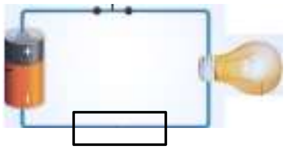
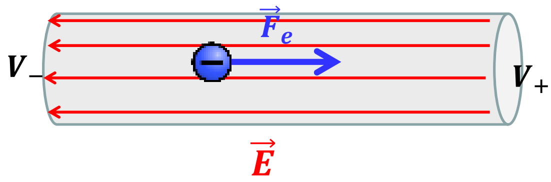
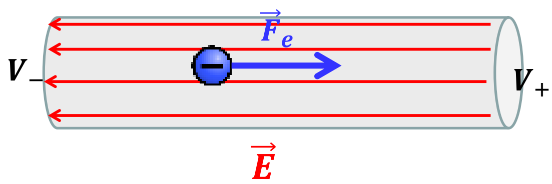
5.3. Energia em circuitos elétricos

Quando um campo elétrico constante é aplicado num condutor, os eletrões livres são acelerados no sentido contrário ao campo (no sentido do maior potencial) devido à força elétrica. Nesta fase, aumentam a sua energia cinética (diminuindo a sua energia potencial elétrica).





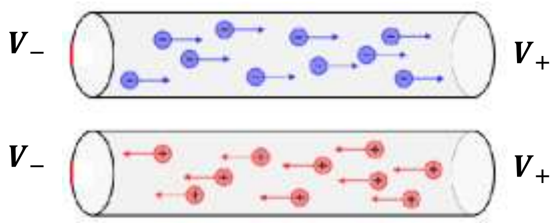


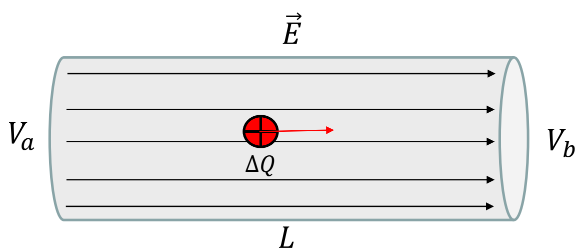
Mas os choques dos eletrões com os iões metálicos fazem com que essa aceleração seja temporária. Os eletrões acabam por atingir uma velocidade de arrastamento (drift velocity) constante.

Os choques dos eletrões com os iões transformam parte da energia em energia térmica.

Nota: os condutores aquecem sob o efeito da corrente elétrica.

Os portadores de carga elétrica em condutores metálicos são os eletrões. Mas o estudo da corrente elétrica em condutores metálicos é análogo ao de estudar o movimento de cargas positivas (com carga simétrica ao do eletrão) com movimento preferencial em sentido oposto ao dos eletrões.





$V_a > V_b$

Variação de energia potencial sofrida pela carga ΔQ entre as extremidades deste condutor de comprimento L

$$\Delta E_p = \Delta Q(V_b - V_a) = \Delta Q(-V)$$

Considerando que: $(V_b - V_a) = \Delta V = -V$

Então: $-\Delta E_p = (\Delta Q)V$

Se houvesse conservação de energia no circuito, esta diminuição de energia potencial corresponderia a um aumento de energia cinética.

Mas num circuito com corrente eléctrica estacionária (constante) a velocidade de arrastamento é constante. Portanto a energia cinética média mantém-se constante.

A taxa de energia potencial perdida é: $-\frac{\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV$

Esta corresponde à taxa de energia perdida, ou seja a potência dissipada num condutor:

$$\boxed{P = IV} \Leftrightarrow \boxed{P = RI^2 = \frac{V^2}{R}} \longrightarrow \text{Lei de Joule}$$

Unidade SI de Potência? $VA = JC^{-1}Cs^{-1} = Js^{-1} = W$

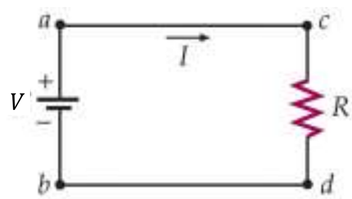
Devido aos choques permanentes entre os electrões e os iões da rede metálica, parte da energia cinética que os electrões adquirem é dissipada sob a forma de **energia térmica**.

O aquecimento dos condutores, devido a esta causa é conhecido como **efeito Joule**.

James Prescott Joule
1818 - 1889

Checkpoint

Uma ddp V é aplicada nos terminais de um condutor com resistência R, que provoca uma passagem de corrente I. Ordene, por ordem crescente, as seguintes variações, tendo em conta a taxa em que a energia elétrica é dissipada sob a forma de calor.



(a) duplica-se V mantendo R

$V = RI \Rightarrow P = RI^2$;
$V_2 = 2V = R2I \Rightarrow P = R(2I)^2 = 4RI^2$

(b)duplica-se R mantendo V

$V = RI \Rightarrow P = RI^2$;
$V = 2R(I/2) \Rightarrow P = 2R(I/2)^2 = 0.5RI^2$

(c) duplica-se R mantendo I

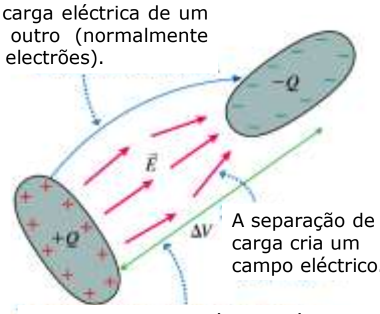
$V = RI \Rightarrow P = RI^2$;
$V_2 = 2V = 2RI \Rightarrow P = 2R(I)^2 = 2RI^2$

R: (b) < (c) < (a)

5.4. Fontes de Potencial Eléctrico. Força Electromotriz

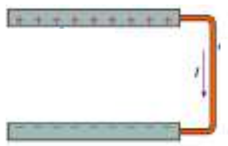
Como se pode criar uma diferença de potencial?

