Capítulo 2
Lei de Gauss da eletrostática

Fluxo de um vetor – Fluxo do campo elétrico

Lei de Gauss

Aplicações da Lei de Gauss a várias distribuições de cargas estáticas.

Condutores em equilíbrio eletrostático

Capítulo dos livros da Bibliografia recomendada (Serway, Resnick and Halliday, Tippler): **Lei de Gauss**.

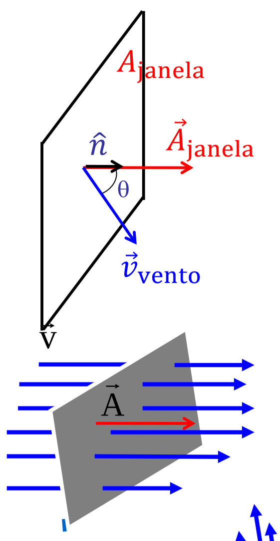
Fluxo de um vetor
e
Fluxo do campo elétrico

2.2. Fluxo de um vetor

Tentar encontrar uma lei que nos dê uma ideia da influência do vento no interior do quarto.

De que depende a influência do vento no interior do quarto?

v_{vento} A_{janela} $\theta_{\text{janela/vento}}$



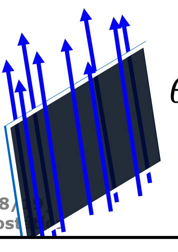
$\vec{A}_{\text{janela}} = A_{\text{janela}}\hat{n} = \vec{A}$ $\vec{v}_{\text{vento}} = \vec{v}$

O **fluxo** da velocidade do ar através da janela:

$$\phi = \vec{v}\cdot\vec{A} \quad \Leftrightarrow \phi = vA\cos\theta$$

Quando:

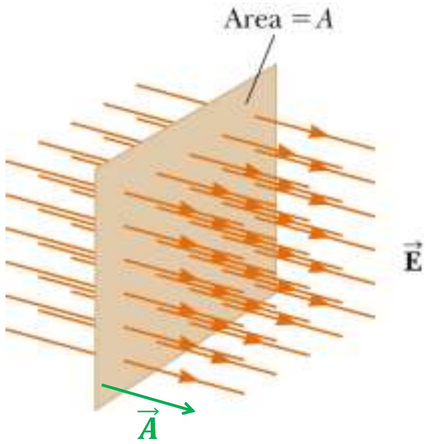
$\theta = 0° \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \phi$ máximo



Quando:

$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \phi$ nulo

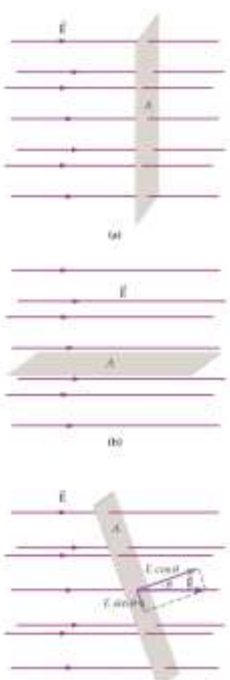
2.2. Fluxo do Campo Eléctrico



O fluxo do campo elétrico constante (ϕ_E) através de uma área plana A, é dado por:

$$\boxed{\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta}$$

Quais são as unidades SI de fluxo de campo eléctrico?



Calcular o fluxo co campo elétrico, através da superfície A, em cada um dos 3 casos:

a) $\phi_E = EA\cos 0 = EA$

$\phi_E$máximo

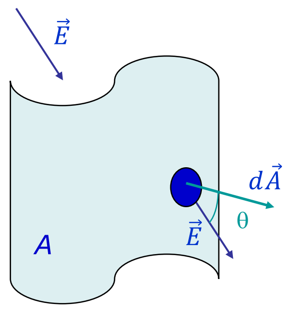
b) $\phi_E = EA\cos 90 = 0$

ϕ_E=0

c) $\phi_E = EA\cos\theta$

E se a superfície for curva ou o campo elétrico variar com a posição?

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$



1. Divide-se em pequenas regiões infinitesimais, com área dA

2. O fluxo através de cada superfície dA é:

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$
$$d\phi_E = E dA \cos\theta$$

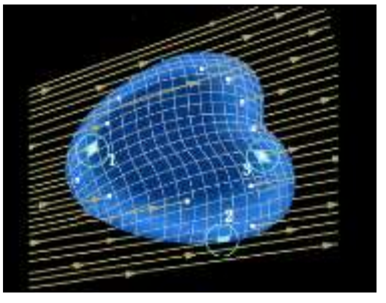
3. O fluxo total terá de ser calculado integrando sobre toda a superfície A

$$\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \phi_E = \int E_n \cdot dA$$

Componente do campo elétrico na direção normal à superfície

$$E_n = E\cos\theta$$

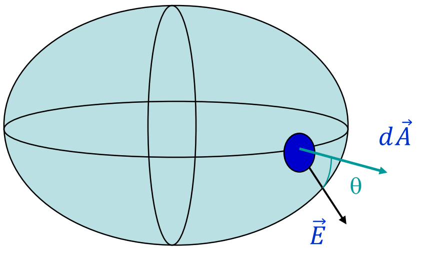
E se a superfície for fechada?



