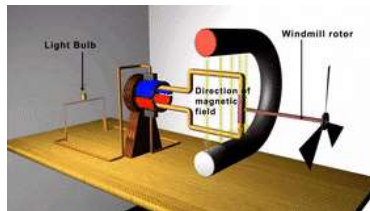


7. Indução eletromagnética

A produção de eletricidade, o armazenamento de dados, as comunicações e diversos equipamentos de uso comum usam o efeito de indução eletromagnética



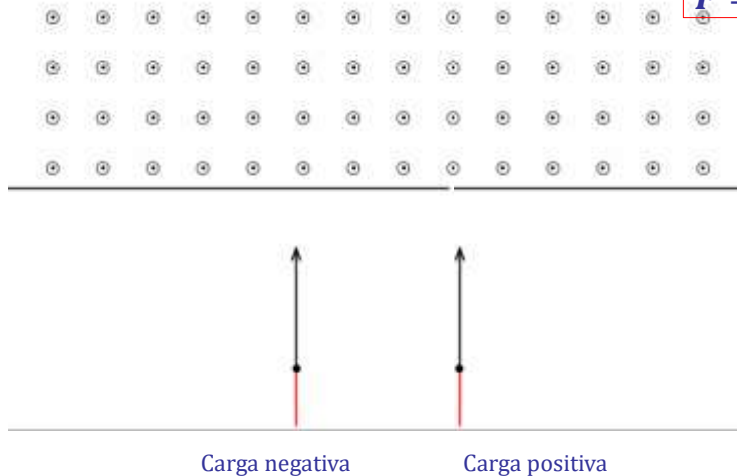
Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

1

Campos magnéticos têm influência em cargas elétricas que se movam nesse campo \Rightarrow Podem separar cargas de sinal contrário, por exemplo (capítulo 6)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

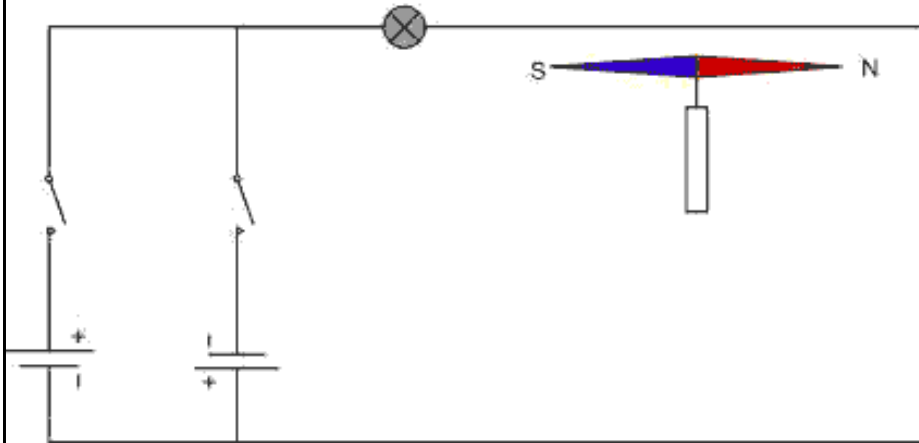
$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

2

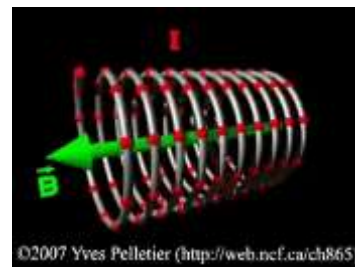
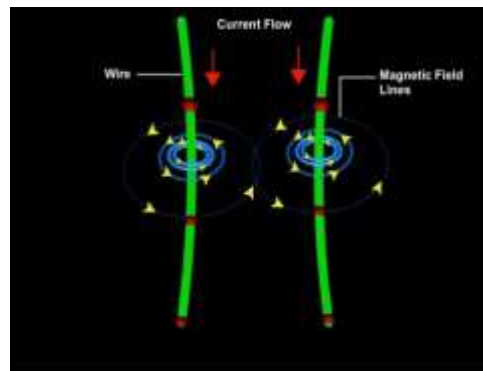
Correntes eléctricas \Rightarrow criam campos magnéticos (cap. 6: e.g. Experiência de Oersted, Lei de Biot- Savart, Lei de Ampère).



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

3

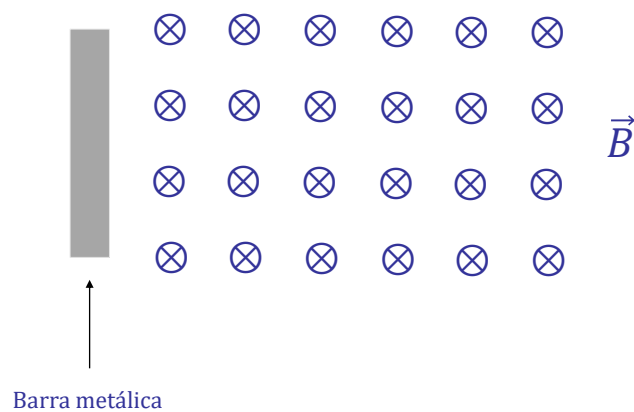


Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

©2007 Yves Pelletier (<http://web.ncl.ca/ch865>)

Se correntes elétricas provocam campos magnéticos, será que campo magnéticos não induzem correntes elétricas num circuito?

Que deve acontecer na barra se a movermos para a direita no campo magnético uniforme?



As cargas sentem a força magnética. Mas os eletrões livres dos metais podem deslocar-se na barra devido à ação dessa força.

Este movimento dos eletrões livres acaba por gerar uma separação de carga, que por sua vez acaba por criar um campo elétrico no interior do condutor.



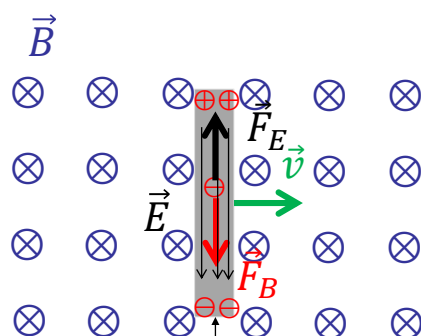
Barra metálica de comprimento L

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$E = \frac{V}{L}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

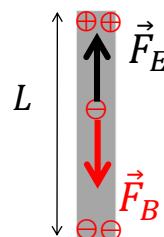
7



Barra metálica de comprimento L

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$E = \frac{V}{L} \quad \vec{F}_E = q\vec{E}$$



Quando: $F_B = F_E$

$$qvB = qE$$

$$vB = E$$

$$vB = \frac{V}{L}$$

$$V = vLB$$

A ddp criada na barra depende do seu comprimento, da velocidade com que se movimenta no campo e da magnitude do campo magnético.

Se as extremidades da barra forem colocadas em contacto através de um condutor, esta ddp traduz uma **f.e.m.** que induz uma corrente elétrica no circuito formado!

$$\varepsilon = vLB$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

8

Que acontece se ao movimentar a barra as extremidades estiverem ligadas por um condutor?

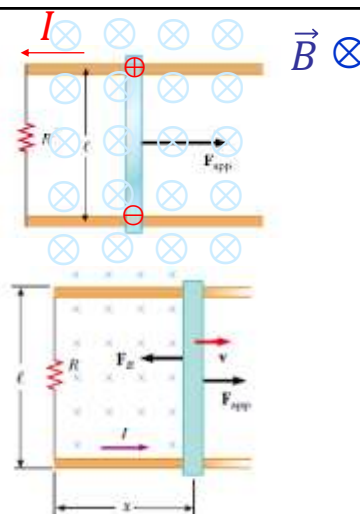
Checkpoint

Considere o esquema da figura, em que uma barra condutora pode ser deslocada sem atrito.

O circuito encontra-se localizado numa região onde existe um campo magnético uniforme de 2.5 T, com sentido assinalado.

Admita que a resistência do circuito é $R = 6.00 \, \Omega$, $l = 1.20 \, \text{m}$.

- A que velocidade constante deve ser movida a barra para que a corrente na resistência seja de 0.50 A? (R: 1 m/s)
- Qual o valor da F_{app} ? (R: 1.5 N)
- Qual a potência dissipada? Compare com o valor da potência resultante da aplicação de F_{app} na barra condutora. (R: 1.5 W)



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varepsilon &= vLB \\ \varepsilon &= RI \quad v = \frac{RI}{LB} \quad v = \frac{6 \times 0.5}{1.2 \times 2.5} = 1.0 \, \text{m/s} \end{aligned}$$

- b) F_{app} tem de ser igual a F_B para que v seja constante

$$F_{\text{app}} = F_B = ILB \quad F_{\text{app}} = 0.5 \times 1.2 \times 2.5 = 1.5 \, \text{N}$$

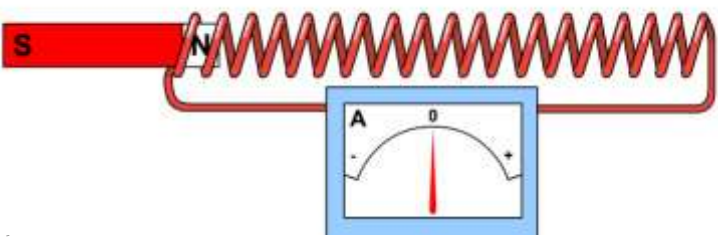
$$\text{c)} \quad P_d = RI^2 = 6 \times 0.5^2 = 1.5 \, \text{W}$$

$$P_{\text{app}} = Fv = 1.5 \times 1 = 1.5 \, \text{W}$$

Nos início dos anos 30 do séc. XIX, Michael Faraday, verificou que:



Faraday (1791-1867)



(a)

Quando o íman é deslocado no sentido da bobina, a agulha do galvanómetro desvia-se num sentido.