Deslocando-se carga eléctrica de um condutor para outro (normalmente nos metais são electrões).



A separação de carga cria um campo eléctrico.

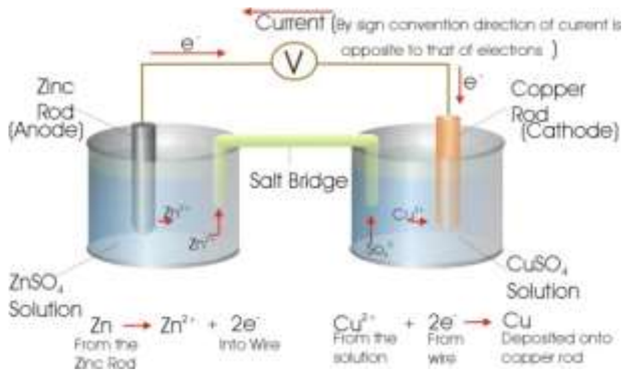
Devido ao campo eléctrico há uma ddp entre os condutores



A ddp num condensador pode produzir uma corrente, mas que não se consegue manter. A separação de carga e a ddp rapidamente desaparecem.

Os dispositivos que mantêm uma corrente eléctrica estacionária denominam-se fontes de força electromotriz. Estas fontes podem ser pilhas (conversão de reacções químicas, energia química, em energia eléctrica), geradores (conversão de energia mecânica, solar, éolica, nucleares em energia eléctrica), etc.

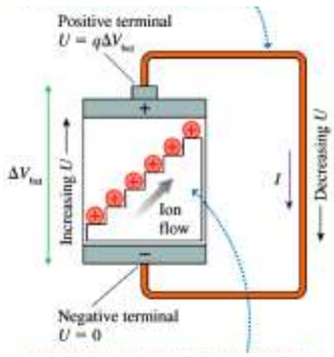
No caso das pilhas (ou baterias) eletroquímicas



As reacções químicas no interior das baterias originam a ddp, ao deslocar catiões para um eléctrodo e aniões para o outro.

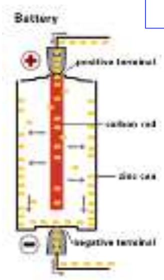
Este sistema pode ser visto como um "elevador" ("escada") de carga eléctrica em que as cargas positivas são elevadas a um potencial maior.

A ddp é determinada a partir dos eléctrodos (*e.g.* **C** e **Zn**) e permanece aproximadamente constante até que os reagentes sejam consumidos.



A força electromotriz, **ε**, descreve o trabalho realizado por unidade de carga pela fonte:

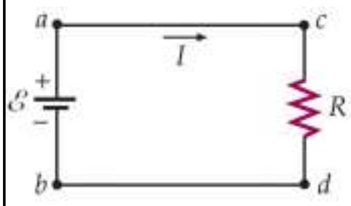
$$\boxed{\varepsilon = \frac{W}{q}}$$

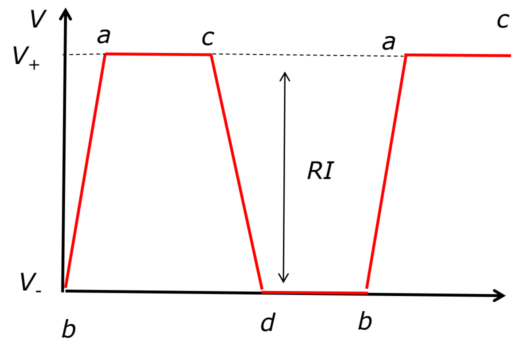


No interior da bateria, esta leva a carga positiva de um local onde o potencial eléctrico é mínimo (terminal -) para uma local onde o potencial é máximo (terminal +) realizando o trabalho necessário para esse efeito. Depois a carga flui através da lâmpada, que oferece uma resistência à sua passagem.

Baterias ideais e circuitos eléctricos

Uma bateria ideal mantém uma ddp constante nos seus terminais





$$-RI + \varepsilon = 0$$

As cargas "perdem" energia
(-)

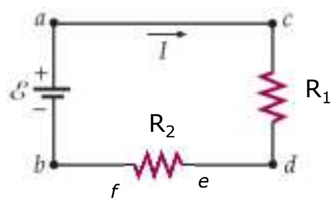
As cargas "ganham" energia
(+)

$$V_{ab} = \varepsilon$$

$$\varepsilon = RI$$

$$\boldsymbol{V_{cd} = V_{ab} = V_{ad} = V_{cb} = RI}$$

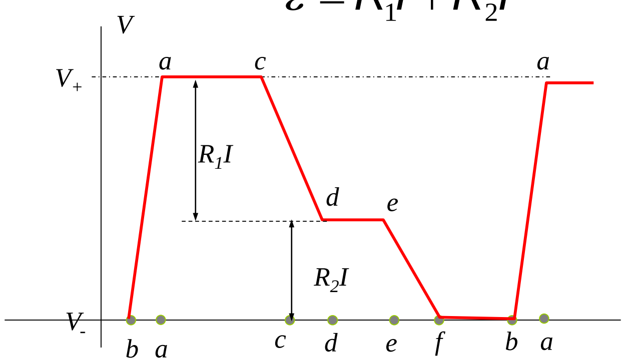
E num circuito com mais resistências?



