Métodos Numéricos

Primer parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

a) Dar un algoritmo o indicar cómo usar un algoritmo conocido de modo que, dado $a > 0$, se pueda aproximar el valor $ln(a^2 + 1)$ sin usar otras operaciones que no sean +, -, *, /, e^x, constantes enteras y el valor a.

b) Dada una $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, y $k \in N$, se desea aproximar un punto fijo de g en caso de que exista. Indicar cómo se puede resolver esto utilizando el algoritmo de bisección, y calcular la cantidad de iteraciones que debe hacer este algoritmo en el peor caso para aproximar lo buscado con error menor que $1/10^k$.

Ejercicio 2

Probar que si para algún $\varepsilon > 0$, si $x_0 \in (\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$ la secuencia definida por

$$x_{n+1} = x_n - \ln(\text{sen } x_n) \text{ tg } x_n$$

converge, entonces converge a $\pi/2$.

Ejercicio 3

Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles, probar que $\kappa(A(AB)^{-1}) \leq (\kappa(A))^2 \kappa(B)$.

Ejercicio 4

i) Dada una $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior, con $L = (h_{i,j})$ donde $h_{i,i} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, y dado $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, sea $A = LL^t$. Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ usando el método LU, determinar cuál es en el peor caso el *número de operaciones elementales requeridas* en función de n.

ii) Indicar justificando dos posibles valores para la constante w tales que el sistema lineal dado por las ecuaciones siguientes $(w - 2)\, x + 5\, y \;=\; y - 2x \;=\; 10$
pueda resolverse usando algún método iterativo de aproximación de la solución.

iii) Elegir en (ii) uno de esos valores de w y para ese sistema hacer un paso de iteración con dicho método.

Ejercicio 5

Este ejercicio debe resolverse con mínimas operaciones toda vez que sea posible, justificando todo.
Un economista ha tomado nota del valor del *austral* con respecto al *euro* a lo largo de distintos días:

día:	0	4
valor del austral:	1000	1800

a) Nos solicita que le calculemos el valor que debería tener los días 1 y 5, suponiendo que la evolución se explica con un polinomio de grado mínimo evaluado en el número de día.
b) Un colaborador ha encontrado un dato perdido del día 1: ese día en realidad el valor debía ser de 1000. Nos pide entonces que con los datos más actuales determinemos el polinomio que explica la evolución del valor.
c) A partir de (b), nos piden ahora otro polinomio que con igual criterio explique la evolución del valor pero "en miles de euros", es decir el día 0 ese valor es 1 y así siguiendo. ¿Cómo calcular este nuevo polinomio sin pérdida de tiempo?

Métodos Numéricos

Primer parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

Suponiendo que la siguiente secuencia (x_n) converge a un $v > 0$, calcular justificando el valor exacto de v.

$x_0 = \ \ldots$
$x_{n+1} = x_n\,(1 - \log x_n \log \log x_n)$

Ejercicio 2

Dar un algoritmo que, dado s, con $-1 \leq s \leq 1$, aproxime el valor *arcsen* $s \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, sin usar otras operaciones que no sean +, -, *, /, *sen*, constantes y el valor s.

Ejercicio 3

Dadas A, B $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles, probar que $\tau(ABA^{-1}) \leq (\tau(A))^2\, \tau(B)$.

Ejercicio 4

a) Dada una $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y dado $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, con A = LU donde L y U son matrices adecuadas para resolver el sistema Ax = b usando el método LU, indicar en función de n cuál es, en el peor caso, el *número de operaciones elementales requeridas* por este método (una vez conocidas las matrices L y U).

b) Indicar justificando distintos valores posibles para la constante d tales que el sistema lineal dado por las ecuaciones siguientes
$x + (d+2)\, y \ = \ 2x + d\, y \ = \ 3$
pueda resolverse usando algún método iterativo de aproximación de la solución.
Elegir luego uno de esos valores de d y para el sistema resultante hacer un paso de iteración con dicho método.

