Práctica 1. Métodos iterativos para hallar raíces de funciones no lineales.

1 – Emplear el método de bisección y hacer los primeros 3 pasos, con el fin de aproximar una raíz para cada una de las siguientes funciones, cuando sea posible usarlo. Para las funciones en las cuales no se pueda usar, justificar.

$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^3+1$
$f(x) = x^3 - x + 1$
$f(x) = e^{-x} - \text{sen } x$
$f(x) = 2/x$
$f(x) = |x + 5|$
$f(x) = 2x + 3$

2 – Elegir una f del ejercicio anterior tal que pueda usarse bisección, y aproximar una raíz de f con un error tal que tenga los primeros 2 decimales correctos.

3 – Aproximar una raíz cada una de las funciones del ejercicio 1 usando el método de Newton, cuando sea posible usarlo. Para las funciones en las cuales no se pueda usar, justificar.

4 - Indicar cómo se puede usar el método de Newton para calcular la función $f(x) = \ln x$ para $x > 0$, usando otras operaciones: +. -, *, / y exponencial. Discutir una posible implementación práctica de esto.

5 – Para cada una de las siguientes funciones, indicar alrededor de qué raíces el método de Newton converge cuadráticamente:

$f(x) = x^n$ (con n>=1)
$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \cos x$
$f(x) = 1/x$
$f(x) = \sin x / x$

6 – Elegir 2 o 3 de las funciones del ejercicio anterior y resolver usando bisección de modo de obtener 3 decimales correctos.

7 – Dar ejemplos (gráfica o analíticamente) de funciones f para la cual el método de Newton:
a) no encuentre una raíz para determinado valor inicial, pero sí con otro valor inicial
b) encuentre una raíz para cualquier valor inicial
c) caiga en un ciclo para determinado valor inicial (oscile)
d) converja más “lentamente” a una raíz (no cuadráticamente)

8 – Para el método de bisección:
a) Mostrar ejemplos en los cuales la iteración permanece siempre del lado derecho de la raíz. (Análogamente podría pedirse para el lado izquierdo.)

b) ¿Es cierto que *si bisección converge a una raíz*, siempre será hacia la raíz *más cercana* del punto inicial?

9 – Para el método de Newton:
a) Mostrar ejemplos en los cuales la iteración permanece siempre del lado derecho de la raíz. (Análogamente podría permanecer siempre del lado izquierdo.)
b) ¿Es cierto que *si converge*, será hacia la raíz *más cercana* del punto inicial?

10 - ¿Hay alguna forma de hacer recuperarse el método de Newton (es decir que continúe calculando) para f si la derivada f ' se anula en algún punto durante la iteración?

11 – Sea a un número real. La siguiente secuencia, ¿converge? Y, en ese caso, ¿a qué valor?

$$x_0 = a$$
$$x_{n+1} = x_n / 2 + 1/x_n$$

12 –
a) ¿Qué ocurriría si se usa el método de Newton para resolver una ecuación *lineal* con una incógnita? Analizar todos los casos.
b) Misma pregunta, qué ocurriría, con el método de bisección.
c) ¿Y con el método secante?
d) *¿Y con el método de Broyden?

13 – El método de bisección tiene entre otros requerimientos que al comienzo se cuente con dos números reales *a* y *b* tales que *f(a)* y *f(b)* tengan distinto signo. Si bien eso puede ser costoso, mostrar un algoritmo aproximado que converja hallando tales *a* y *b* en caso en que existan. (Nota: si no hubiera tales valores, no se pide nada del algoritmo, que incluso podría colgarse.)

14 – a) Discutir un posible método de bisección para hallar raíces de funciones reales continuas pero de más de una variable (nota: el primero conocido de ellos fue el de Davidon-Fletcher-Powell).
b) Dar un método (concreto y sencillo) para aplicarse especialmente a la función
$f(x,y) = x^2 + y^2 – 2$.
c) Idem para $f(x,y) = x + y + \text{sen } x + \text{sen } y$

15 -
a) Para hallar alguna raíz de una función que admita además un algoritmo exacto, por ej. una función cuadrática, los métodos iterativos, ¿necesariamente convergen en forma exacta en finitos pasos?
b) *(opcional)* ¿Se puede usar el método de bisección para funciones complejas? Discutir y/o dar un ejemplo si corresponde.
c) *(opcional)* Misma pregunta para el método de Newton.