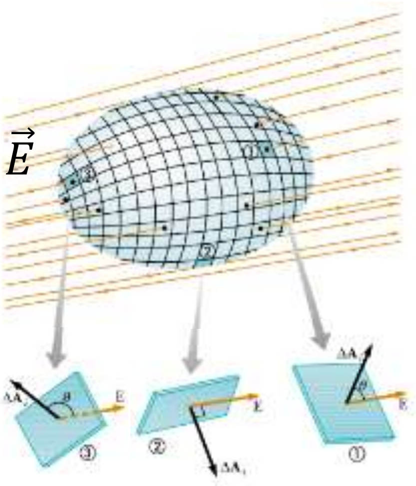
O processo é idêntico:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

O "loop" significa que é o integral calculado sobre toda a superfície fechada.



$$\boxed{d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA\cos\theta}$$



Elemento 1 $d\phi_{E1} = \vec{E} \cdot d\vec{A}_1$ θ<90º

$$d\phi_{E1} > 0$$

O fluxo do campo elétrico é positivo para todas as linhas de campo que saiem do volume limitado pela superfície fechada

Elemento 2 $d\phi_{E2} = \vec{E} \cdot d\vec{A}_2$ θ=90º

$$d\phi_{E2} = 0$$

Elemento 3 $d\phi_{E3} = \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$

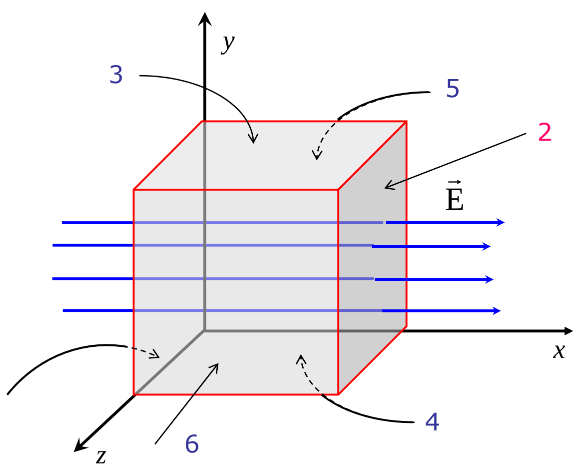
180>θ>90º

$$d\phi_{E3} < 0$$

O fluxo do campo elétrico é negativo para todas as linhas de campo que entram no volume limitado pela superfície fechada

Checkpoint 1

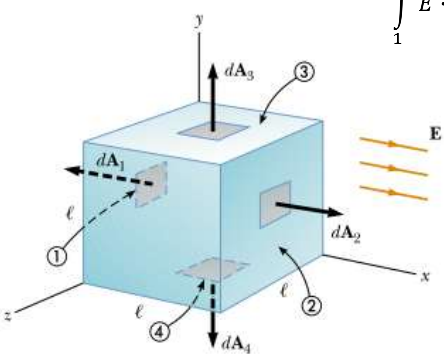
Considere um campo eléctrico uniforme, orientado segundo a direcção positiva do eixo dos x. Calcular o fluxo resultante através das faces do cubo de lado ℓ



$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\phi_{E(total)} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \cancel{\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3} + \cancel{\int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}_4} + \cancel{\int_5 \vec{E} \cdot d\vec{A}_5} + \cancel{\int_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}_6}$$

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_1 E \cos 180\, dA_1 = -E \int_1 dA_1 = -El^2$$



$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = \int_2 E \cos 0\, dA_2 = E \int_2 dA_2 = El^2$$

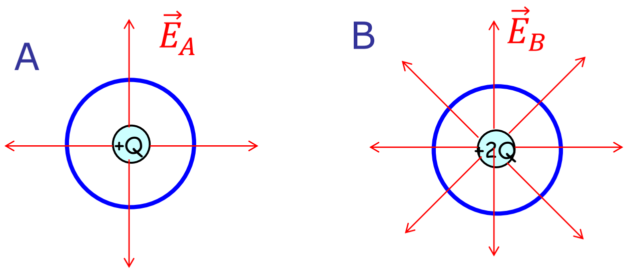
$$\phi_{E(total)} = -El^2 + El^2 = 0$$

A densidade de linhas de campo (nº de linhas por unidade de superfície perpendicular às linhas de campo) em qualquer ponto é proporcional à intensidade do campo eléctrico nesse ponto.

$$\frac{N}{A} \propto E \qquad \Leftrightarrow N \propto EA \qquad \Leftrightarrow N \propto \phi$$

Portanto o nº de linhas é proporcional ao fluxo do campo eléctrico

Existe alguma relação entre o fluxo do campo através duma superfície fechada e a carga elétrica contida no interior dessa superfície?