(b)

Quando o íman é mantido em repouso, em relação à bobina, não há desvio da agulha do galvanómetro.



(c)

Quando o íman é deslocado no sentido oposto da bobina, a agulha do galvanómetro desvia-se no outro sentido

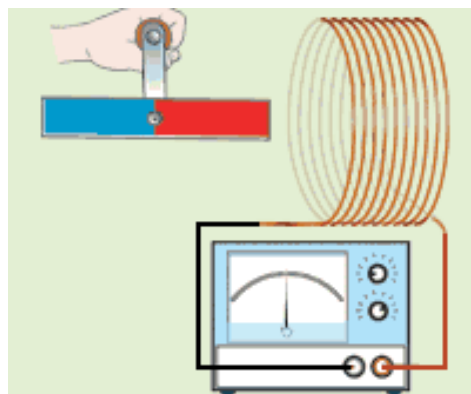
A partir destas observações, concluímos que o circuito "sabe" que o íman está a ser movimentado, em que sentido

- Verifica-se o **aparecimento de uma corrente** quando existe **movimento relativo entre a bobina e o íman**.
- Não existe corrente quando não existe movimento relativo
- Quanto **mais rápido for o movimento relativo maior é a intensidade da corrente**.
- O **sentido da corrente** depende da orientação relativa do íman em relação à bobina.

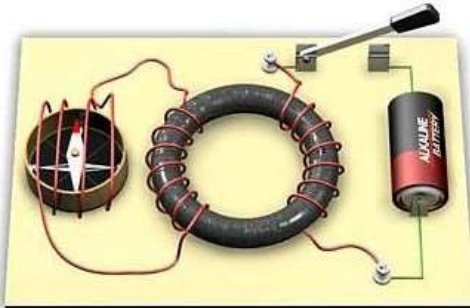
→ **Processo de Indução**

A corrente produzida no circuito é uma corrente induzida

Uma aplicação óbvia do efeito descoberto por Faraday: produção de corrente eléctrica (corrente alternada)

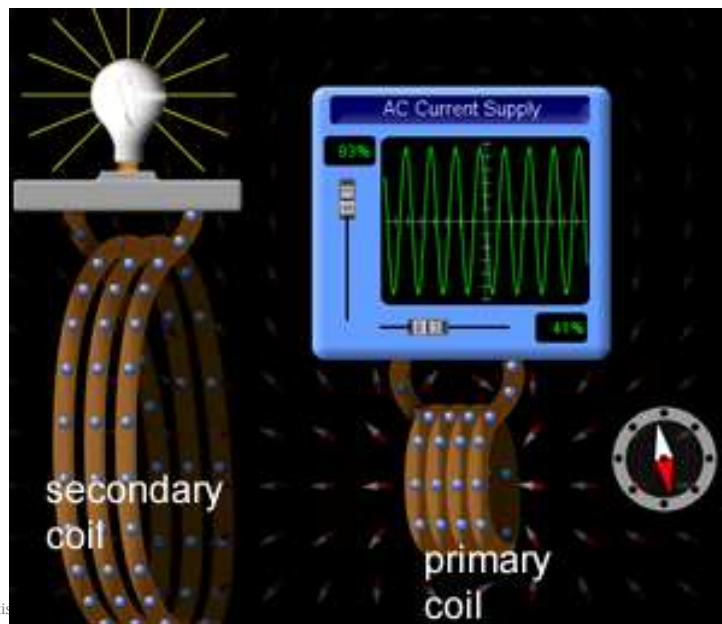


Outra experiência de Faraday



- Se **fecharmos o interruptor**, verificamos que a agulha da bússola se **move**, regressando de seguida à posição inicial.
- **Nada acontece** enquanto a **corrente** no primeiro circuito se mantém **estacionária (constante)**
- Quando se **abre o interruptor** acontece algo **semelhante** ao que acontece quando se liga o circuito, com a diferença da **agulha se deslocar para o sentido oposto**.

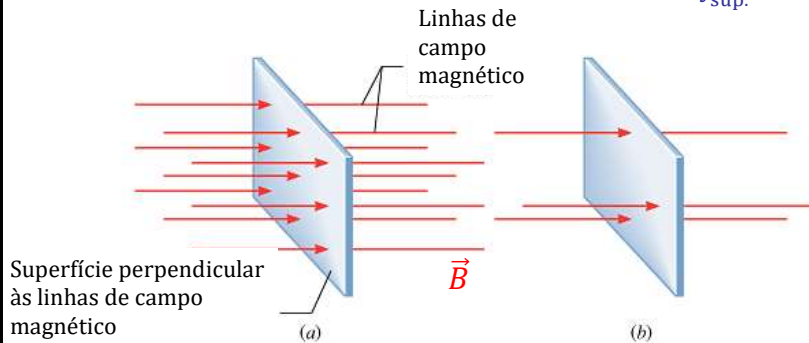
Aplicação deste efeito descoberto por Faraday: transferência de energia *wireless*)



Explicação formal – **Lei de Faraday-Lenz!**

Noção de fluxo do campo magnético

$$\phi_B = \int_{\text{sup.}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

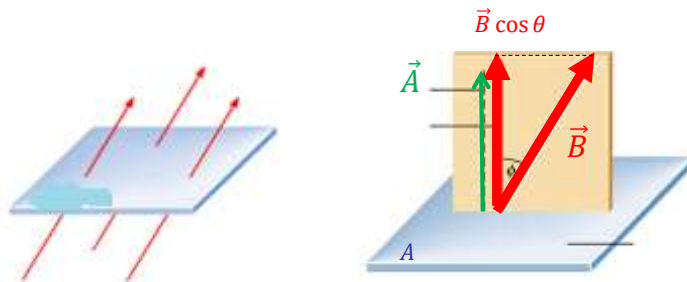


Paralelismo com o fluxo do campo elétrico. O fluxo do campo magnético é proporcional ao nº de linhas de campo que atravessa a superfície.

$$\phi_B(a) > \phi_B(b)$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

17



$$\phi_B = \int_{\text{sup.}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\phi_B = \int_{\text{sup.}} B dA \cos \theta$$

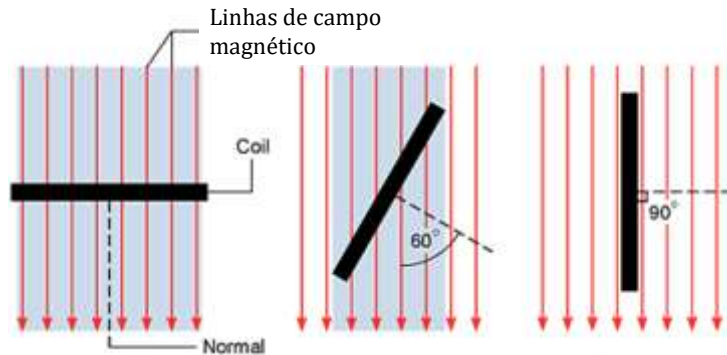
As unidades SI de Fluxo do campo magnético são... **T m²** = **Wb** (Weber)

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

18

Checkpoint

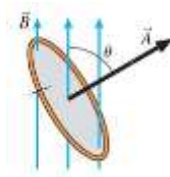
Uma espira circular, com área de 2.0 m^2 , está localizada numa região onde existe um campo magnético constante de magnitude 0.50 T . Calcule o fluxo do campo magnético através da área da espira nas 3 situações representadas.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

19

Quando o fluxo do campo magnético através de uma espira varia, surge na espira uma corrente eléctrica (**corrente induzida**).



A corrente eléctrica induzida, é originada por uma **força eletromotriz induzida** (ϵ). A f.e.m. induzida na espira é igual à taxa de variação do fluxo do campo magnético através da espira.

Quando o número de linhas de campo que atravessa uma espira se altera, surge na espira uma força eletromotriz induzida.

$$\epsilon = \left| \frac{d\phi_B}{dt} \right|$$

Lei de Faraday

O valor da intensidade da corrente eléctrica induzida depende da resistência eléctrica da espira.

$$I = \frac{\epsilon}{R}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

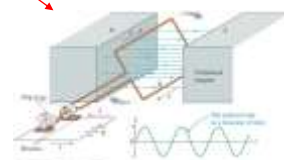
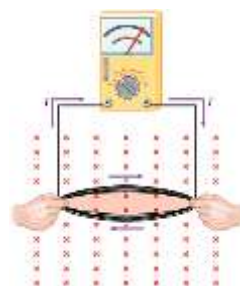
20

$$\varepsilon = \left| \frac{d\phi_B}{dt} \right|$$

$$\phi_B = \int_{\text{sup.}} B dA \cos \theta$$

A variação de fluxo pode conseguir-se de vários modos:

1. Alterar a área da espira;
2. Alterar a magnitude do campo magnético
3. Alterar a orientação da espira.
4. Qualquer combinação destas alterações.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

21

Ora a f.e.m. induzida, provoca uma corrente eléctrica induzida no circuito fechado. Qual o sentido da corrente?

Lei de Lenz:

O sentido da *fem* induzida é tal que produz uma corrente eléctrica cujo campo magnético se **opõe à variação do fluxo magnético** através da espira. Isto significa que a corrente induzida tende a manter o fluxo inicial através do circuito.

