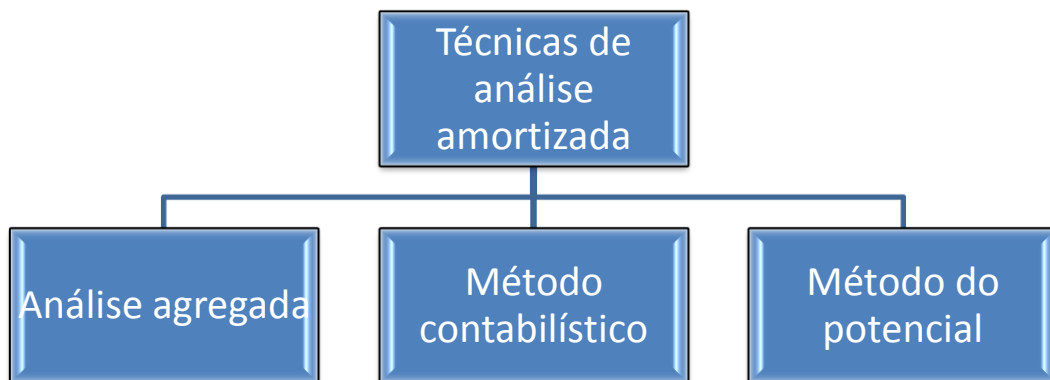


# Análise amortizada de algoritmos

Ferramenta de análise que permite estudar o tempo necessário para se efetuar uma sequência de operações sobre uma estrutura de dados.

**IDEIA CHAVE** – considerar o pior caso da sequência de  $N$  operações, em situações em que este seja notoriamente mais baixo do que o somatório dos tempos de pior caso das  $N$  operações vistas de forma singular.

**ANÁLISE AMORTIZADA  $\neq$  ANÁLISE CASO MÉDIO** – não nos esqueçamos que estamos a fazer um estudo do custo médio (face à sequência) de cada operação no pior caso, e não uma análise do caso médio do tempo de execução. Ao contrário do caso médio, não envolve qualquer probabilidade nem conceção inicial sobre os inputs.



## A)Análise Agregada

Pressupostos:

- Mostrar que qualquer que seja  $n$ , uma sequência de  $n$  operações executa no pior caso em tempo  $T(n)$ .
- Concluir que o custo amortizado por operação é  $T(n)/n$ .
- Considera-se que todas as diferentes operações têm o mesmo custo amortizado, sendo neste ponto que as outras técnicas que conhecemos diferem.

## B)Método Contabilístico

Pressupostos:

- **Atribuição de custos amortizados**,  $c_i$ , possivelmente diferentes, às diferentes operações, que **podem não corresponder ao reais** – **superiores** para **algumas operações** o que gera um **acumular de crédito** ou, pelo contrário, **inferiores** para **outras**, gerando um **gasto de crédito acumulado**.
- Caso o custo amortizado total para uma sequência de  $n$  operações seja um limite superior para o custo real, i.e.,  $\sum_i t_i \leq \sum_i c_i$ , concluímos que o custo total amortizado fornece um limite para o tempo de pior caso da sequência, o que significa que os custos amortizados de cada operação podem ser validados para análise de pior caso.

- Uma forma de se prevenir a validade da condição anterior é assegurar que em todo o momento da execução da sequência de operações, o custo acumulado (saldo) é sempre não negativo.

### C) Método do Potencial

Pressupostos:

- Método contabilístico = geração de crédito individual por cada operação realizada.
- Método do potencial: o **crédito é visualizado no seu global**, para toda a estrutura de dados, recorrendo a uma *função de potencial* sobre os estados sucessivos de uma estrutura de dados.
- Considera-se  $\Phi_i$  o **potencial da estrutura de dados no estado  $i$** , i.e., **depois de serem executadas  $i$  operações da sequência**. O custo amortizado da operação  $i$  é traduzido por  $c_i = t_i - \Phi_{i-1} + \Phi_i$ .
- O **potencial da estrutura** deve **aumentar** com **operações de baixo custo** e **diminuir** com **operações de elevado custo**.
- **Cálculo do custo amortizado total:**

$$\sum_{i=1}^n c_i = (\dots) = \Phi_n - \Phi_0 + \sum_i t_i$$

- Condições que garantem que  $\sum_i c_i \geq \sum_i t_i$  são:  $\Phi_0 = 0$  e  $\Phi_i \geq 0$ , para  $i > 0$ .
- Mediante estas condições o custo total amortizado fornece um limite superior para o tempo de pior caso da sequência, como desejado.