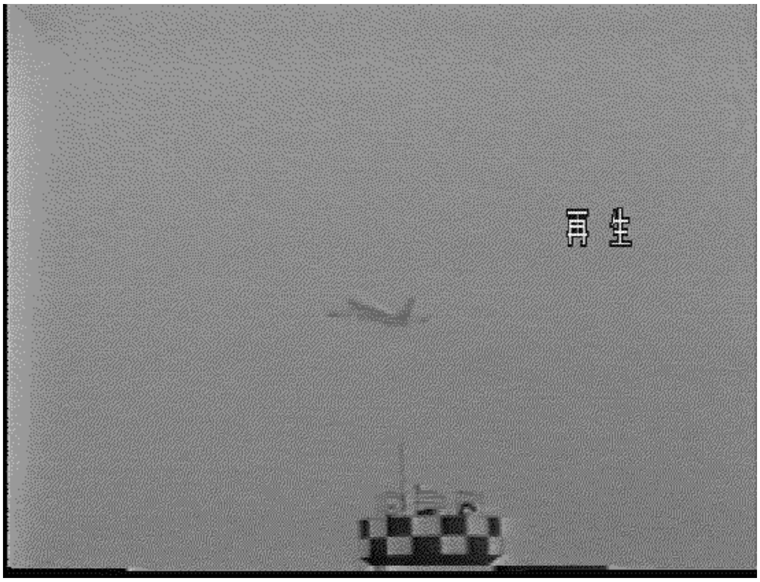
3. Potencial Eléctrico.



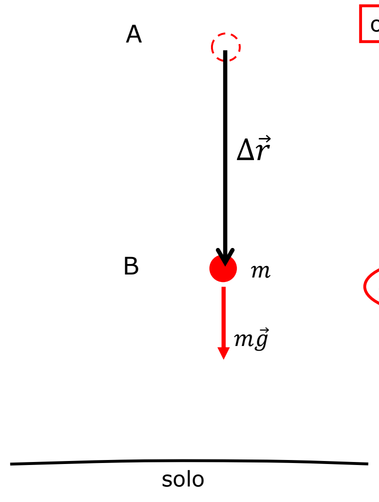
Electromagnetismo EE (2018/19)
Cap 3 Potencial Eléctrico

Tópicos

- Energia potencial eléctrica
- Trabalho realizado pela força eléctrica
- Potencial eléctrico e diferença de potencial
- Superfícies equipotenciais

Electromagnetismo EE (2018/19)
Cap 3 Potencial Eléctrico

O caso da força gravítica (Já estudado em Física EE e no secundário)

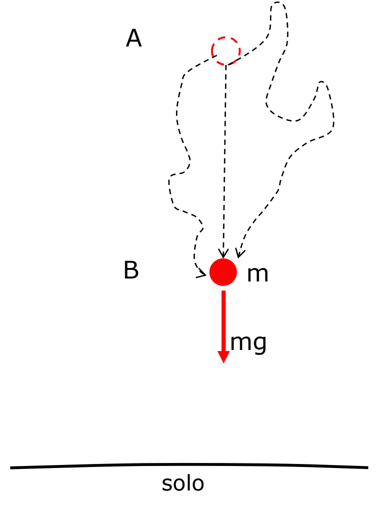


o trabalho realizado pelo peso é positivo.

$$W_{F_g(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = E_{p(\mathrm{B})} - E_{p(\mathrm{A})} = -W_{F_g(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

Na queda do corpo, a variação de energia potencial gravítica é negativa



$$W_{F_g(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\Delta E_{pg}$$

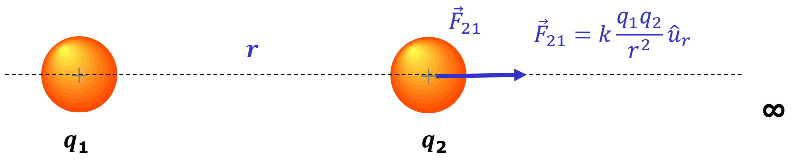
o trabalho realizado pelo peso no deslocamento da massa de A para B é independente do percurso efetuado. Só depende dos pontos inicial e final.

Força gravítica é uma força conservativa!

O conteúdo energético (e. potencial + e. cinética) não altera devido à ação deste tipo de força.

E o caso da força elétrica?

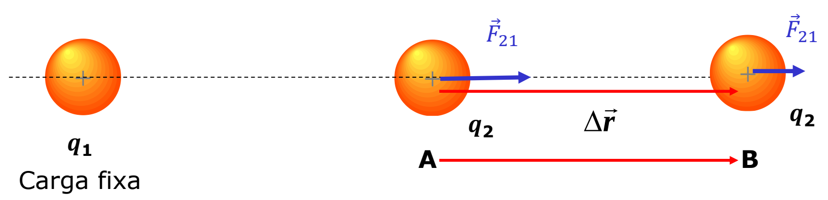
Se a carga pontal q_1 estiver fixa, o que acontece à carga pontual q_2?



$\vec{F}_{21}$ vai acelerar q_2 até o seu efeito deixar de se sentir (∞).