$$V_{ab} = \varepsilon$$

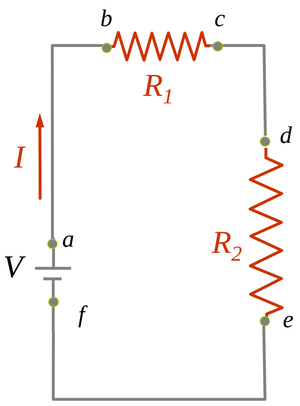
$$\varepsilon - R_1 I - R_2 I = 0$$

$$\varepsilon = R_1 I + R_2 I$$



5.5. Associações de resistências

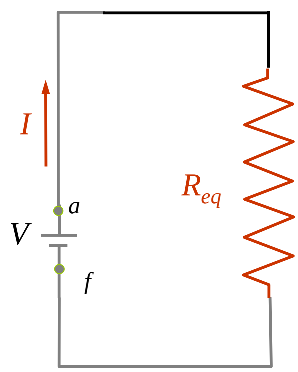
Em Série:



$$V_{af} = R_1 I + R_2 I$$

$$V_{af} = (R_1 + R_2) I$$

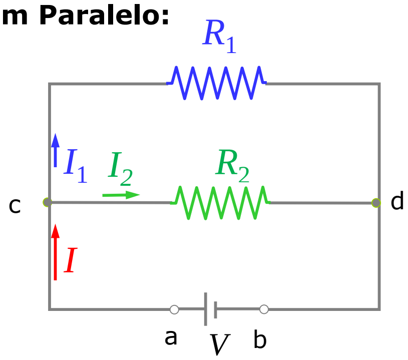
$$\boldsymbol{V_{af} = R_{eq} I}$$



Num circuito com **n resistências em série** a **resistência equivalente** é dada por:

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Em Paralelo:



$$V_{ab} = V_{cd}$$

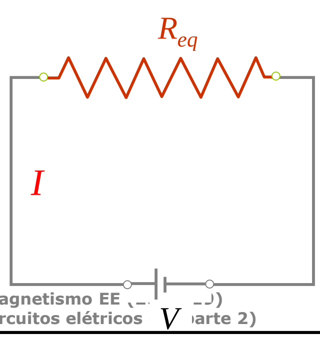
$$V_{ab} = V = R_1 I_1 \quad \Leftrightarrow I_1 = \frac{V}{R_1}$$

$$V_{ab} = V = R_2 I_2 \quad \Leftrightarrow I_2 = \frac{V}{R_2}$$

mas: $I = I_1 + I_2$ $\qquad I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$

$$\Leftrightarrow I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{R_{eq}}$$



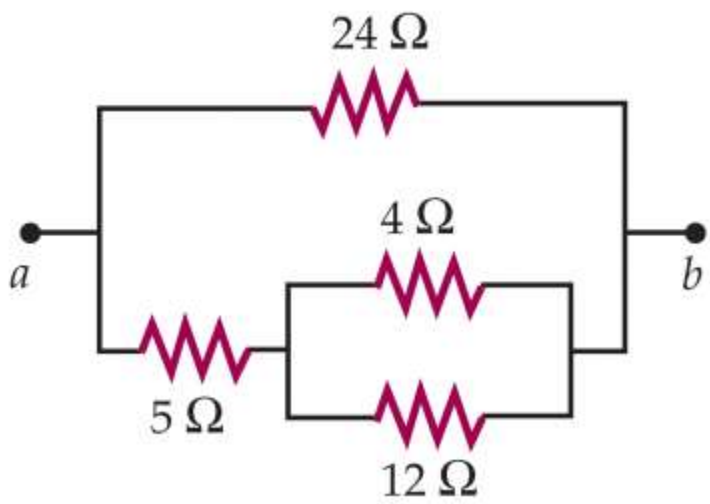
Num circuito com **n resistências em paralelo**, a **resistência equivalente** é dada por:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

Electromagnetismo EE (2018/19)
Cap 5: Circuitos elétricos dc (parte 2)

Checkpoint

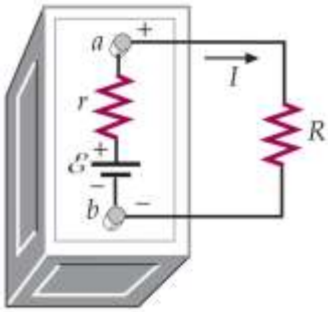
Calcule a resistência equivalente da seguinte associação



5.5 Baterias reais

Uma bateria real possui uma pequena resistência interna.

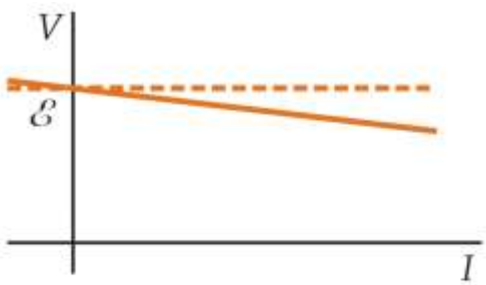
Um modelo de bateria real pode ser esquematizado como uma fem ideal associado com uma resistência interna em série:



$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{I}$$

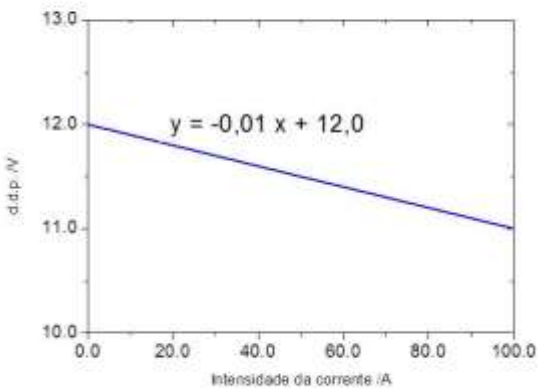
Sendo a ddp nos terminais da bateria.

$$V_{ab} = RI \qquad V_{ab} = \mathcal{E} - rI$$



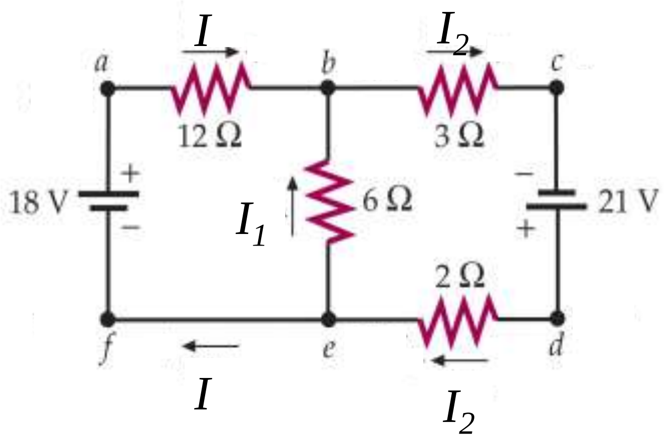
Checkpoint

O gráfico representa a curva característica de uma bateria de automóvel usada. Qual a força eletromotriz e a resistência interna da bateria?



