2. LEI DE GAUSS

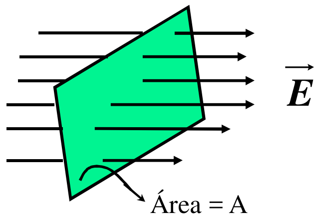
Lei de Gauss:

- Outro procedimento para o cálculo dos campos eléctricos.
- É uma consequência da lei de Coulomb.
- Mais indicada para o cálculo do campo eléctrico de distribuições de carga simétrica.
- Guia para o entendimento de problemas mais complicados.

2.1 Fluxo Eléctrico

- Base quantitativa a ideia de linhas do campo eléctrico.
- Fluxo do campo eléctrico é uma medida do número de linhas do campo que atravessam uma dada superfície.
- Quando a superfície atravessada contém uma certa carga eléctrica, o número de linhas que saem através da superfície menos o número de linhas que entram através da superfície é proporcional à carga total no interior da superfície.
- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga (~ Lei de Gauss)

→ Campo Eléctrico uniforme, área A ⊥ ao campo

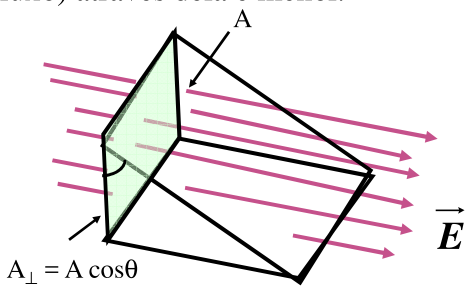


!! O número de linhas por área unitária é proporcional ao módulo do campo eléctrico.

⇒ $\boxed{\Phi = E\,A}$ $\left(N\, m^2 / c \right)$

- Φ → Fluxo Eléctrico
- E → Módulo do Campo
- A → Área de superfície ⊥ ao campo

→ Se a superfície não for ⊥ ao campo ⇒ o número de linhas (ou o fluxo) através dela é menor.



- θ : ângulo entre a normal à superfície A e o campo eléctrico uniforme.
- Nº Linhas que atravessam A = número de linhas que atravessam a área projectada $A_\perp$ ($\perp \vec{E}$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi = E\,A\cos\theta = E\,A_{\perp}}$$

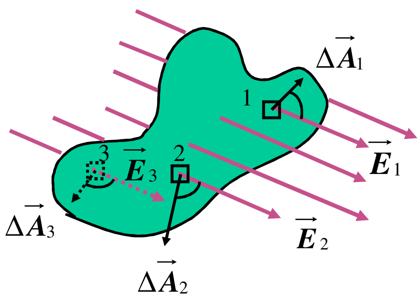
Fluxo através de uma superfície de área fixa

Tem: (*) Valor máximo, E A, quando a superfície é $\perp$ ao campo ($\cos 0 = 1$)

(*) Valor nulo quando a superfície é // ao campo ($\cos 90 = 0$)

$\Rightarrow$ Em situações mais gerais, o campo eléctrico pode variar sobre a superfície considerada.

Em situações mais gerais, o campo eléctrico pode variar sobre a superfície considerada.



$\Delta\vec{A}_i$ cujo módulo é a área do iésimo elemento e cuja direcção é a da normal à superfície ($\Delta\vec{E} = 0$ em $\Delta\vec{A}_i$)

$$\Rightarrow \Delta\,\Phi_i = E_i \Delta\,A_i \quad \cos\theta = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$$\phi \equiv \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i = \int_{\text{superfície}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Definição geral do fluxo eléctrico

- Integral sobre uma superfície hipotética
- Em geral o valor de ☞ depende da configuração do campo e da superfície que se tiver escolhido.

Usualmente: fluxo através de uma superfície fechada (superfície que divide o espaço numa região interior e numa exterior)

! $\Delta\vec{A}_i$ São normais à superfície (apontam "para fora")

Fig. anterior:

☞ 1 e 2 : $\vec{E}$ está para fora e $\theta < 90º \Rightarrow$ $\Delta\phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} > 0$

☞ 3 : $\vec{E}$ está para o interior e $\theta > 90º \Rightarrow$ $\Delta\phi < 0$

O fluxo total, através da superfície, é proporcional ao número de linhas que atravessam a superfície.

nº de linhas que saem – nº de linhas que entram

- Saem > entram $\Rightarrow$ fluxo positivo
- Entram > saem $\Rightarrow$ fluxo negativo

Fluxo total

$$\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

Superfície fechada

Integral sobre uma superfície fechada

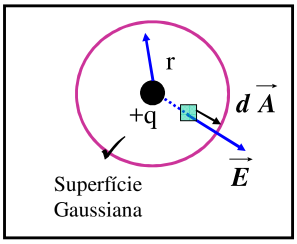
Componente do campo $\perp$ à superfície

- Pode ser muito trabalhoso
- Campo $\perp$ à superfície, em cada ponto, e tiver módulo cte $\Rightarrow$ cálculo directo.