Havendo deslocamento, $\vec{F}_{21}$realiza trabalho (W). A força tem o mesmo sentido do deslocamento $\Rightarrow W > 0$.

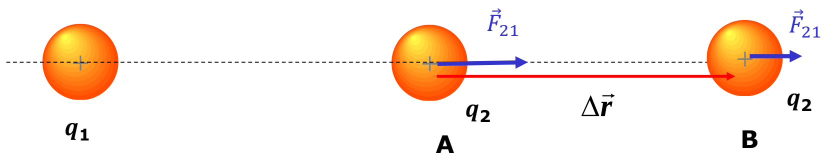
Calculando o trabalho realizado por $\vec{F}_{21}$ para levar $\boldsymbol{q_2}$ da posição **A** até uma posição **B**.
Ao longo do percurso, à medida que $\boldsymbol{q_2}$ se afasta de $\boldsymbol{q_1}$, F_{21} é cada vez menor.



Carga móvel

O trabalho efectuado sobre $\boldsymbol{q_2}$ pela força eléctrica $\vec{F}_{21}$ é:

$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}$$



$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{kq_1q_2}{r^2}dr = kq_1q_2\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{dr}{r^2} = kq_1q_2\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = -kq_1q_2\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = -\left[\frac{kq_1q_2}{r_B}-\frac{kq_1q_2}{r_A}\right]$$

Energia potencial final

Energia potencial inicial

$$W_{F_{21}(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = -\left(E_{p(\mathrm{B})}-E_{p(\mathrm{A})}\right) = -\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

O sistema q_2 e q_2 possui uma determinada energia potencial elétrica. Devido à ação da força elétrica a evolução do sistema é tal que tende a assumir a configuração de energia potencial mínima.

$$W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = -\Delta E_{p(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}$$

Quando as forças são conservativas o trabalho por elas efetuado só depende das posições final e inicial e é simétrico da variação da energia potencial.

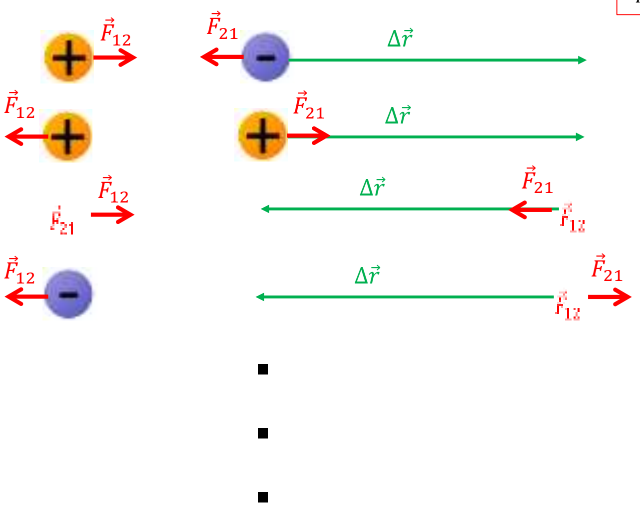
A força elétrica é uma força conservativa.

$$\boxed{E_P = \frac{kq_1q_2}{r}}$$

Energia potencial do sistema de duas cargas pontuais $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$ à distância $\boldsymbol{r}$ uma da outra

Cargas fixas Cargas livres

$E_P = \dfrac{kq_1q_2}{r}$ $W_{F_{21}} = -\Delta E_p$



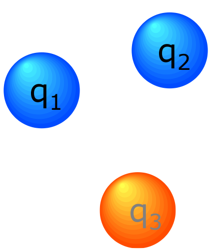
$\Delta E_p > 0$ $W_{\vec{F}_{21}} < 0$

$\Delta E_p < 0$ $W_{\vec{F}_{21}} > 0$

$\Delta E_p < 0$ $W_{\vec{F}_{21}} > 0$

$\Delta E_p > 0$ $W_{\vec{F}_{21}} < 0$

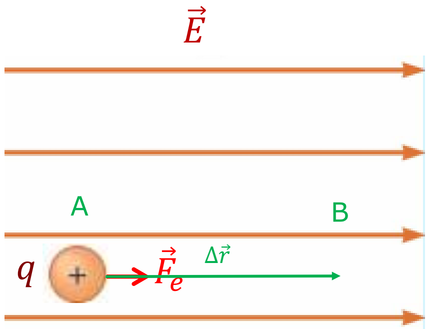
Qual a energia potencial electrostática dum sistema de várias cargas eléctricas pontuais?



$$E_p = k\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right]$$

Portanto: $E_P = E_{P12} + E_{P13} + E_{p23}$

$$E_P = \sum_{i \neq j} k\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$



$$W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_e \cdot d\vec{r}$$

$$W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})} = q\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Trabalho realizado, por unidade de carga: $\dfrac{W_{F_e(\mathrm{A}\to\mathrm{B})}}{q} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$\frac{-\Delta E_{p(A\to B)}}{q} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \frac{\Delta E_{p(A\to B)}}{q} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Variação de energia potencial, por unidade de carga

Variação de energia potencial elétrica , por unidade de carga:

$$\frac{\Delta E_{p(A\to B)}}{q} = \frac{E_{p(B)}}{q} - \frac{E_{p(A)}}{q}$$

Energia potencial elétrica por unidade de carga inicial = **Potencial elétrico inicial**

Energia potencial elétrica por unidade de carga final = **Potencial elétrico final**

À energia potencial por unidade de carga chama-se **potencial elétrico**: $\boxed{V = \dfrac{E_p}{q}}$

À variação de energia potencial elétrica , por unidade de carga, chama-se **diferença de potencial elétrico (ddp - ΔV)**.

$$\Delta V(\mathrm{AB}) = V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}$$

Quais as unidades SI de Potencial Elétrico e de diferença de potencial elétrico?