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

No caso de um enrolamento com N espiras:

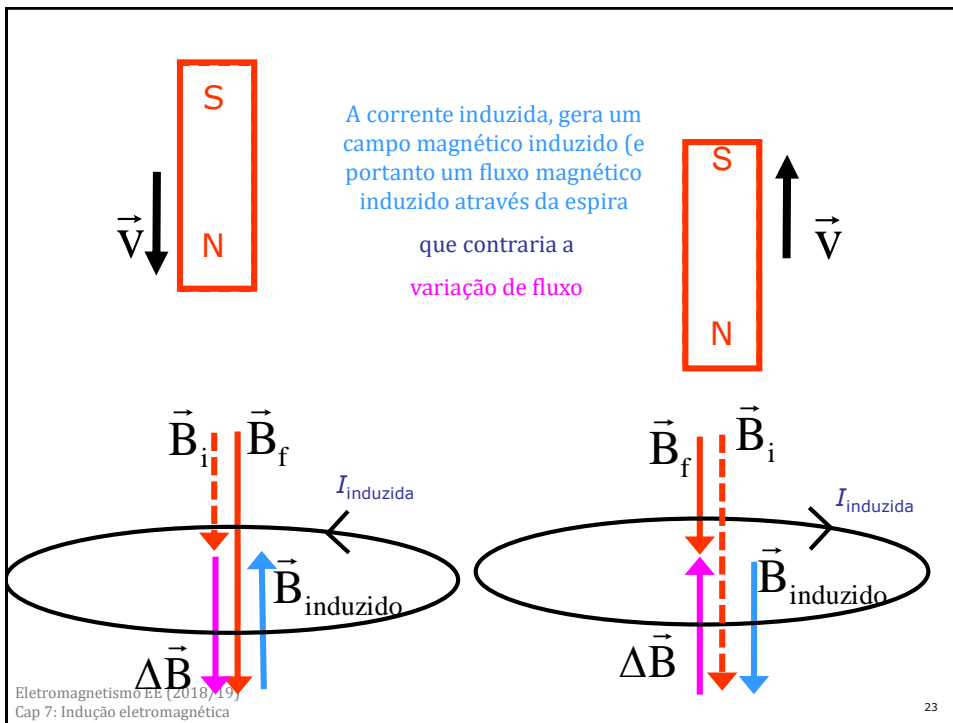
$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt}$$

Lei de Faraday-Lenz

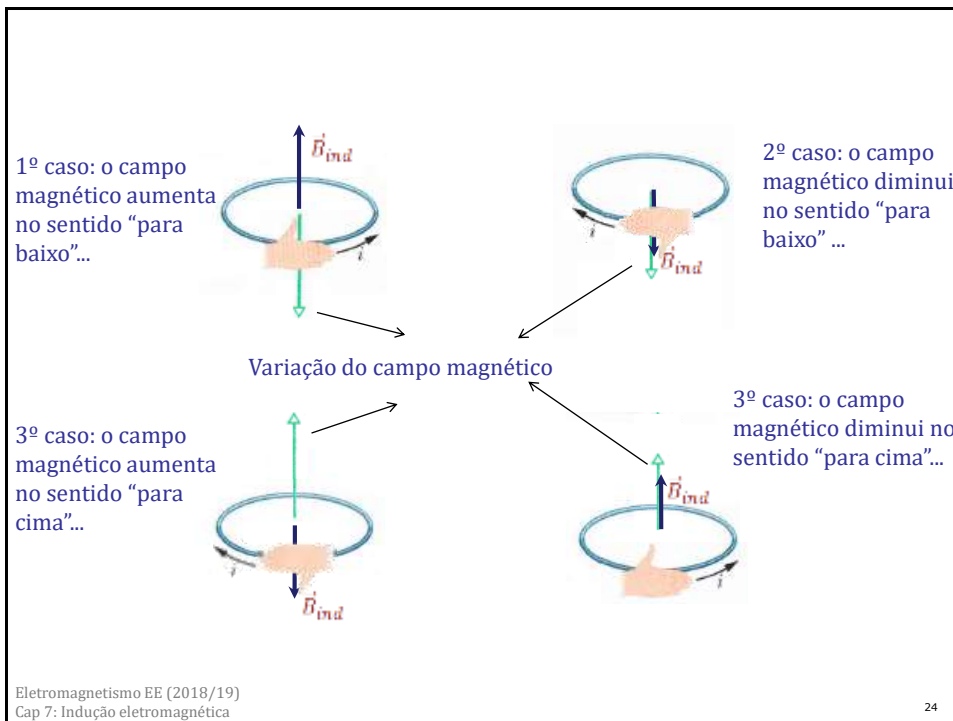
<http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/lenzlaw/index.html>

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

22




23





24

Como se explica a queda mais lenta do magnete de Nd no tubo de Cobre?

Queda livre e não livre

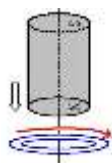


- O Cu ou o Al, por exemplo, são condutores mas não magnéticos.
- Uma peça de aço cai, no interior do tubo, com uma aceleração ~igual à aceleração gravítica.



Um magnete forte (neodímio) cai, no interior do tubo de Cu ou de Al, com aceleração inferior à aceleração gravítica.

O Cu ou o Al "sente" o campo magnético a variar. Esta variação de campo (e fluxo) magnético induz uma corrente no tubo de Cu ou Al.



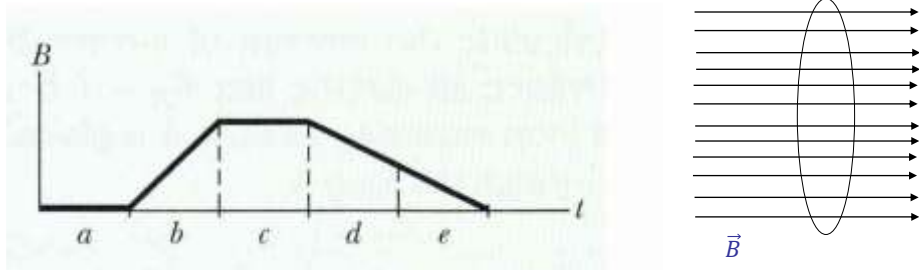
A corrente induzida tem um sentido que produz um campo magnético que se opõe à variação do fluxo magnético.

Material:

- 1 tubo de Cu ou Al
- 1 tubo de acrílico
- magnete de neodímio

Checkpoint

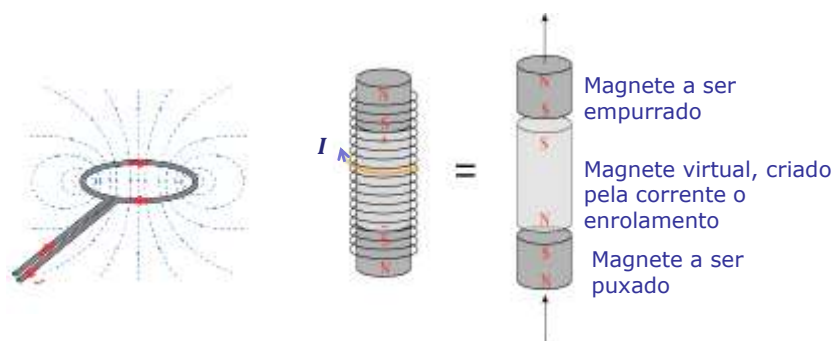
O gráfico mostra a variação do campo magnético que existe numa região onde se encontra uma espira condutora. A direção do campo magnético é perpendicular ao plano da espira. Os intervalos de tempo a , b , c , d e e são iguais. Ordene as 5 regiões por ordem crescente do módulo da fem induzida.



Quando há corrente induzida, qual é o sentido da corrente elétrica induzida?

O que faz andar a pilha e
magnetes no interior do
enrolamento de cobre?

"Comboio" magnético



Material:

- 2 discos magnéticos de neodímio (15 x 8 mm)
- Pilha (1,5 V)
- Fio de cobre não revestido (0,8 mm a 1,1 mm de diâmetro)
- Enrolamento de fio de cobre com ≈ 16 mm de diâmetro

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

29

Indução e Transferência de Energia (outra perspetiva da primeira situação deste conjunto de slides)

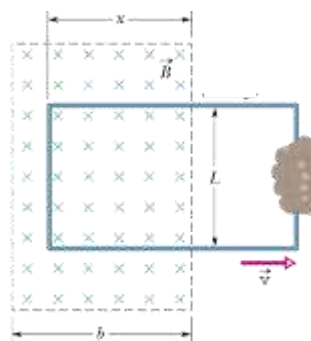
Considere a espira da figura que é movida, com velocidade constante, para a direita por uma força exterior:

Se a força aplicada pela mão for constante, o trabalho realizado pela força aplicada é:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\Delta r \cos 0 = F\Delta r$$

A energia transferida por unidade de tempo (potência) pela força aplicada é:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F\Delta r}{\Delta t} = Fv$$



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

30

Quando a espira se move o fluxo do campo magnético através da espira diminui, e surge uma corrente induzida na espira.

