Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 17,3 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [@wiki:bash].

Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: `(1132226460%70)+1` = 51 вариант.

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ -- место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k-x$ (или $k+x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\dfrac{x}{v}$ или $\dfrac{k-x}{5.1v}$ (во втором случае $\dfrac{k+x}{5.1v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$ \dfrac{x}{v} = \dfrac{k-x}{5.1v} \text{ -- в первом случае} $$ $$ \dfrac{x}{v} = \dfrac{k+x}{5.1v} \text{ -- во втором} $$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \dfrac{17.3}{6.1}$ и $x_2 = \dfrac{17.3}{4.1}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_{r} - радиальная скорость и - v_{τ} тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \dfrac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\dfrac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\dfrac{d \theta}{dt}$ на радиус r, $r \dfrac{d \theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_{\tau} = \sqrt{26.01v^2-v^2} = \sqrt{25.01}v$$

Из чего можно вывести:

$$ r\dfrac{d \theta}{dt} = \sqrt{25.01}v $$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} &\dfrac{dr}{dt} = v\ &r\dfrac{d \theta}{dt} = \sqrt{25.01}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} &{\theta}_0 = 0\ \tag{1} &r_0 = \dfrac{17.3}{6.1} \end{cases}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} &{\theta}_0 = -\pi\ \tag{2} &r_0 = \dfrac{17.3}{4.1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$ \dfrac{dr}{d \theta} = \dfrac{r}{\sqrt{15.81}} $$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Построение модели

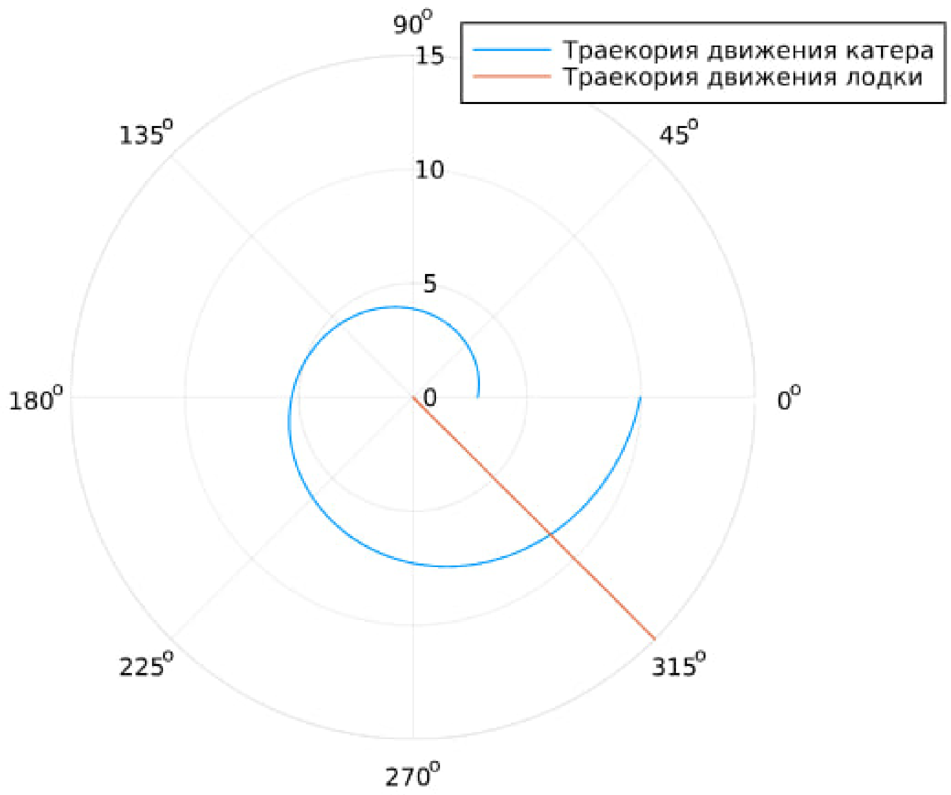
```
using DifferentialEquations, Plots

# расстояние от лодки до катера

k = 11.4

# начальные условия для 1 и 2 случаев

r0 = k/5.1
r0_2 = k/3.1
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров

fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(15.81)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения катера")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:001]):

{#fig:001 width=70%}

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки

ugol = [fi for i in range(0,15)]

x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]

# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:002]):



{#fig:002 width=70%}

```
using Printf

# Определяем функцию y(x)
function y(x)
    return (173*exp((10*x)/(sqrt(2501))))/(61)
end

# Вычисляем y(3π/4)
x_value = 3 * pi / 4
result = y(x_value)

@printf("y(3π/4) = %.5f\n", result)

# точка пересечения лодки и катера для 1 случая

y(3π/4) = 4.54289
```

Теперь перейдем к решению в случае 2.

```
# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)

sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)
```

```
# отрисовка траектории движения катера

plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траекория движения
катера")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:003]):

{#fig:003 width=70%}

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:004]):

:

{#fig:004 width=70%}

```
using Printf

# Определяем функцию y(x)
function y(x)
    return (173 * exp((10 * x) / sqrt(2501) + (10 * pi) / sqrt(2501))) / 41
end

# Вычисляем y(3π/4)
x_value = 3 * pi / 4
result = y(x_value)

@printf("y(3π/4) = %.5f\n", result)

y(3π/4) = 12.66772
```

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне и решила задачу коши

Список литературы{.unnumbered}