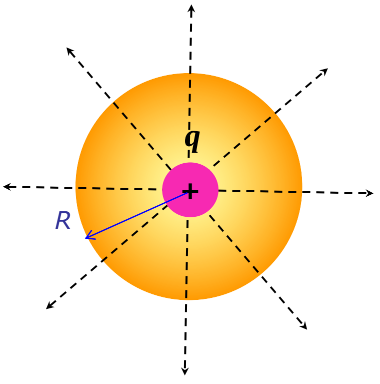
$$N_B = 2N_A$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_B = 2\phi_A$$

Checkpoint 2

A carga elétrica pontual $q = 1$ C está no interior de uma superfície esférica de raio $R = 1$ m.

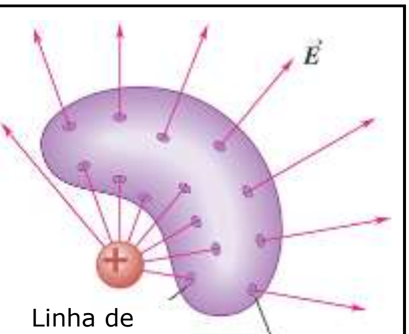


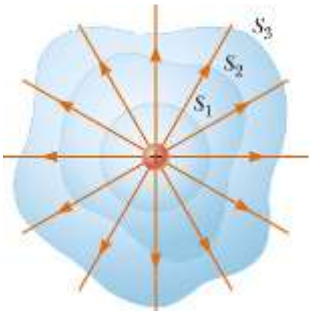
a) Qual o valor do campo elétrico em qualquer ponto da superfície da esfera? R: $E = 9 \times 10^{9}$ N/C

b) Qual o fluxo do campo elétrico através da superfície da esfera?

R: $\phi = 1 \times 10^{11}$ N m^{2} C^{-1}

Se uma carga elétrica está posicionada exteriormente a uma superfície fechada, o balanço entre as linhas que entram e que saiem é nulo (**o nº de linhas que entram = nº de linhas que saiem**), portanto o **fluxo do campo elétrico** através de toda a superfície fechada **é nulo**.





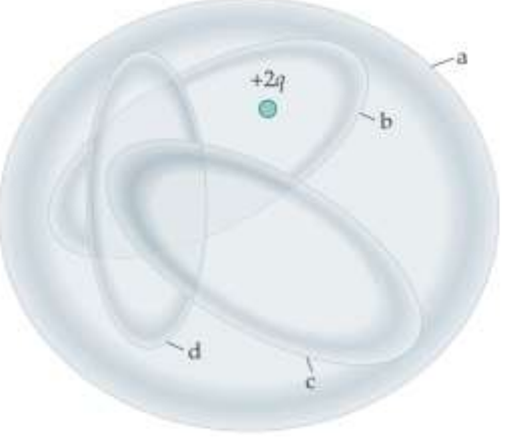
Se uma carga elétrica positiva está no interior de uma superfície fechada, todas as linhas de campo saiem, portanto o fluxo do campo elétrico através de toda a superfície fechada é positivo.

O fluxo do campo elétrico através de todas as superficies S_1, S_2 e S_3 é o mesmo.

E se a carga elétrica no interior for negativa?

Checkpoint 3

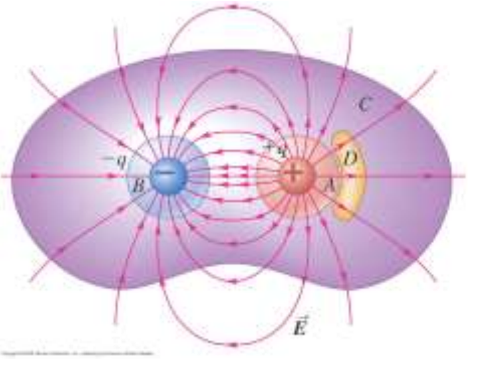
Para quais destas superfícies fechadas o fluxo do campo elétrico é nulo?



R: c e d

Checkpoint 4

Compare o fluxo do campo elétrico através das superfícies fechadas A, B, C, D.

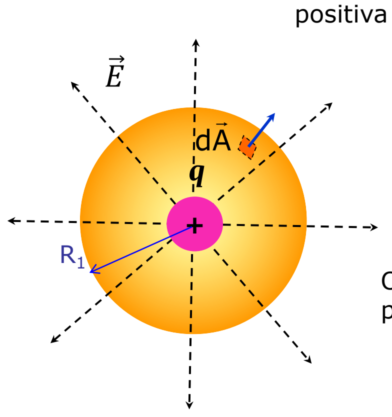


R: $\phi_A > 0; \phi_B < 0; \phi_C = 0; \phi_D > 0;$
$\phi_A = -\phi_B; \phi_C = 0; \phi_D < \phi_A$

Lei de Gauss

2.3 Lei de Gauss

Imaginemos uma carga elétrica pontual positiva *q*.
O campo eléctrico criado pela carga pontual positiva é radial e centrífugo.



