i podstawiamy z (b): $y_2 \delta y_2 = -(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1)$;

$$\left[m_1 \ddot{x}_1 y_2 + m_2 (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 + g) \right] \delta x_1 +$$
$$+ \left[m_2 \ddot{x}_2 y_2 - m_2 (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 + g) \right] \delta x_2 = 0$$

Teraz δx_1 i δx_2 są zupełnie dowolne, skąd wynikają równania:

$$m_1 \ddot{x}_1 y_2 + m_2 (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 + g) = 0 \qquad (1)$$
$$\ddot{x}_2 y_2 - (x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 + g) = 0 \qquad (2)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + y^2 = l^2$$

Z równania (2):

$$(x_2 - x_1)(\ddot{y}_2 + g) = \ddot{x}_2 y_2 \, .$$

Podstawiając do (1):

$$m_1 \ddot{x}_1 y_2 + m_2 \ddot{x}_2 y_2 = 0 \qquad |:y_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \qquad (1a)$$

<u>Interpretacja</u>: niech $\vec{r}_0$ oznacza wektor wodzący środka masy układu m_1, m_2; wtedy, z definicji:

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \, ;$$

w szczególności:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \, ;$$

Równanie (1a) stwierdza więc, że $\ddot{x}_0 = 0$, skąd $\dot{x}_0 = cst.$

Fakt ten wynika stąd, że x-owa składowa sumy sił (zewnętrznych) działających na układ: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N}$, równa się zeru.

Przechodząc do współrzędnych niezależnych x_1, φ otrzymujemy:

Równanie (1a):

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 - l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}) = 0$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l (\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2) = 0$$

► $$\ddot{x}_1 + \varepsilon l (\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2) = 0 \, , \qquad \varepsilon = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad (1')$$

Równanie (2):

$$- (\ddot{x}_1 - l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}) \, l \cos\varphi \, +$$
$$- l \sin\varphi \cdot (l \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} + g) = 0 \qquad |:(-l)$$

$$\cos\varphi \cdot \ddot{x}_1 - l \sin\varphi \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos^2\varphi \cdot \ddot{\varphi} \, +$$
$$+ l \sin\varphi \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \sin^2\varphi \cdot \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0$$

► $$\cos\varphi \cdot \ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0 \qquad (2')$$