Práctica 2. Sistemas de ecuaciones lineales.

1 –
a) Hallar la inversa de la siguiente matriz de más de una forma posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resolver el siguiente sistema lineal siguiente de más de una manera (en una usando lo anterior):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Resolver el sistema lineal siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 –
a) Probar que si las matrices A y B son simétricas, entonces A+B es simétrica.
b) Probar que para toda matriz A, $A + A^t$ es simétrica.
c) Probar que para toda matriz A, $A - A^t$ es antisimétrica.
d) Probar que para toda matriz A, AA^t es simétrica.
e) Probar que si $A = A^{-1}$, entonces $(A^t)^2 = I$. Dar un ejemplo de matriz A de 2x2 que cumpla $A = A^{-1}$.

3 – Hallar los siguientes valores en función de $n \in N$ y de $a \in R$:
a) $\| a.I \|_2$
b) $\| A \|_2$ donde A es una matriz de nxn con valores todos a

4 – Usar el método de factorización LU para para resolver el sistema del ejercicio 1 c). Y de paso calcular A^{-1} para la matriz de ese sistema.

5 – ¿Cuáles de estas matrices son LU-factorizables? (No se pide hallar una LU-factorización, sino sólo contestar la pregunta en cada caso.)

$I \in R^{2x2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6 –
a) Supongamos que A tiene unos en la diagonal, es triangular inferior y es LU-factorizable. ¿Cómo resultarán son L y U en función de los elementos de A?

b) Supongamos que A tiene unos en la diagonal, es triangular superior y es LU-factorizable. ¿Cómo resultarán L y U en función de los elementos de A?

c) Supongamos que A es diagonal y ningún valor de la diagonal es 0. ¿Es LU-factorizable? En ese caso, ¿cómo resultarán L y U en función de los elementos de A?

7 – Calcular las dos primeras iteraciones del método de Jacobi correspondientes al sistema siguiente, comenzando con el vector $x^{(0)} = (0,0,0)^t$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

8 – Si A no es cuadrada, ¿en dónde fallan o no están definidos los sistemas iterativos vistos para resolver sistemas lineales con A?

9 – Para las siguientes matrices, indicar si son de diagonal dominante. En caso en que no lo sean, indicar cómo permutar sus filas como para que resulten de diagonal dominante.

```
0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0

0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0
0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0

1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0

0 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0

 0 ,  0 , 0 ,  0 ,  0 , -1 , 0
 1 ,  0 , 0 ,  0 , -1 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 0 ,  0 , -1 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 0 ,  0 ,  0 ,  0 , 0
 0 , -1 , 0 , -1 ,  0 ,  0 , 0
 1 , -2 , 0 ,  0 ,  0 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 1 ,  0 ,  0 ,  0 , 0

0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
1 , 0 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1

 0 ,  1 , 0 ,  0 ,  0 ,  0 , 1
 0 , -1 , 0 ,  0 ,  0 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 2 ,  0 ,  0 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 0 ,  0 , -2 , -1 , 0
 0 ,  0 , 0 , -1 , -1 ,  0 , 0
-1 ,  1 , 0 ,  0 ,  0 ,  0 , 0
 0 ,  0 , 0 ,  0 ,  2 , -2 , 0
```

10 – *(opcional)* Si para la matriz $A = (a_{ij})$ de nxn vale que

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ½$$

¿converge la sucesión de matrices A^k para $k \to \infty$?

11 – Si $A \in R^{nxn}$ es inversible, notamos $\kappa(A)$ = número de condición de A, y $\rho(A)$ = radio espectral de A.

a) Dado n, para la matriz identidad $I \in R^{nxn}$ calcular κ (I) en función de n.

b) Probar que si A es inversible entonces $\| I \| \le \kappa(A)$. Como consecuencia, si $\| I \| > 1$ entonces (de algún modo) A es una matriz mal condicionada.

c) Probar que si A y B son inversibles entonces $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\,\kappa(B)$.
d) Probar que si A es inversible entonces $\rho(A)\,\rho(A^{-1}) \leq \kappa(A)$.

