

introdução aos sistemas dinâmicos

edos de primeira ordem separáveis

■ 3.

$$x'(t) = 2tx = f(t)g(x), \text{ com } f(t) = 2t \text{ e } g(x) = x$$

logo, trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável

vamos procurar saber se a equação diferencial admite soluções de tipo constante:

$$g(x) = x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2tx \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x} dx = 2t dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \int 2t dt$$

consultando uma tabela de primitivas, podemos escrever a solução formal da equação diferencial:

$$\ln |x| = t^2 + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

agora, vamos procurar a solução explícita da equação diferencial. aplicando a função exponencial a ambos os lados da igualdade, obtemos

$$|x| = \exp(t^2 + C) = e^{t^2} e^C = A e^{t^2}, \text{ com } A = e^C \text{ uma constante positiva}$$

de seguida, vamos analisar a igualdade considerando as duas situações possíveis (recorde-se que $x \neq 0$)

$$x > 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = A e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x < 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = -A e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

resumindo, encontrámos as seguintes soluções da equação diferencial, com A uma constante positiva:

$$x(t) = A e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = -A e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

habitualmente, apresentam-se todas estas soluções numa única expressão:

$$x(t) = A e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}$$