O fluxo do campo através da superfície esférica é:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

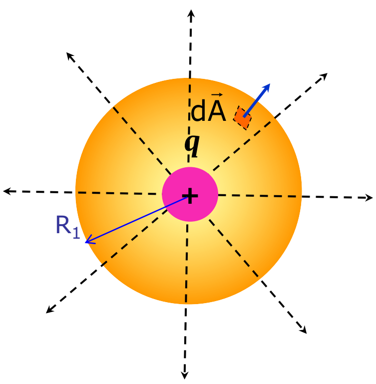
O valor do campo elétrico em qualquer ponto da superfície esférica é:

$$E = k\frac{q}{R_1^2}$$

E o vetor campo elétrico em qualquer elemento de área dA é paralelo ao vetor $d\vec{A}$:

$$\vec{E} \text{ paralelo a } d\vec{A}$$

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad E = k\frac{q}{R_1^2}$$



$$\phi_E = \oint k\frac{q}{R_1^2}\cos 0° \cdot dA$$

$$\phi_E = k\frac{q}{R_1^2}\oint d\vec{A}$$

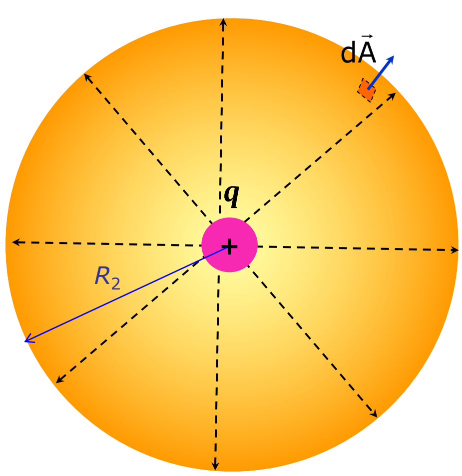
Área da esfera

$$4\pi R_1^2$$

$$\phi_E = k\frac{q}{R_1^2}4\pi R_1^2$$

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}4\pi R_1^2 \Rightarrow \boxed{\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

E qual o fluxo através da superfície de uma esfera com o dobro do raio?



$$E = k\frac{q}{R_2^2}$$

$$\phi_E = \oint k\frac{q}{R_2^2}\cos 0° \cdot dA$$

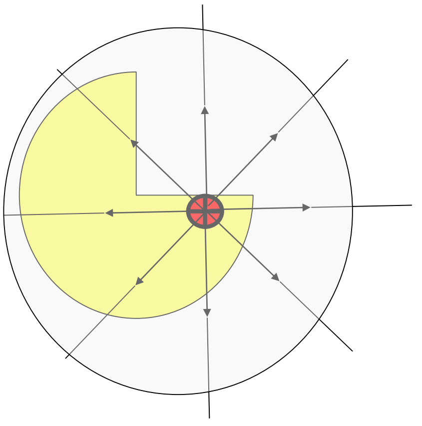
$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_2^2}4\pi R_2^2 \Rightarrow \boxed{\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

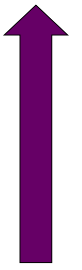
O fluxo é o mesmo…

O resultado é o esperado, porque o nº de linhas a passar através de cada uma das esferas é o mesmo!

$$\phi \propto N$$

De facto, o nº de linhas de campo que atravessam qualquer superfície em torno desta carga é o mesmo, ou seja, o fluxo do campo elétrico é o mesmo.





Mesmo que algumas linhas cruzem mais que uma vez a superfície, se a carga for positiva, saem mais uma vez do que entram.

Karl Friedrich Gauss
matemático e astrónomo alemão
(1777 – 1855)

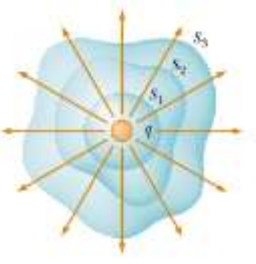
Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga elétrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície

O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga

O fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à **carga total no interior da superfície**.

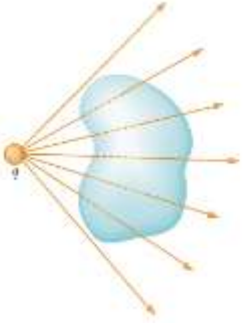
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Qual o fluxo através da superfície S_1, S_2, S_3?



O fluxo não depende da forma da superfície.
O fluxo não depende da distância a q

Qual o fluxo através da superfície S ?