O fluxo magnético através da espira é:

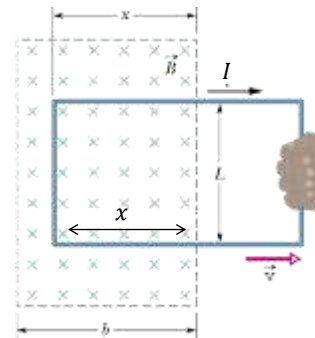
$$\Phi_B = B \cdot A = B \cdot L \cdot x$$

O fluxo diminui com o tempo, a força electromotriz induzida, vem:

$$|\varepsilon| = \frac{d(B \cdot L \cdot x)}{dt} \Leftrightarrow |\varepsilon| = BL \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow |\varepsilon| = BLv$$

Se a resistência da espira for R , a corrente da espira será:

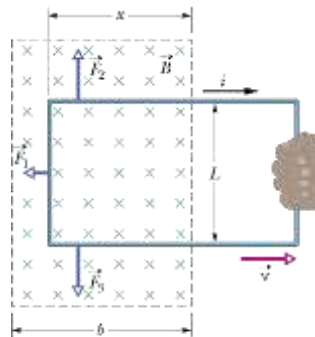
$$|\varepsilon| = RI \Leftrightarrow I = \frac{BLv}{R}$$



A presença de corrente na espira, numa região onde existe campo magnético leva ao aparecimento de forças nos lados da espira. Em cada aresta:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Qual a causa dessas forças?



Se a força exterior tiver a mesma magnitude de F_1 , a resultante das forças é nula e a velocidade da espira é constante. Sendo os lados da espira perpendiculares a ao campo

$$F = ILB \sin 90^\circ = ILB$$

Tinha-se visto que: $I = \frac{BLv}{R}$ Então: $F = \frac{B^2 L^2 v}{R}$

Daqui podemos obter a Potência em função do Campo:

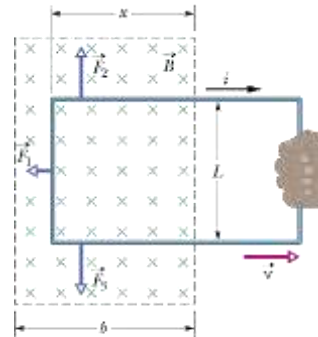
$$P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Esta é a taxa a que se produz trabalho quando se puxa a espira através do campo magnético com velocidade constante.

Comparando com a taxa a que se produz energia térmica por efeito Joule ($P = RI^2$), sabendo que $I = \frac{BLv}{R}$:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Que é exatamente a mesma. A taxa a que se fornece energia por aplicação da força é a mesma que se transforma em energia térmica, devido ao efeito Joule.



Algumas aplicações da indução eletromagnética

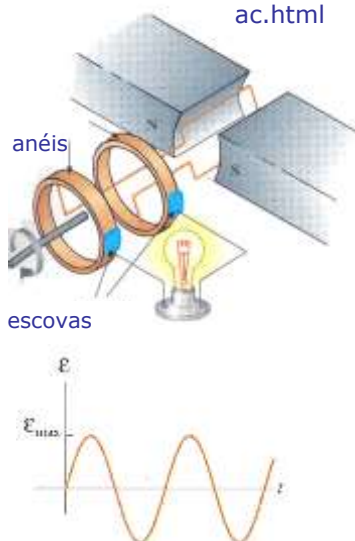


Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

35

Gerador AC

<https://phet.colorado.edu/pt/simulation/legacy/faraday>
<http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/generator/ac.html>



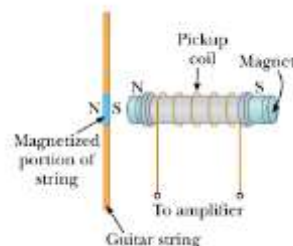
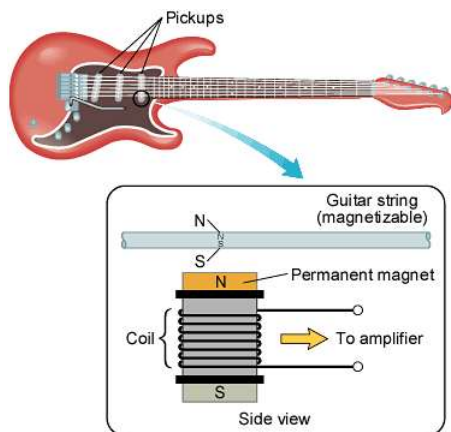
- Num gerador de corrente alternada (AC) simples a espira condutora é posta a girar num campo magnético, por um agente externo (queda de água, vapor de água, pedais de uma bicicleta, etc).
- Quando a espira gira no campo, o fluxo magnético através dela varia em função do tempo, originando no circuito externo uma força eletromotriz e uma corrente induzida.

Um gerador converte energia mecânica em energia eléctrica.

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

36

Guitarra eléctrica



Na guitarra eléctrica a vibração de uma corda induz uma *fem* na bobina.

microfone



Em alguns microfones, os sons (vibração mecânica) são “traduzidos” em sinais eléctricos, que são mais facilmente transportado ou transformados.

As ondas sonoras fazem vibrar uma membrana.

A vibração do diafragma é transmitida a uma bobina, que se move “de acordo” com as características da onda sonora.

A bobina está sob a influência do campo magnético de um íman, e o seu movimento irá originar variações do fluxo magnético gerando impulsos eléctricos.





Placas de indução



São utilizadas bobinas (1), que quando são percorridas por uma corrente eléctrica variável, criam um campo magnético variável. Quando os recipientes (com bases ricas em materiais ferromagnéticos) são colocados sobre a placa, actuam como um condutor e dá-se o aparecimento de correntes induzidas. Por efeito Joule (e também por perdas devido a histerese) há transferência de energia, como calor, da base do recipiente (2) para os alimentos.

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

41

Transformador

<https://phet.colorado.edu/pt/simulation/legacy/faraday>

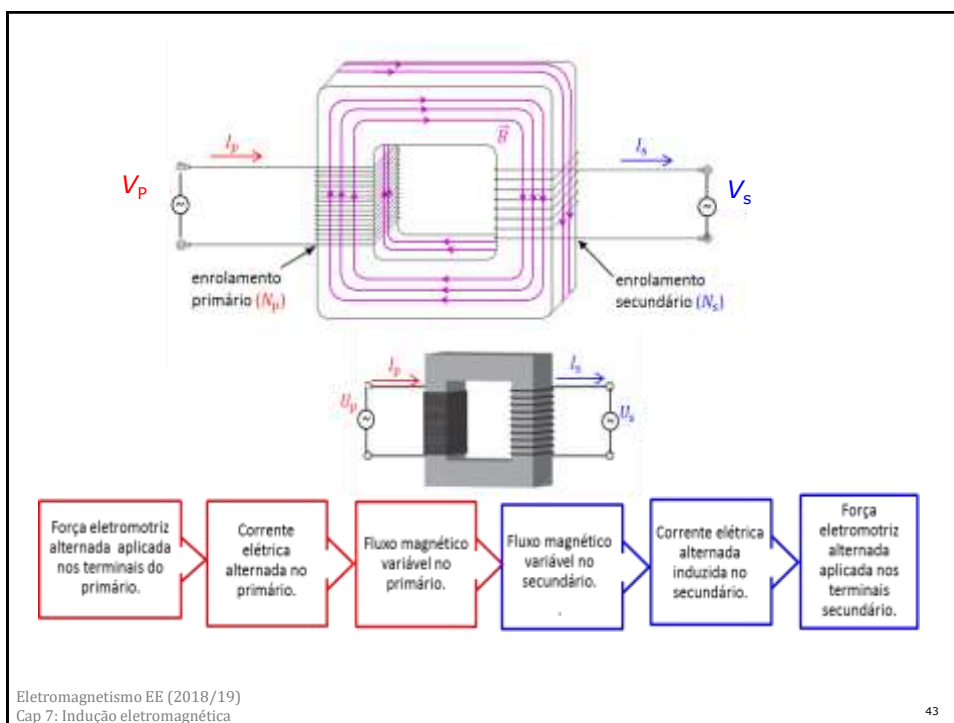




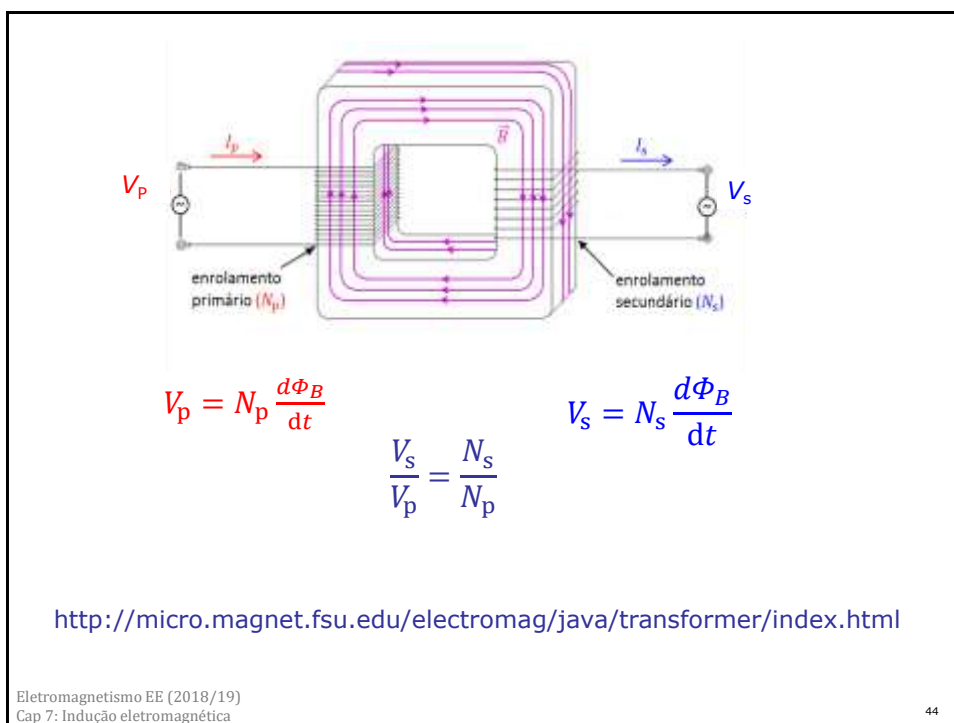


Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

42



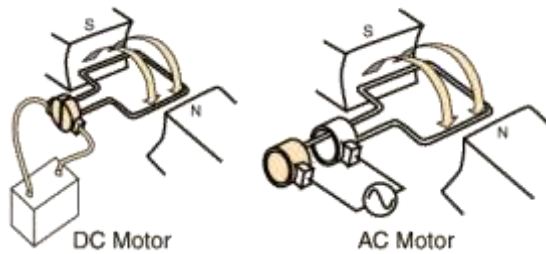
43



44

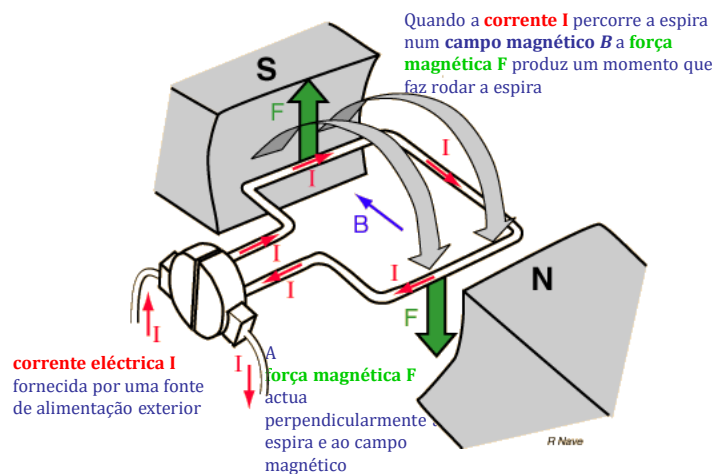
Motores

Um motor utiliza energia eléctrica para produzir movimento (geralmente a rotação de um eixo)



- Na sua essência, um motor é um gerador que opera de modo inverso: em lugar de se gerar uma corrente, pela rotação duma bobina, fornece-se uma corrente à bobina, mediante uma bateria, e o momento que actua sobre a bobina percorrida pela corrente provoca a rotação.

motores



Os carregadores rápidos de smartphones ou smartwatches funcionam por indução eletromagnética.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

Fluxo do campo magnético:

Através do movimento relativo entre condutores e magnetes, ou através dos campos magnéticos variáveis produzidos por correntes variáveis, criam-se correntes eléctricas induzidas.

Lei de Faraday-Lenz: A *fem* induzida instantaneamente num circuito corresponde à taxa de variação do fluxo magnético através do circuito. O sentido da *fem* induzida é tal que produz uma corrente eléctrica cujo campo magnético se opõe à variação do fluxo magnético através da espira.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

Indutância e Auto-indutância

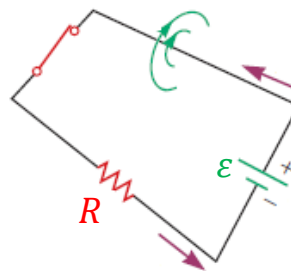
Auto-indução

Nesta secção temos de distinguir as f.e.m. produzidas por fontes das f.e.m. induzidas por campos magnéticos variáveis.

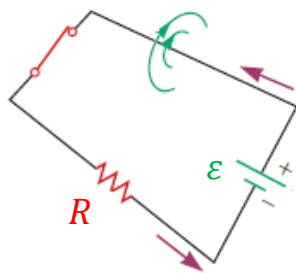
Quando o interruptor fecha, a corrente elétrica no circuito não vai imediatamente para o valor máximo ($I_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon}{R}$).

À medida que I aumenta até $I_{\text{máx}}$, o fluxo magnético através do circuito fechado aumenta. De acordo com a lei de Faraday-Lenz, este aumento de fluxo cria uma f.e.m. induzida, que gera uma corrente induzida com sentido oposto à corrente gerada pela fonte.

Esta corrente induzida, pelo seu lado, cria um campo magnético com sentido oposto ao inicial. Portanto, o sentido da f.e.m. induzida é oposto ao da f.e.m. da fonte. A consequência é que há um aumento gradual da corrente elétrica no circuito, até que seja atingido o valor de equilíbrio ($I_{\text{máx}}$).



Este efeito é conhecido como **auto-indução**. A f.e.m. induzida (ε_L) designa-se por **f.e.m. auto-induzida**.



Na região interior do circuito há um fluxo magnético. A razão entre o fluxo magnético (Φ_B) e a corrente elétrica (I) que percorre o circuito, é uma constante designada **Indutância** (L).

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

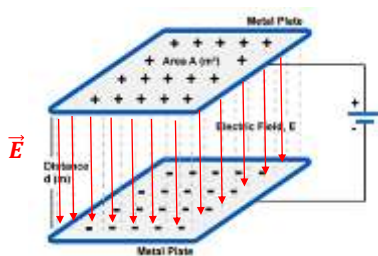
Se o circuito tiver mais que um enrolamento (N)

$$L = N \frac{\Phi_B}{I}$$

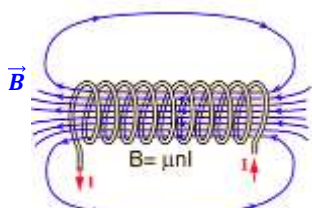
Unidades SI?

$$\text{T.m}^2/\text{A} = \text{Wb}/\text{A} = \text{H} \quad \text{henry}$$

Bobinas



Os **condensadores** de placas paralelas podem ser usados para gerar um campo elétrico (cap. 4).



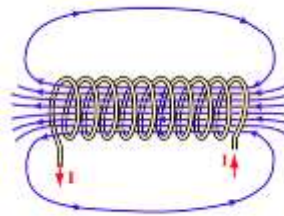
As **bobinas** podem ser usados para gerar um campo magnético.



Uma bobina é um solenóide com muitas espiras...

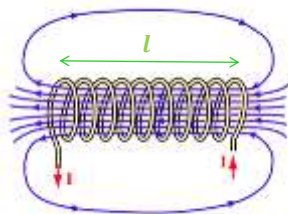


Quando a bobina é percorrida por uma corrente elétrica I gera um campo magnético no espaço que o rodeia. Na região interior da bobina o campo magnético pode ser considerado uniforme se $L \gg d$.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

53



Num bobina a **Indutância** (L) é também:

$$L = N \frac{\phi_B}{I}$$

Que pode ser obtida a partir das características físicas da bobina:

$$L = N \frac{\phi_B}{I} = nl \frac{BA}{I} = nl \frac{\mu_0 n I A}{I} = \mu_0 n^2 l A$$

N – nº de voltas do enrolamento

l – comprimento da bobina

A – área da secção reta da bobina

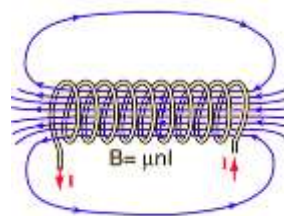
n – nº de voltas por unidade de comprimento da bobina (N/l)

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

54

Checkpoint

Considere um solenóide uniforme com um enrolamento de 300 voltas, uma área de secção de 4 cm^2 e um comprimento de 25 cm. Assumindo que o comprimento é significativamente maior que o raio e que o interior do solenóide é o ar.



(A) Calcule a indutância do solenóide

(B) Calcule a f.e.m. auto induzida no solenoide se a corrente que o percorre diminui a uma taxa de 50.0 A/s

$$L = N \frac{\phi_B}{I} \quad L = N \frac{BA}{I} = N \frac{\mu_0 n I A}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300^2 \times 4 \times 10^{-4}}{0.25} = 1.81 \times 10^{-4} \text{ H}$$

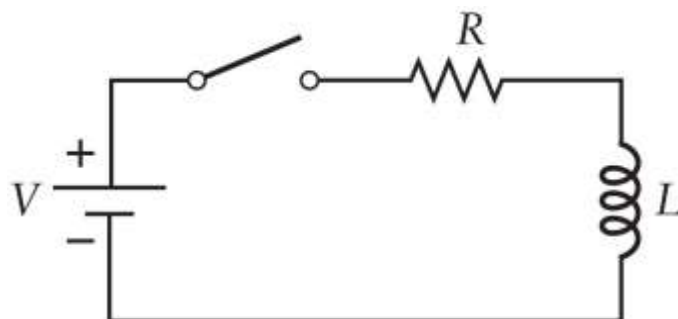
$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad \varepsilon_L = -1.81 \times 10^{-4} \times -50 = 9.05 \times 10^{-3} \text{ V}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

55

Circuitos RL de corrente contínua

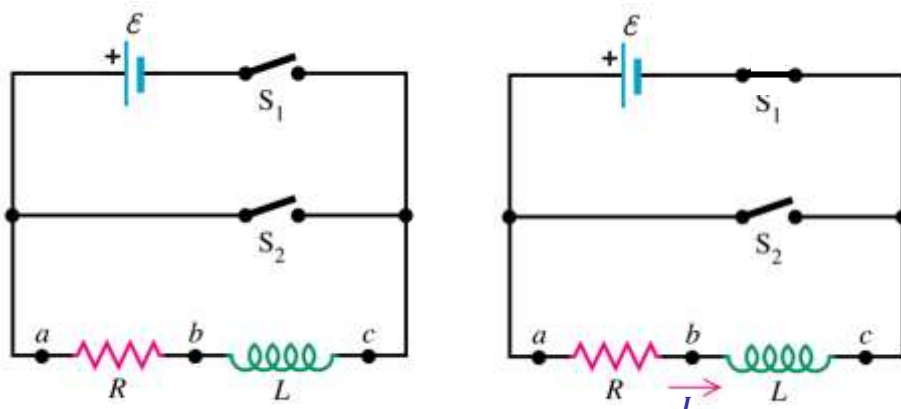
Todos os circuitos apresentam indutância, que no entanto pode ser desprezada se tiver o circuito contiver um elemento com indutância não desprezável (como um solenoide/bobina). Esta indutância evita que a corrente elétrica atinja o valor estacionário instantaneamente.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

56

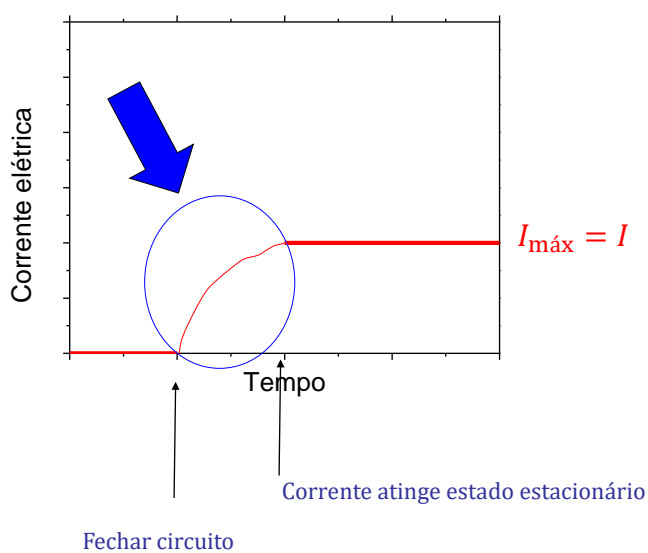
Entender bem o que se passa na bobina entre o momento que se fecha o circuito e o momento em que a corrente atinge o estado estacionário



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

57

Que se passa entre o instante em que se fecha o interruptor e a corrente atinge o seu estado estacionário?



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

58

A corrente gerada pela fonte vai aumentando desde 0 até ao valor estacionário ($I_{\text{máx}}$), o que significa que o fluxo magnético no interior da bobina vai aumentando até esse momento.

$$\frac{d(N\phi_B)}{dt} > 0$$

Esta variação de fluxo através da bobina cria uma f.e.m. induzida (ε_L), mas já lá vamos.

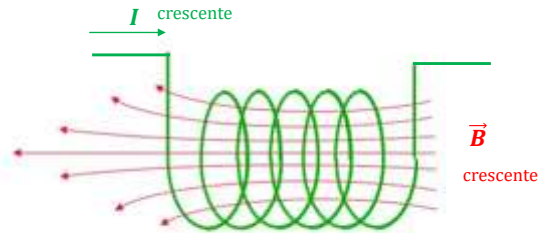
Sabemos que:

$$L = N \frac{\phi_B}{I} \quad \Leftrightarrow \quad N\phi_B = LI$$

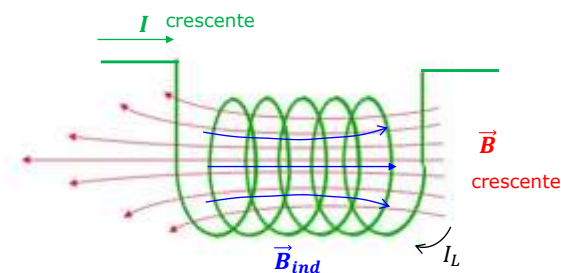
Então, o valor da f.e.m. induzida (ε_L), é dado por:

$$\frac{d(N\phi_B)}{dt} = \frac{dLI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Que cria uma corrente elétrica induzida (I_L), com sentido oposto à corrente elétrica gerada pela fonte.



Esta corrente elétrica induzida (I_L), por sua vez gera um campo magnético (\vec{B}_{ind}) que tem sentido oposto ao campo magnético causado pela corrente gerada na fonte.



De acordo com a lei de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(N\phi_B)}{dt} = -\frac{dLI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

A f.e.m. auto-induzida na bobina é proporcional à taxa de variação da corrente $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$

Olhemos de novo para o circuito RL, quando se liga o interruptor. Usando a lei das malhas:

$$\varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

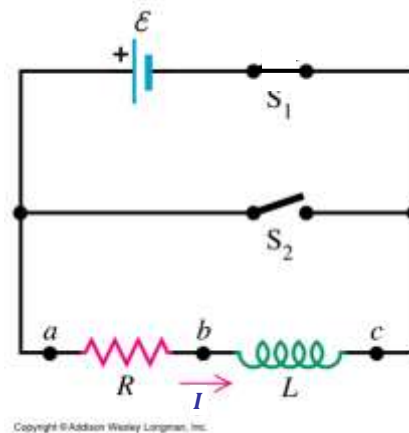
$$\varepsilon = RI + L \frac{dI}{dt}$$

No momento em que se fecha o interruptor ($t = 0$) a corrente no circuito é nula ($I=0$), mas começa a aumentar ($\frac{dI}{dt} > 0$):

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt}$$

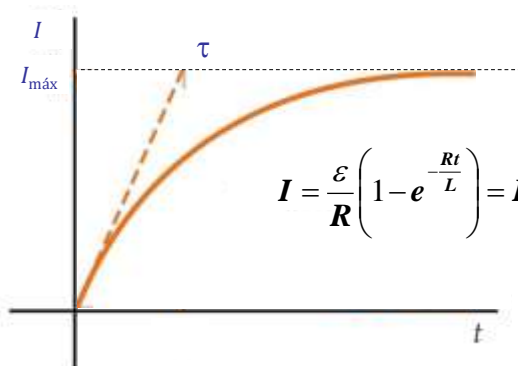
A variação da corrente com o tempo pode ser obtida a partir de:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{RI}{L}$$



À medida que a corrente aumenta, RI aumenta e $L(dI/dt)$ diminui. O valor máximo de corrente acontece quando $dI/dt = 0$.

Ao atingir o estado estacionário: $\varepsilon = RI_{\text{máx}}$

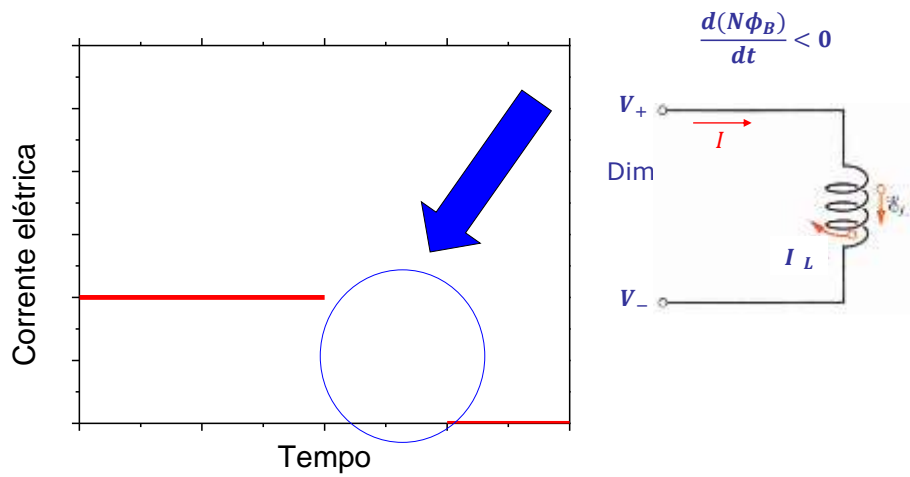


$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = I_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{Constante de tempo}$$

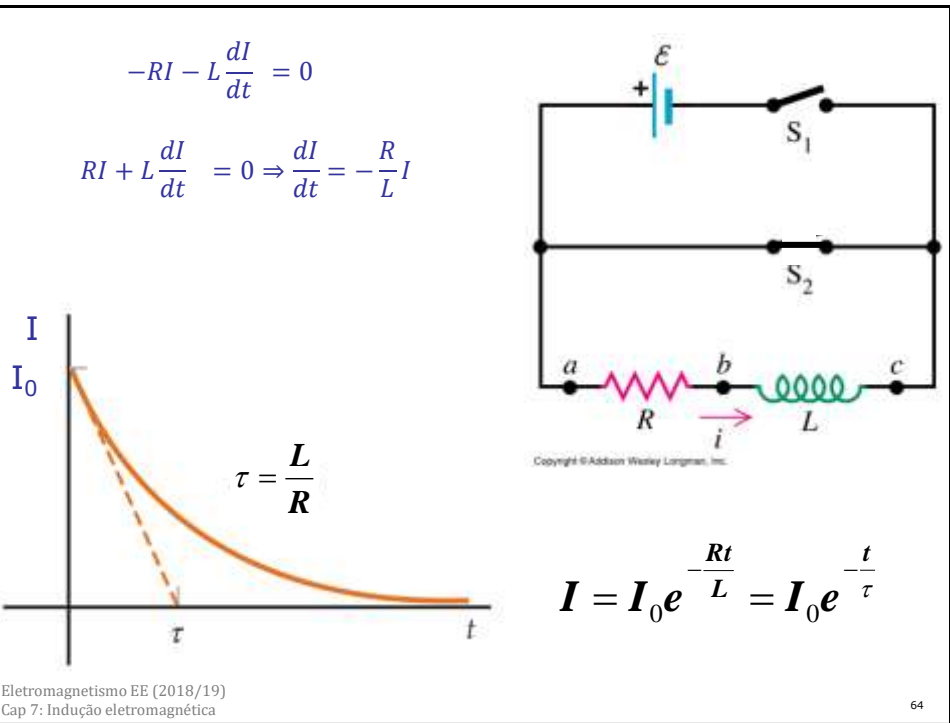
E que acontece entre o instante em que se abre o interruptor e a corrente se anula?