12 – Para sistemas lineales de nxn, se pregunta en función de n:
a) ¿Cuántas operaciones elementales hacen falta como máximo para resolver un sistema lineal con matriz triangular inferior?
b) ¿Cuántas operaciones elementales hacen falta como máximo para resolver un sistema lineal con matriz triangular superior?
c) ¿Cuántas operaciones elementales hacen falta como máximo para resolver un sistema lineal con matriz tipo U del método LU?
d) *¿Cuántas operaciones elementales hacen falta como máximo para resolver un sistema lineal por el método de Gauss-Jordan?

Práctica 3. Aproximación e interpolación.

Ejercicios introductorios

I1) Calcular el polinomio interpolador de Lagrange para los siguientes datos, y evaluar el polinomio obtenido en x = 2, en x = 4 y en x = -1:

x:	0	1	2	3
y:	1	1	1	2

I2) Los siguientes valores corresponden a la altura *h* de un cohete experimental a lo largo del tiempo. Calcular la trayectoria de este cohete, suponiendo que es polinomial en el tiempo *t*. Dicho de otro modo, calcular el polinomio interpolador de Lagrange para los siguientes datos. Evaluar luego el polinomio obtenido en t = 0, en t = 3 y en
t = 6 para estimar la altura en esos instantes:

t:	1	2	4	5
h:	-2	1	13	22

I3)

a) Elegir alguno de los dos ejercicios anteriores y para esos mismos datos utilizar el método de Newton para hallar un polinomio interpolador de grado mínimo.
Comprobar que el polinomio resultante es el mismo ya calculado.

b) Elegir alguno de los dos ejercicios anteriores y utilizar el método de diferencias divididas para hallar el polinomio interpolador de grado mínimo.
Comprobar que el polinomio resultante es el mismo ya calculado.

I4) ¿Cuál es el polinomio interpolador de Lagrange para los datos siguientes? (Consejo: ¡No hace falta hacer cuentas!)

x:	0	2	8	15
y	3	3	3	3

I5) Verificar cómo tanto el método de Lagrange como el de Newton generalizan la propiedad euclidiana de que *por dos puntos distintos pasa siempre una (única) recta*.

Ejercicios básicos

B1)
a) Explicar por qué dados 3 puntos no alineados de R^2, existe una única parábola que pasa por ellos.
b) Si los 3 puntos estuviesen alineados, ¿necesariamente existirá tal parábola?

B2) Para encontrar un polinomio que pase por n puntos distintos dados de R^2, ¿cuál es el mínimo grado con que puede resultar el polinomio interpolador de Lagrange, y cuál el máximo? ¿Qué condición *geométrica* de los datos implicará que este polinomio resulte de grado ≤ 1?

B3) Se tiene calculado P el polinomio interpolador de grado mínimo de un conjunto grande de datos, y se descubre que los valores de los y_i fueron medidos con error, tal que todos debían ser la mitad del verdadero valor. ¿Cómo se puede corregir P de acuerdo a los valores correctos, con mínimo esfuerzo? Es decir sin necesidad de volver a calcular desde cero el polinomio correspondiente.

B4) Lo mismo que en (B3) pero ahora se sabe que las ordenadas observadas estaban excedidas en una cantidad fija C, es decir se midieron todos los y_i por el mismo exceso, conocido. ¿Cómo se puede corregir este error con mínimo esfuerzo?

B5) ¿Se necesitará un esfuerzo similar al de (B3) o (B4) si en cambio los valores x_i estuviesen excedidos una cantidad fija C, es decir si se midió con un corrimiento constante el valor de cada abscisa?

B6) Identificar ventajas y desventajas del método de interpolación de Newton con respecto al método de interpolación de Lagrange.

B7) Identificar ventajas y desventajas del método de diferencias divididas con respecto al método de interpolación de Newton.

Ejercicios avanzados

A1) Se toman n + 1 pares de números reales (x_i, y_i) para i = 0, 1, …, n, tales que hay un polinomio conocido P de grado n y vale $y_i = P(x_i)$ para i = 0, 1, …, n, con los x_i distintos dos a dos. En este caso, ¿cuál será el polinomio interpolador resultante?

A2)

a) Aplicando interpolación lineal, escribir un algoritmo directo, que reciba como input las coordenadas (x, y) de k puntos del plano R^2, para n variable, y determine si esos k puntos están o no alineados.

b) Modificar (a) para determinar si k puntos dados del plano R^2 están en una misma parábola.

c) Modificar (a) para generalizar al caso de un grado arbitrario que también se toma como input.