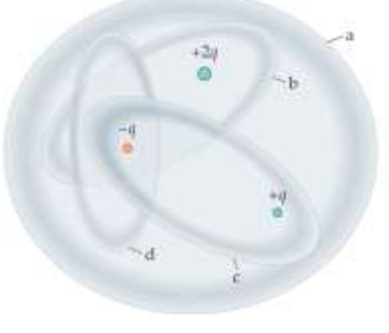


O fluxo através duma superfície Gaussiana é proporcional à carga, q, **no interior da superfície.**

$$\boxed{\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Checkpoint 5

Calcular o fluxo do campo elétrico através de cada uma das superficies fechadas a, b, c, and d



$$\phi_a = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_b = \frac{2q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_c = 0$$

$$\phi_d = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

Para que serve a lei de Gauss?

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

A lei de Gauss não diz nada de realmente novo. Não é uma nova lei da Física, mas pode olhar-se como uma versão diferente da lei de Coulomb, como veremos.

Em algumas situações, a lei de Gauss é mais fácil de usar que a lei de Coulomb.

Na prática, a Lei de Gauss só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana).

A superfície Gaussiana é uma superfície matemática - não tem "existência física".

Se a superfície Gaussiana for cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral é fácil de calcular.

Para simples utilização da lei de Gauss, a superfície Gaussiana deve satisfazer uma, ou mais, das seguintes condições:

1. Poder facilmente intuir que a intensidade do campo eléctrico é constante em toda a superfície.
2. O produto escalar da lei:

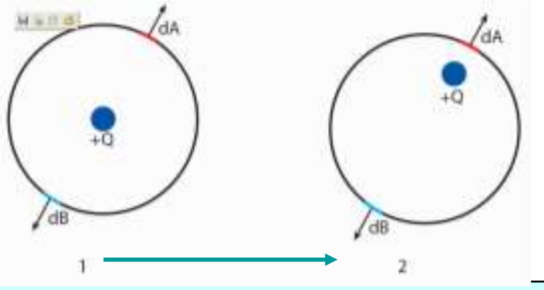
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

pode obter-se facilmente pela multiplicação $\boldsymbol{EdA}$, porque $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\boldsymbol{d\vec{A}}$ são paralelos.
3. $\boldsymbol{EdA}$ é nulo se $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\boldsymbol{d\vec{A}}$ forem perpendiculares.
4. Poder-se facilmente intuir que o campo é nulo em toda a superfície.

Checkpoint 5

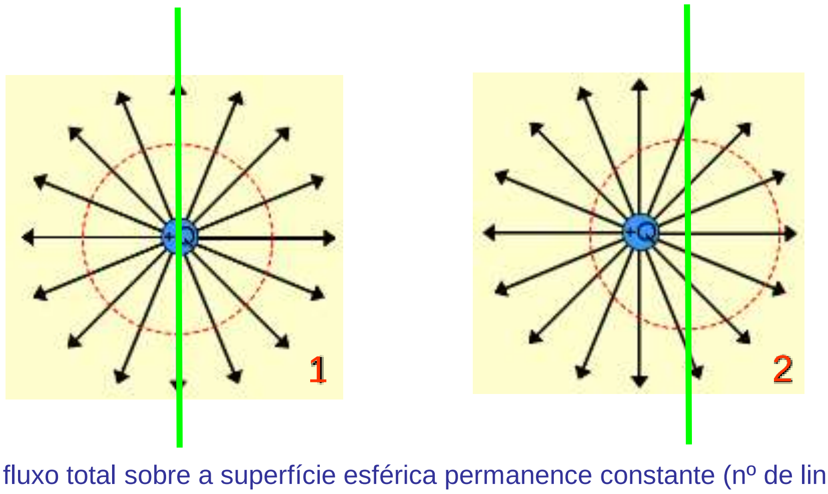
a) Em qual dos casos o fluxo do campo elétrico através da superfície gaussiana esférica é maior?

b) O fluxo através das superfícies dA e dB aumentam, diminuem, ou permanecem constantes quando a carga elétrica +Q sofre o desvio?



(A)	(B)	(C)
$d\Phi_A$ Aumenta $d\Phi_B$ Diminui	$d\Phi_A$ Diminui $d\Phi_B$ Aumenta	$d\Phi_A$ permanence constante $d\Phi_B$ permanence constante

Pensem do seguinte modo



O fluxo total sobre a superfície esférica permanence constante (nº de linhas de campo que atravessa a superfície é o mesmo)

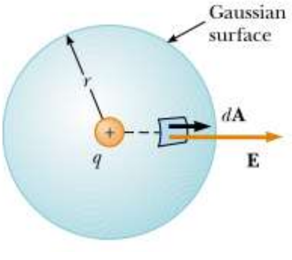
O fluxo através do hemisfério esquerdo é maior do que o fluxo atraves do hemisfério direito

Aplicações da lei de Gauss a algumas situações particulares

1º Exemplo: Cálculo do campo elétrico na vizinhança de uma carga pontual positiva.

Calcular o campo elétrico a uma distância *r* de uma carga elétrica pontual q, usando a Lei de Gauss.

