Zasada d'Alemberta dla układu N punktów materialnych podlegającego p więzom:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - F_j)\,\delta x_j = 0 & (1) \\ f_k(x,t) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, p. & (2) \\ \text{gdzie } \delta x_j \ (j = 1, 2, \ldots, 3N) \text{ są dowolnymi liczbami spełniającymi warunki:} & \\ \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\,\delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p. & (3). \end{cases}$$

Równania (3) tworzą jednorodny układ p równań liniowych na 3N przesunięć wirtualnych δx_j: p przesunięć można wyrazić przez 3N − p pozostałych, które są dowolne.

Wstawiając te wyrażenia do (1) otrzymamy warunek znikania formy liniowej 3N−p dowolnych przesunięć. Wynika stąd zerowanie się 3N−p współczynników tej formy.

Wespół z równaniami (2) w liczbie p daje to układ 3N równań na 3N niewiadomych funkcji $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

W rozważaniach tych nie występują siły reakcji. Po wyznaczeniu ruchu można je znaleźć z równań Newtona:

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + F_{Rj} \quad : \quad F_{Rj} = m_j \ddot{x}_j - F_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, 3N.$$

15.11.04,

Zasada d'Alemberta we współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami.

Niech $(q_1, q_2, \dots, q_s) \equiv q$ - układ wartości współrzędnych uogólnionych.

Wtedy

$$x_j = x_j(q, t) \qquad j = 1, 2, \dots, 3N$$

$$f_k[x(q,t), t] = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, p.$$

oraz

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, p. \tag{4}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, 3N. \\ l = 1, 2, \dots, s. \end{matrix} \tag{6}$$

Stwierdzenie. Dla dowolnych δq_l $(l = 1, 2, \dots, s)$ liczby

$$\delta x_j := \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l \tag{7}$$

spełniają warunki (3) w zasadzie d'Alemberta.

Rzeczywiście, podstawiając (7) do (3) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \cdot \left(\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) \delta q_l = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial f_k}{\partial q_l} \delta q_l = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

Wniosek: Podczas ruchu układu, dla dowolnych δq_l $(l = 1, 2, \dots, s)$:

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\left(m_j \ddot{x}_j - F_j \right) \left(\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \delta q_l \right) \right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left[\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - F_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right] \delta q_l = 0 .$$

$$\sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} - \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3N} \frac{m_j}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{3N} \frac{m_j}{2} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_l} =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} , \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2$$ energia kinetyczna.

$$\sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} F_j = Q_l$$ siła uogólniona,

A zatem, dla dowolnych δq_l $(l = 1, 2, \dots, s)$:

$$\sum_{l=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \delta q_l = 0 . \qquad (8)$$

Wynikają stąd równania Lagrange'a (2. rodzaju):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l , \qquad l = 1, 2, \dots, s. \qquad (9)$$

16.11.04.

Jeżeli siły działające na cząstki są potencjalne, tzn. istnieje funkcja $U(x,t)$ taka, że

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, 3N,$$

to siła uogólniona

$$Q_l = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} = -\frac{\partial U}{\partial q_l}, \qquad l = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie $U(q,t) = U[x(q,t), t]$.

Wtedy równania Lagrange'a (9):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial U}{\partial q_l}, \qquad l = 1, 2, \dots, s.$$

a ponieważ $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} = 0$ $(l = 1, 2, \dots, s)$, to można je przepisać jako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \qquad l = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie funkcja Lagrange'a $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t)$.