Prof. Dr. Juraj Hromkovic
Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht der ETH Zürich (ABZ)

1 Darstellungen von Zahlen

1. Sprachen und Schriften

Sprache Sprachen wurden zur Kommunikation zwischen Menschen entwickelt. Die Grund-Bausteine sind **Wörter**. Jedes Wort hat eine klare Bedeutung – es beschreibt einen Gegenstand, eine Tätigkeit, eine Anzahl von Objekten etc.

Schriften Schriften dienen zur *Darstellung* von Wörtern und Aussagen als Folgen von Symbolen (Buchstaben).

Frage 1

Wozu sind die Schriften nützlich?

Antworten, die die Klasse sucht

a) Um die Sprache visuell zu repräsentieren, Wörter darzustellen (für jene, die Bilder besser verstehen als Gesprochenes, Schwerhörige, ...)

b) Um wichtige Informationen langfristig zu speichern. Wenn man etwas nur sagt, geht es gewöhnlich vergessen, insbesondere im Laufe der Jahre.

c) Wenn jemand etwas sagt, so kann er später bestreiten, dies gesagt zu haben. Wenn wir das Gesagte jedoch aufschreiben, so können wir es schriftlich belegen. Auch wichtige Gesetze können schriftlich fixiert werden.

d) Solange sie keine Schrift hatten, konnten die Menschen früher nur durch persönliche Treffen direkt kommunizieren. Erst mit einer Schrift konnte man sich – mittels Boten, welche die Texte überbrachten – über beliebige Entfernungen austauschen.

e) In den Zeiten vor dem Radio und Fernseher konnte man mit Büchern beliebig grosse Mengen von Menschen ansprechen (z. B. Bibel).

f) Wenn zwei Personen über eine eigene Geheimschrift verfügen, dann können sie miteinander schriftlich so kommunizieren, dass kein Unbefugter die Nachricht versteht. In solchen Geheimschriften kann zum Beispiel der Weg zu einem geheimen Schatz oder ein Geheimweg aus deiner Festung beschrieben werden.

g) Alle Informationen auf einem Computer sind als Daten gespeichert. Daten sind aber nichts anderes als Folgen von Symbolen, oft nur von Nullen und Einsen. Die Menschen haben Programmiersprachen als Sprachen zur Kommunikation und zur Steuerung von Computern entwickelt. Diese Programmiersprachen sind schriftlich, weil wir nur so mit dem Rechner kommunizieren.

h) Die Klasse darf gerne weitere Ideen einbringen.

Frage 2

Wann und wie sind die Schriften entstanden?

Antworten: Ideen sammeln, diskutieren, in Richtung der Zielantwort lenken.

Zielantwort

a) **Bildsprachen** – zu jedem Wort entstand ein Bild als die visuelle Repräsentation des Wortes (Die ältesten bekannten Höhlenmalereien sind vor rund 40 000 Jahren entstanden).

b) **Abstraktion** – die Bilder wurden mit Zeit immer stärker vereinfacht, bis man die Darstellungen mit wenigen Strichen zeichnen konnte. Die ursprünglich bezeichneten Objekte waren häufig nicht mehr als Bild erkennbar, aber man konnte den Darstellungen trotzdem die Bedeutung zuordnen. Die Darstellungen wurden also zu dem, was wir heute **Symbole** nennen.

c) **Silbenschriften** – kurze Wörter und deren symbolische Darstellung wurden als Grundbausteine für das Bilden von längeren Wörtern verwendet. Die längeren Wörter wurden als Folgen von Silben repräsentiert. Die Silben haben dabei ihre ursprüngliche Bedeutung verloren und wurden nur noch als Symbole zur Repräsentation von Wörtern verwendet. (Zum Beispiel besteht „Jana“ aus „Ja“ und „Na“, aber niemand denkt an das Wort „Ja“, wenn er „Jana“ liest.

d) **Alphabete** – Bei Bildsprachen wurde für jedes Wort ein neues Symbol gebraucht und somit musste unglaublich viel auswendig gelernt werden. Bei Silbenschriften ist dies besser, weil die Anzahl der benötigten Symbole kleiner ist. Aber trotzdem gibt es noch sehr viele Silben. Versuche, sie aufzulisten oder aufzuzählen. So entstanden die Alphabete als Sammlungen (Mengen) von wenigen Symbolen, aus denen die einzelnen Silben zusammengesetzt wurden (Konsonant gefolgt von Vokal). Und das vor etwa 3000 Jahren!