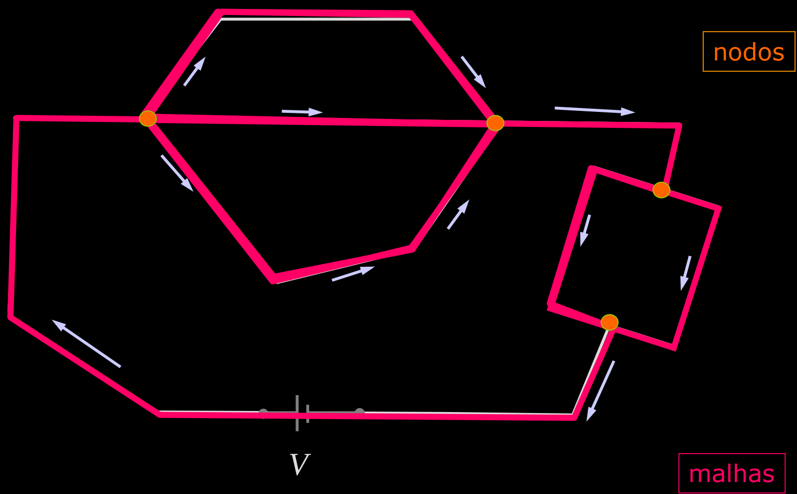
5.7. Nodos, ramos e malhas. Leis de Kirchhoff

Como se distribui a corrente elétrica em circuitos um pouco mais complexos?

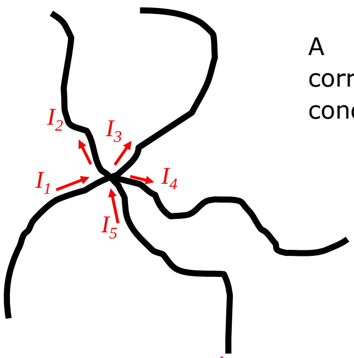


Uma das soluções, para circuitos não demasiado complexos é aplicar as **leis de Kirchhoff**!

Nodos (ou nós) e malhas



1ª lei de Kirchhoff: lei dos nodos



A soma algébrica das intensidades das correntes num dado nodo de uma rede de condutores é nula*.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

* ou, dito de forma mais simples, a soma das correntes que entram tem que ser igual à soma das correntes que saem.

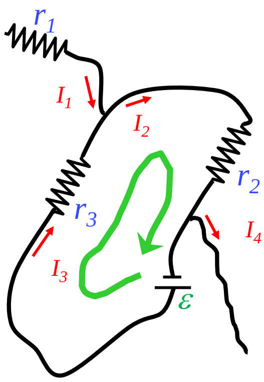
entram no nodo

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

Saem do nodo

Sinais opostos

2ª lei de Kirchhoff: lei das malhas



A soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de uma malha fechada é igual a zero.

$$-r_3 I_3 - r_2 I_2 + \varepsilon = 0$$

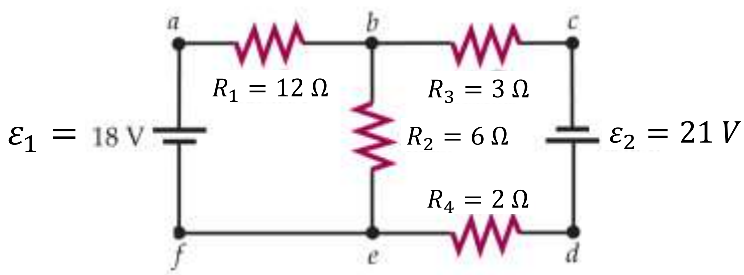
As cargas "perdem" energia
(-)

As cargas "ganham" energia
(+)

Leis de kirchhoff

1 Lei das malhas: A soma das diferenças de potencial ao longo de um caminho fechado (malha) é nula.

2 Lei dos nodos: Num nodo, a soma das correntes que chega ao nodo é igual à soma das correntes que sai.



Quantos nós tem este circuito?

Quantos ramos tem este circuito?

Quantas malhas tem este circuito?

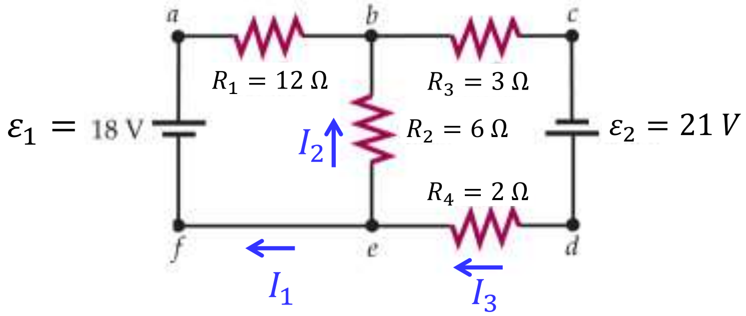
Questão típica: Qual a intensidade da corrente elétrica em cada ramo e qual o sentido da corrente em cada ramo?