$\dfrac{J}{C} \equiv V$ volt

Alessandro Volta
1745-1826

potencial elétrico = energia potencial elétrica por unidade de carga $V = \frac{E_p}{q}$

A **diferença de potencial elétrico**

$$\Delta V = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{W_{A\to B}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

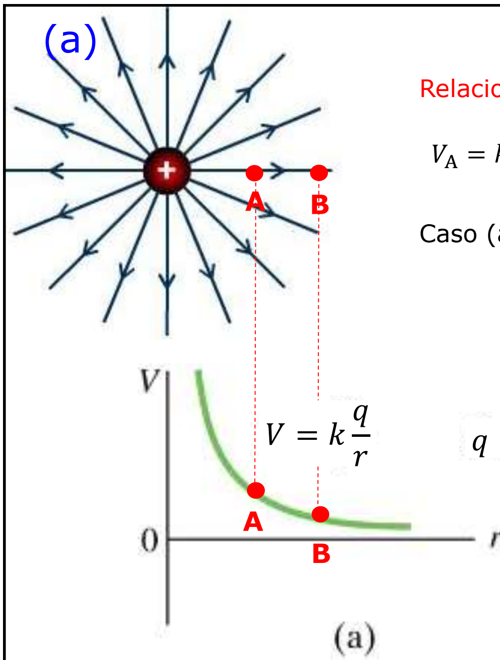
É a **variação de energia potencial elétrica por unidade de carga** e traduz a relação entre diferença de potencial elétrico e Campo elétrico.

Para cargas pontuais:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{E_P = \dfrac{kq_1q_2}{r}} \\[2ex] \boxed{\dfrac{E_P}{q} = V} \end{array}\right\} \quad E_P = \frac{kq_1}{r}q_2 = Vq_2$$

Potencial criado pela carga q_1 à distância r

Potencial eléctico criado pela carga pontual ***q*** à distância ***r*** $\boxed{V = \dfrac{kq}{r}}$



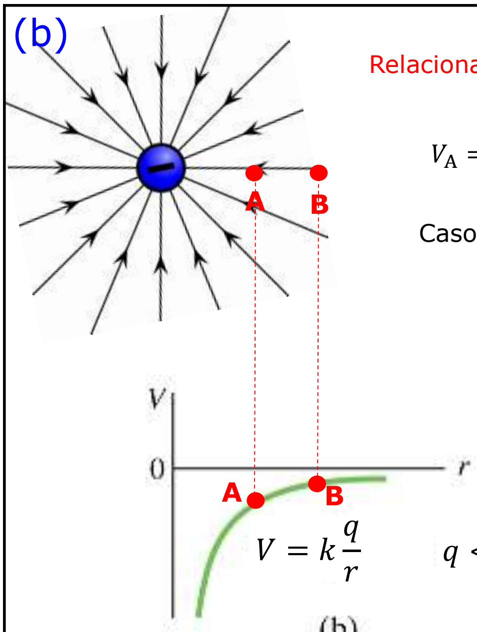
Relacionar o V_A com V_B.

$V_A = k\dfrac{q}{r_A}$ $\quad V_B = k\dfrac{q}{r_B}$

Caso (a): $V_A > V_B$

$q > 0$

(b)



Relacionar o V_A com V_B.

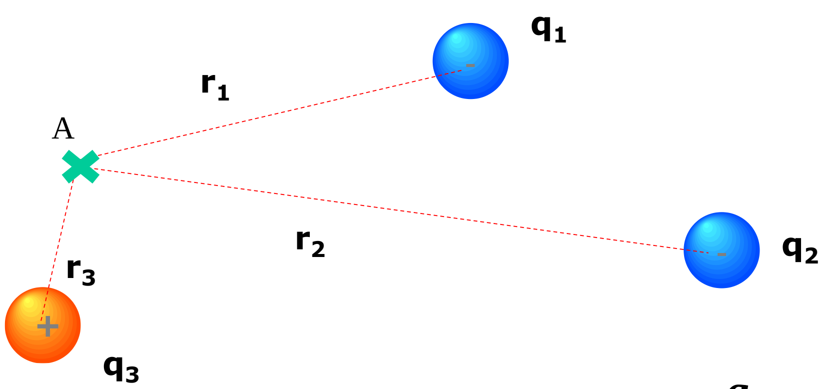
$$V_A = k\frac{q}{r_A} \qquad V_B = k\frac{q}{r_B}$$

Caso (b): $V_A < V_B$

$q < 0$

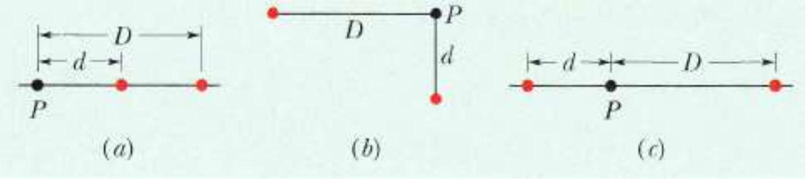
Dos casos (a) e (b): O potencial elétrico diminui ao longo das linhas de campo elétrico

Se houver um conjunto de cargas, o potencial num determinado ponto é dado por:



$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \sum k\frac{q_i}{r_i}$$

Checkpoint 1: A figura mostra 3 diferentes arranjos de 2 protões. Ordene por ordem decrescente do potencial no ponto P.



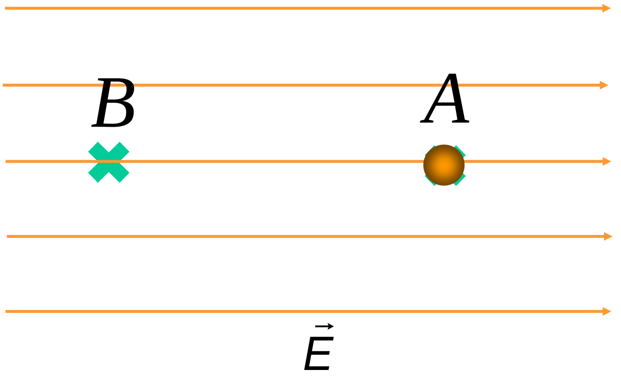
Checkpoint 2:

Na figura um protão move-se desde um ponto A até ao ponto B, numa zona onde existe um campo eléctrico uniforme, com o sentido indicada na figura.

a) o trabalho realizado pelo campo eléctrico é positivo ou negativo?

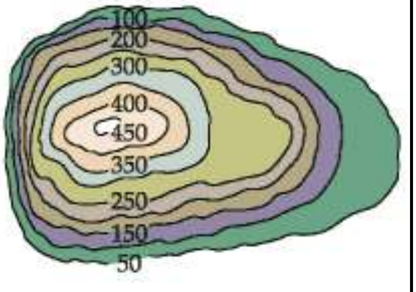
b) a energia potencial electrostática do protão aumenta ou diminui?

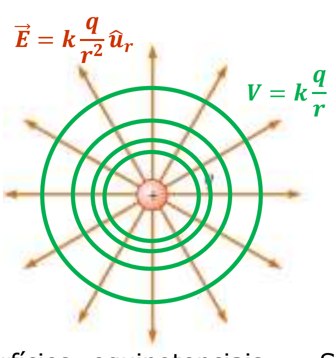
c) Em qual dos pontos o potencial elétrico é maior?

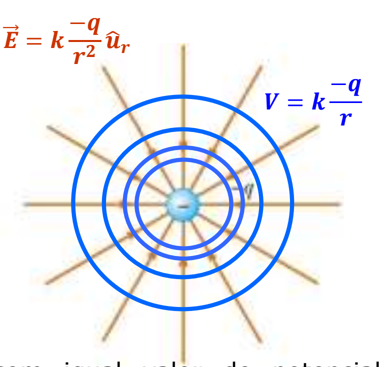


Superfícies equipotenciais e linhas de campo

Numa carta topográfica, há curvas que unem os pontos à mesma altitude. Quanto maior o declive, maior a densidade dessas linhas (linhas mais juntas).







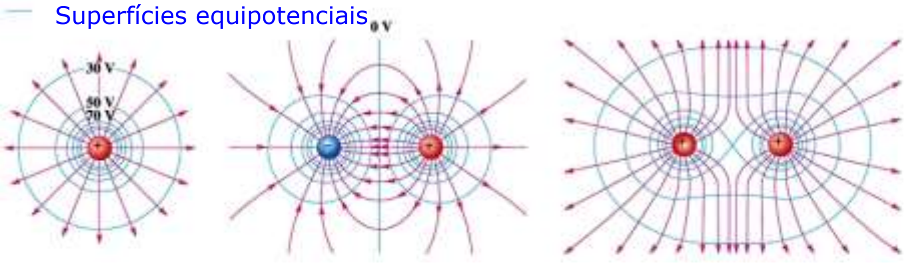
Superfícies equipotenciais – Superfícies com igual valor de potencial eléctrico.

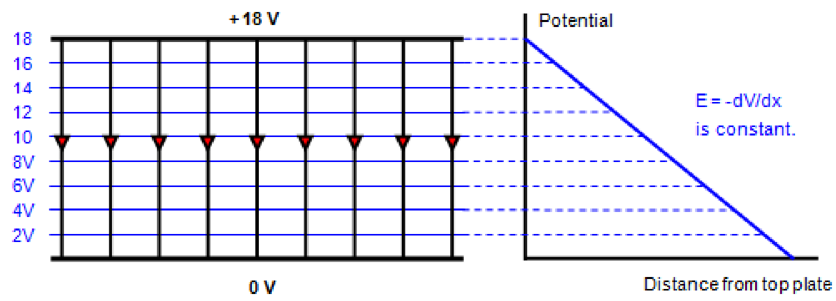
As <u>linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies equipotenciais</u>.

