introdução aos sistemas dinâmicos

edos de primeira ordem separáveis

5.

$x'(t) = -2\,t\,x^2 = f(t)\,g(x)$, com $f(t) = 2t$ e $g(x) = -x^2$

logo, trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável

vamos procurar saber se a equação diferencial admite soluções de tipo constante:

$g(x) = -x^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\,t\,x^2 \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2\,t\,\mathrm{d}t$$

consultando uma tabela de primitivas, podemos escrever a solução formal da equação diferencial:

$\dfrac{1}{x} = t^2 + \mathsf{C}$, com $\mathsf{C} \in \mathbb{R}$

de seguida, vamos procurar a solução explícita da equação diferencial, multiplicando ambos os lados da igualdade por -1 e invertendo:

$$x = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}$$

agora, vamos estudar quando é que a igualdade acima é válida.

1. para $\mathsf{C} > 0$, a igualdade acima é válida para $t \in \mathbb{R}$. logo vamos escrever a família de soluções que se obtém nessas circunstâncias como

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. para $\mathsf{C} = 0$, a igualdade acima não é válida para $t = 0$. logo vamos escrever a família de soluções que se obtém nessas circunstâncias como

   2.1 $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2}, \quad t > 0$

   2.2 $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2}, \quad t < 0$

3. para $\mathsf{C} < 0$, a igualdade acima não é válida para $t = -\sqrt{-\mathsf{C}}$ e $t = \sqrt{-\mathsf{C}}$. logo vamos escrever a família de soluções que se obtém nessas circunstâncias como

   3.1 $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (-\infty, -\sqrt{-\mathsf{C}})$

   3.2 $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (-\sqrt{-\mathsf{C}}, \sqrt{-\mathsf{C}})$

   3.3 $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (\sqrt{-\mathsf{C}}, +\infty)$

resumindo, encontrámos as seguintes soluções da equação diferencial:

$$x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathsf{C} > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2}, \quad t < 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (-\infty, -\sqrt{-\mathsf{C}}), \quad \mathsf{C} < 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (-\sqrt{-\mathsf{C}}, \sqrt{-\mathsf{C}}), \quad \mathsf{C} < 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + \mathsf{C}}, \quad t \in (\sqrt{-\mathsf{C}}, +\infty), \quad \mathsf{C} < 0$$

de seguida, vamos responder à primeira das alíneas.

se no instante inicial, $t = 0$, nos dizem que $x(0) = x_\circ$, vamos tentar substituir a constante arbitrária C, sem qualquer significado físico, que surge na expressão das soluções acima, pela constante $x_\circ$, também ela arbitrária, mas com um importante significado.

$$x(0) = x_\circ = \frac{1}{0 + \mathsf{C}} = \frac{1}{\mathsf{C}}, \quad \mathsf{C} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \mathsf{C} = 1/x_\circ$$

então, temos que:

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1/x_\circ}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_\circ > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1/x_\circ}, \quad t \in (-\infty, -\sqrt{-1/x_\circ}), \quad x_\circ < 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1/x_\circ}, \quad t \in (-\sqrt{-1/x_\circ}, \sqrt{-1/x_\circ}), \quad x_\circ < 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + 1/x_\circ}, \quad t \in (\sqrt{-1/x_\circ}, +\infty), \quad x_\circ < 0$$

para responder à segunda alínea, temos apenas que escolher a situação que nos interessa, de acordo com $x_\circ = -5.86$, e substituir, isto é:

$$x(t) = \frac{1}{t^2 - 1/5.86}, \quad t \in (-\sqrt{1/5.86}, \sqrt{1/5.86})$$

ou seja

$$x(t) = \frac{1}{t^2 - 0.170648}, \quad t \in (-0.413096, 0.413096)$$

assim sendo temos que

$$x(0.265) = \frac{1}{0.265^2 - 0.170648} = -9.95788$$