

## introdução aos sistemas dinâmicos

### equações às diferenças

1.

---

considere o sistema dinâmico discreto descrito pela equação às diferenças de primeira ordem

$$x_n = 1 - 2x_{n-1}^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

determine os valores que  $x$  toma nos cinco primeiros instantes de tempo, sabendo que no instante inicial  $x_0 = 0.86$

2.

---

considere o sistema dinâmico discreto descrito pela equação às diferenças de primeira ordem

$$x_n = 4x_{n-1} - 2x_{n-1}^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

calcule os seis primeiros elementos da órbita de  $x_0 = 0.2$

**nota.** chama-se órbita de  $x_0$  à sequência infinita  $(x_k)$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$  (de certa forma, a órbita de  $x_0$  corresponde à solução da equação às diferenças, quando no instante inicial  $x$  toma o valor  $x_0$ )

3.

---

considere o sistema dinâmico discreto descrito pela equação às diferenças de segunda ordem

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \quad x \in \mathbb{R}$$

3.1 calcule os oito primeiros elementos da órbita de  $(x_0, x_1) = (1, 2)$ .

3.2 a partir dos resultados obtidos na alínea anterior, diga por que razão é possível antecipar que o nono elemento da órbita em causa é igual a  $-1$ .

4.

---

considere o sistema dinâmico discreto descrito pela equação às diferenças de primeira ordem

$$x_n = \sin 1.6 x_{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$$

4.1 determine os quatro primeiros elementos da órbita de  $x_0 = -0.185$ .

4.2 mostre graficamente que o sistema admite soluções de tipo constante.

4.3 mostre graficamente que o sistema não admite ciclos de período 2.

**nota.** diz-se que o sistema admite um ciclo de período 2 se existe  $x_0$  para o qual  $x_2 = x_0$ , com  $x_1 \neq x_0$  (um ciclo de período 2 corresponde a uma solução periódica, de período 2, da equação às diferenças)

■ 5.

---

considere o sistema dinâmico discreto descrito pela função

$$f(x) = 1.2x + 2.8x^2 - 4.0x^3 \quad x \in [0, 1]$$

5.1

determine os vinte primeiros elementos da órbita de  $x_0 = 0.95$  e apresente esses valores num gráfico.

5.2

mostre graficamente que o sistema dinâmico admite soluções de tipo constante. determine as soluções de tipo constante do sistema dinâmico.

5.3

mostre graficamente que o sistema dinâmico admite ciclos de período dois. determine os ciclos de período dois do sistema dinâmico.

■ 6.

---

estude o sistema dinâmico discreto descrito pela função

$$f(x) = -1.82 - 0.74x - 0.16x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

relativamente aos pontos fixos/soluções de tipo constante e aos ciclos de período dois.

■ 7.

---

estude o sistema dinâmico discreto descrito pela função

$$f(x) = 1.982 - 2.306x - 0.708x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

relativamente aos pontos fixos e aos ciclos de período dois.

■ 8.

---

estude o sistema dinâmico discreto descrito pela função

$$f(x) = -1.284 - 3.128x - 2.671x^2 - 0.722x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

relativamente aos pontos fixos e aos ciclos de período dois.