introdução aos sistemas dinâmicos

sistemas de edos de primeira ordem não-lineares, com coeficientes constantes

sistemas de edos de primeira, ordem, não-lineares, autónomas

consideremos um sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \end{cases}$$

com f e g duas quaisquer funções.

nota. equações diferenciais autónomas significa que o lado direito das igualdades não depende da variável independente (no nosso caso, o tempo)

resolver explicitamente sistemas de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas, é habitualmente um problema muito difícil. no nosso curso, vamos apenas aprender a realizar aquilo que se chama o estudo qualitativo da dinâmica das soluções do sistema.

o estudo qualitativo da dinâmica das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas, tem três partes, que passamos a apresentar.

1. as soluções de tipo constante de um sistema

as soluções de tipo constante de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas, são encontradas exigindo o anulamento simultâneo de ambas as derivadas, ou seja, resolvendo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) = 0 \\ y'(t) = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

para duas funções f e g quaisquer, este pode ser um problema muito complicado. no entanto, no nosso curso vamos considerar sempre sistemas cujas soluções de tipo constante podem ser (facilmente) obtidas usando o wolfram mathematica.

nota. contrariamente ao que se passa no caso dos sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares, homogéneas, com coeficientes constantes, que só têm uma solução de tipo constante, situada sempre na origem do espaço de fases, no caso mais geral que estamos agora a estudar, os sistemas podem ter múltiplas soluções de tipo constante (ou mesmo nenhuma)

a importância das soluções de tipo constante de um sistema vai ser óbvia já de seguida, na segunda parte do nosso estudo.

2. linearização de um sistema

dado um sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas,

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \end{cases}$$

designemos por $(x_\circ, y_\circ)$ uma sua solução de tipo constante.

de seguida, vamos escrever aproximações para ambas as funções f e g, válidas para vizinhanças do ponto $(x_\circ, y_\circ)$

$$f(x,y) \approx f(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,(y - y_\circ)$$

$$g(x,y) \approx g(x_\circ, y_\circ) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,(x - x_\circ) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,(y - y_\circ)$$

ora, como $(x_\circ, y_\circ)$ é uma solução de tipo constante do sistema, as expressões acima simplificam-se um pouco, isto é, podemos escrever que

$$f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,(x - x_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,(y - y_\circ)$$

$$g(x,y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,(x - x_\circ) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,(y - y_\circ)$$

para que a linearização do sistema de equações diferenciais fique evidente, necessitamos apenas de efectuar uma simples mudança de variável

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_\circ \\ \bar{y} = y - y_\circ \end{cases}$$

nota. esta mudança de variáveis corresponde a considerar um novo sistema de eixos cuja origem se situa exactamente no ponto $(x_\circ, y_\circ)$

vejamos então como ficam as expressões para as aproximações acima, para estas novas variáveis

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{x} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{y}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{x} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{y}$$

assim sendo, vamos afirmar que a dinâmica das soluções do sistema de equações diferenciais pode ser aproximadamente descrita pelas soluções do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, <u>lineares</u>, homogéneas, com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{y} \\[2ex] \bar{y}'(t) = g(\bar{x}, \bar{y}) \approx \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{y} \end{cases}$$

a representação matricial do sistema linear é bem mais simples, sendo dada por

$$\bar{X} = \mathsf{Jac}_{(f,g)}(x_\circ, y_\circ)\,\bar{X}$$

onde por $\mathsf{Jac}_{(f,g)}(x_\circ, y_\circ)$ se denota a matriz jacobiana das funções f e g, calculada no ponto $(x_\circ, y_\circ)$.

nota. no nosso curso, vamos usar o wolfram mathematica para determinar a informação necessária (nomeadamente os valores próprios e os vectores próprios da matriz jacobiana $\mathsf{Jac}_{(f,g)}(x_\circ, y_\circ)$ a eles associados) para esboçar as curvas no espaço de fases correspondentes às soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, lineares, acima.