Acontecem variações contrárias. A corrente vai variando entre I e 0.



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

63

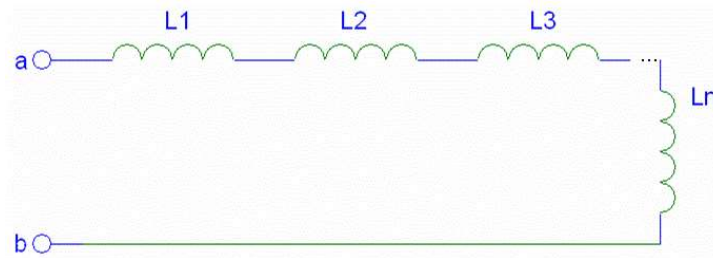


Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

64

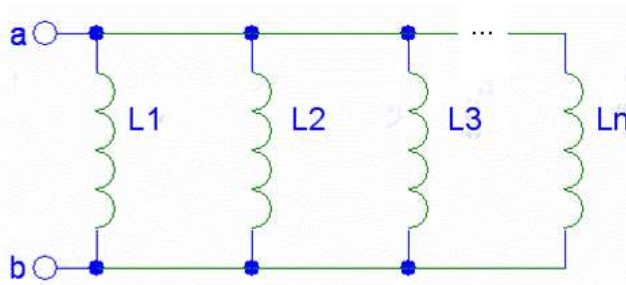
Associação de Bobinas (Indutores)

- Bobinas em série



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i$$

- Bobinas em paralelo



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

Energia magnética

$$\varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

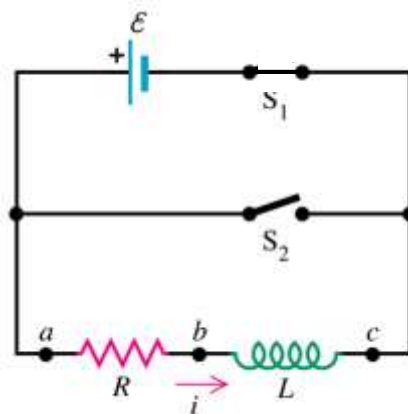
$$\varepsilon = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

↑
Potência fornecida pela fonte

↑
Potência dissipada na resistência

↑
Potência introduzida na bobina



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

67

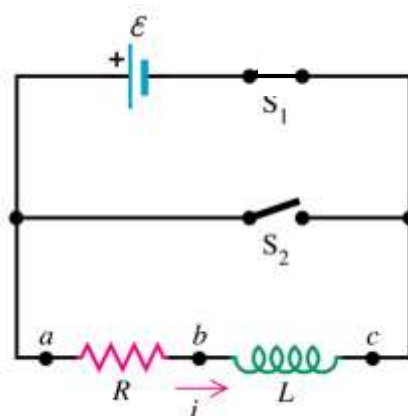
$$\varepsilon I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

Se $E_p(B)$ for a energia acumulada na bobina

$$\frac{dE_p(B)}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

$$dE_p(B) = LI dI$$

$$E_p(B) = \int_0^{I_f} LI dI = \frac{1}{2} LI_f^2$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$$E_p(B) = \frac{1}{2} LI^2$$

Energia armazenada numa bobina quando é percorrida por uma corrente I

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

68

Checkpoint

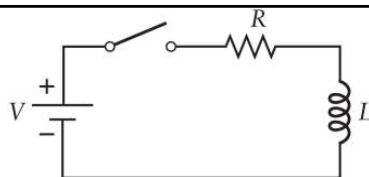
No circuito esquematizado, $\varepsilon = 12.0 \text{ V}$, $R = 6.00 \, \Omega$ e $L = 30.0 \text{ mH}$.

- (A) Calcule a constante de tempo do circuito.
- (B) No instante em que se fecha o interruptor, qual a taxa que a corrente elétrica aumenta?
- (C) Calcule o valor da corrente elétrica no instante $t = 2.00 \text{ ms}$.
- (D) Qual o valor da corrente no estado estacionário?
- (E) Qual a energia acumulada na bobina quando a corrente atinge o estado estacionário?

$$(A) \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{0.03}{6.00} = 0.005 \text{ s} = 5 \text{ ms}$$

$$(B) \quad \varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow I = 0 \quad \varepsilon - L \frac{dI}{dt} = 0$$



$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{12}{0.03} = 400 \text{ A/s}$$

$$(C) \quad I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) = I_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$I = \frac{12}{6} \left(1 - e^{-\frac{2 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}}} \right) = 0.66 \text{ A}$$

$$(D) \quad \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0 \quad \varepsilon - RI = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

(E)

$$E_p(B) = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} 0.03 \times 2^2 = 0.06 \text{ J}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

69

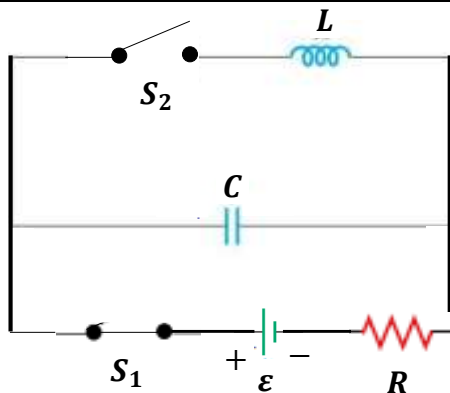
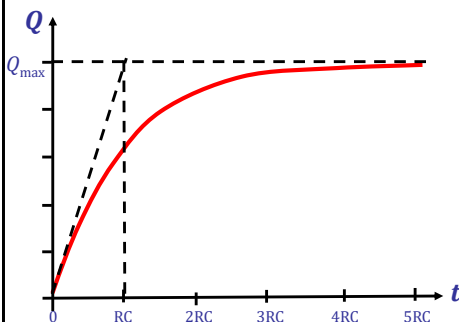
Circuitos LC

1 - Fechar S_1 . Que acontece?

Condensador carrega!

$$Q = Q_{\text{máx}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = RC$$



2 - Abrir S_1 . Que acontece?

Condensador permanece carregado.
A energia potencial acumulada no condensador é:

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

70

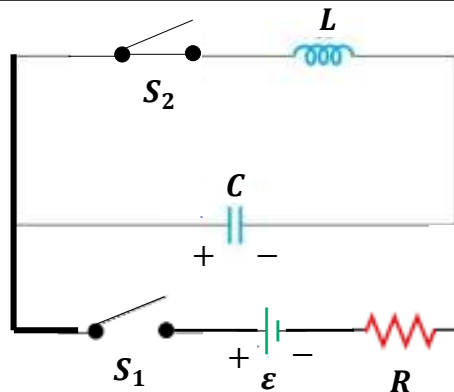
3 - Fechar S_2 . Que acontece?

Ficamos com um circuito LC

$$\text{Em } t = 0 \quad Q = Q_{\text{máx}} \\ I = 0$$

$$E_p (\text{cond}) = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C}$$

$$E_p (\text{bob}) = \frac{1}{2} LI^2 = 0$$



Em termos de ddp

ao longo do circuito: $V_L + V_C = 0$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\text{Como: } I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Esta equação diferencial não vos é familiar?

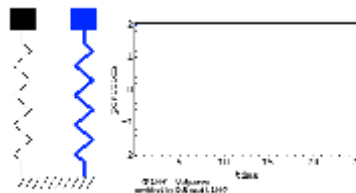
Eletrromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

71

Comparar esta equação diferencial, com a equação diferencial de uma massa numa mola elástica:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$



$$m \rightarrow L$$

$$x \rightarrow Q$$

$$k \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Não havendo amortecimento (atrito) nem forças exteriores aplicadas, a amplitude não decai e as oscilações ocorrem com a frequência natural (frequência de ressonância).

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

A que corresponde esta frequência angular para este circuito LC?

Eletrromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

72

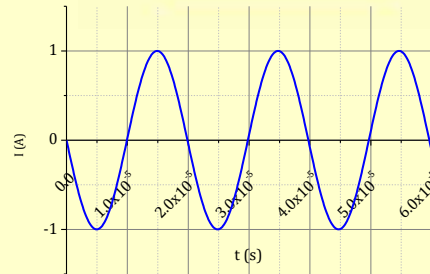
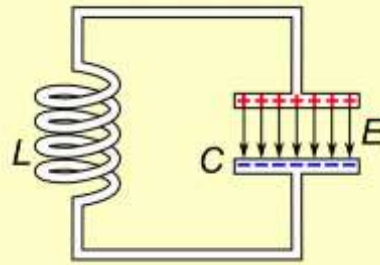
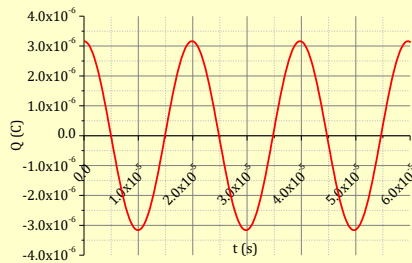
$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Solução da equação diferencial

$$Q = Q_{\text{máx}} \cos(\omega t + \delta)$$

Admitindo $\delta = 0$

$$Q = Q_{\text{máx}} \cos(\omega t)$$



$$I = \frac{dQ}{dt} \quad I = -\omega Q_{\text{máx}} \sin(\omega t) = -I_{\text{máx}} \sin(\omega t)$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

73

Sistema massa mola sem atrito



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

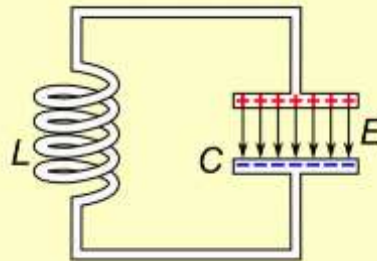
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Circuito LC sem R



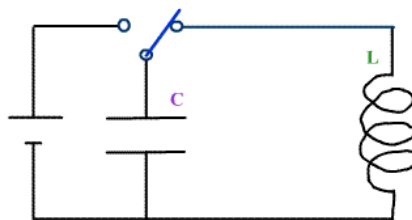
$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

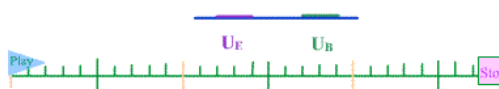
Num sistema massa mola, sem amortecimento, a energia total é constante. Simplesmente há transformação de energia potencial elástica em energia cinética e vice versa. Num circuito LC algo similar acontece:



Energia acumulada num condensador:

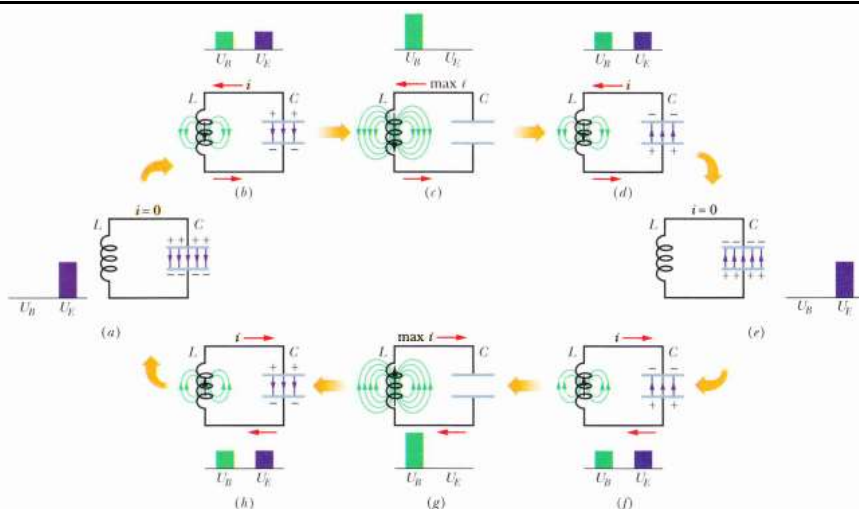
$$E_p \text{ (cond)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$E_p \text{ (cond)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C} (\cos(\omega t))^2$$



Energia acumulada numa bobina: $E_p \text{ (bob)} = \frac{1}{2} L I^2$

$$E_p \text{ (bob)} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_{\text{máx}}^2 (\sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C} (\sin(\omega t))^2$$



Energia total:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C} (\cos(\omega t))^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C} (\sin(\omega t))^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C}$$

Conservation of Energy

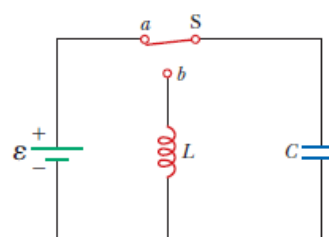
$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{\max}^2}{C} \right) = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} Li^2$$

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

77

Checkpoint

A figura representa um circuito com uma bateria de f.e.m. $\mathcal{E} = 12.0 \text{ V}$, uma bobina de indutância $L = 2.81 \text{ mH}$, e um condensador de capacidade $C = 9.00 \text{ pF}$. O interruptor ficou na posição **a** durante até que o condensador ficasse carregado. Posteriormente mudou-se o interruptor para a posição **b**.



(A) Calcule a frequência do circuito LC resultante.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2.81 \times 10^{-3} \times 9.00 \times 10^{-9}}} = 10^6 \text{ Hz}$$

(B) Quais são os máximos valores da carga e da corrente no circuito?

$$Q_{\max} = C\Delta V = C\mathcal{E} = 9.00 \times 10^{-9} \times 12.0 = 1.08 \times 10^{-10} \text{ C}$$

$$I_{\max} = \omega Q_{\max} = 2\pi \times 10^6 \times 1.08 \times 10^{-10} = 6.79 \times 10^{-4} \text{ A}$$

78

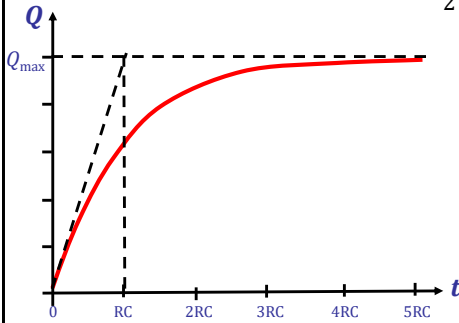
Circuitos RLC

1 - Que acontece com o interruptor na posição **a**?

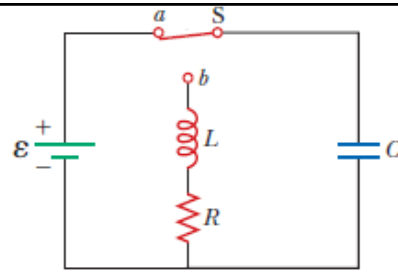
Condensador carrega!

$$Q = Q_{\text{máx}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = RC$$



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética



2 - E quando se coloca interruptor na posição **b**?

Ficamos com um circuito RLC

$$\begin{aligned} \text{Em } t = 0 \quad Q &= Q_{\text{máx}} \\ I &= 0 \end{aligned}$$

Condensador está carregado. A energia potencial acumulada no condensador é:

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_{\text{máx}}^2}{C}$$

79

Em termos de ddp ao longo do circuito **RLC**:

$$V_L + V_C + V_R = 0$$

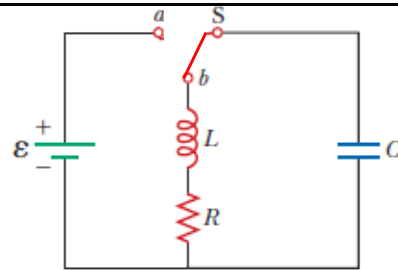
$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = 0$$

$$\text{Como: } I = \frac{dQ}{dt}$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Esta equação diferencial não vos é familiar?



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

80

Comparar esta equação diferencial, com a equação diferencial de uma massa numa mola elástica com atrito:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

$$m \rightarrow L$$

$$x \rightarrow Q$$

$$k \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$b \rightarrow R$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_d^2 x = 0$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Havendo amortecimento (atrito) e não havendo forças exteriores aplicadas, a amplitude decai e as oscilações ocorrem com a frequência menor que a frequência natural (frequência de ressonância).

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \omega_d^2 Q = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Frequência angular de ressonância deste circuito RLC

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

frequência angular deste circuito RLC (frequência amortecida)

Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética

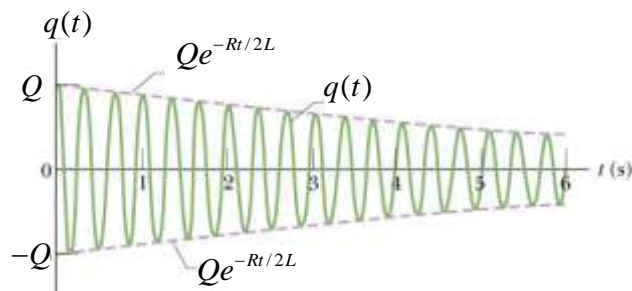
81

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \omega_d^2 Q = 0$$

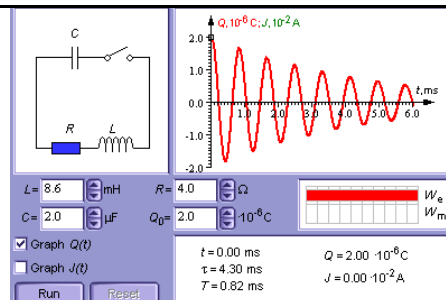
$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

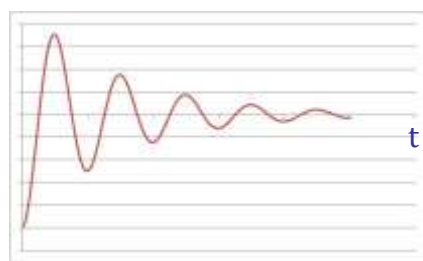
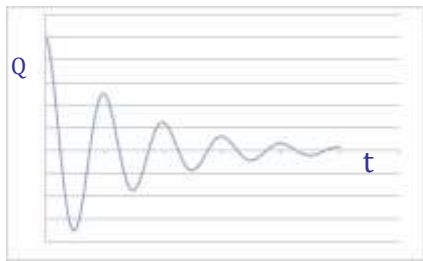
Solução da equação diferencial

$$Q = Q_{\text{máx}} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_d t)$$



Eletromagnetismo EE (2018/19)
Cap 7: Indução eletromagnética





Se a resistência for elevada ou muito elevada:

