introdução aos sistemas dinâmicos

edos de primeira ordem separáveis

7.

o problema que nos é colocado apresenta-se de uma forma diferente, mas na realidade não é muito distinto do exercício anterior. estamos perante uma equação diferencial e somos subtilmente convidados a escrever a sua solução em termos da constante x_o, para depois fazermos a substituição referida no enunciado. vejamos então como devemos proceder:

$x'(t) \,=\, 3x^2 \,=\, f(t)\,g(x)$, com $f(t) = 3$ e $g(x) = x^2$

logo, trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável

vamos procurar saber se a equação diferencial admite soluções de tipo constante:

$g(x) = x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) \,=\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,=\, 3\,x^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \,=\, 3\,\mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \,=\, \int 3\,\mathrm{d}t$$

consultando uma tabela de primitivas, podemos escrever a solução formal da equação diferencial:

$-\dfrac{1}{x} \,=\, 3\,t + \mathrm{C}$, com $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$

de seguida, vamos procurar a solução explícita da equação diferencial, multiplicando ambos os lados da igualdade por -1 e invertendo:

$$x \,=\, -\frac{1}{3t + \mathrm{C}}$$

uma vez que a igualdade acima não é válida para $t = -\mathrm{C}/3$, somos levados a escrever que a equação diferencial tem duas famílias de soluções:

$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t + \mathrm{C}}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \quad t < -\mathrm{C}/3$$

$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t + \mathrm{C}}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \quad t > -\mathrm{C}/3$$

resumindo, encontrámos as seguintes soluções da equação diferencial:

$$x(t) \,=\, 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t + \mathrm{C}}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \quad t > -\mathrm{C}/3$$

$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t + \mathrm{C}}, \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}, \quad t < -\mathrm{C}/3$$

de seguida, vamos tentar substituir a constante C sem qualquer significado, pelo valor que a solução toma no instante inicial. para tal, temos que

$$x(0) \,=\, x_o \,=\, -\frac{1}{0+\mathsf{C}} \,=\, -\frac{1}{\mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{C} \,=\, -1/x_o$$

então, temos que:

1. se $x_o > 0$, então a família de soluções da equação diferencial é dada por
$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t - 1/x_o}, \quad t > -1/(3x_o)$$
2. se $x_o < 0$, então a família de soluções da equação diferencial é dada por
$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t - 1/x_o}, \quad t < -1/(3x_o)$$

nota. uma vez mais, temos que a escolha $\mathsf{C} = 0$ não é compatível com a ideia de substituirmos C por $x_o = x(0)$.

a partir da condição inicial dada no enunciado, $x(0) = -1$, temos que a solução da equação diferencial que nos interessa é dada por

$$x(t) \,=\, -\frac{1}{3t+1}, \quad t < 1/3$$

assim, para determinar o valor da solução no instante $t = 0.192$, teremos apenas que substituir verificar que o valor de t indicado pertence ao domínio da expressão anterior e, em caso afirmativo, substituir, ou seja, $0.192 < 1/3$, pelo que

$$x(0.192) \,=\, -\frac{1}{3 \times 0.192 + 1} \,=\, -0.0783699$$