3. POTENCIAL ELÉCTRICO

3.1 Diferença de Potencial e Potencial Eléctrico.

3.2 Diferenças de Potencial num Campo Eléctrico Uniforme.

3.3 Potencial Eléctrico e Energia Potencial de Cargas Pontuais.

3.4 Potencial Eléctrico de Distribuições Contínuas de Carga.

3.5 Cálculo do Campo Eléctrico a Partir do Potencial.

3.6 Potencial dum Condutor Carregado.

Forças conservativas $\Rightarrow$ energia potencial

Força da gravidade, força elástica duma mola, força electrostática..)

Potencial Eléctrico (grandeza escalar) (grande valor prático)

Lei da conservação da energia

A voltagem que se mede entre dois pontos dum circuito eléctrico é a diferença do potencial eléctrico entre os pontos.

3.1 Diferença de Potencial e Potencial Eléctrico.

- A força gravitacional é conservativa (Lei da gravitação universal.)
- A força electrostática (Lei de Coulomb) tem a mesma forma, também é conservativa.
  - $\Rightarrow$ É possível definir uma função energia potencial associada a essa força.
- Carga de prova q_0 colocada num campo electrostático $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \vec{E}}$$

Soma vectorial de todas as forças individuais $\Rightarrow$ conservativa.

- O trabalho realizado pela força $q_0 \vec{E}$ é igual ao negativo do trabalho feito por um agente externo que deslocasse a carga no campo $\vec{E}$

- O trabalho efectuado pela força eléctrica $q_0 \vec{E}$, sobre a carga de prova, num deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ é:

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

- Por definição, o trabalho realizado por uma força conservativa é igual ao negativo da variação da energia potencial, dU

$$\boxed{dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

- No caso dum deslocamento finito, entre os pontos A e B, da carga de prova, a variação da energia potencial é:

$$\boxed{\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Integral de linha → Não depende do percurso seguido entre A e B

Força Conservativa

- Por definição, a diferença de potencial, V_B-V_A, entre os pontos A e B é a variação da energia potencial dividida pela carga de prova q_0

$$\boxed{V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (1)$$

! - Diferença de potencial ≠ energia potencial.
- Proporcionais $\Delta U = q_0 \Delta V$
- $\Delta U \rightarrow$ escalar $\Rightarrow \Delta V$ escalar
- ΔU_1= - trabalho realizado sobre a carga pela força eléctrica da carga.

⇒ V_B-V_A = ao trabalho, por unidade de carga, que um agente externo deve efectuar para deslocar uma carga de prova, no campo eléctrico, de A até B, sem alterar a energia cinética da carga.

! - (1) define somente a diferença de potencial ⇒ somente as diferenças de V têm sentido.
- A função V é tomada, muitas vezes, como nula, num certo ponto conveniente. Usualmente escolhemos um ponto no ∝ como o ponto de potencial nulo ⇒

⇒ Com essa escolha: **o potencial eléctrico num ponto arbitrário é igual ao trabalho necessário, por unidade de carga, para trazer uma carga de prova positiva do infinito até ao ponto considerado**.

$V_A = 0$ no ∝ ⇒ $\boxed{V_P = \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}}$

! Na realidade V_P representa a diferença de potencial entre P e um ponto no ∝

- **Diferença de potencial** é uma medida da energia por unidade de carga (SI) $\boxed{1\ V = 1\ J/C}$ $\boxed{\text{Volt (V)}}$
- A diferença de potencial também tem as unidades de campo eléctrico vezes distância $\Rightarrow$ a unidade SI de campo eléctrico (N/C) também pode ser expressa como volt por metro:

$$\boxed{1\ N/C = 1\ V/m}$$

- Unidade de energia comummente usada em física atómica e nuclear ou em física do estado sólido é o electrão-volt (def.: a energia que um electrão (ou um protão) adquire quando se move através de uma diferença de potencial de 1V.)

$$\boxed{1\ eV = 1.6\times10^{-19}\ C\cdot V = 1.6\times10^{-19}\ J}$$

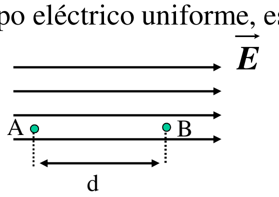
Ex: Um e^- num feixe dum tubo de TV.

$\Rightarrow$ é acelerado do repouso com uma $\Delta V = 7.1$ KeV

$$\mathbf{v} = 5\times10^{7}\ m/s \Rightarrow K = 1.1\times10^{-15}\ J \sim 7.1\times10^{3}\ eV$$

3.2 Diferenças de Potencial num Campo Eléctrico Uniforme.

- **A diferença de potencial não depende da trajectória entre esses dois pontos**; isto é, o trabalho para levar uma carga de prova de A até B, é sempre o mesmo, ao longo de qualquer trajectória. $\Rightarrow$ Um campo eléctrico uniforme, estático, é conservativo.



$$\boxed{V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B E\ \cos 0\cdot ds = -\int_A^B Eds}$$

$$\boxed{\Delta V = -E\int_A^B ds = -Ed}$$

E=cte

$V_B < V_A$

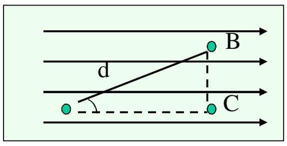
- Linhas do campo apontam potencial decrescente.

- Se uma carga de prova q_0 se desloca de A para B $\Rightarrow$ a variação da sua energia potencial é:

$$\boxed{\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed}$$

(Análogo ao m num campo gravitacional)
- Se $q_0 > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \rightarrow$ Uma carga (+) perde energia potencial eléctrica quando se desloca na direcção do campo.
- $\vec{F} = q_0 \vec{E} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$ q_0 é acelerada na direcção de $\vec{E}$ $\Rightarrow$ ganha energia cinética e perde igual quantidade de energia potencial.
- Se $q_0 < 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \rightarrow$ Uma carga (-) ganha energia potencial eléctrica quando se move na direcção do campo eléctrico.
  ($\vec{a}$ direcção oposta à direcção do campo)

- Quando uma partícula carregada é acelerada, ela perde na realidade, energia, pela radiação de ondas electromagnéticas.



$V_B < V_A$
$V_B = V_C$

$$\boxed{\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{E} d}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{d}}$$

! Todos os pontos sobre um plano perpendicular a um campo eléctrico uniforme estão ao mesmo potencial.

Superfície equipotencial é qualquer superfície constituída por uma distribuição contínua de pontos que possuam o mesmo potencial.

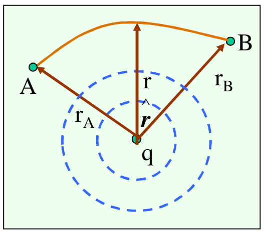
! Sendo $\Delta U = q_0 \Delta V$, não se realiza trabalho para deslocar a carga de prova entre dois pontos sobre uma mesma superfície equipotencial.

Superfície equipotencial dum campo eléctrico uniforme $\rightarrow$ família de planos $\perp$ ao campo.

3.3 Potencial Eléctrico e Energia Potencial de Cargas Pontuais.

- Carga pontual positiva isolada.
  $\vec{E}$ radial, para fora

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$



$$\vec{E} = K\frac{q\,\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = K\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s}$$

$$\hat{r}\cdot d\vec{s} = ds\ \cos\theta$$

(θ ⊠ ângulo entre $\hat{r}$ e $d\vec{s}$)

- $ds\cos\theta$ é a projecção de $d\vec{s}$ sobre $\vec{r}$ $\Rightarrow ds\cos\theta = dr$
  (qualquer deslocamento $d\vec{s}$ provoca uma variação dr no módulo de $\vec{r}$)

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left(K\, {}^{q}\!/_{r^2}\right)dr$$

$$V_B - V_A = -\int E_r dr = -Kq\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \left.\frac{Kq}{r}\right|_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = Kq\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

! $-\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\cdot d\vec{s}$ **é independente da trajectória entre A e B**, como deve ser.

- V_B-V_A só depende das coordenadas radiais r_A e r_B
- É comum escolher como zero o potencial em $r_A = \infty$ (natural $V \approx 1/r_A$, $r_A \to \infty \Rightarrow V \to 0$)

$\Rightarrow$ Com esta escolha, o potencial eléctrico duma carga pontual, a uma distância ***r*** da carga, é:

$$\boxed{V = K\frac{q}{r}}$$

$\Rightarrow$ V=cte sobre uma superfície esférica de raio r. **As superfícies equipotenciais são superfícies esféricas concêntricas com a carga.**

! **Superfície equipotencial $\perp$ a uma linha do campo eléctrico em cada ponto**.

- Potencial eléctrico de duas ou mais cargas pontuais $\Rightarrow$ ***princípio da sobreposição***.

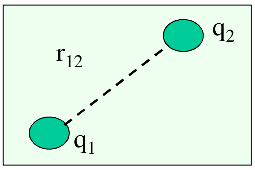
Potencial total em P $\boxed{V = K\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$ (1)

Em que V = 0 no ∞ e r_i é a distância do ponto P à carga q_i

! (1) é uma soma algébrica de escalares $\Rightarrow$ é muito mais fácil calcular V do que calcular $\vec{E}$

- Energia potencial da interacção dum sistema de partículas carregadas.
- V_1 = potencial da carga q_1 no $P \Rightarrow$ o trabalho necessário para trazer q_2, do ∞ até P, sem aceleração, é dado por $q_2 V_1$

  Por definição, esse trabalho = energia potencial, U, do sistema de partículas separadas r_{12}



$$U = q_2 V_1 = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

(mesma forma da energia potencial gravitacional)

! q_1 e q_2 mesmo sinal $\Rightarrow U > 0$

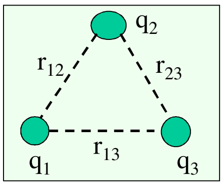
q_1 e q_2 repelem-se e é preciso efectuar trabalho sobre o sistema para aproximar uma carga da outra.

! q_1 e $q_2$sinais opostos $\Rightarrow$ força atractiva ; $U < 0$

o sistema realiza trabalho quando as cargas se aproximam.

Se o sistema tiver mais de duas partículas carregadas:

- Cálculo de U para todos os pares de cargas, e
- Soma algébrica dos resultados.

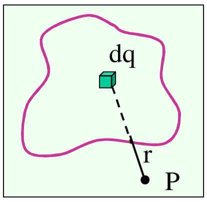


$$U = K\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Interpr.: q_1 fixa a posição dada e q_2 e q_3 estejam no ∞

- Trabalho para trazer q_2 do ∞ até à sua posição na vizinhança de q_1 é $\boxed{K \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$
- Trabalho para trazer q_3 do ∞ até à sua posição na vizinhança de q_1 e q_2 é $\boxed{K \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}}}$

3.4 Potencial Eléctrico de Distribuições Contínuas de Carga.



Duas maneiras:

1. Principiamos com $V = K\frac{q}{r}$ consideramos o potencial dum elemento de carga dq, tratado como carga pontual $\Rightarrow$ $dV = K\,{dq}/{r}$

- Potencial total em P $\boxed{V = K\int \frac{dq}{r}}$ a

! O que fizemos foi substituir a soma da secção anterior por um integral.

! A expressão a traz implícita uma escolha específica do potencial de referencia: V = 0 num ponto P localizado infinitamente distante da distribuição de cargas.

2. • Principiamos com $\boxed{\Delta V = V_B - V_A = \frac{U_A - U_B}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}$ b

- Método útil quando se conhece o campo eléctrico, por outras considerações, como a Lei de Gauss.

$\Rightarrow$ Distribuição de cargas muitos simétricas $\Rightarrow$ calculamos $\vec{E}$ $\forall P$ mediante a Lei de Gauss, e depois substituímos em b a fim de achar ΔV. Finalmente, escolhemos um ponto conveniente arbitrário, onde V é nulo.

3.5 Cálculo de $\vec{E}$ a Partir do Potencial Eléctrico.

- $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (1)
- $\vec{E}$ e V são determinados por uma certa distribuição de cargas.
- (1) $\Rightarrow$ $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$
- Se $\vec{E}$ só tiver uma componente, $E_x \Rightarrow$

  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx \Rightarrow dV = -E_x dx$

$$\boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}}$$

! **O campo eléctrico é igual ao negativo da derivada do potencial em relação a uma certa coordenada**.

! **dV é nula se deslocamento $\perp$ ao campo eléctrico $\rightarrow$ superfície equipotencial.**

- Distribuição de cargas esferossimétrica, com a densidade de carga dependendo somente da distância radial r $\Rightarrow$ o campo eléctrico é radial.

  $\Rightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r dr \;//\; dV = -E_r dr$

$$\boxed{E_r = -\frac{dV}{dr}}$$

! O potencial só se altera na direcção radial, mas não numa direcção $\perp$ a $\vec{r}$ $\Rightarrow$ V=V(r) (tal qual E_r)

! **As superfícies equipotenciais são $\perp$ às linhas do campo eléctrico**. $\rightarrow$ família de esferas concêntricas à distribuição de cargas.

- Quando uma carga de prova sofrer um deslocamento $\vec{ds}$ que pertença a uma superfície equipotencial
  $\Rightarrow$ por definição, $dV = -\vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$ $\Rightarrow$ as superfícies equipotenciais devem ser, sempre, perpendiculares às linhas do campo eléctrico.
- Em geral, V é uma função das três coordenadas espaciais.
  Se V($\vec{r}$) é dado em termos das suas coordenadas rectangulares

$$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\partial V}{\partial x}} \quad \boxed{E_y = \frac{\partial V}{\partial y}} \quad \boxed{E_z = \frac{\partial V}{\partial z}}$$

! Derivadas parciais $\rightarrow$ e.g. Na operação $\partial V / \partial x_1$ toma-se a derivada em relação a ***X***, mantendo-se ***Y*** e ***Z*** constantes

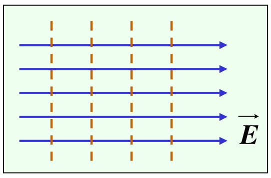
$$\boxed{V = 3x^2 y + y^2 + yz}$$

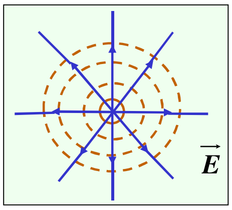
$$\boxed{\partial V / \partial x = \partial / \partial x \left(3x^2 y\right) = 3y\, d/dx \left(x^2\right) = 6xy}$$

- Em notação vectorial:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{i}\, \partial / \partial x + \hat{j}\, \partial / \partial y + \hat{k}\, \partial / \partial z\right) V}$$

- **∇ é o operador gradiente.**

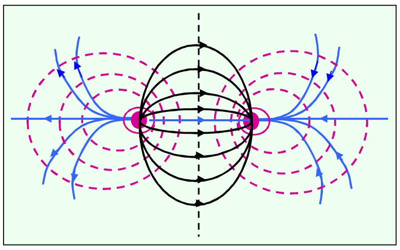
a


b


Superfícies equipotenciais (---) e linhas do campo eléctrico ($\rightarrow$)

a campo eléctrico uniforme provocado por um plano ∞ carregado

b uma carga pontual

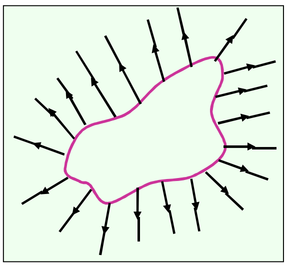


ⓒ Um dipolo eléctrico

3.6 O Potencial dum Condutor Carregado.

! O condutor está em equilíbrio

- Se tem excesso de carga $\rightarrow$ está na superfície externa.
- $\vec{E}$ na face externa $\perp$ à superfície.
- $\vec{E}$= 0 no interior do condutor.
- Todo o ponto sobre a superfície dum condutor carregado, em equilíbrio, está ao mesmo potencial.



