introdução aos sistemas dinâmicos

edos de primeira ordem separáveis

6.

$x'(t) = -4\,x = f(t)\,g(x)$, com $f(t) = -4$ e $g(x) = x$

logo, trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável

vamos procurar saber se a equação diferencial admite soluções de tipo constante:

$g(x) = x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4\,x \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -4\,\mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int -4\,\mathrm{d}t$$

consultando uma tabela de primitivas, podemos escrever a solução formal da equação diferencial:

$\ln|\,x\,| = -4\,t + \mathrm{C}$, com $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$

agora, vamos procurar a solução explícita da equação diferencial. aplicando a função exponencial a ambos os lados da igualdade, obtemos

$|\,x\,| = \exp(-4\,t + \mathrm{C}) = \mathrm{e}^{-4t}\mathrm{e}^{\mathrm{C}} = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}$, com $A = \mathrm{e}^{\mathrm{C}}$ uma constante positiva

de seguida, vamos analisar a igualdade considerando as duas situações possíveis (recorde-se que $x \neq 0$)

$x > 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}$

$x < 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = -\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}$

resumindo, encontrámos as seguintes soluções da equação diferencial, com A uma constante positiva:

$x(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}$

$x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

$x(t) = -\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}$

habitualmente, apresentam-se todas estas soluções numa única expressão:

$x(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A} \in \mathbb{R}$

finalmente, vamos escrever a solução da equação diferencial escrevendo-a não em termos de uma constante arbitrária A sem qualquer significado, mas sim em função do valor $x_\mathrm{o} = x(0)$ que x toma no instante inicial $t = 0$. para tal, vamos escrever

$x(0) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{0} = \mathrm{A} = x_\mathrm{o}$

ou seja

$x(t) = x_\mathrm{o}\,\mathrm{e}^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_\mathrm{o} \in \mathbb{R}$