3. estudo de um sistema pela sua aproximação linear

para terminarmos a descrição do estudo qualitativo da dinâmica das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas, é necessário alertar para uma excepção.

quando estudámos sistemas de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, lineares, de coeficientes constantes, percebemos que quando a matriz dos coeficientes do sistema tem valores próprios complexos conjugados com parte real nula, a dinâmica das soluções apresentava uma característica muito singular: percorriam curvas fechadas (círculos, elipses) no espaço de fases

nota. essas curvas fechadas correspondem a soluções com um comportamento periódico

se pensarmos um pouco, não é difícil aceitar o resultado que nos diz que se a aproximação linear de um sistema nos conduz a um sistema cujas soluções apresentam estas características singulares, então não é possível concluir nada relativamente ao sistema não-linear.

por outras palavras, se os valores próprios da matriz jacobiana $\mathrm{Jac}_{(f,g)}(x_\circ, y_\circ)$ do sistema, calculada numa solução de tipo constante $(x_\circ, y_\circ)$, são complexos conjugados com parte real igual a zero, então o estudo é inconclusivo e torna-se necessária outra abordagem para conhecermos a dinâmica das soluções do sistema não-linear numa vizinhança de $(x_\circ, y_\circ)$

estudemos alguns exemplos. para não complicar demasiado, vamos escolher sempre funções polinomiais em x e y.

exemplo #1

consideremos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x'(t) = -1 - x + 4\,y - 4\,y^2 \\ y'(t) = 4\,x + 3\,y - 2\,y^2 \end{cases}$$

vamos começar por calcular as (duas) soluções de tipo constante do sistema (usando o wolfram mathematica)

$$(x_\circ, y_\circ) = (-0.281136, 0.765111)$$

$$(x_\circ, y_\circ) = (-0.175654, 0.290444)$$

e determinar a matriz jacobiana do sistema

$$\mathrm{Jac}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 4-8y \\ 4 & 3-4y \end{pmatrix}$$

o estudo qualitativo da dinâmica das soluções do sistema em vizinhanças de cada um dos dois pontos correspondentes a soluções de tipo constante do sistema vai ser realizado a partir da matriz jacobiana do sistema calculada nesses pontos. assim sendo, temos que calcular essas matrizes.

$$A_1 = \mathrm{Jac}(-0.281136, 0.765111) = \begin{pmatrix} -1 & -2.12089 \\ 4 & -0.0604449 \end{pmatrix}$$

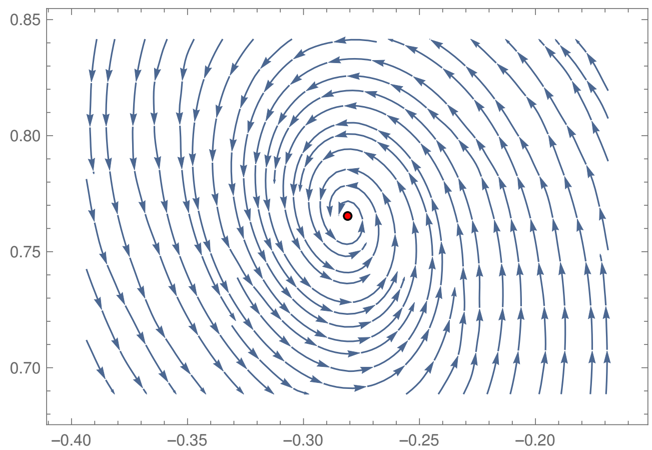
$$A_2 = \mathrm{Jac}(-0.175654, 0.290444) = \begin{pmatrix} -1 & 1.67645 \\ 4 & 1.83822 \end{pmatrix}$$

usando o wolfram mathematica, vemos que a matriz A_1 tem valores próprios complexos conjugados

$$\lambda_{1,2} = -0.530222 \pm 2.87452\,\mathrm{i}$$

com parte real negativa. assim sendo, podemos imediatamente concluir que a dinâmica das soluções na vizinhança da solução de tipo constante do sistema $(x_\circ, y_\circ) = (-0.281136, 0.765111)$ é representada por espirais que se aproximam do ponto $(x_\circ, y_\circ)$.

nota. usando o wolfram mathematica, é possível apresentar um esboço das soluções do sistema não-linear, numa vizinhança da solução de tipo constante $(x_\circ, y_\circ) = (-0.281136, 0.765111)$ do sistema.



a partir do qual podemos confirmar a conclusão apresentada anteriormente.

usando uma vez mais o wolfram mathematica, vemos que a matriz A_2 tem valores próprios reais distintos

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = -2.5338 \\ \lambda_2 = 3.37202 \end{array}\right.$$

então, usando o wolfram mathematica, podemos dizer que

$$u = \begin{pmatrix} -0.73780 \\ 0.67502 \end{pmatrix}$$

é um vector próprio de A_2 associado ao valor próprio λ_1. por outro lado, temos também que

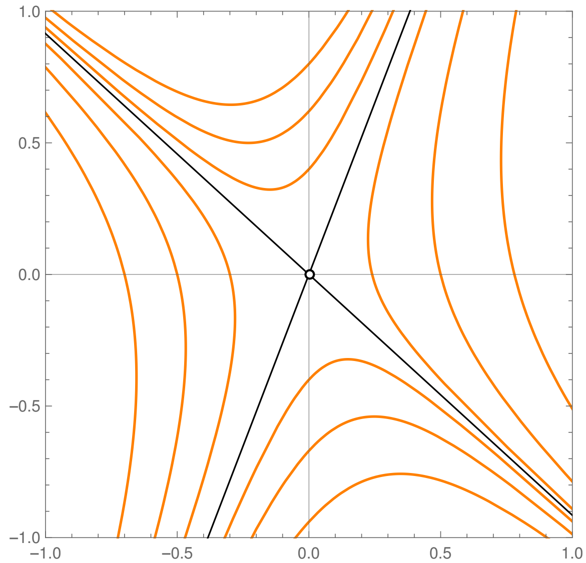
$$v = \begin{pmatrix} -0.35803 \\ -0.93371 \end{pmatrix}$$

é um vector próprio de A_2 associado ao valor próprio λ_2.

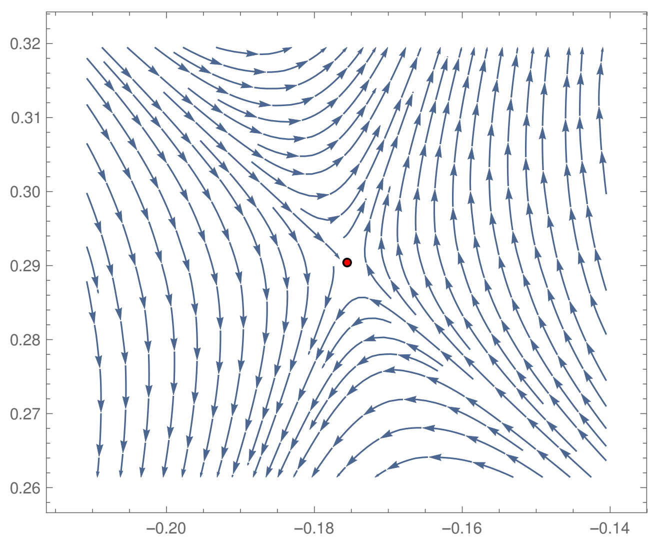
assim sendo, tal como aprendemos anteriormente, é possível traçar as direcções dos vectores próprios u e v e indicar a dinâmica de algumas soluções (do sistema linear), correspondentes a certas escolhas para o valor das soluções (do sistema linear) no instante inicial $t = 0$

nota. no gráfico seguinte, referente ao sistema linear, a solução de tipo constante do sistema volta a ser a origem do espaço de fases.

como é óbvio, neste gráfico falta assinalar os vectores próprios u e v, assim como as setas indicativas do sentido da dinâmica (que é deixado como exercício)



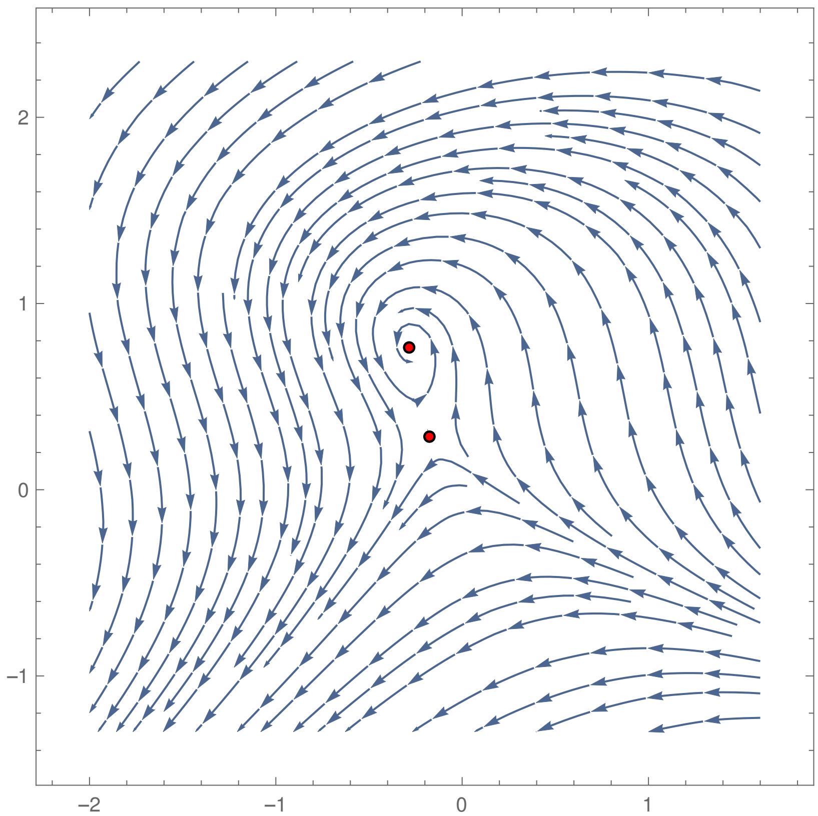
nota. usando o wolfram mathematica, é possível apresentar um esboço das soluções do sistema não-linear, numa vizinhança da solução de tipo constante $(x_\circ, y_\circ) = (-0.175654, 0.290444)$ do sistema.



a partir do qual podemos confirmar a conclusão apresentada anteriormente.

usando o wolfram mathematica, é possível apresentar um esboço das soluções do sistema não-linear, desta vez um esboço com um caracter global. é muito interessante, para além de comparar com os gráficos obtidos para cada uma das vizinhanças das duas soluções de tipo constante, perceber a dinâmica das soluções em regiões entre esses pontos.

esboço obtido com o wolfram mathematica, onde é possível observar na globalidade a dinâmica das soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas.



exemplo #2

consideremos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem não-lineares

$$\begin{cases} x'(t) \;=\; -1 - x - x^2 + 3\,y + 2\,y^2 \\ y'(t) \;=\; 1 + x - 4\,x^2 + 3\,y^2 \end{cases}$$

vamos começar por calcular as (quatro) soluções de tipo constante do sistema (usando o wolfram mathematica)

$$(x_\circ, y_\circ) \;=\; (-1.72163, -2.04757)$$

$$(x_\circ, y_\circ) \;=\; (-0.424393, 0.219721)$$

$$(x_\circ, y_\circ) \;=\; (0.868611, 0.618959)$$

$$(x_\circ, y_\circ) \;=\; (3.27741, -3.59111)$$

e determinar a matriz jacobiana do sistema

$$\mathrm{Jac}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -2x-1 & 4y+3 \\ 1-8x & 6y \end{pmatrix}$$

o estudo qualitativo da dinâmica das soluções do sistema em vizinhanças de cada um dos quatro pontos correspondentes a soluções de tipo constante do sistema vai ser realizado a partir da matriz jacobiana do sistema calculada nesses pontos. assim sendo, temos que calcular essas matrizes.

$$A_1 = \text{Jac}(-1.72163, -2.04757) = \begin{pmatrix} 2.44325 & -5.19028 \\ 14.773 & -12.2854 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Jac}(-0.424393, 0.219721) = \begin{pmatrix} -7.55482 & -11.3644 \\ -25.2193 & -21.5467 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{Jac}(0.868611, 0.618959) = \begin{pmatrix} -2.73722 & 5.47584 \\ -5.94889 & 3.71375 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \text{Jac}(3.27741, -3.59111) = \begin{pmatrix} -0.151214 & 3.87888 \\ 4.39515 & 1.31832 \end{pmatrix}$$

de seguida, vamos apresentar os resultados obtidos, usando o wolfram mathematica, para os valores próprios e vectores próprios de cada uma destas quatro matrizes.

um. valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = -4.92108 \pm 4.73736\,\mathrm{i}$ (com parte real negativa)

dois. valores próprios reais distintos $\lambda_1 = -32.8686$ e $\lambda_2 = 3.76717$, com vectores próprios associados dados, respectivamente, por $u = (0.409562, 0.912282)$ e $v = (0.708429, -0.705782)$

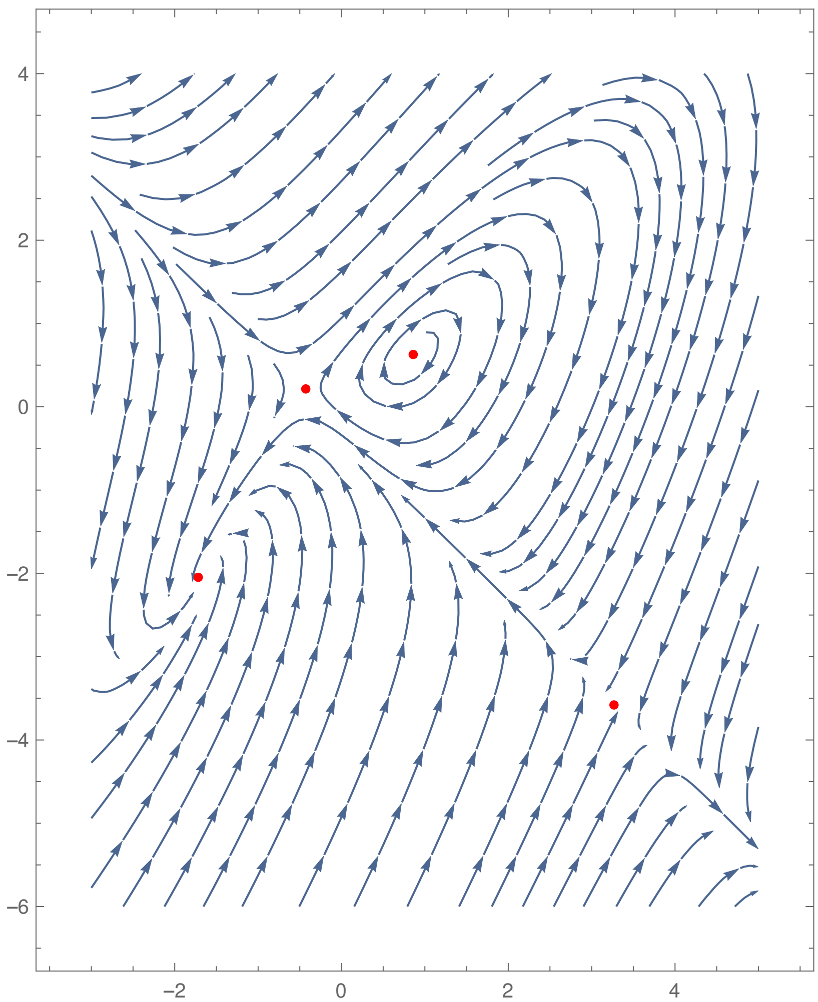
três. valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = 0.488265 \pm 4.70865\,\mathrm{i}$ (com parte real positiva)

quatro. valores próprios reais distintos $\lambda_1 = -3.61027$ e $\lambda_2 = 4.77738$, com vectores próprios associados dados, respectivamente, por $u = (-0.746342, 0.665562)$ e $v = (-0.618454, -0.785821)$

uma vez mais, será muito interessante perceber como todos estes comportamentos locais, válidos em vizinhanças de cada uma das quatro soluções de tipo constante do sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, <u>não-lineares</u>, autónomas, coexistem globalmente.

para tal, vamos usar o wolfram mathematica e esboçar a dinâmica das soluções, numa região mais ampla.

esboço obtido com o wolfram mathematica, onde é possível observar na globalidade a dinâmica das soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias, de primeira ordem, não-lineares, autónomas.



de seguida, são apresentados alguns exercícios.

os primeiros três são para serem feitos mais tarde, usando o wolfram mathematica.

os restantes não.

27.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2x^2 - 3y - 3y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 4x^2 - 3y - y^2 \end{cases}$$

27.1 Determine as soluções de tipo constante do sistema.

27.2 Esboce o retrato de fases das soluções do sistema numa vizinhança de cada uma das soluções de tipo constante encontradas na alínea anterior.

28.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 3x^2 - y - y^2 + 3y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + x^2 + 3y + y^2 \end{cases}$$

28.1 Determine as soluções de tipo constante do sistema.

28.2 Esboce o retrato de fases das soluções do sistema numa vizinhança de cada uma das soluções de tipo constante encontradas na alínea anterior.

29.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares:

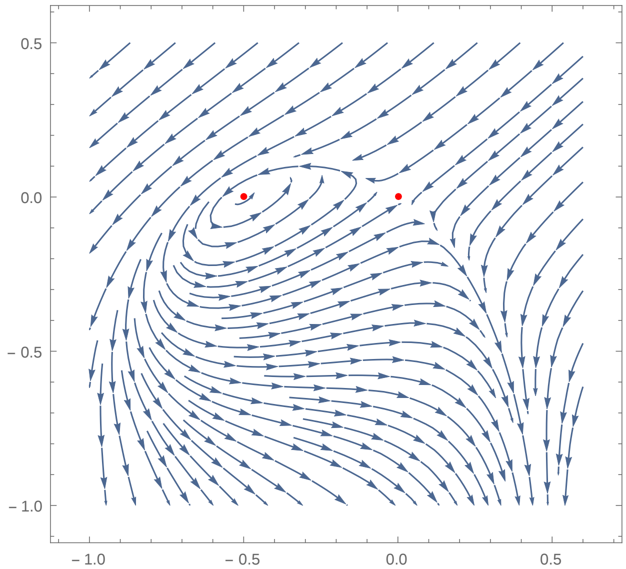
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 4x^2 + 2y + 3y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2x^2 + 3y + y^2 \end{cases}$$

29.1 Determine as soluções de tipo constante do sistema.

29.2 Esboce o retrato de fases das soluções do sistema numa vizinhança de cada uma das soluções de tipo constante encontradas na alínea anterior.

30.

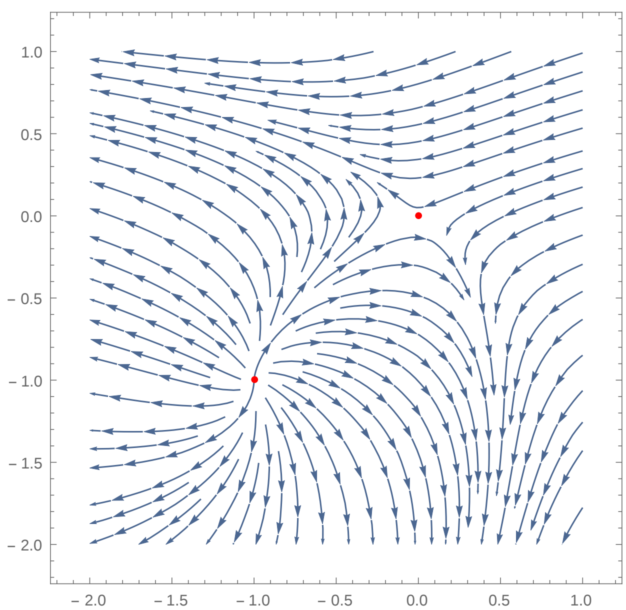
a figura mostra um esboço do retrato de fases de um sistemas de edos de primeira ordem, não-lineares, autónomas, onde se indicam as suas duas soluções de tipo constante.



caracterize os valores próprios das matrizes resultantes da linearização do sistema, em vizinhanças de cada uma das soluções de tipo constante.

31.

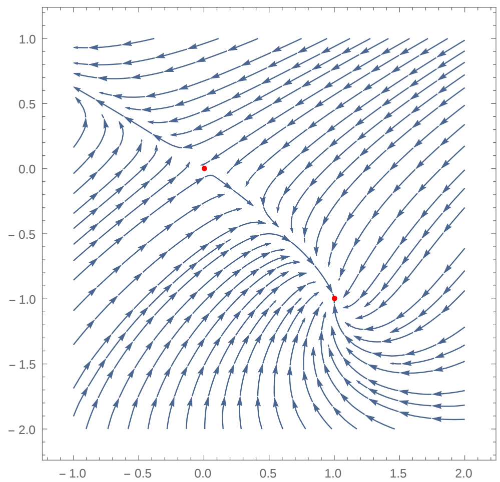
a figura mostra um esboço do retrato de fases de um sistemas de edos de primeira ordem, não-lineares, autónomas, onde se indicam as suas duas soluções de tipo constante.



caracterize os valores próprios das matrizes resultantes da linearização do sistema, em vizinhanças de cada uma das soluções de tipo constante.

32.

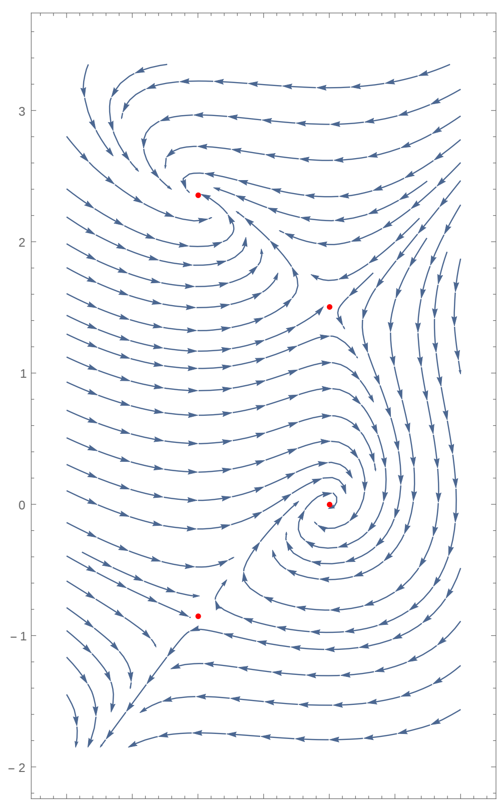
a figura mostra um esboço do retrato de fases de um sistemas de edos de primeira ordem, não-lineares, autónomas, onde se indicam as suas duas soluções de tipo constante.



caracterize os valores próprios das matrizes resultantes da linearização do sistema, em vizinhanças de cada uma das soluções de tipo constante.

33.

a figura mostra um esboço do retrato de fases de um sistemas de edos de primeira ordem, não-lineares, autónomas, onde se indicam as suas quatro soluções de tipo constante.



caracterize os valores próprios das matrizes resultantes da linearização do sistema, em vizinhanças de cada uma das soluções de tipo constante.