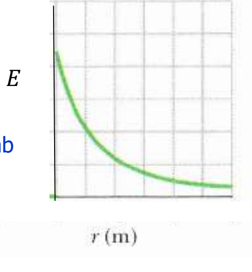
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



A superfície gaussiana é esférica.

Dedução no quadro pelo docente

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

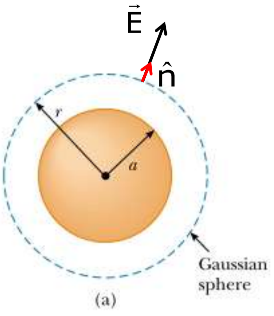


Resultado idêntico ao que seria obtido usando a Lei de Coulomb

2º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma esfera isoladora, de raio ***a***, com densidade volúmica de carga ρ, uniformemente distribuída.

Caso 1 - Calcular o campo eléctrico a uma distância $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{a}$, usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é $+Q$

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



A superfície gaussiana é esférica.

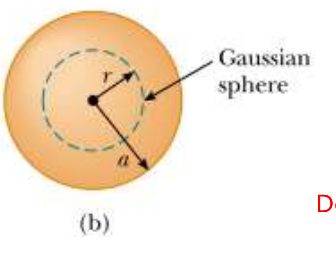
Dedução no quadro pelo docente

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

Resultado idêntico ao que foi obtido para uma carga pontual ⇒ equivalente!!!

Caso 2 – Para a esfera isoladora, com distribuição uniforme de carga, calcular o campo eléctrico para uma distância $r < a$, usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é $+Q$

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



A superfície gaussiana é esférica.

$q_{\text{int}} = Q\dfrac{r^3}{a^3}$ Porquê?

Dedução no quadro pelo docente

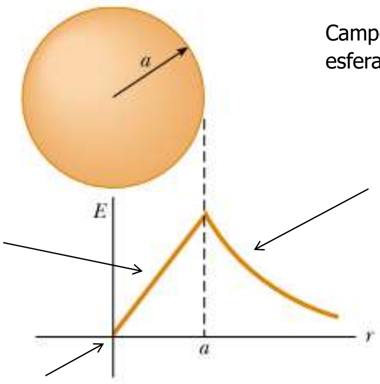
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3} \Leftrightarrow E = k\frac{Qr}{a^3}$$

$$r \to 0 \Rightarrow E \to 0$$

Campo elétrico devido a uma esfera isoladora com distribuição homogénea de carga elétrica

Campo **no exterior** de uma esfera isoladora carregada:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$



Campo **no interior** de uma esfera isoladora carregada:

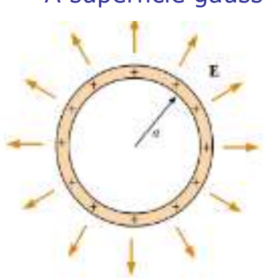
$$E = k\frac{Qr}{a^3}$$

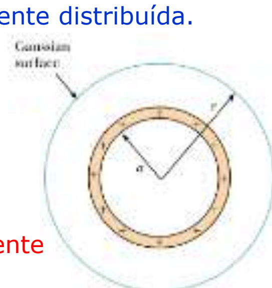
$$r \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow 0$$

3º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma casca isoladora com carga +Q uniformemente distribuída.

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

A superfície gaussiana é esférica.

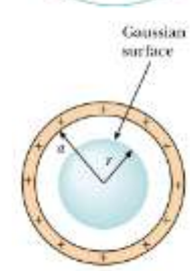




para uma distância *r* > *a*

Dedução no quadro pelo docente

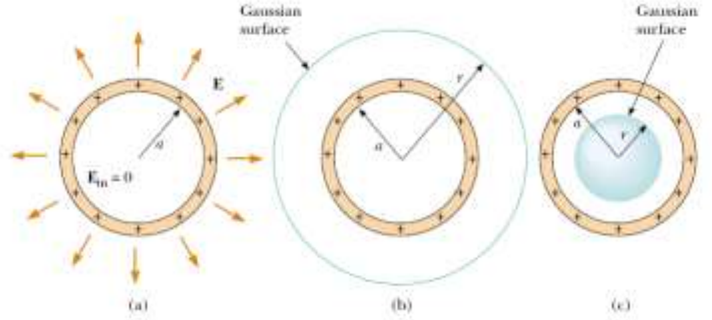
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$



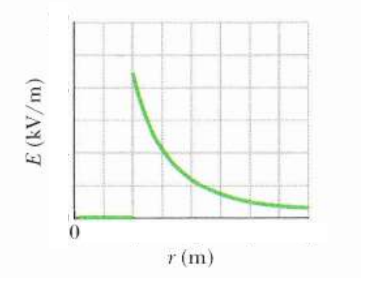
para uma distância *r* < *a*

Dedução no quadro pelo docente

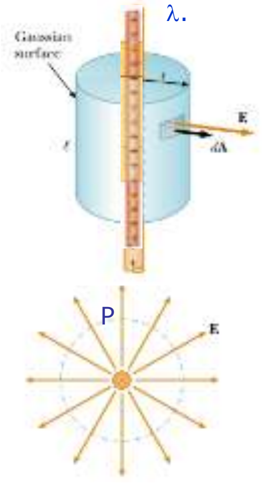
$$E = 0$$



Como varia o campo eléctrico desde r = 0 até r = ∞?