Ejercicio 5

Este ejercicio debe resolverse con mínimas operaciones toda vez que sea posible, justificando todo.

i) Un observatorio ha medido la altura (por sobre el nivel del mar) de un satélite artificial, para los siguientes instantes:

tiempo (en minutos):	1	2	4
altura (en km):	100	200	250

Se pide "explicar" la altura del satélite con un polinomio de grado mínimo:
a) para los instantes 1 y 2
b) para los instantes 1, 2 y 4.

ii) Un grupo de personas, sin ver lo anterior, quiso resolver lo mismo pero haciendo 2 mediciones, en los instantes de tiempo 3 y 4, y llegó al mismo polinomio al que se llega en la parte (i)(b). ¿Cometió algún error? ¿Por qué?

Métodos Numéricos

Recuperatorio del primer parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

Dar un algoritmo o indicar cómo usar un algoritmo conocido de modo que, dado $a \in \mathbb{R}$, se pueda aproximar el valor $e^{(e^{a})}$
sin usar otras operaciones que no sean +, -, *, /, *ln*, constantes enteras y el valor *a*.

Ejercicio 2

Dadas A, B $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversibles, probar que $\kappa(A)\,\kappa(B) \;/\; \kappa(AB^{-1}) \;\geq\; 1$

Ejercicio 3

i) Indicar justificando dos posibles valores para la constante *w* tales que el sistema lineal dado por las ecuaciones siguientes

$$1 \;=\; w\,x + 2\,y \;=\; y - 2\,w\,x$$

pueda resolverse usando algún método iterativo de aproximación de la solución.
ii) Usando uno de esos valores de *w*, hacer para este sistema un paso de iteración con dicho método.

Ejercicio 4

Este ejercicio debe resolverse con mínimas operaciones toda vez que sea posible, justificando todo.
a) Hallar todos los polinomios P de grado mínimo que cumplan a la vez P(0) = P(1) = P(3) = 2 y P(4) = 14.
b) Determinar cuántos polinomios Q cumplen a la vez Q(0) = Q(1) = Q(3) = 2 y gr Q = gr P
(donde P es cualquiera de los polinomios de (a)).

Métodos Numéricos

Recuperatorio del primer parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

Demostrar que existen infinitos valores reales x_0 tal que la siguiente secuencia (x_n) converge a 1/3.

$$x_{n+1} = x_n (1 - (\log (3 x_n)))$$

Ejercicio 2

Dar un algoritmo que, dado *s*, con $-1 \leq s \leq 1$, aproxime el valor *arccos s*, sin usar otras operaciones que no sean +, -, *, /, *sen*, constantes reales cualesquiera y el valor *s*.

Ejercicio 3

Encontrar todos los posibles valores para la constante *d* tales que el sistema lineal dado por las ecuaciones siguientes

$$x + y = 3x + d\,y = 1$$

pueda resolverse usando algún método iterativo (a elección) para la aproximación de la solución.
Elegir luego uno de esos valores de *d* y para el sistema resultante hacer un paso de iteración con dicho método.

Ejercicio 4

Sean $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (1,1)$, $p_3 = (2,2)$, $p_4 = (3,0)$. Hallar un polinomio de grado mínimo que pase por p_1, p_2, p_3 y otro polinomio de grado mínimo que pase por p_2, p_3, p_4. Debe resolverse todo con mínimas operaciones.

Métodos Numéricos

Segundo parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

Sea $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = -x - 1$ si $x < 0$.
Elegir un número de intervalos m tal que para esta f, si se aplica el método de trapecios de integración numérica entre -1 y 1 con m intervalos, se obtendrá un valor no exacto.

Ejercicio 2

a) Dados los n puntos (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$, aproximarlos con la mejor de las curvas de la forma
$y = c\,x^2 - d\,x - d$, indicando el criterio usado.

b) Indicar una condición que asegure la existencia y unicidad de la dicha curva óptima.

c) La mejor de las curvas de la forma $y = a\,x + a$, con respecto a los puntos dados, ¿será en general una mejor o una peor aproximación que la curva que se calcula en (a)?

Ejercicio 3

Dado el problema de EDO siguiente para la función $y = y(x)$:

$$y - y' / x^2 = 0$$
$$y'(1) = 1 - y(1)$$

i) Aproximar una solución particular, con un método numérico adecuado a elección, para x = 0, 1 y 4.
ii) Para x = 0, determinar el error absoluto (exacto) de la aproximación que se calcula en (i).