2.2 Lei de Gauss

Relação geral entre o fluxo eléctrico através de uma superfície fechada (superfície Gaussiana) e a carga no interior da superfície.

- Carga ***+q*** no centro de uma esfera de raio ***r***



- $E = q/r^2$, sup. Da esfera.
- radial //
- $\vec{E}$ $\quad \vec{E} \quad \Delta\vec{A}_i \quad \forall i$
- $\vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = E_n \Delta A_i = E\Delta A_i$
- $\phi_c = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA$

E = cte. na superfície

- Superfície Gaussiana Esférica

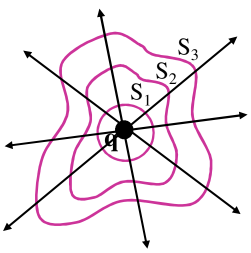
$$\oint dA = A = 4\pi r^2$$

$$\boxed{\phi_c = \frac{K\,q}{r^2}\left(4\pi r^2\right) = 4\pi K\,q = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

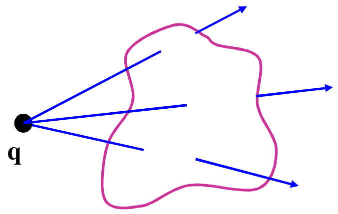
! Independente de r

O fluxo através duma superfície Gaussiana esférica é proporcional à carga *q* no interior da superfície.



- ϕ ≡ número de linhas que atravessam a superfície.
- O fluxo através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga pontual q é dado por q/ε_0

- Carga pontual no exterior de uma superfície fechada.

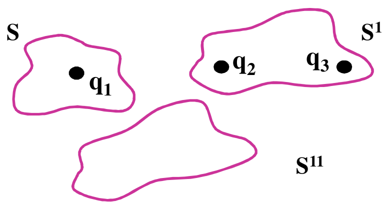


O fluxo através de uma superfície fechada que não envolve nenhuma carga, é nulo.

Caso geral de muitas cargas pontuais, ou de uma distribuição contínua de cargas.

- Princípio da sobreposição: o campo eléctrico de muitas cargas é igual à soma vectorial dos campos eléctricos das cargas individuais.

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_{3\ldots}\right) d\vec{A}}$$



$$\boxed{\phi_{cs} = q_1/\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi_{cs^1} = \left(\frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0}\right)}$$

$$\boxed{\phi_{cs^{11}} = 0}$$

- Lei de Gauss: $\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

Carga no interior da superfície

Campo eléctrico em qualquer ponto da superfície Gaussiana

O fluxo eléctrico através de qualquer Superfície Gaussiana fechada é igual à carga no interior da superfície, dividida por ε_0

! q_{in} : carga eléctrica no interior da Superfície Gaussiana.

$\vec{E}$: campo eléctrico total (contribuições das cargas no interior e no exterior da Superfície Gaussiana.)

- Na prática, a Lei de Gauss só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana.)

- A Superfície Gaussiana é uma superfície matemática.

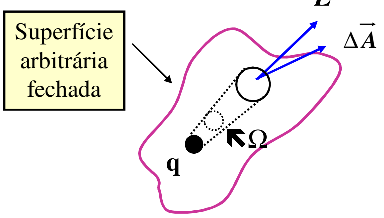
- Se a Superfície Gaussiana for cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral $\oint$ será fácil de calcular.

2.2.1 Dedução da Lei de Gauss

- Ângulo sólido: $\boxed{\Delta\Omega \equiv \dfrac{\Delta A}{r^2}}$ (adimensional)

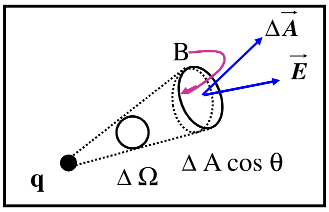
  Unidade: esterradiano

  (superfície esférica de raio **r** que subtenda um elemento de área Δ ✌ $\Rightarrow \Delta\Omega$ é o ângulo sólido subtendido por esse elemento.) (*)



(*) Uma vez que a área superficial total da esfera é $4\pi r^2$, o ângulo sólido total subtendido pela esfera, no seu centro, é dado por:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad \text{esterradianos}$$



$$\Delta\Omega = (\Delta A \cos\theta)/r^2$$

$$\Delta\phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = E \cos\theta \, \Delta A = Kq \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2}$$

$$kq/r^2$$

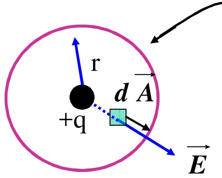
$$\phi_c = Kq \oint \frac{dA \cos o}{r^2} = Kq \oint d\Omega = 4\pi Kq = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

! • não depende da forma da superfície fechada
• É independente da posição da carga no interior da superfície.

2.3 Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores Carregados.

- Cálculo do campo eléctrico $\vec{E}$ de uma dada distribuição de cargas.
- A Lei de Gauss é útil quando há um elevado grau de simetria na distribuição de cargas: e.g. esferas, ou cilindros compridos, ou chapas planas, todas uniformemente carregadas.
- A superfície deve ser sempre escolhida de modo que tenha a mesma simetria da distribuição de carga.

a) Campo eléctrico duma carga pontual.



Superfície Gaussiana esférica, raio r

Campo radial, para fora

$\vec{E} \perp S \;\forall\; P_{sup}$

$$\vec{E} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$$

Lei de Gauss:

$$\phi_C = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint EdA = q/\varepsilon_0$$

$$\oint EdA = \oint EdA = E\left(4\pi r^2\right) = q/\varepsilon_0$$

E=cte $\forall$ P_{sup}

⇒ Módulo do campo $$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\frac{q}{r^2}$$

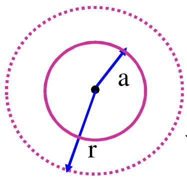
⇒ Força electrostática sobre uma segunda carga pontual q_0

Módulo ⇒ $$F = q_0\ E = K\frac{qq_0}{r^2}$$ Lei de Coulomb

b) Distribuição de Carga com Simetria Esférica

- Esfera isolante; raio a; densidade de carga ρ uniforme +Q carga total

1) Intensidade do campo num ponto externo, r>a

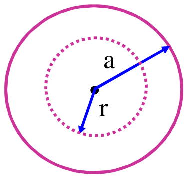


Superfície Gaussiana esférica, raio r, concêntrica

Exemplo aj ⇒ $$E = K\ Q/r^2$$

! Resultado idêntico ao que foi obtido para uma carga pontual ⇒ equivalente!!!

2) Intensidade do campo num ponto no interior da esfera (r<a)



Esfera Gaussiana

Q_{in} no interior da Superfície Gaussiana de Volume Vé < Q

$$q_{in} = \rho \int V = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Exemplo a) ⇒ $E = cte\ ;\ \vec{E} \perp\ Sup\ .\ Gauss\ \ \forall\ P_{sup}$

Lei de Gauss r < a

$$\oint \boldsymbol{EdA} = \boldsymbol{E}\oint \boldsymbol{dA} = \boldsymbol{E}\left(4\pi \boldsymbol{r}^2\right) = \frac{\boldsymbol{q}_{in}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

$$E = \frac{q_{in}}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)} = \frac{\rho\, \tfrac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

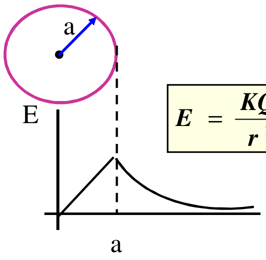
$$Como \quad \rho = \frac{Q}{\left(\tfrac{4}{3}\pi a^3\right)} \qquad \text{(Def.)}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Qr}}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{a}^3} = \frac{\boldsymbol{KQ}}{\boldsymbol{a}^3}\boldsymbol{r} \qquad \text{r < a}$$

- E⇒ 0 quando r ⇒ 0 (simetria)

$$\boxed{Se\ \ E \equiv {}^{1}\!/_{r^2} \Rightarrow E = \infty\ \ em\ \ r = 0\,!!}$$

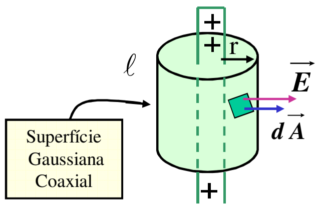
(fisicamente impossível)

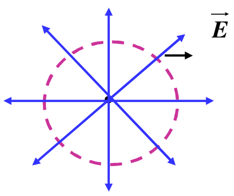


$$\boxed{E = \frac{KQ}{r^2}}$$

c) Distribuição de Cargas com Simetria Cilíndrica.

- Achar $\vec{E}$ à distância r de uma recta uniformemente carregada, com carga +, de comprimento ✪ e λ = cte
- Simetria : $\vec{E}$ ⊥ recta e tem direcção radial.