As linhas de campo apontam no sentido do valor de potencial decrescente.

Linhas de campo elétrico

Superfícies equipotenciais





Relação entre Potencial Eléctrico e Campo Eléctrico

O campo elétrico e o potencial elétrico estão relacionados.

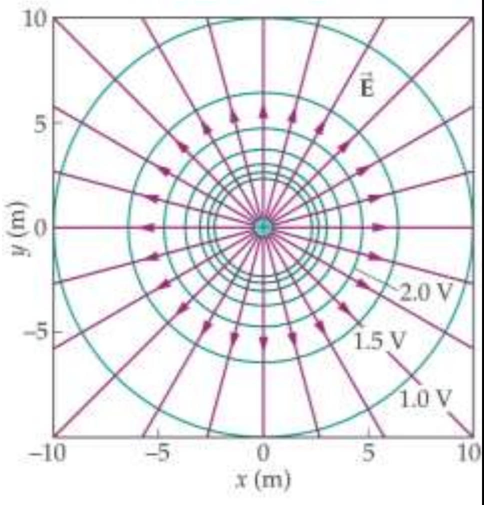
Derivando o Potencial elétrico criado por uma carga pontual em ordem a $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{kq}{r} = -\frac{kq}{r^2}$$

Sabendo que o Campo elétrico, criado por uma carga pontual, em ordem a $\boldsymbol{r}$ é dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{u}_r$$



Neste exemplo, o potencial devido à carga q só depende de uma variável (***r***).

$$V = k\frac{q}{r}$$

Mas ***r*** acaba por definir uma posição num espaço a 3D. Usando coordenadas espaciais ***x***, ***y*** e ***z***, deveremos aplicar derivadas parciais, uma segundo cada direção, para calcular o campo elétrico.

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{u}_r$$

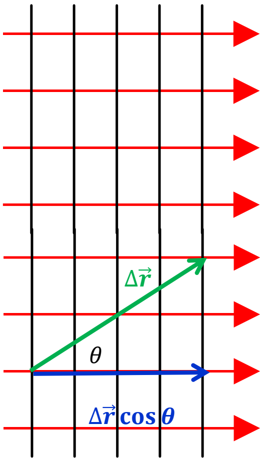
$$\Downarrow$$

$$\vec{E}(r) = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)}_{\vec{\nabla}}V(x,y,z)$$

Operador que actua sobre o potencial elétrico (Gradiente) que se representa por $\vec{\nabla}$ (nabla):

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

$\vec{E}$ **uniforme**



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

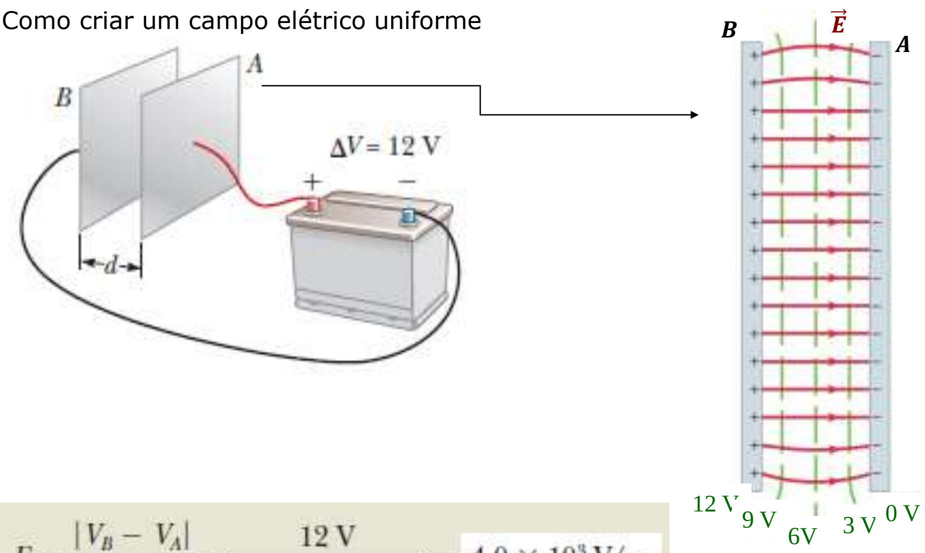
$$\Delta V = -E\Delta r\cos\theta$$

$$\Delta V = -Ed$$

d = distância entre duas superfícies equipotenciais

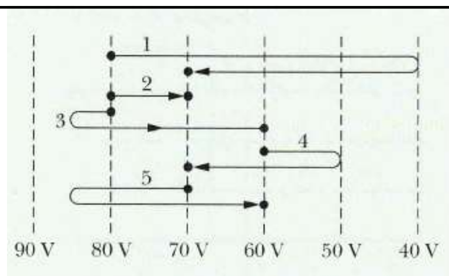
Quando numa zona do espaço há campos elétricos uniformes, isso não significa que o potencial elétrico é constante!