Sobre qualquer curva, na superfície

$\vec{E} \perp d\vec{s}$

$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0} \qquad \forall \text{ A e B}$$

$\Rightarrow$ A superfície de qualquer condutor carregado, em equilíbrio, é uma superfície equipotencial.

$\vec{E} = 0$ no interior $\Rightarrow$ o potencial é constante $\forall$P no interior do condutor e é igual ao valor que tem na superfície do condutor.

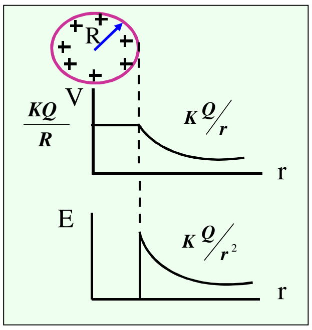
$\Rightarrow$ Não há trabalho para deslocar uma carga de prova do interior dum condutor carregado até a sua superfície.

- Esfera metálica maciça raio R, carga Q

$E = K \, Q/r^2$ r > R; E = 0, r < R

$V = K \, Q/R$ r < R (V = 0, ∞)

$V = K \, Q/r$ r ¤ R

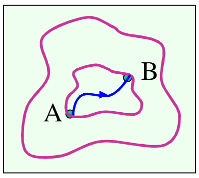


- σ uniforme num condutor esférico

- Condutor não esférico $\Rightarrow$
  - σ elevada onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície convexa.
  - σ baixa onde o raio de curvatura for pequeno e a superfície côncava.

$\Rightarrow$ Como $\vec{E} \propto \sigma$
  - $\vec{E}$ grande nas vizinhanças dos pontos que têm curvatura convexa, com pequeno raio de curvatura, e atinge valores muito elevados nas vizinhanças de pontas pontiagudas.

Cavidade no Interior dum Condutor



- não existem cargas no interior da cavidade.
- O campo eléctrico no interior da cavidade deve ser nulo, independentemente da distribuição da carga na superfície externa do condutor e mesmo que exista $\vec{E}$ no exterior do condutor.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_B-V_A = 0 (todo o ponto de um condutor está ao mesmo potencial)

$$\boxed{\Rightarrow -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0}$$

! Uma cavidade envolta por paredes condutoras é uma região livre de campos, desde que não haja cargas no interior da cavidade.

Aplicações: blindar circuitos electrónicos, laboratórios... contra campos externos.

Descarga em Coroa

- Brilho azulado, visível a olho nu nas vizinhanças de pontas agudas dum condutor a um potencial eléctrico elevado.
- O ar atmosférico torna-se condutor, em virtude da ionização das moléculas de ar nas regiões de campos eléctricos elevados.
- Em condições normais de T e P esse tipo de descarga acontece quando E ~ $3x10^6$ V/m ou mais.
- O ar contém pequeno número de iões (e.g. ionização pelos raios cósmicos.)
- Condutor carregado ⇒ atrai os iões de sinais opostos ao seu.

- Vizinhanças de pontas afiadas → campo muito elevado ⇒ iões do ar acelerado a velocidades muito elevadas.
- Iões muito energéticos colidem com outras moléculas de ar → produzem mais iões e elevam a condutividade eléctrica do ar.
- Descarga do condutor acompanhada, muitas vezes, por uma luminosidade azulada que envolve as pontas aguçadas.