Z47: Algebra liniowa

Zagadnienie: Rozkłady macierzy LU, RU, SVD

Zadanie: Postać schodkowa macierzy, przekształcenie i rozkład LU.

Przedstawienie macierzy w postaci iloczynu prostych macierzy

Operacje wyznaczania macierzy odwrotnych i rozwiązywania układów równań liniowych czy też wyznaczania wektorów i wartości własnych są żmudne do wykonania za pomocą metody wyznaczników szczególnie w przypadkach macierzy o dużych wymiarach. Aby uprościć obliczenia wygodnie jest zapisać macierz w postaci iloczynu macierzy, które mają prostą budowę, na przykład macierzy Jordana czy macierzy trójkątnych lub innych macierzy o dużej liczbie elementów zerowych.

Podamy teraz definicje różnych typów macierzy używanych do zapisu macierzy w postaci iloczynów. *Macierz schodkowa* to macierz, której pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy, znajdują się w coraz dalszych kolumnach, a powstałe wiersze zerowe umieszcza się jako ostatnie. Macierze schodkowe nie muszą być macierzami kwadratowymi, ale jeżeli są macierzami kwadratowymi, to są macierzami trójkątnymi górnymi. Przykłady macierzy schodkowych

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków, czyli niezerowych wierszy.

Macierz elementarna, to macierz powstała z macierzy jednostkowej w wyniku jednej operacji elementarnej na jej wierszach. Do *operacji elementarnych* należą:

a) zamiana miejscami dwóch różnych wierszy macierzy,

b) pomnożenie jednego z wierszy macierzy przez liczbę różną od zera,

c) dodanie do jednego wiersza macierzy innego wiersza tej samej macierzy, pomnożonego przez liczbę różną od zera.

Zatem macierzami elementarnymi są następujące trzy typy macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Operacje elementarne na dowolnej macierzy A można wykonywać mnożąc macierz A z lewej strony przez macierz elementarną E. Każda macierz może zostać przekształcona do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych, przy użyciu metody Gaussa Jordana.

Metoda LU

Ponieważ macierze trójkątne są wygodne w dalszych obliczeniach ważnym zagadnieniem jest przedstawienie dowolnej macierzy kwadratowej A w postaci iloczynu LU, gdzie L oznacza macierz trójkątną dolną (od ang. lower), a U oznacza macierz trójkątną górną (od ang. upper). Aby uprościć dalszą notację przyjmujemy, że jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru $n \times n$, to $\mathbf{a}_i$ oznacza i-ty wiersz macierzy A, a $\mathbf{a}^i$ oznacza i-tą kolumnę macierzy A, tj.

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}.$$

Przedstawimy teraz algorytm obliczania macierzy $L = [l_{ij}]$ i $U = [u_{ij}]$ takich, że $A = LU$, gdzie gdzie L oznacza macierz trójkątną dolną, a U oznacza macierz trójkątną górną. W jednej z tych macierzy można ustalić w dowolny sposób wyrazy na głównej przekątnej różne od zera. W naszej metodzie robimy tak w macierzy L. Wiersze w macierzy U i kolumny w macierzy L wyznaczamy z następujących wzorów rekurencyjnych:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{l_{11}}, \quad \mathbf{l}^1 = \frac{\mathbf{a}^1}{u_{11}},$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{a}_k - l_{k1}\mathbf{u}_1 - \ldots - l_{k,k-1}\mathbf{u}_{k-1}}{l_{kk}}, \quad \mathbf{l}^k = \frac{\mathbf{a}^k - l_{1k}\mathbf{l}^1 - \ldots - u_{k-1,k}\mathbf{l}^{k-1}}{u_{kk}},$$

dla $2 \leqslant k \leqslant n$.