Como criar um campo elétrico uniforme



$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12\ \text{V}}{0.30 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 4.0 \times 10^3\ \text{V/m}$$

Checkpoint



A figura representa a secção de superfícies equipotenciais paralelas e 5 diferentes percursos de electrões.

(a)Qual o sentido do campo eléctrico associado a estas superfícies equipotenciais? Se a distância entre cada 2 superficies equipotenciais for 1 m, qual o valor do campo elétrico?

(b) Para cada percurso, o trabalho realizado pela força eléctrica é positivo, negativo ou nulo?

(c) Qual a variação de energia potencial no caso 1?
Em que percursos a variação da energia cinética é positiva?

Ponto da situação (cap 1 e 3)

Conceito de força $\qquad$ $\vec{F} = -\dfrac{dE_P}{dr}\hat{r}$ $\qquad$ **Conceito de energia**

Actua localmente $\qquad$ $\vec{F} \longleftarrow \Delta E_P = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \longrightarrow E_P$

$\vec{F} = q\vec{E}$ $\qquad\qquad$ $E_P = qV$

Actua em todo o lado $\qquad$ $\vec{E} \longleftarrow \vec{E} = -gradV \longrightarrow V$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

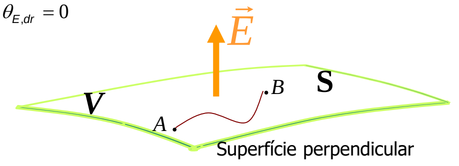
Quando uma carga se desloca numa superfície equipotencial a força elétrica não realiza trabalho (**porquê?**) **Para que uma superfície seja equipotencial basta que seja perpendicular ao campo?**

Imaginemos uma superfície perpendicular ao campo e vamos calcular a diferença de potencial entre dois pontos dessa superfície.

$$\Delta V_{A\to B} = ?$$

$$\theta_{E,dr} = 90^o \Rightarrow \cos\theta_{E,dr} = 0$$

$$\Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

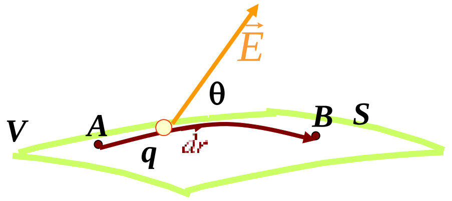


$$\Delta V_{A\to B} = 0$$

(qualquer que seja A e B na superfície)

$\boxed{S \text{ é uma superfície equipotencial}}$

E se a superfície considerada não for perpendicular ao campo?



$\theta_{E,ds} \neq 90° \Rightarrow \cos\theta_{E,ds} \neq 0$

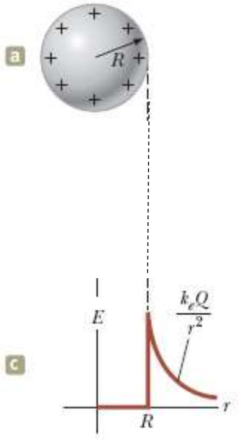
$$\Delta V_{sup} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

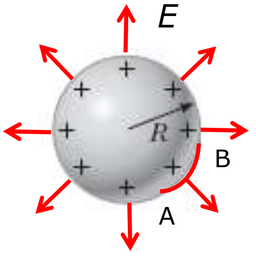
$$\Delta V_{A\to B} \neq 0$$

S NÃO é uma superfície equipotencial

Potencial em condutores esféricos e não esféricos

Já sabemos que num condutor esférico em equilíbrio electrostático, o excesso de carga acumula-se à superfície. A densidade superficial de carga, σ, nesse condutor é uniforme.





$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$V_B - V_A = 0$$

Porque o campo é perpendicular ao percurso. Portanto o potencial é constante ao longo da superfície.

Potencial numa esfera condutora carregada

Fora da esfera

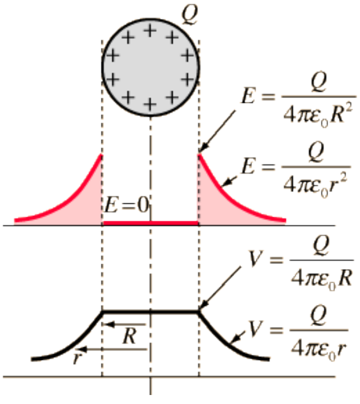
$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V_{\infty r} = -kq \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

$$V_\infty - V_r = -kq \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty}$$

$$-V_r = -kq \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r} \right]$$

$$V_r = \frac{kq}{r}$$



Interior da esfera

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{0} \Rightarrow V = const.$$

Como o campo é nulo no interior do condutor, então, no interior do condutor, o potencial é constante e igual ao potencial na superfície.

Equivalente ao que acontece numa casca carregada

Duas esferas metálicas, de raio $r_1 > r_2$), estão eletricamente carregadas ($q_1 \neq q_2$) e separadas por uma distância muito maior que o seu raio. São ligadas através de um fio condutor. Que acontece?

Se as esferas estão muito afastadas, podemos considerar que o campo provocado por uma esfera não afecta a distribuição de cargas da outra esfera.