Métodos Numéricos

Segundo parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

a) Dados los n puntos (x_i, y_i), $1 \le i \le n$, aproximarlos con la mejor de las curvas de la forma
$y = a x^2 - b x + 1$, indicando el criterio que se usa.

b) La mejor de las curvas de la forma $y = c x^2 + 1$, ¿será una mejor o una peor aproximación que la curva que se calcula en (a), con respecto a los puntos dados?

Ejercicio 2

Mostrar una familia de infinitas funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que cumplan la siguiente condición: para f, si se aplica el método de trapecios de integración numérica entre -1 y 1, se obtendrá un mismo valor usando 1 trapecio que usando 2.

Ejercicio 3

Para el problema de EDO siguiente:

$$y^2 - y' / x = 0$$
$$y'(1) = 1$$

a) Probar que hay dos soluciones particulares.
b) Aproximar una de ambas soluciones particulares a elección, a su vez con un método adecuado a elección, para x = -1, 1 y 2.
c) Calcular analíticamente la solución general de la EDO dada.

Métodos Numéricos

Recuperatorio del segundo parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Mostrar que, dada la función constante $f(x) = c$, usar integración numérica para f en el intervalo $[a, b]$ con el método de trapecios (compuesto) arroja el resultado exacto cualquiera sea el número de intervalos.

Ejercicio 2

Dados como parámetros N puntos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq N$, indicar un método o algoritmo para aproximarlos con la mejor de las curvas de la forma $y = a \cos x + 2 b x$ en el sentido de cuadrados mínimos, indicando además alguna condición suficiente para la existencia y unicidad.

Ejercicio 3

Dado el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe funciones reales $y = y(x)$:

$$x y' - y = 0 = y'(1) + y(1) - 1$$

i) Determinar cuáles son todas las funciones que cumplen ambas igualdades.
ii) Aproximar el valor de una de esas funciones en x = 10, usando algún método numérico adecuado, indicando cuál es este y detalles.

Métodos Numéricos

Recuperatorio del segundo parcial

Resolver justificando todas las respuestas.

Ejercicio 1

a) Dados los n puntos (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$, donde los $x_i > 0$, aproximarlos con la mejor de las curvas de la forma $y = a\,x + b \log x - b$, indicando el criterio que se usa.

b) A partir de dicho criterio, mostrar cómo calcular el error de esa mejor curva a partir de los (x_i, y_i).

Ejercicio 2

a) Sean a, b, c reales y n natural, y sea $f(x) = c$ para todo x real.
Aproximar la integral definida de f entre a y b usando el método de trapecios para n intervalos.
b) Mostrar una función real tal que si se la integra en forma aproximada con el método de trapecios entre 0 y 1 cualquiera sea el número de trapecios usado se obtiene un valor menor que el valor exacto.

Ejercicio 3

Dado el siguiente problema de valor inicial de EDO:

$$2\,y\,y'\,e^{-x} = 1$$
$$y'(1) = e$$

a) Aproximar una solución particular del PVI en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
b) Explicar si esta solución particular del PVI es única.
c) Calcular los valores exactos que toma la solución particular anterior en los puntos indicados, justificando.

Final de MN

Responder y justificar todo.

1) Explicar una manera de determinar si, dados n puntos de $\mathbb{R}^3$, todos están en un mismo plano, utilizando los valores obtenidos de la regresión lineal mediante cuadrados mínimos.

2) Explicar cuántas funciones y (dependiente de x), con derivada y', satisfacen la condición
$x\,y^2 - 10\,x^2 + 5x + 6\,y' + y^3 - 1 = 0$ para todo x real.

3) Al calcular el polinomio interpolador de grado mínimo usando el método de Lagrange, ¿cuántas operaciones elementales se requiere en función de la cantidad de puntos?

4) Mostrar un ejemplo de problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias que tenga más de una solución particular.

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal. Mostrar los pasos de aplicar el método de Newton para hallar raíces de f e indicar si converge.

6) Explicar cómo se puede calcular la aceleración instantánea de un móvil unidimensional a partir de sus posiciones en n instantes discretos de tiempo equiespaciados, y qué limitaciones tiene el método.

7) ¿Cuáles de las siguientes matrices son adecuadas para usar el método de Jacobi para sistemas lineales?
a) matriz identidad de $n{\times}n$ b) matriz de $n{\times}n$ con elementos todos 1 c) $\begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ -6 & 7 & 7 \end{matrix}$