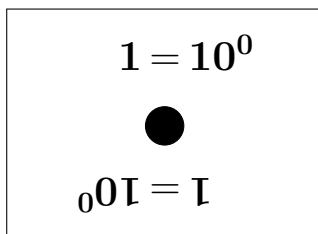


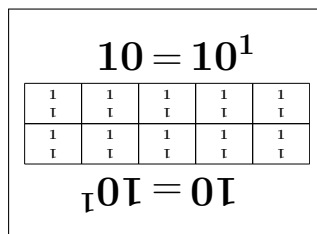
# Arbeitsheft I.2.a — Zählen und dezimale Darstellung von Zahlen

## Verfügbare Ausstattung

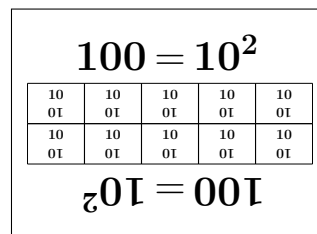
Jeweils 32 Karten von folgenden Sorten:



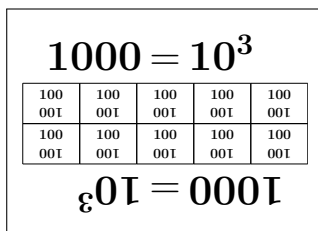
Einerkarte



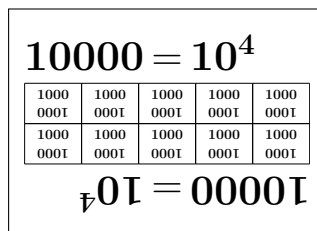
Zehnerkarte



Hunderterkarte



Tausenderkarte



Zehntausenderkarte

Die Zahl 2347 bedeutet:

$$\begin{array}{rclclcl}
 2 \times \text{Tausend} & + & 3 \times \text{Hundert} & + & 4 \times \text{Zehn} & + & 7 \times \text{Eins} \\
 = 2 \cdot 10^3 & + & 3 \cdot 10^2 & + & 4 \cdot 10 & + & 7 \cdot 1
 \end{array}$$

Wir stellen diese Zahl nun durch Hinlegen von Karten dar, wie es die Menschen schon vor Urzeiten in etwa machten:

10000	1000	100	10	1																													
<div><div>1000 = 10<sup>3</sup></div><div><table><tr><td>100</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td></tr><tr><td>001</td><td>001</td><td>001</td><td>001</td><td>001</td></tr></table></div><div>ε0I = 000I</div></div>	100	100	100	100	100	001	001	001	001	001	<div><div>100 = 10<sup>2</sup></div><div><table><tr><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td></tr></table></div><div>ε0I = 00I</div></div>	10	10	10	10	10	01	01	01	01	01	<div><div>10 = 10<sup>1</sup></div><div><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></div><div>10I = 0I</div></div>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>
100	100	100	100	100																													
001	001	001	001	001																													
10	10	10	10	10																													
01	01	01	01	01																													
1	1	1	1	1																													
1	1	1	1	1																													
<div><div>1000 = 10<sup>3</sup></div><div><table><tr><td>100</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td></tr><tr><td>001</td><td>001</td><td>001</td><td>001</td><td>001</td></tr></table></div><div>ε0I = 000I</div></div>	100	100	100	100	100	001	001	001	001	001	<div><div>100 = 10<sup>2</sup></div><div><table><tr><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td></tr></table></div><div>ε0I = 00I</div></div>	10	10	10	10	10	01	01	01	01	01	<div><div>10 = 10<sup>1</sup></div><div><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></div><div>10I = 0I</div></div>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>
100	100	100	100	100																													
001	001	001	001	001																													
10	10	10	10	10																													
01	01	01	01	01																													
1	1	1	1	1																													
1	1	1	1	1																													
	<div><div>100 = 10<sup>2</sup></div><div><table><tr><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr><tr><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td><td>01</td></tr></table></div><div>ε0I = 00I</div></div>	10	10	10	10	10	01	01	01	01	01	<div><div>10 = 10<sup>1</sup></div><div><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></div><div>10I = 0I</div></div>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>										
10	10	10	10	10																													
01	01	01	01	01																													
1	1	1	1	1																													
1	1	1	1	1																													
		<div><div>10 = 10<sup>1</sup></div><div><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></div><div>10I = 0I</div></div>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>																				
1	1	1	1	1																													
1	1	1	1	1																													
			<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>																														
			<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>																														
			<div><div>1 = 10<sup>0</sup></div><div>●</div><div>00I = I</div></div>																														

In die Spalte ganz rechts legen wir so viele Einerkarten, wie die Einerstelle es anzeigt. In die Spalte links davon geben wir analog für jeden Zehner eine Zehnerkarte. In nächste Spalte links kommt die richtige Anzahl Hunderterkarten, danach kommen die Tausenderkarten usw. Dies Art und Weise eine Zahl mit den Karten darzustellen nennen wir *Kartendarstellung der Dezimalzahlen*.

**Wichtig!** Du darfst bei der *Kartendarstellung der Dezimalzahlen* nie mehr als 9 Karten in einer Spalte haben. Die Summe der Werte aller Karten der Kartendarstellung ist deine Zahl!

### Aufgabe 1

Stelle folgende Zahlen mit den Karten dar:

a) 3016

c) 9001

e) 7

b) 992

d) 2222

f) 410

### Aufgabe 2

Welches ist die kleinste und welches ist die grösste Zahl, die du mit deinen Karten darstellen kannst? Stelle sie dar!

### Aufgabe 3

Zähle von 1 bis 21, indem du zuerst 1 mit den Karten darstellst, danach zu 2 wechselst, danach zu 3 etc. Denke daran: Sobald du 10 Einerkarten in der ersten Spalte hast, ist das keine zulässige Kartendarstellung mehr und du musst die 10 Einerkarten durch eine Zehnerkarte austauschen.

### Aufgabe 4

Du hast Geldscheine und Münzen mit den Werten 1€, 2€, 5€, 10€, 20€ und 50€ zur Verfügung. Von jeder Sorte hast du mindestens 10 Stück. Du sollst jetzt den Betrag von 76€ bezahlen. Du willst es so machen, dass die Gesamtanzahl der verwendeten Scheine und Münzen minimal ist. Zum Beispiel würden drei 20€-Scheine, ein 10€-Schein und drei 2€-Münzen die korrekte Bezahlung ergeben, aber die Gesamtanzahl  $3 + 1 + 3 = 7$  ist zu gross.

Welche Zusammenstellung würdest du wählen. Was hat diese Aufgabe mit der dezimalen Zahlendarstellung gemeinsam?

### Addition von zwei Zahlen in Kartendarstellung.

Wir lernen nun Zahlen in der Kartendarstellung zu addieren. Wir nehmen also zwei Zahlen und stellen zuerst beide mit den Karten dar: Die erste Zahl oben, die zweite dann darunter, mit denselben Spalten. Mache das z. B. für 1809 und 2334. Natürlich ist die Summe von 1809 und 2334 einfach die Summe aller Werte der hingelegten Karten. Doch so wie die Karten daliegen, ist das keine zulässige Kartenstellung

mehr, weil du zusammen in der Spalte ganz rechts 13 Einerkarten und in der dritten Spalte von rechts 11 Karten hast. Du musst also 10 Einerkarten gegen eine Zehnerkarte eintauschen und diese in die zweite Spalte von rechts legen. Und weil du noch 11 Hunderterkarten hast, musst du 10 davon gegen eine Tausenderkarte eintauschen und diese in die Tausenderspalte legen. Überprüfe jetzt, ob deine Kartendarstellung tatsächlich der Summe  $4143 = 1809 + 2334$  entspricht.

### Aufgabe 5

Führe die folgende Zahlenadditionen in der Kartendarstellung durch und vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat der bekannten Addition von Dezimalzahlen:

a)  $111 + 1038$

c)  $4863 + 7341$

e)  $77 + 3944$

b)  $999 + 207$

d)  $9999 + 9999$

f)  $2173 + 7917$

### Hausaufgabe 1 (als Gruppenarbeit möglich)

Beschreibe die Vorgehensweise (Informatiker sagen dazu Algorithmus) zur Addition von zwei Dezimalzahlen in der Kartendarstellung so, dass sie jede und jeder anhand der Beschreibung, ohne zusätzliche Informationen, korrekt nachmachen kann.

### Aufgabe 6: Multiplikation mit 10

Du hast eine Zahl in der Kartendarstellung. Beschreibe zunächst, wie man vorgehen kann, um die zehnfache Zahl in der Kartendarstellung zu erhalten. Multipliziere dann die folgenden Zahlen in Kartendarstellung mit 10:

a) 100

c) 1734

b) 37

d) 6307

### Aufgabe 7: Multiplikation mit einstelligen Dezimalzahlen in dezimaler Kartendarstellung

Wenn du eine Zahl in der dezimalen Kartendarstellung mit 3 multiplizieren willst, kannst du einfach die Anzahl der Karten in jeder Spalte verdreifachen. Danach schaust du von rechts nach links nach, in welchen Spalten mehr als 9 Karten liegen und behebst die unzulässige Darstellung, ähnlich wie bei der Addition zweier Zahlen in dezimaler Kartendarstellung. Probiere es für die folgenden Multiplikationen aus:

a)  $111 \cdot 9$

c)  $306 \cdot 4$

e)  $1032 \cdot 5$

b)  $274 \cdot 2$

d)  $1798 \cdot 3$

f)  $2134 \cdot 7$

Überprüfe alle Resultate, indem du auf die herkömmliche Weise multiplizierst.

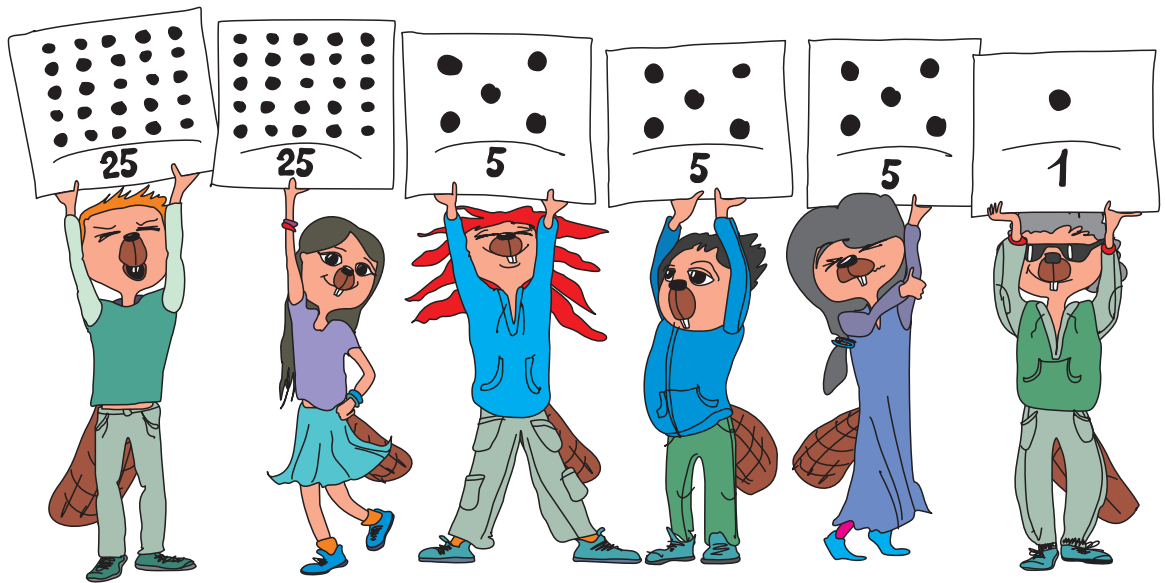
## Hausaufgabe 2

Überlege dir eine Vorgehensweise, wie du die Subtraktion  $a - b$  für zwei Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a \geq b$ , in der dezimalen Kartendarstellung durchführen kannst. Bereite eine Präsentation vor, mit der du es in der nächsten Stunde vorführen kannst und erkläre es danach an einem Beispiel mit konkreten Zahlen.

### Aufgabe für die Schnellsten

Überlege dir, wie du eine Zahl in dezimaler Kartendarstellung mit vielfachen Zehnern oder vielfachen Hundertern (z. B. mit 20 oder mit 300) multiplizieren könntest. Erkläre es der Klasse anhand einiger Beispiele, wie etwa  $1726 \cdot 20$  oder  $318 \cdot 300$ .


## Arbeitsheft I. 3. – 5-adische Darstellung von Zahlen



### Verfügbare Ausstattung pro Gruppe

Jeweils 12 Karten von folgenden Sorten:

Die 5-adische Darstellung ist ähnlich wie eine dezimale Darstellung. In jeder Spalte liegen ein paar gleiche Karten. Bei dezimaler Darstellung waren es höchstens 9, bei der 5-adischen Darstellung sind es höchstens 4. Betrachten wir ein Beispiel:

$1=5^0$   
  
 $0\text{5}=\text{I}$

$5=5^1$   

1	1	1	1	1
I	I	I	I	I

  
 $1\text{5}=\text{5}$

$25=5^2$   

5	5	5	5	5
5	5	5	5	5

  
 $2\text{5}=\text{55}$

Einerkarte

Fünferkarte

25er-Karte

$125=5^3$   

25	25	25	25	25
55	55	55	55	55

  
 $3\text{5}=\text{55I}$




$625=5^4$   

125	125	125	125	125
55I	55I	55I	55I	55I

  
 $4\text{5}=\text{5555}$

125er-Karte

625er-Karte

625	125	25	5	1																													
$125=5^3$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr> <tr><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td></tr> </table> $3\text{5}=\text{55I}$	25	25	25	25	25	55	55	55	55	55	$25=5^2$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table> $2\text{5}=\text{55}$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	$5=5^1$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>I</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td></tr> </table> $1\text{5}=\text{5}$	1	1	1	1	1	I	I	I	I	I	$1=5^0$  $0\text{5}=\text{I}$
25	25	25	25	25																													
55	55	55	55	55																													
5	5	5	5	5																													
5	5	5	5	5																													
1	1	1	1	1																													
I	I	I	I	I																													
$125=5^3$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr> <tr><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td></tr> </table> $3\text{5}=\text{55I}$	25	25	25	25	25	55	55	55	55	55	$25=5^2$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table> $2\text{5}=\text{55}$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		$1=5^0$  $0\text{5}=\text{I}$										
25	25	25	25	25																													
55	55	55	55	55																													
5	5	5	5	5																													
5	5	5	5	5																													
	$25=5^2$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table> $2\text{5}=\text{55}$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		$1=5^0$  $0\text{5}=\text{I}$																				
5	5	5	5	5																													
5	5	5	5	5																													
	$25=5^2$ <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table> $2\text{5}=\text{55}$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5																						
5	5	5	5	5																													
5	5	5	5	5																													

Die so dargestellte Zahl besteht aus drei Einer-Karten, einer Fünfer-Karte, vier 25er-Karten und zwei 125er-Karten. Mit einzelnen Ziffern geschrieben sieht die 5-adische Darstellung der Zahl wie folgt aus:

$$2413_5$$

Die kleine 5 unten am Ende zeigt uns an, dass es sich um eine 5-adische Zifferndarstellung handelt und nicht um die herkömmliche dezimale Darstellung. Wie

sieht die Zahl  $2413_5$  in der herkömmlichen dezimalen Darstellung aus? Das können wir folgendermassen auf einfache Weise bestimmen:

$$\begin{array}{rcccccccc} 2 \cdot 125 & + & 4 \cdot 25 & + & 1 \cdot 5 & + & 3 \cdot 1 \\ = & 250 & + & 100 & + & 5 & + & 3 \end{array}$$

Es gilt also  $2413_5 = 358$ , die herkömmliche dezimale Darstellung von  $2413_5$  ist 358.

### Aufgabe 1

Welche Ziffern benötigen wir für die Darstellung von Zahlen in 5-adischer Form? Wir nennen diese Ziffern das Alphabet der 5-adischen Zahlendarstellung.

### Aufgabe 2

Zähle mit der 5-adischen Kartendarstellung bis 31, also:  
 $1 = 1_5, 2 = 2_5, \dots, 6 = 11_5, 7 = 12_5, \dots, 10 = 20_5$

### Aufgabe 3

Bilde mit den 5-adischen Karten die Darstellung der folgenden Zahlen in 5-adischer Darstellung. Bestimme zu jeder Zahl ihre dezimale Darstellung.

- |            |             |             |
|------------|-------------|-------------|
| a) $33_5$  | c) $1111_5$ | e) $2434_5$ |
| b) $401_5$ | d) $4321_5$ |             |

### Aufgabe 4

Was ist die grösste 4-stellige Zahl in 5-adischer Darstellung? Stelle sie mit Karten dar und berechne ihre Dezimaldarstellung.

### Aufgabe 5

Stelle mit Karten die Zahl  $341_5$  dar und stelle dann auch die nächsten 10 Zahlen – eine nach der anderen – in der 5-adischen Darstellung dar. Mach dies alles mit den Karten, indem du zuerst immer eine Einerkarte zu der Darstellung hinzufügst. Schreibe die Resultate in 5-adischer Zifferndarstellung als  $341_5, 342_5, 343_5, 344_5, \dots$  auf.



### Aufgabe 6: Gruppenarbeit

Überlegt euch eine Vorgehensweise, wie man zwei Zahlen in 5-adischer Darstellung mit Hilfe von Karten addieren kann, sodass man das Resultat in der korrekten 5-adischen Darstellung erhält. Entwickle eine Beschreibung, wie ihr vorgeht. Wählt zwei Zahlen in 5-adischer Darstellung aus und erklärt dem Rest der Klasse, wie ihr die Addition durchführt.

### Aufgabe 7

Es seien zwei Zahlen  $a_5$  und  $b_5$  in 5-adischer Darstellung vorgegeben. Du sollst nun ihre Addition in Dezimaldarstellung angeben. Dabei sollt ihr die beiden folgenden Rechenwege verwenden und danach die zwei Resultate vergleichen:

**Rechenweg 1** Nutze die Karten, um die Addition von zwei Zahlen  $a_5$  und  $b_5$  in 5-adischer Darstellung zu berechnen. Wandle danach das Resultat von der 5-adischen Darstellung in die dezimale Darstellung um.

**Rechenweg 2** Bestimme für die beiden Zahlen  $a_5$  und  $b_5$  ihre Dezimaldarstellung und addiere dann diese beiden Dezimalzahlen wie üblich zueinander.

a)  $341_5 + 203_5$

b)  $13_5 + 403_5$

c)  $222_5 + 333_5$

### Aufgabe 8

Wir behaupten, dass folgendes gilt:  $2143_5 \cdot 5 = 21430_5$ . Überprüfe dies mit der Kartendarstellung und erkläre, wie man alle Zahlen in 5-adischer Darstellung ganz einfach mit 5 multiplizieren kann.

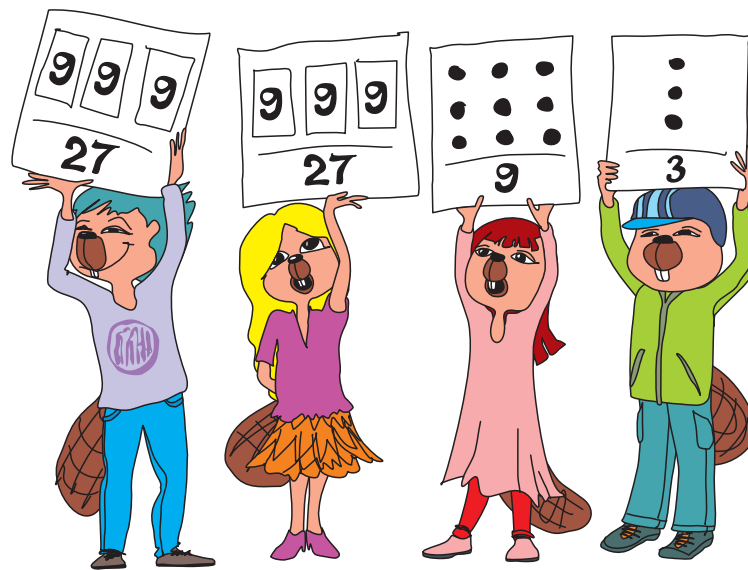
### Aufgabe 9

Überlege dir, wie du eine Zahl in 5-adischer Kartendarstellung mit 2, 3 und 4 multiplizieren kannst. Beschreibe deine Vorgehensweise und führe es anhand eines Beispiels vor!

### Hausaufgabe 1

Nehmen wir an, jemand könne nur bis 3 zählen. Er benötigt also eine 3-adische Zahlendarstellung.

- Entwickle Karten, mit denen man Zahlen 3-adisch darstellen kann.
- Zähle danach in der 3-adischen Darstellung von 1 bis 10 und von 30 bis 40.
- Erkläre, wie man zwei Zahlen in 3-adische Darstellung addieren kann.



In Aufgabe 7 haben wir mit 5-adischen Zahlen gerechnet und ihren Wert durch die Umwandlung in die dezimale Darstellung genau bestimmt. Wie machen wir aber das Gegenteil, wie wandeln wir eine Zahl in Dezimaldarstellung in eine 5-adische Zahl um? Betrachten wir als Beispiel die Zahl 1000. Man kann unterschiedlich vorgehen.

- Vorschlag** Nimm dir 1000 Einerkarten in die Spalte ganz rechts. Ersetze dann jeweils 5 Einerkarten mit einer Fünferkarte, solange es geht. Wenn du 5 Fünferkarten erhältst, ersetze sie durch eine 25er Karte. Mach das so lange, bis in jeder Spalte höchstens 4 Karten liegen. Dieses Vorgehen funktioniert sicher, dauert aber Ewigkeiten! Oder? Und du brauchst auch sehr viele Karten.
- Vorschlag** Jan sieht sofort, dass man 100 mit vier 25er-Karten als  $400_5$  darstellen kann, es gilt  $400_5 = 100$ . Wegen  $1000 = 10 \cdot 100$  legt Jan also 40 von den 25er-Karten in die dritte Spalte von rechts und

spielt dann das Spiel mit dem Ersetzen der Karten durch: Jeweils 5 Karten werden durch eine Karte mit 5-fachem Wert ersetzt, so lange, bis in jeder Spalte höchstens 4 Karten liegen.

### Aufgabe 10

Benutze die neue Strategie von Jan aus dem 2. Vorschlag, um die Zahl 300 in die 5-adische Darstellung umzuwandeln.

### Aufgabe 11

Schlage selbst eine neue Strategie vor, um 1000 in die 5-adische Darstellung umzuwandeln. Versuche die Umwandlung mit kleinstmöglichem Aufwand und möglichst wenigen Karten zu erreichen!

- 3. Vorschlag** Die bisherige Umwandlung dauerten sehr lange, weil man so häufig 5 gleiche Karten durch eine Karte vom fünffachen Wert ersetzen musste. Das versuchen wir jetzt zu vermeiden, indem wir die 5-adische Darstellung von 1000 von links nach rechts bestimmen:

Wir haben die Karten mit den folgenden Werten:

<b>625</b>	fünfte Spalte von rechts
<b>125</b>	vierte Spalte von rechts
<b>25</b>	dritte Spalte von rechts
<b>5</b>	zweite Spalte von rechts
<b>1</b>	erste Spalte von rechts

Die Zahl 625 ist die grösste 5er-Potenz ( $5^4$ ), die kleiner als 1000 ist. Deshalb nehmen wir die Karte mit dem Wert  $625 = 10000_5$  für die Darstellung und legen sie in die fünfte Spalte von rechts. Wir rechnen  $1000 - 625 = 375$ . Wir sollen also noch den verbleibenden Wert 375 mit den 5-adischen Karten darstellen. Die grösste Karte, die da reinpasst, ist 125 und sie passt genau dreimal hinein! Wir nehmen also noch drei 125er-Karten und sind schon fertig. Wir erhalten also die 5-adische Darstellung  $13000_5 = 1000$ , die der erhaltenen Kartendarstellung entspricht.

625	125	25	5	1																																								
<div> <div>625=5<sup>4</sup></div> <div> <table> <tr><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td><td>125</td></tr> <tr><td>501</td><td>501</td><td>501</td><td>501</td><td>501</td></tr> </table> </div> <div>79=979</div> </div>	125	125	125	125	125	501	501	501	501	501	<div> <div>125=5<sup>3</sup></div> <div> <table> <tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr> <tr><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td></tr> </table> </div> <div>99=971</div> </div> <div> <div>125=5<sup>3</sup></div> <div> <table> <tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr> <tr><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td></tr> </table> </div> <div>99=971</div> </div> <div> <div>125=5<sup>3</sup></div> <div> <table> <tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr> <tr><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td><td>97</td></tr> </table> </div> <div>99=971</div> </div>	25	25	25	25	25	97	97	97	97	97	25	25	25	25	25	97	97	97	97	97	25	25	25	25	25	97	97	97	97	97			
125	125	125	125	125																																								
501	501	501	501	501																																								
25	25	25	25	25																																								
97	97	97	97	97																																								
25	25	25	25	25																																								
97	97	97	97	97																																								
25	25	25	25	25																																								
97	97	97	97	97																																								

### Aufgabe 12

Wandle folgende Dezimalzahlen mit der dritten Methode in die 5-adische Darstellung um.

- |        |         |         |
|--------|---------|---------|
| a) 650 | c) 130  | e) 2500 |
| b) 751 | d) 1227 | f) 999  |

### Aufgabe 13

Um die Zahl 10 001 in die 5-adische Darstellung umzuwandeln, reichen dir die bisherigen Kartengrößen 1, 5, 25, 125, 625 nicht aus. Welche Kartengröße brauchst du noch? Wie sieht die 5-adische Darstellung von 10 000 aus?

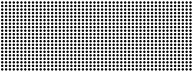
# Arbeitsheft I.4 — Römische Zahlen

Nicht alle Völker der Erde haben ursprünglich die dezimale Darstellung von Zahlen entwickelt. Diese kommt aus Indien und hat sich durchgesetzt, weil sie einfacher zu verstehen war und insbesondere, weil man damit am einfachsten zählen und rechnen konnte.

Die römischen Zahlen in Europa waren eine unsaubere Mischung von dezimaler mit 5-adischer Darstellung. Du findest diese Zahlen noch auf vielen historischen Denkmälern. Wir entwickeln diese Darstellung hier in mehreren Schritten. Es könnte sein, dass die römische Darstellung tatsächlich in diesen Schritten entwickelt wurde.

## 1. Symbolische römische Dezimaldarstellung

Man arbeitete nur mit Zahlen unter 4000 und so nutze man nur die Karten für die Werte 1000, 100, 10 und 1. Zur Darstellung nutzte man aber keine Ziffern, man legte die Karten einfach von der grössten zu der kleinsten von links nach rechts nebeneinander. Zum Beispiel für 1273:

1000	100	10	1
<div> <div>M = 1000</div>  <div>0001 = M</div> </div>	<div> <div>C = 100</div> <div>.....</div> <div>001 = C</div> </div>	<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	<div> <div>I = 1</div> <div>.</div> <div>1 = I</div> </div>
	<div> <div>C = 100</div> <div>.....</div> <div>001 = C</div> </div>	<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	<div> <div>I = 1</div> <div>.</div> <div>1 = I</div> </div>
		<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	<div> <div>I = 1</div> <div>.</div> <div>1 = I</div> </div>
		<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	
		<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	
		<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	
		<div> <div>X = 10</div> <div>.....</div> <div>01 = X</div> </div>	

Weil man aber bei der Arbeit doch nicht immer mit Karten hantieren wollte und die Zahlen auch aufschreiben wollte, hat man die Karten mit Buchstaben benannt:

**M** für 1000

**C** für 100

**X** für 10

**I** für 1

Somit hat man 1273 als MCCXXXXXXIII geschrieben.

### Aufgabe 1

Wandle die folgenden Dezimalzahlen in die römische Dezimaldarstellung um:

a) 3012

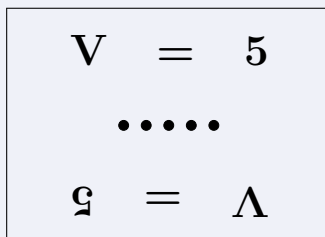
c) 999

b) 14

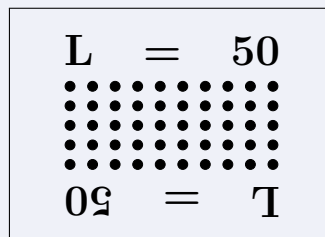
d) 2786

### Aufgabe 2

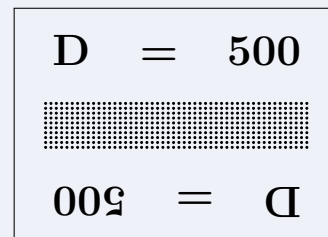
5-10-gemischte römische Darstellung Die Römer waren ganz normale Menschen, also auch faul und wollten nicht zu viel schreiben. Bei einigen Zahlen wie 999 war die Darstellung ziemlich lang. Da haben sie sich überlegt noch Karten



Fünferkarte



Fünzigerkarte



Fünfhunderterkarte

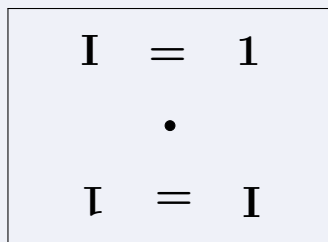
zu nehmen und sie zu bezeichnen mit:

**D** für 500

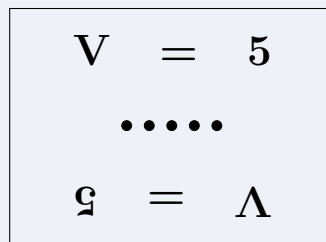
**L** für 50

**V** für 5

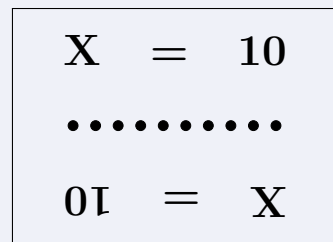
Somit erhielt man folgendes Kartenset:



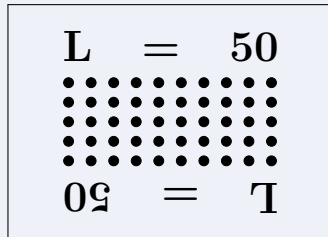
Einerkarte



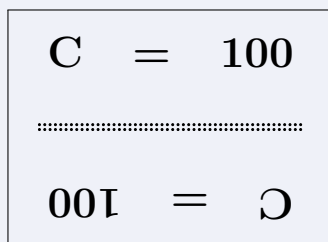
Fünferkarte



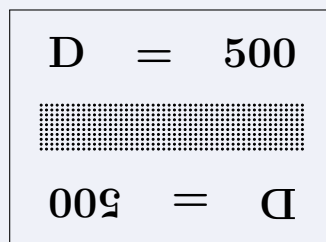
Zehnerkarte



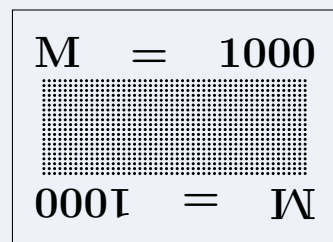
Fünfigerkarte



Hunderterkarte



Fünfhunderterkarte



Tausenderkarte

Somit musste man von keiner Karte mehr als 4 nehmen (wie auch in 5-adischer Darstellung). Wenn man 5 Einerkarten I gehabt hat, hat man sie für eine Fünferkarte V ausgetauscht. Fünfmal X konnte man durch L ersetzen und fünfmal C konnte man durch D austauschen. Somit hat sich die symbolische römische Darstellung MCCXXXXXXXIII von 1273 auf MCCLXXIII gekürzt.

Bei der Zahl 798 mit symbolischen römischen Dezimaldarstellung

CCCCCCCXXXXXXXXXIIIIIIII

erkennen wir sehr gut die Kürzung zu:

DCCLXXXVIII

Stelle folgenden Dezimalzahlen in der 5-10-gemischten römischen Darstellung dar.

a) 535

b) 163

c) 1764

d) 989



### Aufgabe 3

Schreibe einige Zahlen kleiner als 1000 auf, bei denen du durch Verwendung der 5-10-gemischten römischer Darstellung am meisten Symbole sparst gegenüber der symbolischen römischen Dezimaldarstellung. Aber Vorsicht! Die Karten 5, 50 und 500 können nur einmal oder gar nicht auftreten.

### Aufgabe 4

Erkläre, warum V, L und D jeweils höchstens 1 Mal vorkommen dürfen.

### Aufgabe 5

Schreibe die folgenden Dezimalzahlen als 5-10-gemischte römische Zahlen:

a) 66

b) 1999

c) 2086

d) 3838

### Aufgabe 6

Zähle in 6er-Schritten in 5-10-gemischten römischen Zahlen von 1 bis 121 (dezimal also 1, 7, 13, 19, 25, 31, ..., 121).

### Aufgabe 7

Nutze die Karten für die 5-10-gemischte römische Darstellung, um eine Vorgehensweise zur Addition zweier Zahlen in dieser Darstellung zu finden. Beschreibe deine Methode und wende sie auf die folgenden Additionen an:

a) XI + V

c) MDCLXVI + DCCLVII

b) MCCLVIII + MCCCIII

## Römische Zahlendarstellung

Schon Asterix pflegte oft zu sagen: „Die spinnen, die Römer.“ Bei der „Erfindung“ der Römischen Zahlen stimmen wir ihm voll zu. Die 5-10-gemischte römische Darstellung der Zahlen war auch den Römern zu lang und deshalb haben sie sich eine kürzere Darstellung überlegt. Die Folge davon war, dass einerseits schon die Darstellung einzelner Zahlen ziemlich kompliziert wurde, und andererseits vor allem die Durchführung von arithmetischen Operationen mit den so dargestellten Zahlen

für die Menschen extrem aufwendig wurde. Für die Erfinder zählte aber nur, wie pfiffig sie die Zahlendarstellung gekürzt haben.

Die Zahl 949 hat in der symbolischen und auch noch in der 5-10-gemischten römischen Darstellung eine zu grosse Länge:

CCCCCCCCCXXXXIIIIIIII und DCCCCXXXVIII

Das ist so, weil die symbolische und die 5-10-gemischte römische Darstellung Kartendarstellungen sind, jedes Symbol wird so oft geschrieben, wie man Karten hinlegen würde.

### Aufgabe 1

Was ist der Unterschied zwischen der Kartendarstellung von dezimalen Zahlen und dezimalen Zahlen selbst? Warum betrachten wir die 5-10-gemischte römische Darstellung als Kartendarstellung?

Die Idee der Römer für eine kürzere Schreibweise war es jetzt, keine der Karten (M, L, X, I) mehr als dreimal vorkommen zu lassen. Das erreichte man mit einer neuen Regel: Falls eine Karte mit kleinerem Wert direkt links von einer Karte mit einem grösseren Wert liegt, dann berechnet man ihre Differenz:

Wert der grösseren Karte rechts minus Wert der kleineren Karte links.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} \text{CM} & = & 1000 - 100 = 900 \\ \text{XL} & = & 50 - 10 = 40 \\ \text{IX} & = & 10 - 1 = 9 \end{array}$$

Somit ist die römische Darstellung der Dezimalzahl 949 einfach

CMXLIX oder sogar CMIL.

Bei der Dezimalzahl 999 kann man erst recht kürzen, nämlich von

CCCCCCCCCXXXXXXXXXIIIIIIII oder DCCCCLXXXVIII

auf:

IM

### Aufgabe 2

Liste auf alle Buchstabenpaare mit dem Muster

**kleinerer Wert, grösserer Wert**

auf, die vorkommen können – wie zum Beispiele CM, XL, IX, IM – und notiere ihren jeweiligen Wert.

### Aufgabe 3

Wandle die folgenden Zahlen von der römischen Darstellung in die Dezimaldarstellung um:

- |            |            |          |
|------------|------------|----------|
| a) CCCLIII | c) MXLVIII | e) CDXII |
| b) MID     | d) XMIVI   | f) LDIII |

### Aufgabe 4

Wandle die folgenden Dezimalzahlen in die römische Darstellung um:

- |        |         |         |
|--------|---------|---------|
| a) 237 | c) 1099 | e) 699  |
| b) 897 | d) 451  | f) 3444 |

### Aufgabe 5

Berechne die folgenden Multiplikationen und stelle die Resultate mit Römischen Zahlen dar.

- |               |                |
|---------------|----------------|
| a) III · IM   | c) IX · CDXCIV |
| b) V · MXCVII | d) XMIV · MID  |

# Arbeitsheft 4 — Binäre Darstellung von Zahlen

Wir haben verstanden, dass wir Menschen die dezimale Zahlendarstellung vorziehen. Die Hauptgründe dafür sind:

1. Die Menschen haben gelernt mit Fingern bis 10 zu zählen und somit haben sie gute Vorstellungen über Vielfache von 10 erarbeitet. Somit können sie sich gut den Wert einzelner Zahlen vorstellen.
2. Die dezimale Darstellung von Zahlen ist kurz, wesentlich kürzer als Darstellungen, die ähnlich zu Kartendarstellungen sind.
3. Man kann beliebig grosse Zahlen darstellen.
4. Mit Dezimalzahlen kann man gut rechnen. Alle Algorithmen für die Durchführung von arithmetischen Operationen sind effizient und überschaubar (leicht zu lernen).
5. Die Anzahl der verwendeten Symbole – also des Alphabets zur dezimalen Zahlendarstellung  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  – ist klein genug und somit überschaubar und verständlich.

## Aufgabe 1

Welche von den 5 oben erwähnten Eigenschaften besitzen die bisher vorgestellten Zahlendarstellungen:

- 5-adische Darstellung
- 5-10-römische Zahlendarstellung
- römische Zahlen

Begründe deine Antworten immer!

In den heutigen Computern wird alles – nicht bloss die Zahlen – nur mit Hilfe von zwei Symbolen dargestellt, mit 0 und 1. Warum? Warum hat man den Computern nicht beigebracht mit den für uns anschaulichen Dezimalzahlen zu rechnen?

Die Gründe waren technologische. Die Menschen haben zuerst vergeblich versucht einen Computer zum Rechnen mit Dezimalzahlen zu bauen. Dabei waren folgende drei Bereiche massgebend.

- 1. Prozessor** Ein Prozessor ist ein Stück Hardware, die unter anderem die arithmetischen Operationen durchführen kann. Es stellte sich heraus, dass das Rechnen mit Dezimalstellen viel komplexer ist als das Rechnen mit binären Zahlen. Somit war der Prozessor für die binären Zahlen viel einfacher zu bauen.
- 2. Speicher** Ein Rechenspeicher kann aus kleinen Einheiten bestehen. Jede Einheit sollte dazu dienen, ein Symbol zu speichern. Wenn man nur zwei Symbole 0 und 1 hat, reicht es für das Speichern aus, physikalische Systeme zu benutzen, die nur in einem von zwei Zuständen sein können. Einen interpretiert man als 0, den anderen als 1. Zum Beispiel kann ein Magnet ein Magnetfeld besitzen, das im Uhrzeigersinn (steht für 0) oder im Gegenuhrzeigersinn (steht für 1) orientiert ist. Oder man kann einen geschlossenen Schaltkreis mit Strom als 1 interpretieren und einen offenen Schaltkreis, in dem kein Strom fließen kann, als 0.
- 3. Kommunikation** Ähnlich wie im Punkt 2. Wenn in einer Leitung Strom fließt, kann man das als Übertragung einer „1“ ansehen. Wenn kein Strom fließt, interpretieren wir das als 0.

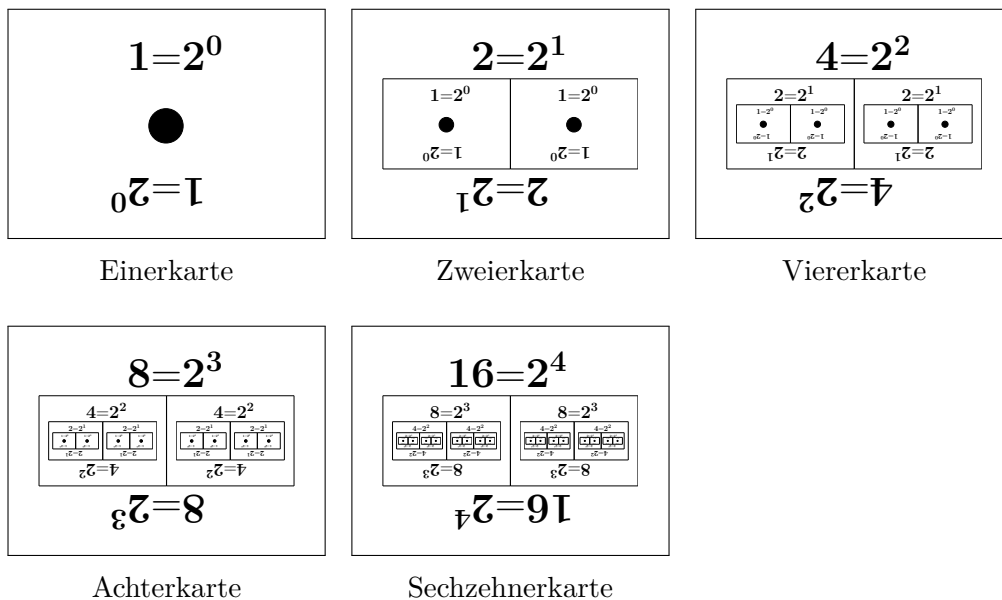
### Aufgabe 2

Kannst du dir ein paar physikalische Systeme mit genau zwei Zuständen vorstellen, die zur Speicherung oder zur Übertragung von 0 und 1 geeignet wären?

### Hausaufgabe 1

Schaue dir auf Wikipedia das Morsealphabet an. Damit kodierte man beliebige Texte oder Zahlen. Wieviele Symbole hat man zur Kodierung verwendet und wie konnte man sie bei der Kommunikation physikalisch darstellen? Warum hat das Morsealphabet nicht bis heute in der Praxis überlebt?

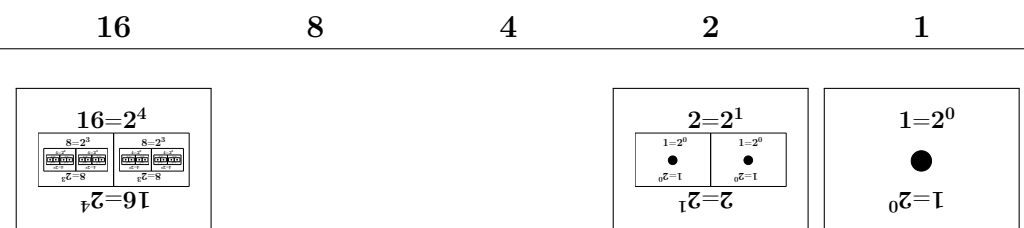
Wir wollen nun lernen, wie man Zahlen nur mit Nullen und Einsen, also binär, darstellen kann. Das Konzept soll identisch mit der Darstellung von Dezimalzahlen und 5-adischen Zahlen sein. Man erlaubt hier nur das Zählen bis 2 (statt bis 10 oder bis 5) und somit hat man folgende Karten zu Verfügung:



### Aufgabe 3

Zeichne schematisch die nächsten beiden grösseren Karten auf.

Bei der binären Kartendarstellung haben wir in jeder Spalte entweder eine Karte oder keine Karte. Ein Beispiel:



$$\begin{aligned}
 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
 &= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\
 &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

#### Aufgabe 4

Berechne den Wert als dezimale Zahl von den folgenden Zahlen in der binären Darstellung:

- |            |                |               |
|------------|----------------|---------------|
| a) $101_2$ | c) $10101_2$   | e) $10000_2$  |
| b) $10_2$  | d) $1101101_2$ | f) $100011_2$ |

#### Aufgabe 5

Zähle von 1 bis 16 binär, indem du alle Zahlen mit den binären Karten darstellst und sie auch als binäre Zahlen  $1_2, 10_2, 11_2, 100_2, \dots$  aufschreibst.

#### Aufgabe 6

Beschreibe einen Algorithmus zur Addition von zwei Zahlen in binärer Kartendarstellung. Die Beschreibung soll wie folgt beginnen: „Nimm zwei Zahlen in binärer Kartendarstellung und lege sie so untereinander, dass die Spalten mit gleicher Wertbedeutung untereinander liegen.“ Nutze deinen Algorithmus um folgende binäre Zahlen zu addieren:

- |                     |                       |                      |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $101_2 + 11_2$   | c) $1111_2 + 1_2$     | e) $1111_2 + 1111_2$ |
| b) $1000_2 + 101_2$ | d) $10101_2 + 1010_2$ |                      |

#### Aufgabe 7

Schreibe die grösste 5-stellige binäre Zahl und bestimme ihren Wert als dezimale Zahl.

#### Aufgabe 8

- a) Was für einen Wert hat die binäre Zahl  $100 \dots 00_2$ , die genau  $n$  Nullen enthält?
- b) Was für einen Wert hat die binäre Zahl  $11 \dots 11_2$ , die genau  $n$  Einsen enthält?

#### Schriftliche Addition von binären Zahlen

Wir gehen genau so vor wie bei dezimalen Zahlen: Wir addieren die Ziffern spaltenweise von rechts nach links und wenn ein Übertrag entsteht, geben wir ihn nach links in die nächste Spalte.

Führen wir das anhand eines Beispiels vor:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & \textcolor{red}{1} & \\
 = & & & & & & \textcolor{red}{0} \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Wegen  $1_2 + 1_2 = 10_2 = 2$  wird im Resultat in der letzten Spalte eine 0 zu stehen kommen und wir erhalten den Übertrag 1 für die nächste Spalte.

Wegen  $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2 = 3$  und wegen  $11_2 = 10_2 + 1_2$  wird das Resultat in der zweiten Spalte von rechts eine 1 erhalten und Übertrag für die nächste Spalte wird 1.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & \textcolor{red}{1} & 1 \\
 = & & & & & \textcolor{red}{1} & 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Jetzt haben wir  $0_2 + 0_2 + 1_2 = 1_2 = 1$  und somit ist das Resultat 1 und kein Übertrag kommt zu Stande.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & \textcolor{red}{0} & 1 & 1 \\
 = & & & & & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Wegen  $1_2 + 0_2 + 0_2 = 1_2 = 1$  ist das Resultat 1 und wir haben wieder keinen Übertrag.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & \textcolor{red}{0} & 0 & 1 & 1 \\
 = & & & & & \textcolor{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$



Wegen  $1_2 + 1_2 + 0_2 = 10_2 = 2$  ist das Resultat 0 und der Übertrag 1.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 = & & \textcolor{red}{0} & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Analog berechnen wir  $1_2 + 1_2 = 10_2 = 2$ : Weil es die Spalte ganz links ist, schreiben wir direkt die zwei Ziffern 10 als Resultat hin. Es kann aber auch angesehen werden als Resultat 0 und Übertrag 1, nur den Übertrag braucht man danach noch mit weiteren Ziffern zu addieren und kann man ihn in die nächste Spalte als Resultat kopieren.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 = & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Somit ist die Summe  $1001110_2$ .

Die verwendete Vorgehensweise kann man für diejenigen, die schon programmieren können, wie folgt beschreiben:

**Input:** Zahlen  $a$  und  $b$  in binärer Darstellung.

Länge := das Maximum der Länge der binären Zahlen  $a$  und  $b$ .

Übertrag := 0

Index := 1

**while** Länge  $\geq$  Index **do**

**begin**

        Summe := Addition der Ziffern der Spalte [Index] plus Übertrag.

**if** Summe  $\geq 2$  **then** Übertrag := 1 **else** Übertrag := 0;

**if** Summe ist gerade (0 oder 2) **then** Resultat := 0 **else** Resultat := 1

        Notiere die Ziffer [Resultat] als Teil des Ergebnisses,  
        immer links von allfälligen bereits notierten Ziffern.

**end**

**if** Übertrag = 1 **then** Notiere 1 als die letzte Ziffer des Ergebnisses ganz links.

### Aufgabe 9

Berechne die folgenden Additionen von binären Zahlen.

- |                      |                        |                       |
|----------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $101_2 + 1_2$     | c) $11_2 + 11_2$       | e) $11101_2 + 1011_2$ |
| b) $10001_2 + 100_2$ | d) $101011_2 + 1100_2$ |                       |

### Aufgabe 10

Berechne zuerst die Additionen  $100111_2 + 1_2$  und  $1011_2 + 1_2$ . Versuche dann jemandem zu erklären, wie man eine binäre Zahl um 1 erhöhen kann, ohne die Addition tatsächlich zu berechnen. Du kannst zum Beispiel wie folgt anfangen:

„Ersetze die am weitesten rechts stehende 0 mit einer 1 und ...“

### Aufgabe 11

Bestimme für die folgenden binären Zahlen immer jene Zahl, die um genau 1 kleiner ist.

- |              |             |               |
|--------------|-------------|---------------|
| a) $101_2$   | c) $10_2$   | e) $100100_2$ |
| b) $10011_2$ | d) $1000_2$ |               |

### Aufgabe 12

Beschreibe, wie man schnell und ohne zu rechnen die binäre Zahl aufschreiben kann, die um 1 kleiner ist als die vorgegebene binäre Zahl. Würdest du das auch für die Subtraktion der Zahlen  $10_2$  und  $100_2$  schaffen?

### Aufgabe 13: Gruppenarbeit

Ihr habt schon gelernt, wie man Dezimalzahlen in die 5-adische Darstellung umwandeln kann. Versucht diese Erfahrung auszunützen, um die Vorgehensweise zur Umwandlung von Dezimalzahlen in binäre Zahlen zu entwickeln. Erklärt eure Vorgehensweise, indem ihr die Dezimalzahl 1000 in die binäre Darstellung umwandelt.

### Aufgabe 14

Wandle folgende Dezimalzahlen in ihre binäre Darstellungen um:

- |       |        |         |
|-------|--------|---------|
| a) 8  | c) 516 | e) 1023 |
| b) 14 | d) 666 | f) 777  |

### Aufgabe 15

Jan behauptet, jede gerade Zahl habe in der binären Darstellung eine Null am Ende und jede ungerade Zahl eine Eins. Hat Jan recht? Wie ist es tatsächlich und wie würdest du deine Antwort begründen?

### Beispiel 1

Wir wollen eine beliebige binäre Zahl mit der binären Zahl  $100_2 = 4$  multiplizieren. Wie gehen wir vor? Nehmen wir beispielsweise  $1011011_2 \cdot 100_2$ . Die Zahl  $a = 1011011_2$  besteht aus 5 Karten:

$$1 = 2^0, 2 = 2^1, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 64 = 2^6$$

Wenn wir jede einzelne Karte mit  $100_2 = 4 = 2^2$  multiplizieren, erhöhen wir den Wert jeder Karte um das Vierfache, also

$$2^0 \cdot 2^2 = 2^2, \quad 2^1 \cdot 2^2 = 2^3, \quad 2^3 \cdot 2^2 = 2^5.$$

$$2^4 \cdot 2^2 = 2^6, \quad 2^6 \cdot 2^2 = 2^8,$$

Somit besteht das Resultat von  $1011011_2 \cdot 100_2$  aus den Karten

$$2^2, 2^3, 2^5, 2^6, 2^8$$

und man kann die Zahl als  $101101100_2$  schreiben. Also gilt

$$1011011_2 \cdot 100_2 = 101101100_2.$$

Somit bedeutet die binäre Multiplikation mit  $100_2$  nichts anderes, als der Darstellung der zu multiplizierenden Zahl rechts zwei Nullen hinzuzufügen. Ein Mathematiker würde das rechnerisch wie folgt begründen:

$$\begin{aligned} 1011011_2 \cdot 100_2 &= \\ (1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^2 &= \\ [\text{nach Distributivgesetz}] & \\ 1 \cdot 2^6 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 + & \\ 0 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \cdot 2^2 &= \\ 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= \\ 101101100_2 & \end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass die Multiplikation mit  $100_2 = 4 = 2^2$  in binärer Darstellung äusserst einfach durchführbar ist. Wir sagen, dass wir die Zahl nur um zwei Stellen nach links verschieben.

### Aufgabe 16: Gruppenarbeit

Entwickle ein einfaches Verfahren zur binären Multiplikation mit den Zahlen  $10_2$ ,  $1000_2$ ,  $10000_2$  und erkläre, warum es richtig funktioniert.

### Beispiel 2

Schriftliche Multiplikation von binären Zahlen. Jan schlägt für die Umsetzung der binären Multiplikation  $1001001_2 \cdot 1011_2$  folgenden Algorithmus vor.

$$\begin{aligned} 1001001_2 \cdot 1011_2 &= \\ 1001001_2 \cdot (1000_2 + 10_2 + 1_2) &= \\ 1001001_2 \cdot 1000_2 + 1001001_2 \cdot 10_2 + 1001001_2 \cdot 1_2 &= \\ 1001001000_2 + 10010010_2 + 1001001_2 &= \\ 1100100011_2 \end{aligned}$$

Warum ist diese Vorgehensweise richtig? Erkläre es genau. Siehst du Ähnlichkeiten zur schriftlichen Multiplikation von dezimalen Zahlen?

### Aufgabe 17

Nutze die Vorgehensweise von Beispiel 2 um die folgenden Multiplikationen auszurechnen.

a)  $1101100_2 \cdot 1010_2$       b)  $1001_2 \cdot 11010101_2$

### Beispiel 3: Elegantere schriftliche Multiplikation

Anna schlägt folgende Darstellung der binären Multiplikation vor, welche die Durchführung vereinfacht und die Ähnlichkeit zu der schulischen Multiplikation von Dezimalzahlen andeutet:

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2 \cdot 1011_2 = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1_2
 \end{array}$$

Ist der Algorithmus von Anna der selbe wie der von Jan aus Beispiel 1, einfach mit einer Tabelle ausgeführt, oder geht Anna ganz anders vor als Jan?

### Aufgabe 18

Nutze den Algorithmus aus Beispiel 3 um die folgenden binären Zahlen miteinander zu multiplizieren. Denke daran, dass du die Reihenfolge immer so wählen kannst, dass die Multiplikation einfacher wird.

- a)  $1000_2 \cdot 1011_2$                       c)  $1101101_2 \cdot 10101_2$   
b)  $1110100_2 \cdot 10001_2$                 d)  $101_2 \cdot 11001001_2$

### Beispiel 4: Elegantere schriftliche Multiplikation

Jetzt hat Jan Annas Verbesserungen als Herausforderung empfunden und schlägt folgende Kürzung der Darstellung der Multiplikation vor.

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2 \cdot 100101_2 = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2
 \end{array}$$

Was hat Jan hier gemacht? Ist alles korrekt?

### Aufgabe 19

Multipliziere folgende Paare von binären Zahlen.

a)  $100_2 \cdot 11011011_2$

c)  $10001_2 \cdot 1011101_2$

b)  $111111_2 \cdot 10101_2$

d)  $1010011_2 \cdot 100011_2$

# Zusammenfassung des Kapitels

## Zahlendarstellungen

Zahlen werden als Folgen von Symbolen dargestellt und somit ist die Entwicklung der Zahlendarstellung nicht nur ein Teil der Mathematik und später auch der Informatik, sondern auch ein Teil der Geschichte der Sprachenentwicklung, insbesondere der Schriften. Wir unterscheiden zwei Typen von Darstellungen.

### 1. Kartendarstellung

Man hat Karten, wobei jede Karte einen festen Wert hat. Zur Darstellung einer Zahl  $a$  nimmt man eine solche Menge von Karten, dass die Summe der Werte der Karten genau die Zahl  $a$  ergibt. Dabei darf man die zusätzliche Regel einführen, dass man versucht, die Zahl  $a$  mit so wenigen Karten darzustellen, wie es nur geht. Die Folge dieser Regel ist es, dass man mehrere kleinwertigere Karten durch eine Karte mit grösserem Wert austauscht, falls die Summe der Werte dieser kleineren Karten genau dem Wert der grösseren Karte entspricht (bei Zehnerpotenzkarten tauscht man 10 Zehnerkarten gegen eine Hunderterkarte ein, oder bei römischen Zahlen tauscht man 5 Einerkarten, also IIIII gegen eine Fünferkarte, also V, ein).

### 2. Stellenwertdarstellung mit Ziffern

Diese Darstellung kann man als eine Verbesserung der Kartendarstellung betrachten. Anstatt alle verwendeten Karten aufzulisten (die wir z. B. mit Buchstaben benennen und dann hintereinander legen, wie bei römischen Zahlen mit MMDCCCXXI), schreiben wir mit Ziffern, wieviele Karten von jeder Kartensorte verwendet werden. Somit wird die Stelle (die Position) der Ziffer in der Darstellung wichtig. Die letzte Ziffer von rechts bestimmt die Anzahl der kleinsten Karten, die zweite Ziffer von rechts die Anzahl von verwendeten zweikleinsten Karten usw.

Mit Ausnahme der binären Zahlendarstellung sind die Kartendarstellungen als Folgen von Karten in der Regel länger als die Stellenwertdarstellungen. Die Kartendarstellungen können beim Erlernen von arithmetischen Operationen hilfreich sein, insbesondere bei der Addition und der Subtraktion.

on. Ihr Hauptnachteil liegt aber in der Tatsache, dass man unendlich viele Kartengrößen (1, 10, 100, 1000, 10 000, ...) braucht, um beliebig grosse Zahlen darzustellen und somit unendlich viele Symbole, falls wir jeder Karte zur Darstellung ein Symbol zuordnen. Mit der Stellendarstellungen brauchen wir keine Symbole für die Karten, weil die Position der Ziffer in der Darstellung eindeutig besagt, um welche Karte es sich handelt (z. B. ist bei der Zahlen 2310 klar, dass die Ziffer 3 für drei Hunderter steht).



# Kontrollfragen

1. Welche Zahlendarstellungen entsprechen eher der Kartendarstellung?
2. Bei welchen Zahlendarstellungen ist die Addition einfach?  
Bei welchen Zahlendarstellungen könnte die Durchführung der Addition aufwendig sein?
3. Gib römische Zahlen an, die kürzer als ihre dezimalen Äquivalente darstellt werden.
4. Welche Darstellungen ist kürzer – die dezimale oder die 5-adische?
5. Mit welcher Zahlendarstellung kann man nicht beliebig grosse Zahlen darstellen?
6. Warum hat man Schriften entwickelt und was ermöglichten sie, was ohne sie vorher nicht möglich war?
7. Was sind Bildsprachen und wo verwendet man sie noch?
8. Welche Ziffern verwendet man bei der 5-adischen Darstellung? Welche würde man bei einer 8-adischen Darstellung verwenden?

# Kontrollaufgaben

## Aufgabe 1

Wandle die folgenden Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen in die dezimale Darstellung um:

- |               |               |                |
|---------------|---------------|----------------|
| a) XMIII      | d) MMDCCCLXXI | g) CMLIX       |
| b) $100110_2$ | e) $1111_2$   | h) $1000101_2$ |
| c) $2431_5$   | f) $10034_5$  | i) $2443_5$    |

## Aufgabe 2

Bestimme für die folgenden Paare in unterschiedlichen Darstellungen, welche der beiden Zahlen grösser ist.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $3421_5, 3044_5$       | c) $10350, 44444_5$       |
| b) MMMDCCIX, $11011001_2$ | d) $1111_5, 1000000000_2$ |

## Aufgabe 3

Liste die 5 kleinsten Karten für die 3-adische Darstellung auf und wandle folgende Zahlen in der 3-adischen Darstellung in ihre dezimale Darstellung um.

- |              |             |             |
|--------------|-------------|-------------|
| a) $12101_3$ | c) $1111_3$ | e) $2012_3$ |
| b) $10000_3$ | d) $2222_3$ | f) $2001_3$ |

## Aufgabe 4

Liste die 6 kleinsten Karten für die 8-adische Darstellung auf und wandle folgende Zahlen von der 8-adischen Darstellung in ihre dezimale Darstellung um:

a)  $1000_8$

c)  $36501_8$

e)  $233_8$

b)  $777_8$

d)  $10177_8$

f)  $12345_8$

### Aufgabe 5

Sortiere folgende Zahlen der Grösse nach:

a) MMCCLIV

c)  $2312_8$

e)  $1001000110_2$

b)  $2312_5$

d) 2312

### Aufgabe 6

Addiere 1 zu den folgenden Zahlen in der Darstellung, in der sie vorliegen:

a) CDIX

d)  $111_2$

g)  $3444_5$

b) IM

e)  $1011_2$

h)  $4103_5$

c) CLVIII

f)  $10011101_2$

i)  $102444_5$

### Aufgabe 7

Jan hat drei Karten mit Werten 1, 13 und 17. Von jeder Sorte gibt es beliebig viele.

- a) Stelle folgende Zahlen in Kartendarstellung mit diesen drei Karten so dar, dass man dabei so wenige Karten verwendet wie es nur möglich ist. (Zum Beispiel ist  $33 = 17 + 13 + 1 + 1 + 1$ , also kann man 33 mit 5 Karten darstellen.) 15, 34, 27, 33, 40
- b) Finde diejenige Zahl kleiner als 50, die die grösste Anzahl von Karten braucht, um dargestellt zu werden.

### Aufgabe 8

Rechne innerhalb der jeweiligen Darstellung:

a)  $3724 \cdot 100$

c)  $4323_5 \cdot 100_5$

e)  $2134_5 \cdot 10_5$

b)  $1011101_2 \cdot 100_2$

d)  $11010_2 \cdot 1000_2$

f) CCCIV · X

### Aufgabe 9

Verkleinere jede der folgenden Zahlen in der jeweiligen Darstellung um 1.

- |              |             |              |
|--------------|-------------|--------------|
| a) MC        | c) $3300_5$ | e) $10101_2$ |
| b) $11000_2$ | d) $765_8$  | f) $2310_3$  |

### Aufgabe 10

Stelle folgende dezimalen als 5-adische Zahlen und als binäre Zahlen dar.

- |         |        |
|---------|--------|
| a) 999  | c) 231 |
| b) 1024 | d) 199 |

### Aufgabe 11

Addiere die folgenden Zahlen in ihrer jeweiligen Darstellung:

- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| a) $101001_2 + 10111_2$ | c) $11011_2 + 10011_2$ |
| b) $23144_5 + 44034_5$  | d) $10414_5 + 10004_5$ |

### Aufgabe 12

Multipliziere die folgenden binären Zahlen:

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| a) $10101_2 \cdot 101_2$    | c) $1001_2 \cdot 11101110_2$ |
| b) $110101_2 \cdot 10011_2$ | d) $1010101_2 \cdot 1011_2$  |

### Aufgabe 13

Wandle die folgenden Zahlen in ihre binäre Darstellungen um:

- |        |            |            |
|--------|------------|------------|
| a) CIX | b) $241_3$ | c) $134_5$ |
|--------|------------|------------|

### Aufgabe 14

Nehmen wir an, man hat drei Kartentypen mit Werten 1, 5 und 7 zur Verfügung. Kann man jede Zahl kleiner als 22 nur mit 4 Karten darstellen? Begründe deine Antwort und liste alle Zahlen kleiner 22 auf, die mindestens 4 Karten für ihre Darstellung benötigen. Was ist die kleinste Zahl, die 5

Karten für ihre Darstellung braucht?