*A3) A partir de la formula del error de interpolación para el polinomio de Lagrange al ser usado para interpolar datos (x_i , $y_i = f(x_i)$), i = 0, 1, …, n, provenientes de una función real f con derivada (n+1)-ésima continua, deducir la siguiente consecuencia:
Dentro del intervalo de donde provienen las abscisas, el error máximo estará proporcionalmente acotado por el máximo valor que toma la derivada (n+1)-ésima de f dentro de dicho intervalo.

*A4) Comparar el *número de operaciones* en el peor caso para el método de Newton con respecto al de Lagrange. (Restringirse al cálculo de los c_m solamente.)

Ejercicios adicionales/opcionales

E1) Para $L_i(x)$ el i-ésimo polinomio fundamental de Lagrange, hallar una expresión general de la derivada $L_i'(x)$.

E2) Calcular el polinomio interpolador de Hermite para interpolar $f(x) = e^x$ en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$. Determinar si coincide con el de Lagrange. Acotar el error para todo x, utilizando una fórmula adecuada para $e_n(x)$.

E3) Mostrar que si se toma como observaciones un conjunto de más de n+1 puntos (x_i, y_i) provenientes de la evaluación de un polinomio de grado n, y se aplica el método de diferencias divididas, entonces, considerando que las columnas se numeran desde 0 en adelante, la n-ésima columna de valores contendrá todos 0. Interpretar la analogía existente con la derivación sucesiva de polinomios.

Ejercicios tomados en parciales

P1) En este ejercicio se pide utilizar mínimas operaciones en los pasos o etapas en que tenga sentido y sea posible.

a) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,1) y (2,2).

b) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,1), (1,1) y (2,2).

c) Indicar algún punto P adicional, distinto de los tres anteriores, de modo que el polinomio de grado mínimo que pasa por los tres anteriores y a la vez por P tenga grado 2.

P2) En este ejercicio se pide utilizar mínimas operaciones en todos los ítems en que tenga sentido y sea posible.

a) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (1,2) y (4,8).

b) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (1,2), (0,0) y (4,8).

c) Elegir dos puntos adicionales, distintos de los anteriores, de modo que el polinomio de grado mínimo que pasa por los cinco puntos (los tres anteriores y estos dos) tenga grado ≥ 2.

P3)

a) ¿Existen 5 puntos (x_i, y_i) distintos en el plano que cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones?

i) $x^3 - y = 1$

ii) el método de Lagrange aplicado a esos 5 puntos da un polinomio de grado 4

b) Elegir un conjunto de puntos del plano tales que el polinomio interpolador que arroja el método de Newton para ese conjunto sea $P(x) = x^2 + 6$.

P4)

a) Calcular usando mínimas operaciones el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,3), (1,3) y (2,3).

b) ¿Qué ocurre al intentar aplicar el método de Lagrange si queremos interpolar dos puntos con la misma abscisa (valor de x)? Mostrar el caso general o bien un ejemplo.

c) ¿Existen 6 puntos (x_i, y_i) distintos en el plano que cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones?

i) $x^4 - y = 1$

ii) el método de Lagrange aplicado a esos 6 puntos da un polinomio de grado 5

Práctica 4. Modelos de regresión.

(*opcional*) 0 – Sean u y v vectores ortogonales en R^n. Demostrar que
$||u + v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2$ (*Teorema de Pitágoras para R^n*)

Nota al margen: existen varias versiones del teorema de Pitágoras: para triángulos rectángulos en n dimensiones, para otras determinadas figuras en n dimensiones, para otros espacios tales como espacios de funciones, etc. Existen asimismo varias demostraciones de ellos.

1 – Ajustar una recta por cuadrados mínimos según la siguiente tabla:

x:	0	1	2	3
y:	1	2	3	6

2 – ¿Cuál es el punto del plano dado por $x + y - z = 0$ más cercano al punto (2, 1, 0)?

3 – Comprobar que en regresión lineal con cuadrados mínimos, cuando los puntos son 2 se obtiene precisamente la recta que pasa por ambos puntos (¡para esto agregar una condición indispensable sobe ambos puntos!). Más generalmente, se puede probar que si los puntos están alineados (haya o no haya repeticiones), se obtendrá la recta que los contiene. ¿Por qué? (Explicar, sin hacer cuentas.)