4º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma linha carregada "infinita", com carga uniformemente distribuída, λ.



$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Nos casos anteriores, as cargas eram pontuais ou esféricas e a superfície gaussiana conveniente era esférica. Neste caso não é!

1. Desenhar as linhas de campo elétrico.
2. Escolher o ponto P
3. Escolher a superfície gaussiana adequada, que passe no ponto P

A superfície gaussiana é cilíndrica.

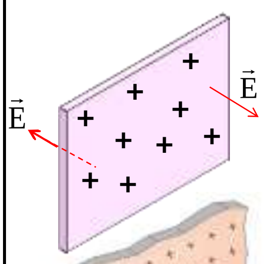
Dedução no quadro pelo docente

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

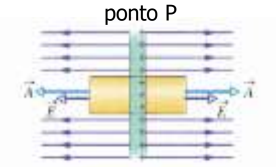
5º Exemplo:

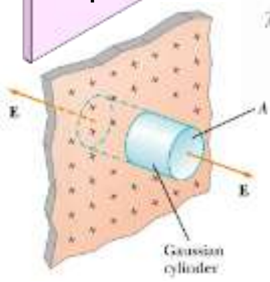
Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma <u>placa isoladora carregada</u>, com densidade superficial de carga uniformemente distribuída, σ

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



1. Desenhar as linha de campo eléctrico
2. Escolher a superfície gaussiana adequada, que passe no ponto P





$$\phi_E = 2EA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$EA = \frac{q_{\text{int}}}{2A\varepsilon_0}$$

$q_{in} = \sigma A$

$$EA = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Campo elétrico é uniforme

TABLE 24.1 Typical Electric Field Calculations Using Gauss's Law

Charge Distribution	Electric Field	Location
Insulating sphere of radius R, uniform charge density, and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	$k_e \frac{Q}{R^3} r$	$r < R$
Thin spherical shell of radius R and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	0	$r < R$
Line charge of infinite length and charge per unit length λ	$2k_e \frac{\lambda}{r}$	Outside the line
Nonconducting, infinite charged plane having surface charge density σ	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Everywhere outside the plane

- Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície
- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga
- O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total no interior da superfície.

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Condutores em equilíbrio eletrostático

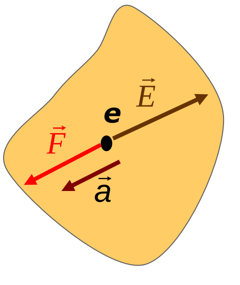
2.4. Condutores em equilíbrio electrostático

Diz-se que um condutor está em **equilíbrio eletrostático** quando não há um movimento "orientado" das cargas no interior do material.

$$\Downarrow$$

Que no interior do condutor em equilíbrio, o campo elétrico é nulo. PORQUÊ?

vamos imaginar um condutor em equilíbrio eletrostático e vamos supor que no seu interior o campo não era nulo:



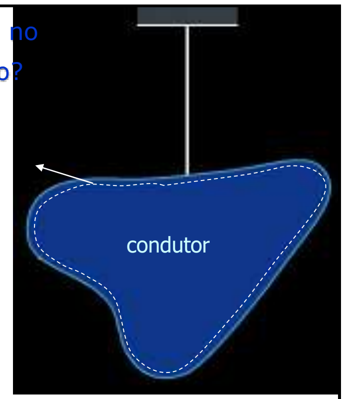
$$\vec{E} \neq 0$$

$$\vec{F}_{cargas} \neq 0$$

movimento orientado de cargas

O condutor não está em equilíbrio

E haverá um saldo de carga (positiva ou negativa) no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático?



Usando a lei de Gauss sabemos que:

Superfície gaussiana

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

mas como no interior do condutor o campo elétrico é nulo, o fluxo através da superfície gaussiana também é nulo, então:

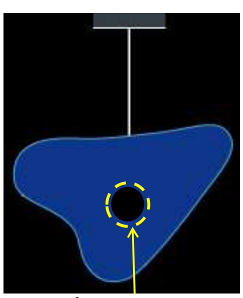
$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \phi_E = 0 \Rightarrow q_{\text{int}} = 0$$

Conclusão: Num condutor em equilíbrio eletrostático

- não há excesso de cargas no interior

- todo o excesso de cargas está na superfície

E haverá uma carga líquida na superfície de uma cavidade interna de um condutor em equilíbrio electrostático?



