Для дальнейшего полезно ввести множество

$$X_\varepsilon \overset{def}{=} \{x \in X : \omega(f; x) \geq \varepsilon\}, \tag{23.40}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Если $\eta < \varepsilon$, то ясно, что из неравенства $\omega(f;x) \geq \varepsilon$ следует неравенство $\omega(f;x) \geq \eta$. поэтому

$$X_\varepsilon \subset X_\eta. \tag{23.41}$$

Л Е М М А 2. *Функция f непрерывна в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда*

$$\omega(f;x) = 0. \tag{23.42}$$

С Л Е Д С Т В И Е. *Если X_0 — множество точек разрыва функции f, то*

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{1/n}. \tag{23.43}$$

Доказательство леммы. *Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует так, что для всех точек* $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для любых точек $x, x' \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$ имеем

$$|f(x') - f(x)| \leq \\ \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{23.44}$$

и, следовательно,

$$\omega(f;x_0) = \inf_{U(x_0)} \omega(f; U(x_0) \cap X) \leq \omega(f; \cap X) = \\ = \sup_{x,x' \in U_\varepsilon(x_0) \cap X} |f(x') - f(x)| \underset{(23.44)}{\leq} \varepsilon.$$

А так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\omega(f;x_0) = 0$.

Наоборот, если $\omega(f;x_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существу- ет такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $\omega(f; U(x_0) \cap X) < \varepsilon$. Тогда для любого $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$ будем иметь

$$|f(x) - f(x_0)| \underset{(23.35)}{\leq} \omega(f; U(x_0) \cap X) < \varepsilon,$$

т. е. функция f непрерывна в точке x_0.$\square$

Докажем следствие. Если точка $x_0 \in X$ является точкой разрыва функции f, то, в силу леммы 2, $\omega(f;x_0) > 0$, а поэто-