4 – Para regresión lineal con cuadrados mínimos con el objetivo de hallar la recta de pendiente *a* y ordenada al origen *b*, mostrar una condición tal que si valiera el *a* o el *b* quedarán indefinidos.

5 – Para regresión lineal, comprobar que si se intercambia (x_i, y_i) con (x_j, y_j), para dos índices i y j determinados (con $1 \leq i < j \leq n$), entonces los coeficientes *a* y *b* resultantes de la regresión no cambian. Interpretar este hecho en forma práctica.

6 – Para regresión lineal, comprobar que si se aplica una escala de *h* a todos los x_i, i.e. se cambia el valor x_i por $h.x_i$ para $0 \leq i \leq n$, el resultado de la regresión será el cambio del coeficiente *a* por *a / h*. Interpretar este hecho en forma práctica.

7 – *Interpretar* (y/o graficar en forma aproximada) las siguientes seis situaciones para regresión lineal: $a < 0$, $a > 0$, $a = 0$, $a < 1$, $a > 1$, $a = 1$

8 – Para regresión lineal, tomar un i fijo, $1 \leq i \leq n$:
a) si cambiamos x_i por $x_i + c$, ¿cómo cambiarán *a* y *b*?
b) si cambiamos y_i por $y_i + c$, ¿cómo cambiarán *a* y *b*?

9 - Sean *a* y *b* los parámetros obtenidos para aproximación por una recta de la forma $y = ax + b$ al conjunto de mediciones $\{(x_i, y_i) / i = 1, \ldots, n\}$. Determinar en cada caso si la afirmación es V o F, probando lo que dice o dando un contraejemplo:
a) El punto (x_m, y_m) (cuyas coordenadas son respectivamente el promedio de los x_i y el promedio de los y_i) pertenece a la recta indicada.
b) Si todos los puntos y_i son iguales a una misma constante, entonces $a = 0$.
c) Si $a = 0$, entonces la mejor aproximación (en el sentido de cuadrados mínimos) por una función constante $f(x) = C$ al conjunto de datos $\{y_i\}$ $i=1, \ldots, n$ es su promedio.
d) La suma total de los errores cometidos en la estimación será 0.
e) La suma total de los errores al cuadrado cometidos en la estimación será 0.

10 – Sean $u, v \in R^n$ vectores fijos. ¿Qué número real t hace que $||u - t.v||^2$ sea mínimo? Resolver analíticamente e interpretar gráficamente.

11 – Obtener el plano de cuadrados mínimos para los siguientes puntos (x,y,z):

x:	0	0	2	0
y:	0	3	0	4
z:	0	4	6	6

12 – Comprobar que el plano de cuadrados mínimos cuando los puntos son 3 es precisamente el plano que pasa por esos 3 puntos (¡para esto agregar una condición indispensable sobre ellos!). Más generalmente, probar que si los puntos están en un mismo plano (haya o no haya repeticiones), se obtendrá el único plano que los contiene. ¿Por qué? (Explicar, sin hacer cuentas.)

13 – Se tiene *n* puntos (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$ en el plano y se desea hallar el mejor polinomio de grado 0 que los aproxime en el sentido de cuadrados mínimos. ¿Cómo hacer?

Práctica 5. Diferenciación e integración numérica.

1. Calcular el valor de la derivada primera en forma aproximada para las siguientes funciones, puntos de R e incrementos (valor de h). Comparar el valor así obtenido con el valor real que da la forma analítica conocida de dicha función derivada.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$, $h=0.1$
b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1.5$, $h=0.1$
c) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2.71$, $h=0.02$

2. Hacer lo mismo pero para la derivada segunda de f, en cada caso del ejercicio anterior.

3. Análogamente a lo hecho en clase, buscar una fórmula de aproximación de la derivada segunda, pero con el fin de que aproxime mejor, en lugar de utilizar la fórmula de diferencias hacia delante o hacia atrás, utilizar la de diferencia simétrica (central) en la aproximación de la derivada primera.

4. Elegir alguno entre 1(a), 1(b), y 1(c) y aplicar en él la fórmula de (3).

5. El método usual de orden 1 de aproximación de la derivada, ¿para qué funciones reales da el valor exacto de la derivada en cualquier x real?

6. Elegir algún método de integración numérica visto, y usando ese método integrar en forma aproximada la función f(x) = 1/x entre 1 y 10. Utilizar intervalos de igual longitud, primero 1 intervalo, luego 5 y luego 10. Comparar los valores obtenidos con el verdadero valor de esa integral definida.

7. Integrar en forma aproximada la función $f(x) = 1/ (1+x^2)$, entre los límites que sean convenientes, para poder calcular una aproximación de π.

8. Dar un algoritmo para que dado un *a* real calcule en forma aproximada el valor del logaritmo natural de *a*, utilizando integración numérica, donde los parámetros son *a* y la cota del error deseada. El algoritmo podrá utilizar sólo operaciones algebraicas (+,-,*,/).

9.
a) El método de rectángulos (sumas de Riemann) ¿para qué funciones reales da el valor exacto cualquiera sea el intervalo [a,b] tomado, si se divide en un número suficientemente grande de intervalos?
b) El método de trapecios ¿para qué funciones reales da el valor exacto cualquiera sea el intervalo [a,b] tomado, si se divide en un número suficientemente grande de intervalos?

Práctica 6. Ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en diferencias.

1. Repasar, recordar, develar o determinar, del modo que sea:

a) ¿Qué funciones reales tienen como derivada la función constantemente 0?

b) ¿Hay alguna función real que sea igual a su propia derivada? Si es así, ¿hay una sola o muchas?

c) Formular las preguntas (a) y (b) como problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, e indicar las soluciones de estas de acuerdo a lo contestado anteriormente.

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, determinar

i) el orden

ii) la función f : R^2 -> R, sólo cuando la EDO pueda escribirse de la forma y' = f(x,y)

iii) la solución general (analíticamente, no numéricamente), sin considerar condiciones iniciales

a) y' = 3
b) y' = x
c) y' = y
d) y' = 2y
e) y' + y = 0
f) y' + y^2 = 0
g) y' = y'
h) y' = y' + 1

3. Resolver analíticamente el problema siguiente:

y' = 5y
y(0) = 6

Indicar si la solución es única. (Puede usarse el teorema de Picard-Lindelöf)

4. Resolver analíticamente el problema siguiente:

y' = 0
y(0) = 6

Indicar si la solución es única.

5. Aplicar el método de Euler para resolver el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias en los puntos x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, …, 0.9, 1.

y' = y + 1
y(0) = 3

6. Indicar si tienen solución los siguientes problemas que constan de una ecuación más dos valores iniciales:

a) y' = y
y(0) = 1
y(1) = 1

b) y' = y
y(0) = 1
y(1) = 2

c) y' = -y
y(0) = 1
y'(0) = 1

7.
a) Repasar o volver a deducir la fórmula de Euler mejorada a partir de la aproximación por diferencias centrales.

b) Aplicar esa fórmula al ejercicio 5 y comparar.

8. Suponer que y es una función que representa la posición de un móvil unidimensional, que cumple lo siguiente:

$$y'' = 2y'$$
$$y'(0) = 3$$

Aplicar el método de Euler para hallar la velocidad del móvil en los puntos x = 0, 1, 2.

9. Determinar si vale la condición de estabilidad para los problemas de los ejercicios 3, 4, 5 y 8.

10. Se tiene la ecuación diferencial ordinaria $y + y' = 1$.

a) Se tiene como valor inicial conocido: $y'(0) = -2$. Aproximar una solución de este PVI por el método de Euler o Euler mejorado, en los puntos -1, 0 y 2.

b) Hallar analíticamente la solución general de la ecuación diferencial dada.

11 – Cuando sea posible, buscar a mano la solución general (o si no se puede, una solución lo más general posible y no trivial), de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias. (Trivial significa la solución $y(x) = 0$ para todo x, es decir la función nula, que es solución de muchas de estas EDO. ¿De cuáles no lo es?)

i) $y' = y$

ii) $y' = -y$

iii) $y' = y^2$

iv) $y'' = 0$

v) $y'' - x = 0$

vi) $y'' = y'$
Pista: Defina $g = y'$. Noten que la ecuación dada equivale a la ecuación $g' = g$. ¿Y entonces?

12 – Se pide lo mismo que en el ejercicio anterior para estas EDO (se aconseja consultar).

i) $y'' = -y$

ii) $y'' = y$

iii) $y\, y' = 1$