Superfície gaussiana

Usando a lei de Gauss sabemos que:

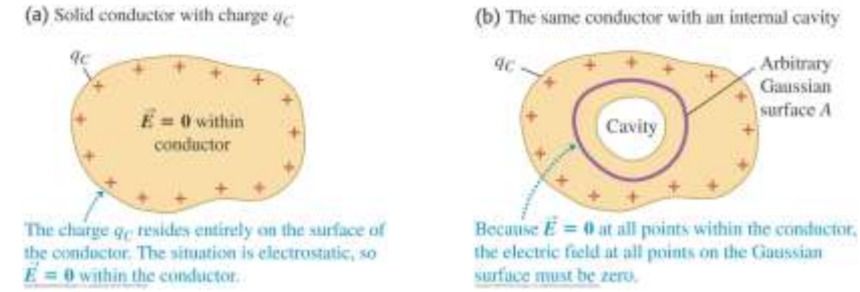
$$\Phi_{\text{sup.gaussiana}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

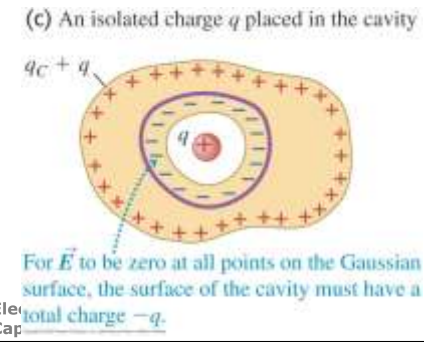
mas como no interior do condutor o campo é nulo, o fluxo através da superfície gaussiana também é nulo, então:

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \Phi = 0 \quad \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

Conclusão: Não há carga acumulada na superfície de uma cavidade de condutor em equilíbrio eletrostático. Todo o excesso de carga se acumula na superfície externa do condutor.

Cargas elétricas em condutores





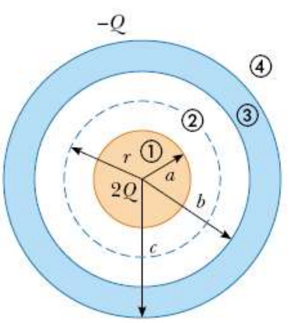
Campo elétrico no interior do condutor

E=0

Considere uma esfera condutora de raio ***a***, com uma carga positiva ***2Q*** e uma casca condutora de raio interno ***b***, de raio externo ***c*** e carga **-*Q***, concêntrica com a esfera.

A) Calcule o valor do campo eléctrico nas regiões 1, 2, 3 e 4.

B) Qual a distribuição de carga na casca quando todo o sistema está em equilíbrio?



A)

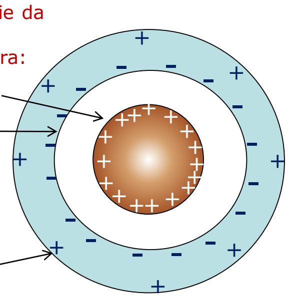
$$E_1 = 0 \qquad E_3 = 0$$

$$E_2 = \frac{k2Q}{r^2} \qquad E_4 \leq \frac{KQ}{c^2}$$

B)

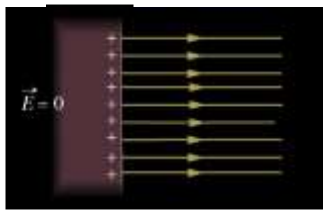
Carga na superfície da esfera condutora: **+2Q**

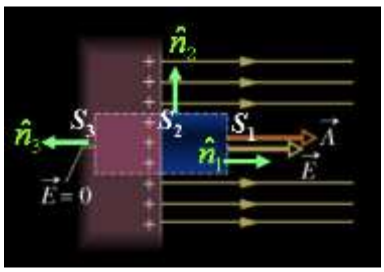
Carga na superfície interna da casca condutora: **-2Q**



Carga na superfície externa da casca condutora: **+Q**

Campo eléctrico no exterior de um condutor





Pela lei de Gauss:

$$\Phi_{sup.gaussiana} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

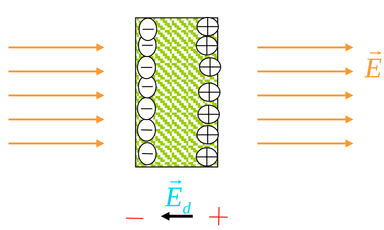
$$\Phi_1 + \cancel{\Phi_2} + \cancel{\Phi_3} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\int \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Campo no interior de uma placa condutora, colocada numa região em que existe campo eléctrico.



No interior do condutor as cargas distribuem-se, criando um campo, $\boldsymbol{E_d}$ de sentido oposto ao campo exterior: $\vec{E}+\vec{E}_d = \vec{0}$

Observações:

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

Se no interior o campo fosse não nulo, as cargas seriam sujeitas a uma força eléctrica, seriam aceleradas na direcção do campo e não haveria equilíbrio electrostático.

Quando um condutor está em equilíbrio electrostático:

O campo eléctrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.

Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.

O campo eléctrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a σ/ε_0, onde σ é a carga por unidade de área no ponto da superfície.

Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda.