introdução aos sistemas dinâmicos

edos de primeira ordem separáveis

4.

$x'(t) = x^2 = f(t)\,g(x)$, com $f(t) = 1$ e $g(x) = x^2$

logo, trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável

vamos procurar saber se a equação diferencial admite soluções de tipo constante:

$$g(x) = x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t$$

consultando uma tabela de primitivas, podemos escrever a solução formal da equação diferencial:

$-\dfrac{1}{x} = t + \mathsf{C}$, com $\mathsf{C} \in \mathbb{R}$

de seguida, vamos procurar a solução explícita da equação diferencial, multiplicando ambos os lados da igualdade por -1 e invertendo:

$$x = -\frac{1}{t + \mathsf{C}}$$

uma vez que a igualdade acima não é válida para $t = -\mathsf{C}$, somos levados a escrever que a equação diferencial tem duas famílias de soluções:

$$x(t) = -\frac{1}{t + \mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \in \mathbb{R}, \quad t < -\mathsf{C}$$

$$x(t) = -\frac{1}{t + \mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \in \mathbb{R}, \quad t > -\mathsf{C}$$

atenção que as duas famílias de soluções distinguem-se pela muito subtil diferença no seu domínio!

resumindo, encontrámos as seguintes soluções da equação diferencial:

$$x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = -\frac{1}{t + \mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \in \mathbb{R}, \quad t > -\mathsf{C}$$

$$x(t) = -\frac{1}{t + \mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \in \mathbb{R}, \quad t < -\mathsf{C}$$

de seguida, vamos responder à primeira das alíneas.

se no instante inicial, $t = 0$, nos dizem que $x(0) = x_\circ$, vamos tentar substituir a constante arbitrária C, sem qualquer significado físico, que surge na expressão das soluções acima, pela constante $x_\circ$, também ela arbitrária, mas com um importante significado.

$$x(0) = x_\circ = -\frac{1}{0 + \mathsf{C}} = -\frac{1}{\mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{C} = -1/x_\circ$$

então, temos que:

1. se $x_\circ > 0$, então a família de soluções da equação diferencial é dada por
$$x(t) = -\frac{1}{t - 1/x_\circ}, \quad t > -1/x_\circ$$
2. se $x_\circ < 0$, então a família de soluções da equação diferencial é dada por
$$x(t) = -\frac{1}{t - 1/x_\circ}, \quad t < -1/x_\circ$$

nota. a escolha $\mathsf{C} = 0$, obviamente que possível, não é compatível com a ideia de substituirmos a constante arbitrária (sem significado) C por $x_\circ = x(0)$.

para responder à segunda alínea, temos apenas que escolher a situação que nos interessa, de acordo com $x_\circ = 4.94$, e substituir, isto é:

$$x(t) = -\frac{1}{t - 1/4.94}, \quad t > -1/4.94$$

ou seja

$$x(t) = -\frac{1}{t - 0.202429}, \quad t > -0.202429$$

assim sendo temos que

$$x(2.48) = -\frac{1}{2.48 - 0.202429} = -0.439059$$