O potencial elétrico à superfície de cada esfera é:

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = k\frac{q_2}{r_2}$$

Em geral:

$$V_1 \neq V_2$$

Ao serem ligadas através de um fio condutor, os portadores de carga (que nos metais são eletrões) vão deslocar-se do menor para o maior potencial, até que, a diferença de potencial seja nula, mas isso não significa que $q_{1F} = q_{2F}$.

$$V = k\frac{q_{1F}}{r_1} = k\frac{q_{2F}}{r_2} \Leftrightarrow \frac{q_{1F}}{r_1} = \frac{q_{2F}}{r_2} \Leftrightarrow \frac{q_{1F}}{q_{2F}} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ou seja, se $r_1 > r_2 \Rightarrow q_{1F} > q_{2F}$

Em equilíbrio, as cargas elétricas finais só são iguais se os raios das esferas for igual.

Aplicação

Qual a razão entre os campos eléctricos à superfície das esferas?

q_{1F}

q_{2F}

$$E_1 = k\frac{q_{1F}}{r_1^2}$$

$$E_2 = k\frac{q_{2F}}{r_2^2}$$

$$\frac{q_{1F}}{q_{2F}} = \frac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow q_{1F} = \frac{r_1}{r_2}q_{2F}$$

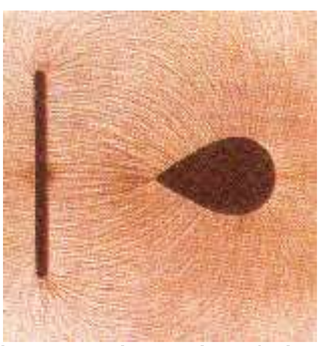
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{q_{1F}}{r_1^2}}{\frac{q_{2F}}{r_2^2}} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

O campo eléctrico na vizinhança da esfera de menor raio é superior, apesar do potencial à superfície de ambas as esferas ser igual.

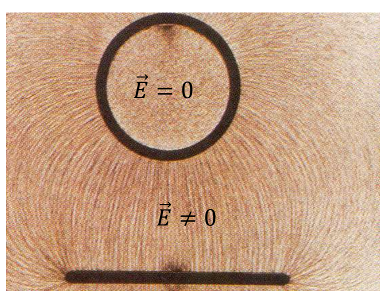
Se o condutor não é esférico:

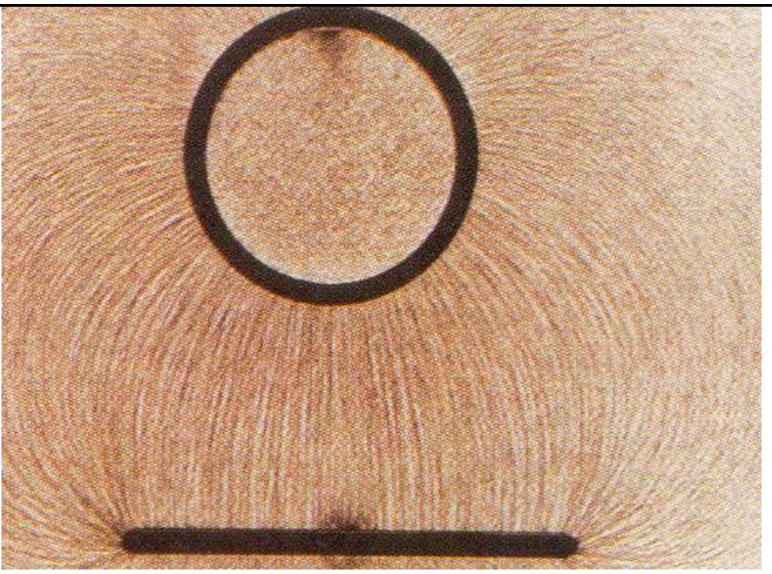
- σ elevada onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície convexa.
- σ baixa onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície côncava.

Como $\left|\vec{E}\right| \propto \sigma$, o campo eléctrico é grande nas vizinhanças dos pontos que têm curvatura convexa, com pequeno raio de curvatura, e atinge valores muito elevados nas vizinhanças de pontas agudas.



Reparar que, o campo elétrico é mais intenso nas zonas onde o raio de curvatura é menor.

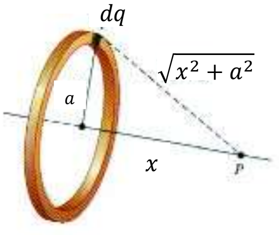




Linhas de campo eléctrico para um cilindro e uma placa com cargas de sinal contrário.

Potencial gerados por alguns corpos de geometria particular, com distribuição homogénea de carga

Potencial num eixo de um anel de carga Q, uniformemente carregado



O potencial criado por um elemento de carga dq, que pode ser considerado pontual, no ponto **P**, assumindo que o potencial é nulo no infinito, pode ser calculado por:

$$dV = \frac{kdq}{r}$$

A contribuição de todos os elementos de carga dq, para o potencial no ponto **P**, será:

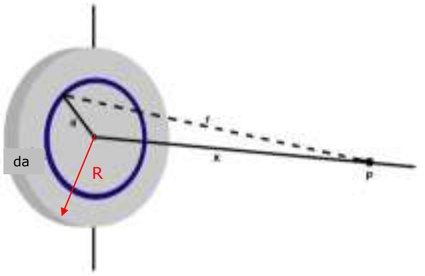
$$V = \int \frac{kdq}{r}$$

$$V = \int \frac{kdq}{r} = \int \frac{kdq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq \rightarrow Q$$

$$\boxed{V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

Potencial num eixo de um disco uniformemente carregado

Num disco com densidade de carga σ



Resolver o problema como se o disco fosse um conjunto de anéis concêntricos carregados.

Potencial no ponto P criado pelo anel azul: $dV = \frac{kdq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k\sigma 2\pi a da}{\sqrt{x^2+a^2}}$

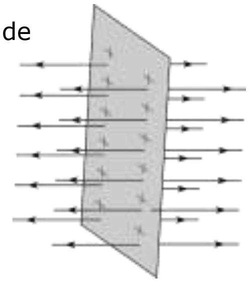
Integrando entre 0 e R: $V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi a da}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\sigma\pi \int_0^R (x^2+a^2)^{-1/2} 2a da$

Fazendo: $\int u^n du$ com: $u = x^2 + a^2$ $n = -\frac{1}{2}$

$$V = k\sigma\pi \int_0^R (x^2+a^2)^{-1/2} 2a da = \left[\frac{(x^2+a^2)^{1/2}}{1/2}\right]\Big|_0^R \qquad \boxed{V = 2k\sigma\pi\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]}$$

Potencial devido a um plano uniformemente carregado

Num plano com densidade de carga σ



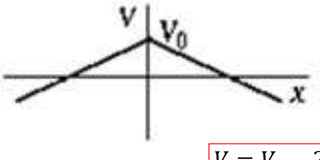
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = -2\pi k\sigma\hat{\imath} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = 2\pi k\sigma\hat{\imath}$$

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -(-2\pi k\sigma\hat{\imath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = 2\pi k\sigma dx$$

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -(2\pi k\sigma\hat{\imath})\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = -2\pi k\sigma dx$$

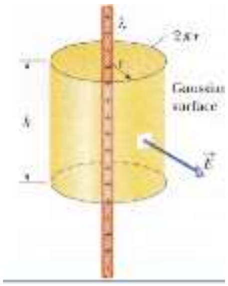
$$\int dV = \int 2\pi k\sigma dx \qquad \int dV = \int -2\pi k\sigma dx$$

$$V = V_0 + 2\pi k\sigma x \qquad V = V_0 - 2\pi k\sigma x$$



$$\boxed{V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|}$$

Potencial devido a uma linha infinita uniformemente carregada



$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{2k\lambda}{r}dr$$

$$\int dV = \int -\frac{2k\lambda}{r}dr$$

$$V = V_0 - 2k\lambda \ln r$$

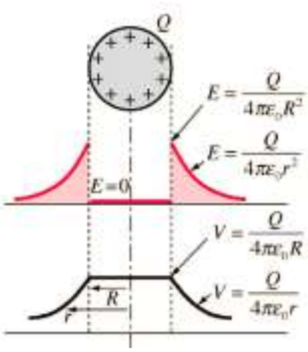
O potencial decresce com r, mas não é 0 no infinito, nem pode ser 0 em r=0. O potencial tem de ser 0 a uma distância pré-estabelecida (e.g. a)

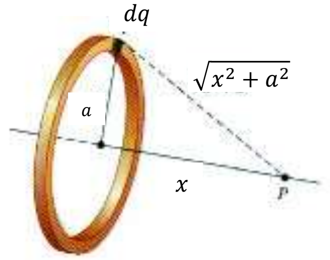
$$0 = V_0 - 2k\lambda \ln a$$

$$V_0 = 2k\lambda \ln a$$

$$V = 2k\lambda \ln a - 2k\lambda \ln r$$

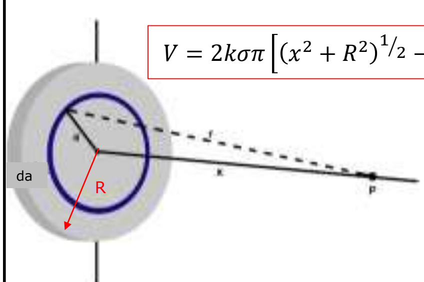
$$\boxed{V = -2k\lambda \ln\frac{r}{a}}$$

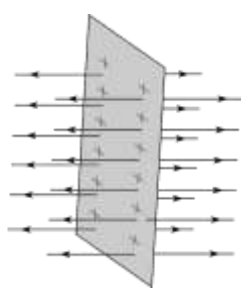


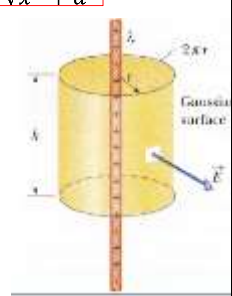


$$\boxed{V = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}}$$

$$\boxed{V = 2k\sigma\pi\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]}$$







$$\boxed{V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|}$$

$$\boxed{V = -2k\lambda \ln\frac{r}{a}}$$

condutor num campo eléctrico externo