Frage 3

a) Basieren alle heutigen Schriften auf einem Alphabet oder gibt es auch Bildsprachen und Silbenschriften?

b) Welche Alphabete kennst du?

c) Gibt es noch alte Schriften, die wir nicht mehr lesen können?

2. Zählen und die dezimale Darstellung von Zahlen

Frage 4

Für die Urmenschen war am einfachsten bis 10 zu zählen. Weshalb? Was hat das mit der Dezimaldarstellung von Zahlen zu tun?

Frage 5

Gibt es Sprachen, in denen man nicht mit den Händen symbolisch bis 10 zählt, sondern zu einer anderen Zahl? (Zum Beispiel im Französischen bis 12)

Die Dezimaldarstellung der Zahlen basiert auf einer Schrift mit dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, das genau 10 Symbole – sogenannte **Ziffern** – enthält.

Arbeitsblatt I.2

Wiederholung

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \cdot 10 = 10^2 \\ 1000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10 \cdot 100 = 10^3 \\ 10000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10 \cdot 1000 = 10^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Durcharbeitung des Arbeitsblatts in Gruppen von 3 bis 6 Schülerinnen und Schülern.

Lösung Aufgabe 2
Die grösste Zahl ist 9999 (in jeder Spalte 9 Karten) und die kleinste ist 0 (in keiner Spalte ist eine Karte).
Die Addition von zwei Zahlen kann die Lehrperson mit den Karten vorführen oder zusammen mit der Klasse entwickeln. Wichtig ist nur, dass die Vorgehensweise (Methode) fixiert wird. Um bereits erste Erfahrungen mit dem eindeutigen Beschreiben von Methoden (Algorithmen) zu gewinnen, empfehlen wir als Hausaufgabe diese Vorgehensweise zu beschreiben.

Eine mögliche Beschreibung
Eingabe: Zwei Zahlen a und b

Ausgabe: Die Summe $a + b$ in Kartendarstellung

a) Stelle die Zahlen a und b in ihren Kartendarstellungen so dar, dass die entsprechenden Spalten untereinander liegen: Die Einer unter den Einern, die Zehner unter den Zehnern usw.

b) Bearbeite die Spalten von rechts nach links. Zähle in jeder Spalte die Anzahl der Karten. Wenn die Anzahl kleiner als 10 ist, gehe nach links zur nächsten Spalte. Wenn die Anzahl der Karten mindestens 10 ist, dann nimm 10 Karten weg und lege eine Karte mit dem zehnfachen Wert in die links angrenzende Spalte und setze dort dein Vorgehen fort.

Die Klassen, die schon programmieren gelernt haben, können die Addition so programmieren, dass man den Austausch der Karten auf dem Bildschirm beobachten kann.

Frage 6

(nach der Bearbeitung der Aufgabe 5)
Was liegt in der Spalte ganz rechts, nachdem eine Zahl in Kartendarstellung mit 10 multipliziert worden ist?

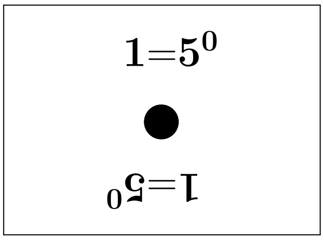
Wir empfehlen die Hausaufgabe 2 so einzusetzen, dass einige SuS der Klasse die Vorgehensweise erklären.

3. 5-adisches Zahlensystem

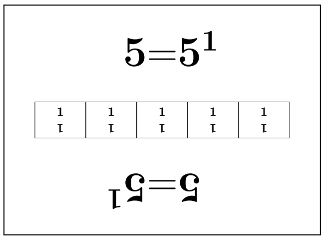
Wir haben gelernt, warum die dezimale Darstellung von Zahlen für viele Völker zum natürilchen Hilfsmittel für das Zählen und Rechnen geworden ist: Man zählt mit den Fingern bis 10, dann merkt (speichert) man sich einen Zehner und zählt weiter mit den Fingern von 11 bis 20. Doch nicht alle Völker haben immer so gezählt. Im Französischen gibt es beispielsweise einen Hinweis auf ein Zwanziger-System in dem Wort für Achtzig: *quatre-vingt*
Besonders interessant ist eine Fingerzählweise, welche auf dem Zwölfersystem basiert und aus dem persischen Raum bekannt ist. Man zählt dabei mit einer Hand nicht nur bis fünf, sondern bis zwölf. Dazu berührt man mit dem Daumen der Reihe nach alle Fingerglieder von Zeigefinger, Mittelfinger, Ringfinger und kleinem Finger – das sind genau vier Mal drei, also zwölf. Wenn man die zweite Hand dann noch benützt, um mit den einzelnen Fingerglieder jeweils Zwölf abzuspeichern, kann man mit zwei Händen schon bis $12 \cdot 12 = 144$ zählen!

Die Römer hingegen zählten nur bis 5 und verwendeten zur Darstellung Fünfer- sowie Zehnerkarten.

Wir wollen uns zuerst anschauen, wie die Zahlendarstellung aussehen würde, wenn wir jeweils nur bis 5 zählen würden. In diesem Fall verwenden wir zur Kartendarstellung die folgenden Karten:



Einerkarte



Fuenferkarte

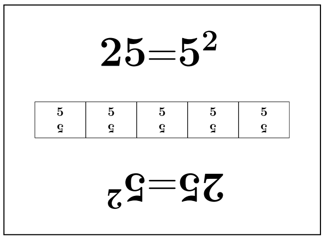
Frage 7

Wie sollen die zwei nächsten Karten aussehen?

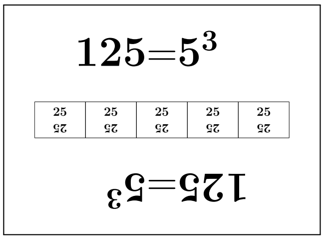
Die Klasse soll Ideen bringen und ausprobieren. Fünf 5er-Karten ergeben 25; fünf 25er-Karten ergeben 125; fünf 125er-Karten ergeben 625.

Arbeitsblatt I.3

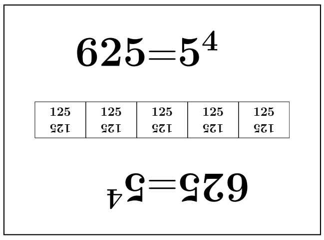
Das Arbeitsblatt beginnt mit einer Erklärung. Wir ziehen es jedoch vor, die 5-adische Darstellung einer Zahl selber entdecken zu lassen. Die Erklärung auf dem Arbeitsblatt soll der selbständigen Wiederholung dienen. Der beste Anfang, um die 5-adische Darstellung zu verstehen, ist es, das Zählen in der



25er-Karte



125er-Karte



625er-Karte

Kartendarstellung zu üben:
1_5, 2_5, 3_5, 4_5, 10_5, 11_5, 12_5, 13_5, 14_5, 20_5. Das Rechnen und die Transformation zwischen der 5-adischen und der dezimalen Darstellung sollen erst danach besprochen werden.
Die Klasse hat bereits die Addition von dezimalen Zahlen mit der Kartendarstellung wiederholt und geübt. Ebenfalls können sie das Vorgehen beschreiben und es den Mitschülern anhand von Beispielen erklären. Dies ist eine gute Voraussetzung, dass die SuS es schaffen, in Gruppenarbeit selbständig den Algorithmus für die Addition von zwei 5-adischen Zahlen zu entwickeln und anhand von Beispielen zu präsentieren. Zum Abschluss besprechen wir die Umwandlung von Dezimalzahlen in die 5-adische Darstellung.
Für einige Aufgaben kommen mehrere Lösungsmöglichkeiten in Frage. Zum Beispiel kann die Multiplikation als Addition mehrerer Zahlen aufgefasst werden, so etwa
$2413_5 \cdot 3 = (2413_5 + 2413_5) + 2413_5$.
Es können auch alle drei Zahlen gleichzeitig addiert werden. Ausserdem kann man in der Kartendarstellung die Anzahl der Karten in jeder Spalte verdreifachen und jeweils fünf gleiche Karten in einer Spalte durch eine Karte mit dem fünffachen Wert in der Spalte links davon ersetzen. Wegen dem Übertrag geschieht das Ersetzen am Besten von rechts nach links. Aber es funktioniert in beliebiger Reihenfolge, wenn die Schritte einfach so oft wiederholt werden, bis in jeder Spalte höchstens vier Karten liegen.

Die Klasse kann die Umwandlung von Dezimalzahlen in die 5-adische Darstellung selber entwickeln/entdecken. Die Möglichkeit soll man den SuS geben und danach diese zusammen beschreiben. Die Beschreibung muss so genau und verständlich sein, dass alle die Methode anhand der Beschreibung erfolgreich anwenden können.

Eine mögliche Beschreibung
(für diejenigen, die Programmiererfahrung haben.)

Eingabe: eine Zahl a als Dezimalzahl

Ausgabe: Die 5-adische Darstellung der Zahl a.

a) Suche unter den Fünferpotenzen $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, ... die grösste, die kleiner oder gleich a ist. Nimm die entsprechende Karte mit dem Wert 5^i in deine Kartendarstellung.

b) Rechne $a - 5^i$ und lege das Resultat in die Variable a.

c) **if** $a = 0$ **then** gehe zu Schritt 4 **else** gehe zu Schritt 1.

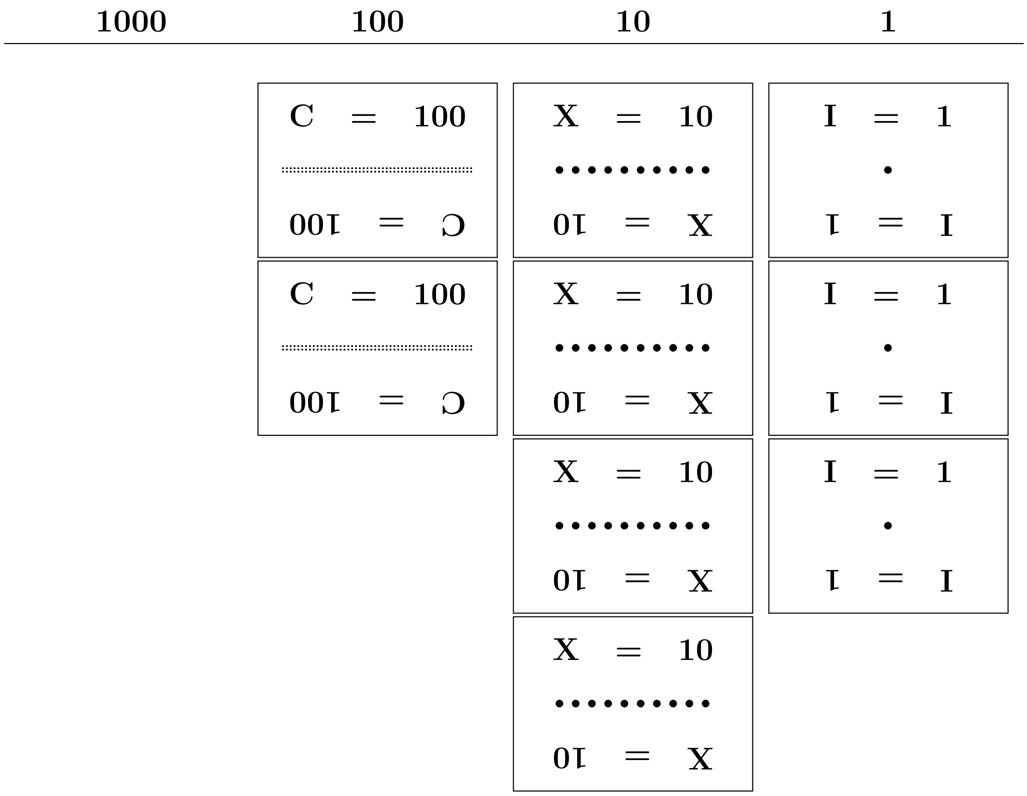
d) Lese die 5-adische Darstellung aus deiner Kartendarstellung ab.

Am Ende dieser Einheit soll diskutiert werden, worin die Vorteile der verwendeten Zahlendarstellungen liegen. Zum Beispiel:

- 10 000 ist eine viel kürzere Darstellung als 10 000 Punkte oder Striche zu zeichnen.
- Mit diesen Darstellungen kann effizient (das heisst, mit nicht zu grossem Aufwand) gerechnet werden.
- Die Grösse von zwei unterschiedlichen Zahlen kann einfach verglichen werden.
- Anhand der Kartendarstellung können wir uns die Grösse der Zahl besser vorstellen.

4. Gemischte dezimale und 5-adische Darstellung der Zahlen und römische Zahlen *(optional)*

Die römische Zahlendarstellung war eigentlich eine versteckte Kartendarstellung. Es wurden keine Ziffern verwendet, es wurden nur die Karten von der grössten zu den kleinsten von links nach rechts aufgelistet. Bei Dezimaldarstellung von 243 würde man einfach diese Folge von Karten nehmen:



Weil man von keiner Karte mehr als 4 verwenden wollte, führte man auch gewisse Fuenferkarten ein und zwar 5, 50 und 500. Von den Zehnerpotenzen hat man die Grössen 1, 10, 100 und 1000 genommen, denn man ging davon aus, dass man nicht mit Zahlen grösser als 4000 zu rechnen braucht. Weil man aber nicht mit Karten, sondern mit Symbolen arbeiten wollte, hat man für die Karten folgende Buchstaben zu ihrer Berechnung eingeführt:

I	1	**X**	10	**C**	100	**M**	1000
V	5	**L**	50	**D**	500		

Somit wäre CCXXXXIII eine Kartendarstellung von 243.

Arbeitsblatt I.4

Die Entwicklung der römischen Zahlen lässt sich in 3 einfache Schritten zerlegen und wird wieder über die Kartendarstellung erklärt. Bei Aufgabe 3 kann man diskutieren, wie man Ersparnis misst:

1. Additive Vorstellung: Anzahl der Symbole

999		CCCCCCCCCXXXXXXXXXIIIIIIIII
	→	DCCCCLXXXXVIIII
555		CCCCCXXXXXIIIII
	→	DLV
678		CCCCCCXXXXXXXIIIIIIII
	→	DCLXXVIII

In allen diesen 3 Fällen hat man genau 12 Symbole gespart. Das passiert bei jeder dreistelligen Zahl, die alle drei Dezimalziffern grösser als 4 hat. Da werden dreimal 5 Karten für eine mit fünffachem Wert ausgetauscht.

2. Multiplikative Vorstellung: Proportionalvergleich
Da haben wir einen klaren Sieger: 555
Die symbolische römische Darstellung hat Länge 15, die 5-10-gemischte römische Darstellung hat Länge 3. Somit ist die resultierende Länge $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ der ursprünglichen Länge, die Darstellung wurde 5-fach verkürzt.

