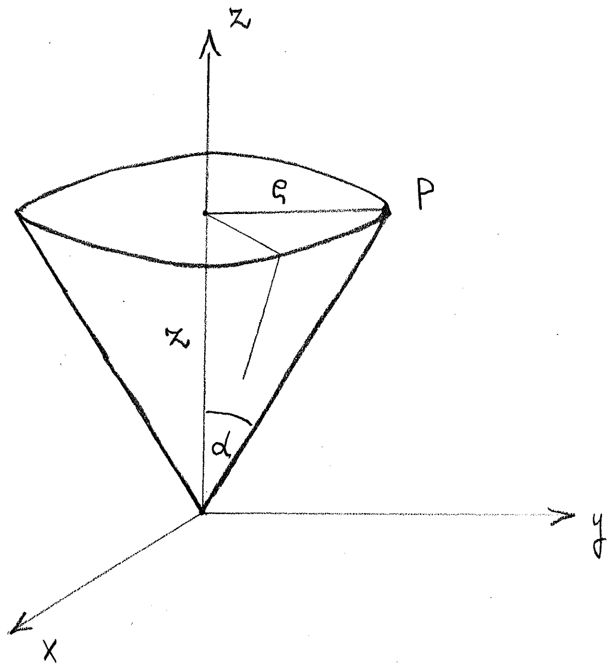
Stożek.



$$\frac{\rho}{z} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Równanie stożka:

we współrzędnych cylindrycznych: $\rho = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot z$.

we współrzędnych kartezjańskich: $\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot z$

► $f(x,y,z) \equiv \sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot z = 0$

<u>Uwaga</u>: równanie $x^2+y^2-\mathrm{tg}^2\alpha \cdot z^2 = 0$ określa również dolny stożek.

Wektor prostopadły do powierzchni stożka:

$$\mathrm{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] =$$

$$= \left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, -\mathrm{tg}\,\alpha \right] =$$

$$= \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\mathrm{tg}\,\alpha \right] = \left[\cos\varphi, \sin\varphi, -\mathrm{tg}\,\alpha \right]$$

zależy tylko od φ

$$|\mathrm{grad}\, f| = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \mathrm{cst.}$$

<u>Zasada d'Alemberta</u> dla 1 punktu materialnego na powierzchni o równaniu $f(\underline{r}, t) = 0$:

$$(m\ddot{\underline{r}} - \underline{F}) \cdot \delta\underline{r} = 0 \,, \quad \text{gdzie } \delta\underline{r} : \quad \operatorname{grad} f \cdot \delta\underline{r} = 0 \,.$$

We współrzędnych kartezjańskich : $f(x,y,z;t) = 0$,

$$(m\ddot{x} - F_x)\,\delta x + (m\ddot{y} - F_y)\,\delta y + (m\ddot{z} - F_z)\,\delta z = 0 \,,$$

gdzie $\delta x, \delta y, \delta z$: $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$.

<u>Punkt materialny na powierzchni stożka</u> w polu siły ciężkości :

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{tg}\alpha \cdot z = 0$$

$$\underline{F} = m\underline{g} = [\,0, 0, -mg\,] \,.$$

Równania d'Alemberta :

$$m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y + m(\ddot{z}+g)\,\delta z = 0 \qquad | :m \qquad (1)$$

$$\delta x, \delta y, \delta z : \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\delta y - \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta z = 0 \qquad (2)$$

Z równania (2) : $\delta z = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\delta y \right)$

Wstawiając do (1) :

$$\left[\ddot{x} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\ddot{z}+g) \right] \delta x + \left[\ddot{y} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\ddot{z}+g) \right] \delta y = 0$$

Teraz δx i δy są dowolne. Wobec tego równania ruchu :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\ddot{z}+g) = 0 & (i) \\ \ddot{y} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\ddot{z}+g) = 0 & (ii) \end{cases}$$

razem z równaniem więzów :

$$z = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2} \qquad (iii).$$

We współrzędnych cylindrycznych:

$$(\cos\varphi\cdot\ddot{\varrho}-2\sin\varphi\cdot\dot{\varrho}\dot{\varphi}-\varrho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2-\varrho\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi})+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\varphi(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ddot{\varrho}+g)=0 \qquad (3)$$

$$(\sin\varphi\cdot\ddot{\varrho}+2\cos\varphi\cdot\dot{\varrho}\dot{\varphi}-\varrho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2+\varrho\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi})+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\varphi(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ddot{\varrho}+g)=0 \qquad (4)$$

▷ $\cos\varphi\cdot(4)-\sin\varphi\cdot(3)$:

$$2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\dot{\varrho}\dot{\varphi}+\varrho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\ddot{\varphi}=0$$

$$2\dot{\varrho}\dot{\varphi}+\varrho\ddot{\varphi}=0\;; \qquad ▶\; \varrho\ddot{\varphi}+2\dot{\varrho}\dot{\varphi}=0 \qquad (5).$$

▷ $\sin\varphi\cdot(4)+\cos\varphi\cdot(3)$:

$$(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,\ddot{\varrho}-\varrho(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2+\operatorname{ctg}\alpha\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ddot{\varrho}+g)=0$$

$$\ddot{\varrho}-\varrho\dot{\varphi}^2+\operatorname{ctg}\alpha\cdot(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ddot{\varrho}+g)=0$$

$$(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)\,\ddot{\varrho}-\varrho\dot{\varphi}^2+g\operatorname{ctg}\alpha=0 \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$▶\; \ddot{\varrho}-\sin^2\alpha\cdot\varrho\dot{\varphi}^2+\frac{g}{2}\sin 2\alpha=0 \qquad (6)$$

Do równań (5), (6) dochodzi równanie ▶ $z=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\varrho$ (7)

Otrzymaliśmy układ 3 równań różniczkowych na 3 funkcje: $\varrho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$, opisujące ruch układu,

10.12.02
15.11.04.