Sobre a Superfície Gaussiana. $E = cte,\ \vec{E} \perp S\ \forall\ P_{sup}\ \left(\vec{E} \parallel d\vec{A}\right)$

Fluxo nas partes terminais do cilindro Gaussiano é nulo. $\left(\vec{E} \parallel faces;\ \vec{E} \perp d\vec{A}\right)$

$$q_{in} = \lambda\ell$$

Lei de Gauss

$$\phi_c = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$A = 2\pi r \ell$ (área da superfície cilíndrica) $\Rightarrow$

$$E(2\pi rl) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2K\frac{\lambda}{r}} \quad (1)$$

- $E \equiv 1/r$
- Cálculo mais trabalhoso pela Lei de Coulomb.
- Recta finita $\Rightarrow$ E $\neq$ (1)

  $E \neq cte;\ \vec{E} \not\perp Sup.\ \forall\ P_{sup}$

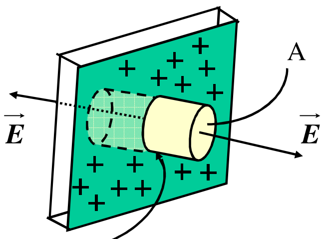
  Lei de Gauss não tem utilidade.

  Pontos vizinhos da recta, e afastados das extremidades $\Rightarrow$ (1) boa estimativa do valor real do campo.

  Pouca simetria na distribuição de carga $\Rightarrow$ é necessário calcular Mediante a Lei de Coulomb

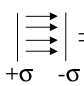
d) Folha Plana não Condutora Electricamente Carregada.

- Carga σ uniforme



$$\phi_c = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

- $\vec{E} \perp$ plano folha, direcção $\vec{E}$ oposta em cada face.
- Cilindro recto equidistante do plano.
- $\vec{E} \parallel$ superfície cilíndrica $\Rightarrow \phi_{sup} = 0$
- ϕ para fora, de cada base do cilindro = EA $(\vec{E} \perp base)$
- Fluxo total = 2EA
- E $\neq$ E(r) (qualquer distância do plano campo uniforme ∀ P)
-  $\Rightarrow$ $E = \sigma/\varepsilon_0$, entre os planos; E = 0, outros pontos

2.4 Condutores em Equilíbrio Electrostático

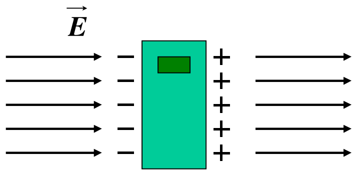
- Um bom condutor eléctrico (Cu) contém cargas (e^-) que não estão ligadas a nenhum átomo e podem-se deslocar no interior do metal.
- Condutor em equilíbrio electrostático quando não há um movimento líquido no interior do metal.

Propriedades:

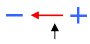
1. O campo eléctrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.
2. Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.

3. O campo eléctrico na face externa da superfície dum condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a σ/ε_0 , onde σ é a carga por unidade de área no ponto da superfície.
4. Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda.

1. Placa condutora num campo eléctrico $\vec{E}$



$\vec{E}_d$



O campo opõe- se ao campo externo

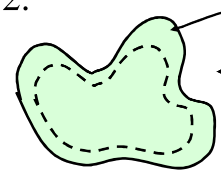
$\boxed{\vec{E}+\vec{E}_d=0}$ ⟵ No interior do condutor

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

! Se $\vec{E}\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{q}$ livres seriam aceleradas.

2. e 3. Lei de Gauss

2.

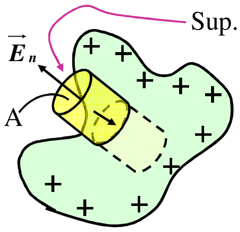


- (1.) $\vec{E}=0$ em todos os pontos do interior do condutor
- $\vec{E}=0$ em qualquer ponto da Superfície Gaussiana $\Rightarrow \phi_c=0$
- Lei de Gauss $\Rightarrow q_{in}=0$

Como não pode haver carga líquida no interior da Superfície Gaussiana que está arbitrariamente próxima da superfície do Condutor $\Rightarrow$ qualquer excesso de carga, num condutor, deve estar na superfície do condutor.

! A Lei de Gauss não nos diz como é que o excesso de carga se distribui sobre a superfície (Tema seguinte provaremos 4.)

3. Lei de Gauss $\Rightarrow$ relacionar o campo eléctrico sobre a face externa da superfície de um condutor em equilíbrio com a distribuição de carga no condutor.



- $\vec{E}$ interior $\Rightarrow \phi = 0$ através da superfície do cilindro no interior.
- $\vec{E} \perp$ superfície (se $\vec{E}$ tivesse uma componente tangencial, as cargas livres deslocar-se-iam sobre a superfície, criariam correntes, e o condutor não estaria em equilíbrio.)

$\Rightarrow \phi_0 = 0$ através da superfície cilíndrica da Superfície Gaussiana.

$\Rightarrow$ ϕ_c (fluxo líquido)= $E_n A$

campo eléctrico na face externa $\perp$ à superfície.

Lei de Gauss: $\boxed{\phi_c = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$

$\boxed{q_{in} = \sigma A}$

Carga (local) por Unidade de área

Área da base do cilindro

$\Rightarrow$ $\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$