5. Römische Zahlendarstellung

Arbeitsblatt L1

Lösung Aufgabe 2
Am besten zählt man alle Möglichkeiten systematisch auf und macht damit gleich propädeutisch ein bisschen Kombinatorik:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\mathrm{IM} = 999 & \mathrm{ID} = 499 & \mathrm{IC} = 99 & \mathrm{IL} = 49 & \mathrm{IX} = 9 & \mathrm{IV} = 4 \\
\mathrm{VM} = 995 & \mathrm{VD} = 495 & \mathrm{VC} = 95 & \mathrm{VL} = 45 & & \\
\mathrm{XM} = 990 & \mathrm{XD} = 490 & \mathrm{XC} = 90 & \mathrm{XL} = 40 & & \\
\mathrm{LM} = 950 & \mathrm{LD} = 450 & & & & \\
\mathrm{CM} = 900 & \mathrm{CD} = 400 & & & &
\end{array}$$

Die Systematik kann man auch gut erklären. In der ersten Spalte steht überall die grösste Zahl M und wir ziehen von oben nach unten je eine der Zahlen I, V, X, L, C in dieser Reihenfolge ab. Die zweite Spalte erhält die zweitgrösste Zahl D (zweitgrösster Kartenwert) usw.
Hier kann man gleich thematisieren, dass auch andere Paare wie DM, LC, VX möglich wären, aber doch nicht vorkommen, und warum.
Und man kann auch thematisieren, dass es mehrere Varianten der römischen Zahlendarstellungen gibt. Zum Beispiel solche, welche nur die Paare CM, CD, XC, XL, IX, und IV zugelassen haben. In einem solchen Fall schrieb man 999 als

CMXCIX.

6. Binäre Darstellung von Zahlen

Man kann versuchen, die fünf Punkte, welche zur Einführung und Durchsetzung der dezimalen Zahlendarstellung geführt haben, von der Klasse selbständig herausfinden zu lassen und erst danach die Arbeitshefte zu verteilen.

Arbeitsheft 4: Binäre Darstellungen von Zahlen

Lösung zu Aufgabe 1

	5-adisch	**5-10-römisch**	**römisch**
1	NEIN	JA	JA/NEIN
2	JA	NEIN	JA/NEIN
3	JA	NEIN	NEIN
4	JA	teilweise	NEIN
5	JA	JA	JA

Manchmal ist ein JA oder NEIN nicht ganz eindeutig und in solchen Fällen soll man darüber diskutieren. Zum Beispiel die Verständlichkeit von römischen Zahlen kann auch kontrovers diskutiert werden. Man kann NEIN sagen, wenn man auf den Vergleich in der 5-10-römischen Darstellung denkt oder in Dezimalzahlen denkt. Man kann aber auch JA sagen, wenn man im Kopf sehr schnell in die Dezimaldarstellung umwandeln kann. Die zweite Frage, ob die römische Darstellung kurz ist, kann man auch beiden, wenn man an die Verkürzung der 5-10 Darstellung denkt. Andererseits ist bis auf Ausnahmen wie IM oder XD die Dezimaldarstellung kürzer als die römische.
Das Rechnen mit Zahlen kann man detaillierter untersuchen, indem man sich separat die Aufwändigkeit der einzelnen arithmetischen Operationen anschaut. Insbesondere soll man auf Addition, Subtraktion und Multiplikation schauen.

Aufgabe 3 eignet sich auch als Hausaufgabe gut. Man kann ein wenig recherchieren, um sich eine Vorstellung davon zu machen, welche solche vereinfachte Darstellungen von Symbolen technisch geeignet wären.
Wichtig ist aber bei der Morsekodierung zu entdecken, dass man praktisch drei Symbole braucht, um die Morsekodierung darzustellen. Die Symbole sind ein kurzes Signal, ein langes Signal und die „Pause“.

Die SuS haben schon Erfahrungen mit Kartendarstellungen für Dezimalzahlen, für 5-adische Zahlen und auch für römische Zahlen. Sie hatten auch schon selbständig die 3-adische Zahlendarstellung entwickelt. Deswegen ist es angemessen zu versuchen, die Karten für die binäre Darstellung der Zahlen den SuS selbständig entdecken zu lassen.

Die Aufgaben 4 bis 7 werden recht schnell zu einer Routine und werden – den bisherigen Erfahrungen mit Kartendarstellungen folgend – selten Hindernisse für den Wissenstransfer darstellen. Aufgabe 8 ist schwierig und ist zur Beschäftigung für die Schnellsten geeignet. Die Zahl $1\underbrace{00\ldots00}_{n}{}_2$ kann man dezimal als

$$1 \cdot 2^n + 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + \ldots 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2^n$$

berechnen.

Bei der analogen Berechnung der Dezimaldarstellung von $\underbrace{11\ldots11}_{n}{}_2$ erhalten wir allerdings:

$$\begin{array}{llllllllll} & 1 \cdot 2^{n-1} & + & 1 \cdot 2^{n-2} & + \ldots + & 1 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^1 & + & 1 \cdot 2^0 \\ = & 2^{n-1} & + & 2^{n-2} & + \ldots + & 4 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Und die Berechnung dieser Summe kann auch die Schnellsten überfordern. Für eine elegante Lösung kann man bemerken, dass

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}{}_2 + 1_2 = 1\underbrace{00\ldots00}_{n}{}_2 = 2^n,$$

dass also die Zahl $\underbrace{11\ldots11}_{n}{}_2$ genau um 1 kleiner ist als die Zahl $1\underbrace{00\ldots00}_{n}{}_2 = 2^n$. Somit ist der gesuchte dezimale Wert der Zahl $\underbrace{11\ldots11}_{n}{}_2$ die Zahl $2^n - 1$.

Die SuS beherrschen schon die Addition von zwei binären Zahlen in der Kartendarstellung. Aber hier ist die Kartendarstellung im Grunde das Gleiche wie die binäre Darstellung. Deswegen ähnelt die schriftliche Addition zweier Binärzahlen der Addition zweier binären Zahlen mit den Karten, was das Erlernen ziemlich vereinfacht. Der einzige wesentliche Unterschied hier ist, dass man die Spalten nicht in einer beliebigen Reihenfolge behandelt (zwei gleiche Karten für eine Karte mit einem grösseren Wert austauscht), sondern systematisch von rechts nach links geht und die neue Ersatzkarte mit zweifachem Wert als Übertrag notiert.

Die formale Beschreibung der Addition in der Form eines Pseudoprogramms eignet sich nur für SuS, die gute Programmier-Erfahrung haben und die "whileSchleife beherrschen. Für diejenigen ist es aber ein gutes Training, um zu lernen, wie man die genaue Vorgehensweisen oder Rechenmethoden beschreibt.

Arbeitsblatt L2

Lösung Aufgabe 11
Eine binäre Zahl erhöht man um 1, indem man die erste Null von rechts durch eine Eins austauscht und alle rechts davon stehenden Einsen in Nullen umwandelt. Falls die Zahl keine Null enthält, muss man ganz links eine Eins ergänzen und die anderen Einsen rechts davon mit Nullen ersetzen, zum Beispiel: $1111_2 + 1_2 = 10000_2$

Lösung Aufgabe 13
Ersetze die erste Eins von rechts durch eine Null und alle Nullen rechts davon durch Einsen. Wenn die Zahl nur eine einzige Eins enthält, die als Ziffer ganz links steht, dann streiche diese Eins, statt sie durch eine Null zu ersetzen, zum Beispiel: $10000_2 - 1_2 = 1111_2$.

Wenn man beispielsweise 100_2 von einer Zahl a subtrahieren will, sollen die letzten zwei Stellen unverändert bleiben und die übrigen Stellen werden genau so geändert wie bei der Subtraktion von 1_2.

Es ist zu erwarten, dass SuS die Vorgehensweise zur Umwandlung von Dezimalzahlen in die binäre Darstellung problemlos selbständig entwickeln. Eine mögliche Beschreibung der Methode kann wie folgt aussehen:

Umwandlung dezimale in binäre Darstellung

Eingabe: eine Zahl a in Dezimaldarstellung

1. Finde unter den Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^i, \ldots$ die grösste Potenz 2^m, so dass $2^m \leq a < 2^{m+1}$. Setze eine Eins an die $(m+1)$-ste Stelle von rechts in der binären Darstellung von a.

2. Verkleinere a um 2^m, setze also $a := a - 2^m$.

3. **Falls** $a > 0$, **dann** fahre fort mit 1. **Sonst** fülle alle Positionen, die nicht mit einer Eins belegt sind, mit Nullen und gib die binäre Darstellung von a aus.

Für $a = 1000$ sehen wir beispielsweise, dass $2^9 = 512 \leq 1000 < 1024 = 2^{10}$. Somit wissen wir, dass die binäre Darstellung von 1000 genau 10 Stellen in der binären Darstellung hat und an der zehnten Stelle von rechts (der ersten von links) eine Eins steht.

$\boxed{1}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}_2$

$1000 - 512 = 488$. Unter den Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$ ist $256 = 2^8$ die grösste, die noch in 488 reinpasst. Somit ist die binäre Darstellung

von 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}_{\,2}$.
und wir arbeiten weiter mit $488 - 256 = 232$. In 232 passt $128 = 2^7$ und somit ist 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}_{\,2}$.
$232 - 128 = 104$. $2^6 = 64$ passt in 104 rein und wir wissen, dass 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}_{\,2}$.
$104 - 64 = 40$. $2^5 = 32$ ist die grösste Zahl, die in 40 reinpasst und gilt 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}_{\,2}$.
Weil $40 - 32 = 8$, sehen wir, dass $2^4 = 16$ nicht, aber $2^3 = 8$ genau passt und wir erhalten 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{1}\,\boxed{?}\,\boxed{?}\,\boxed{?}_{\,2}$.
Weil $8 - 8 = 0$, ersetzen wir alle „?“ durch Nullen und sind fertig: 1000 =
$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}_{\,2}$.

Arbeitsblatt L2

Lösung Aufgabe 15
Unter den Zweierpotenzen $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^3 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \ldots$ ist 1 die einzige ungerade Zahl. In der binären Darstellung drücken wir die Zahl als Summe einiger Zweierpotenzen aus, wobei jede Zweierpotenz höchstens einmal vorkommt. Wenn unter den Summanden $2^0 = 1$ nicht vorkommt, dann sind alle Summanden gerade und somit muss die resultierende Zahl auch gerade sein. Somit stellt jede binäre Zahl, die mit einer Null endet, eine gerade Zahl dar. Wenn sich unter den Summanden die Eins befindet (die binäre Darstellung endet also mit 1), dann ist diese Eins die einzige ungerade Zahl unter den Summanden und somit muss die Summe eine ungerade Zahl bilden.
Wenn man diese Aufgabe der Klasse selbständig zu lösen überlassen will, könnte es hilfreich sein, zuerst auf die folgenden Eigenschaften der Addition aufmerksam zu machen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{gerade Zahl} & + & \text{gerade Zahl} & = & \text{gerade Zahl} \\ \text{ungerade Zahl} & + & \text{ungerade Zahl} & = & \text{gerade Zahl} \\ \text{ungerade Zahl} & + & \text{gerade Zahl} & = & \text{ungerade Zahl} \end{array}$$

Die Multiplikation von binären Zahlen ist eine schöne Aufgabenstellung, aber ihre Entwicklung und Festigung kostet Zeit. Deswegen empfehlen wir dieses Thema als optional für den Unterricht. Ausserdem ist hier für das Verständnis die Arithmetik mit Potenzen wie z. B. $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ unausweichlich.

Falls man diesen Teil des Unterrichts durchführt, muss man sich bewusst sein, dass es nicht einfach um das Erlernen eines neuen Algorithmus geht, sondern auch um die Vertiefung und Festigung des Verständnisses des klassischen Algorithmus für schriftliche Multiplikation.

Der Kern der Vorgehensweise ist die Anwendung des Distributivgesetzes.