Procedimentos para a aplicação das leis de Kirchhoff:

1. Em cada ramo do circuito, atribua um sentido a *I*.

Nº de ramos = nº de correntes

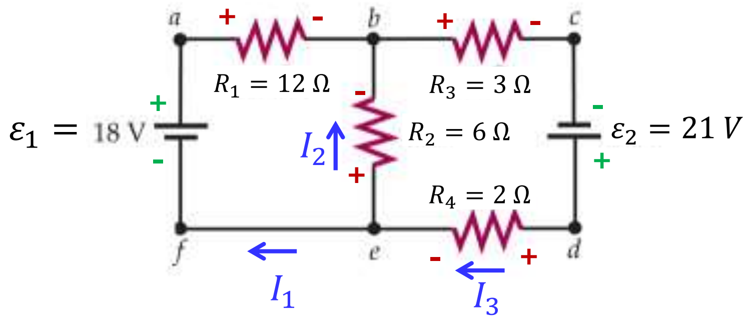
Não fique preocupado(a) se não tiver a certeza de qual o sentido correto. No caso de escolher o sentido errado, o resultado dará uma corrente com sinal negativo, mas o valor da corrente em si, está correto. Embora seja arbitrária a fixação inicial do sentido de I, a partir daí é indispensável respeitá-la RIGOROSAMENTE ao aplicar as regras de Kirchhoff.

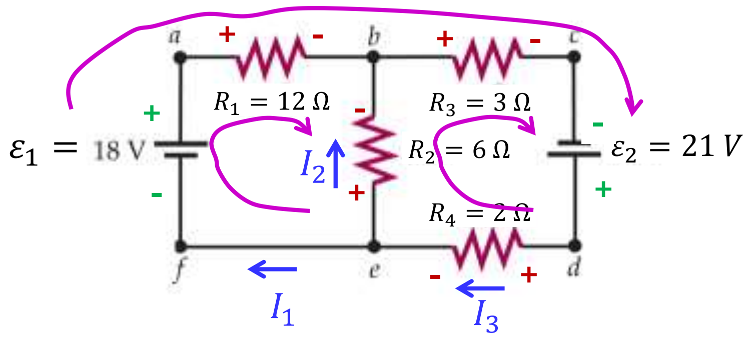


2. Aplique a Lei dos Nós (1ª regra). $I_3 = I_1 + I_2$

3. Polarizar as fontes de *f.e.m.*.

4. Polarizar as *ddp* nas resistências. Isto equivale a colocar a polaridade positiva da *ddp*, na resistência, no terminal por onde a corrente entra;





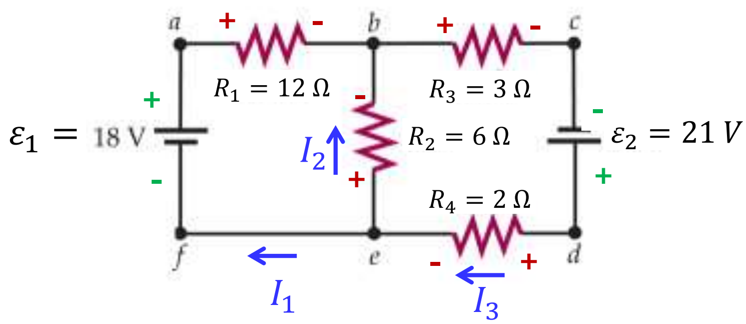
5. Em cada malha, adote um sentido de circulação e aplique a Lei das Malhas (2ª regra) somando algebricamente as *ddp*. Tenha atenção aos sinais!! O número de equações independentes de que se precisa deve ser pelo menos igual ao número de incógnitas, para que um certo problema seja solúvel.

Como temos 3 incógnitas (I_1, I_2 e I_3), bastam 3 equações. Já temos uma (a lei dos nós $I_3 = I_1 + I_2$). Basta agora escrever corretamente duas equações da lei da malhas. Apesar deste circuito ter três malhas, basta aplicar a lei das malhas em duas.

$$\varepsilon_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 - R_4 I_3 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

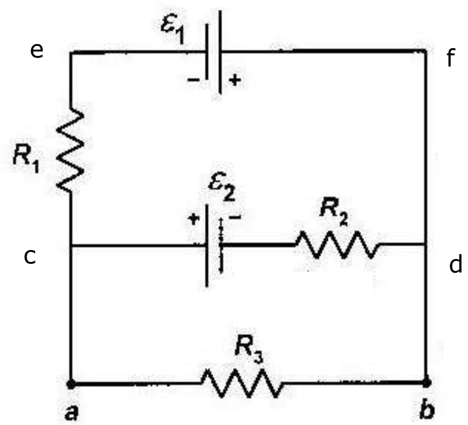
$$\varepsilon_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 + \varepsilon_2 - R_4 I_3 = 0$$



$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \\ \varepsilon_2 - R_4 I_3 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 18 - 12 I_1 + 6 I_2 = 0 \\ 21 - 2 I_3 - 6 I_2 - 3 I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 2\text{ A} \\ I_2 = 1\text{ A} \\ I_3 = 3\,A \end{cases}$$

- A lei das malhas pode ser usada para qualquer malha, mas é importante que em cada nova equação apareça um novo elemento do circuito (R ou fonte) ou uma nova I.
- Em geral o número de vezes que a lei dos nós deve ser usada é uma unidade menor que o número de nós no circuito.
- O número de equações independentes de que se precisa deve ser pelo menos igual ao número de incógnitas, para que um certo problema seja solúvel.
- Redes complicadas $\Rightarrow$ grande número de eq. lineares independentes e grande número de incógnitas $\Rightarrow$ álgebra de matrizes (ou programas de computador)
- Admite-se que os circuitos estejam em estado estacionário, e as correntes (I) nos diversos ramos sejam constantes.
- Se um condensador (C) aparecer como componente dum ramo, esse C actua como um interruptor aberto no circuito, e a I no ramo onde estiver é nula.

Checkpoint



No circuito representado na figura, onde as forças electromotrizes de 2 fontes ideais são: ε_1 = 14 V e ε_2 = 10 V. Valor das resistências: R_1 = 4 Ω, R_2 = 6 Ω, R_3 = 2 Ω.

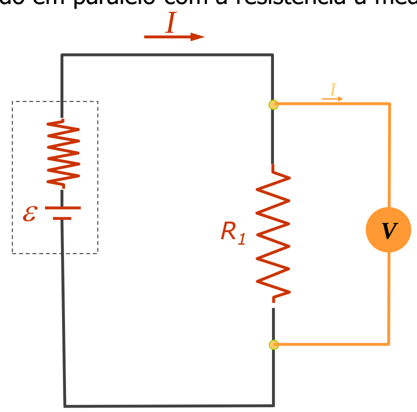
A) Determine a intensidade das correntes em cada ramo do circuito.

B) A ddp entre diferentes pontos do circuito.

5.9. Amperímetros, Voltímetros

Pretende-se medir a queda de potencial entre os terminais da resistência R_1. Como fazer?

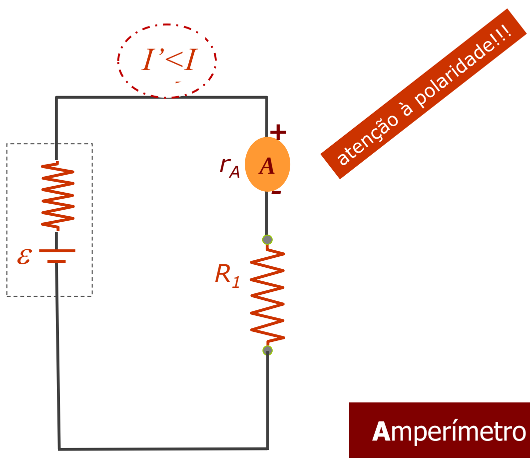
O Voltímetro é colocado em paralelo com a resistência a medir.



Voltímetro **I**deal: $r_V \rightarrow \infty$

Pretende-se medir a intensidade de corrente que atravessa a resistência R_1. Como fazer?

O amperímetro é colocado em série com a resistência a medir.



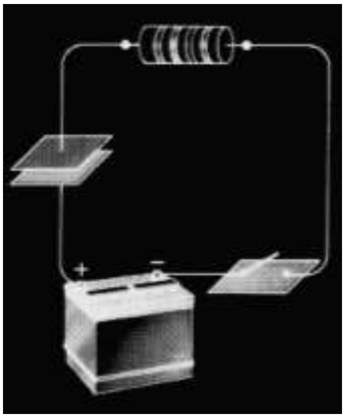
Amperímetro **I**deal: $r_A \rightarrow 0$

5.10. Circuitos RC

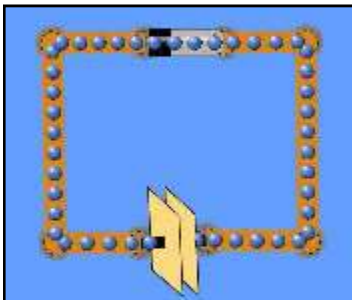
Circuitos com resistência e condensador.

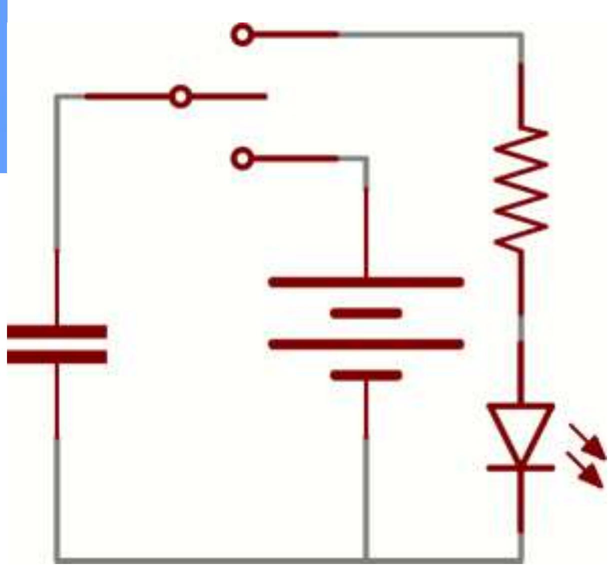
Até agora: circuitos com as correntes constantes, os circuitos em estado estacionário.

Agora: circuitos com condensadores, nos quais as correntes podem variar com o tempo.

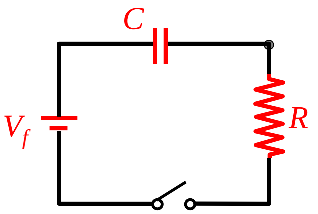


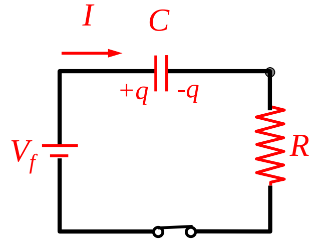
Quando se aplica uma diferença de potencial a um condensador descarregado, o tempo de carga do condensador depende da sua capacidade e da resistência do circuito.





i) Carga dum condensador.





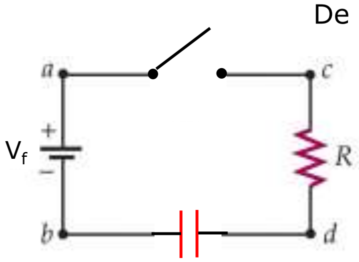
$$t < 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ q_C = 0 \end{cases}$$

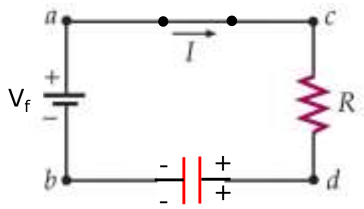
$$t > 0 \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{dq}{dt} \\ q_C = q(t) \end{cases}$$

A ddp criada devido à presença da fonte cria uma corrente que transfere carga de uma para a outra placa do condensador.

Quando $\boldsymbol{V_f = V_c}$ **a corrente cessa** e e o condensador está completamente carregado.

De acordo com a lei das malhas de Kirchhoff





$$V_\mathrm{f} = V_\mathrm{R} + V_\mathrm{C}$$

$$V_\mathrm{f} = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Para $\quad t = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = I_0 \\ q_C = q_0 = 0 \end{cases}$

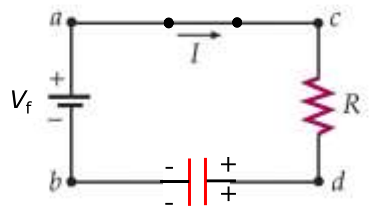
$$V_\mathrm{f} = RI_0 + 0$$

$$I_0 = \frac{V_\mathrm{f}}{R}$$

Esta corrente (I_0) é a corrente máxima. A partir daqui, diminui.

$$V_{\mathrm{f}} = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$$

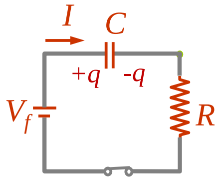
À medida que a carga do condensador aumenta, a corrente eléctrica tem de diminuir. O condensador terá a carga máxima ($q_{\text{máx}} = V_f C$) quando I=**0**.



Quando o condensador está completamente carregado:

- $q = q_{\text{máx}}$
- intensidade de corrente no circuito é nula (I=**0**)
- a carga é $q_{\text{máx}} = V_f C$ (carga máxima)

Vimos que:



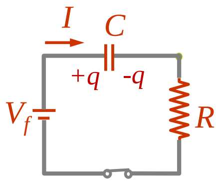
- No instante em que se liga o circuito (t=0):

$$t = 0 \begin{cases} I = I_{\text{máx}} = I_0 = \dfrac{V_{\mathrm{f}}}{R} \\ q_C = q_0 = 0 \end{cases}$$

- Quando o condensador está completamente carregado:

$$t_{\text{final}} \begin{cases} I = 0 \\ q_C = q_{\text{máx}} = V_f C \end{cases}$$

Como se passa o processo de carga?



A equação geral é:

$$V_f = RI(t) + \frac{q(t)}{C} \qquad \Leftrightarrow V_f = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_f}{R} - \frac{q(t)}{RC} \qquad \Leftrightarrow dq(t) = \left(\frac{V_f}{R} - \frac{q(t)}{RC}\right) dt$$

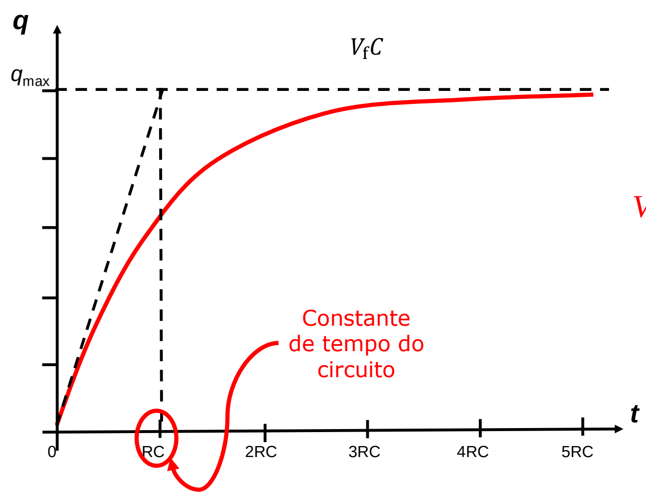
integrando esta expressão, pode-se concluir que:

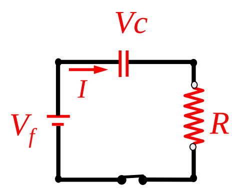
$$q(t) = V_f C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_{máx}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Em que τ(=***RC***) é a designada por **constante de tempo** do circuito.

Variação da carga do condensador com o tempo de carga

$$q(t) = V_f C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_{máx}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

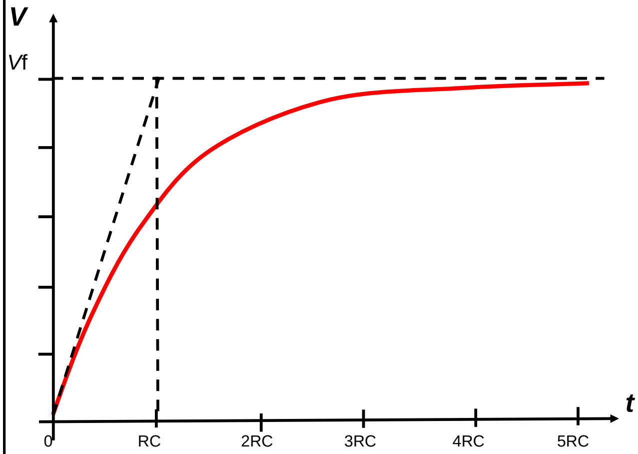


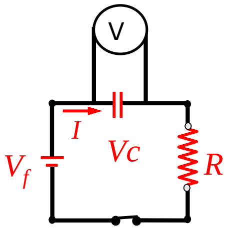


E como varia a ddp nos terminais do condensador?

Partindo de: $$q(t) = V_f C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_{máx}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$V_C = \frac{q}{C} \Rightarrow V_C = \frac{q_{máx}}{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = V_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$





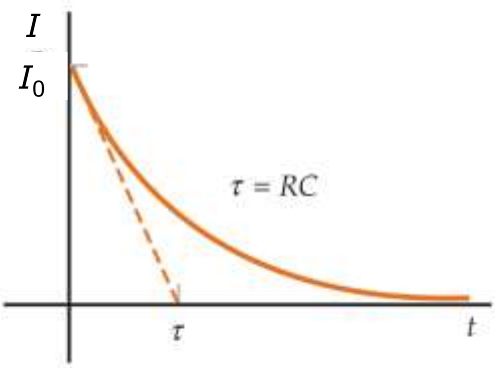
A *ddp* aos terminais do condensador, V_C , em função do tempo

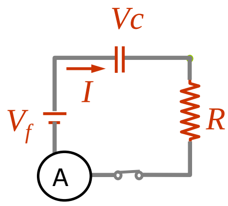
A corrente é obtida a partir de: $I = \frac{dq(t)}{dt}$

Derivando a variação da carga com t:

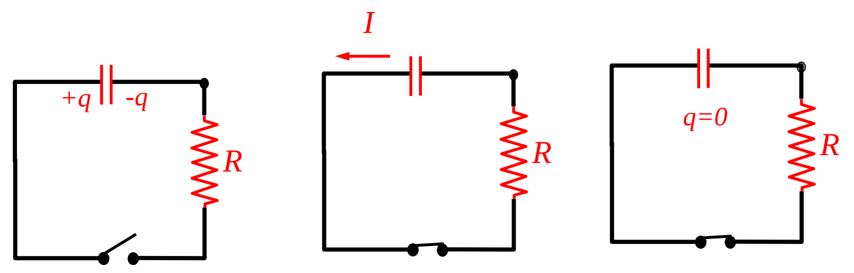
$$q(t) = V_f C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_{máx}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Obtém-se $$I(t) = -V_f C e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{V_f}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

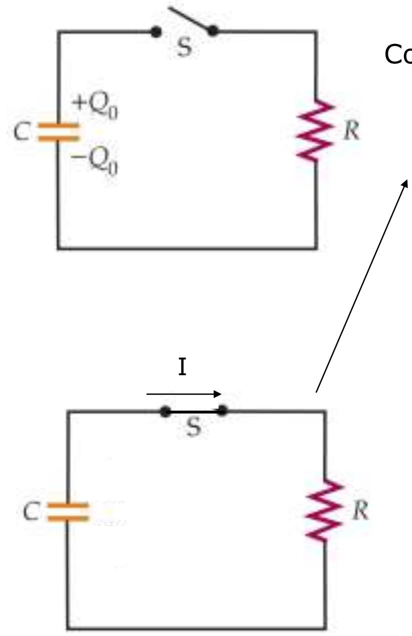




ii) Descarga dum condensador.



$$t < 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ q_C = q_{\text{máx}} \end{cases} \qquad t > 0 \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{dq}{dt} \\ q_C = q(t) \end{cases} \qquad t \text{ final} \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ q_C = 0 \end{cases}$$



Condensador carregado $V_C = V_0 = \dfrac{q_{\text{máx}}}{C}$

No momento em que o interruptor é fechado (t = 0):

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{q_{\text{máx}}}{RC}$$

A partir daí: $I = \frac{dq}{dt} < 0$

De acordo com a lei das malhas de Kirchhoff:

$$0 = \frac{q(t)}{C} + RI$$

$$0 = \frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

integrando:

$$\int_{q}^{0} \frac{1}{q(t)}\,dq(t) = -\int_0^t \frac{1}{RC}\,dt$$

$$\boxed{q_0 = V_f C}$$

$$\int_{V_f C}^{0} \frac{1}{q(t)}\,dq(t) = -\int_0^t \frac{1}{RC}\,dt$$

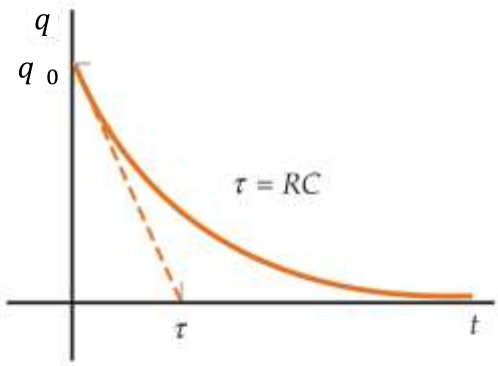
$$\left[\ln q(t)\right|_{V_f C}^{q} = -\frac{t}{RC}$$

$$\left[\ln q(t)\right|_{V_f C}^{q} = -\frac{t}{RC} \qquad \Rightarrow \ln q - \ln V_f C = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\frac{q}{V_f C} = -\frac{t}{RC}$$

$$q(\mathrm{t}) = V_f C e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow q(\mathrm{t}) = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{RC}} = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A constante de tempo τ (=*RC*) corresponde ao tempo que demora o condensador a ter uma carga 1/e do valor inicial.

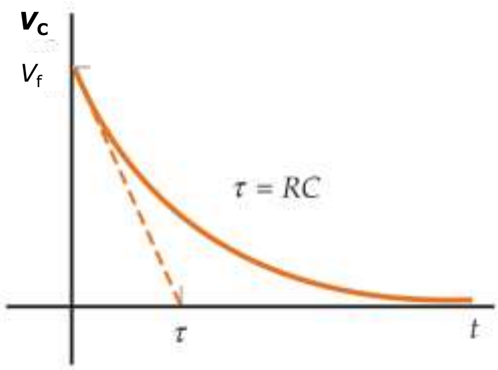


Electromagnetismo EE (2018/19)
Cap 5: Circuitos elétricos dc (parte 2)

E a ddp nos terminais do condensador?

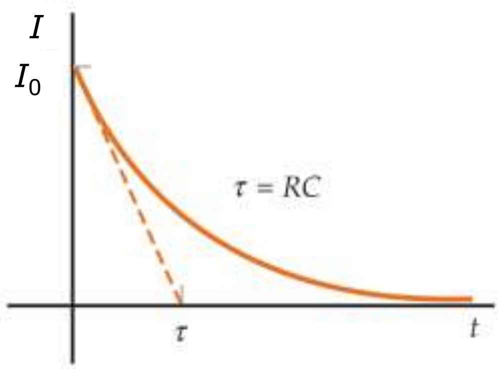
Partindo de: $q(\mathrm{t}) = V_f C e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow q(\mathrm{t}) = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{RC}} = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}}$

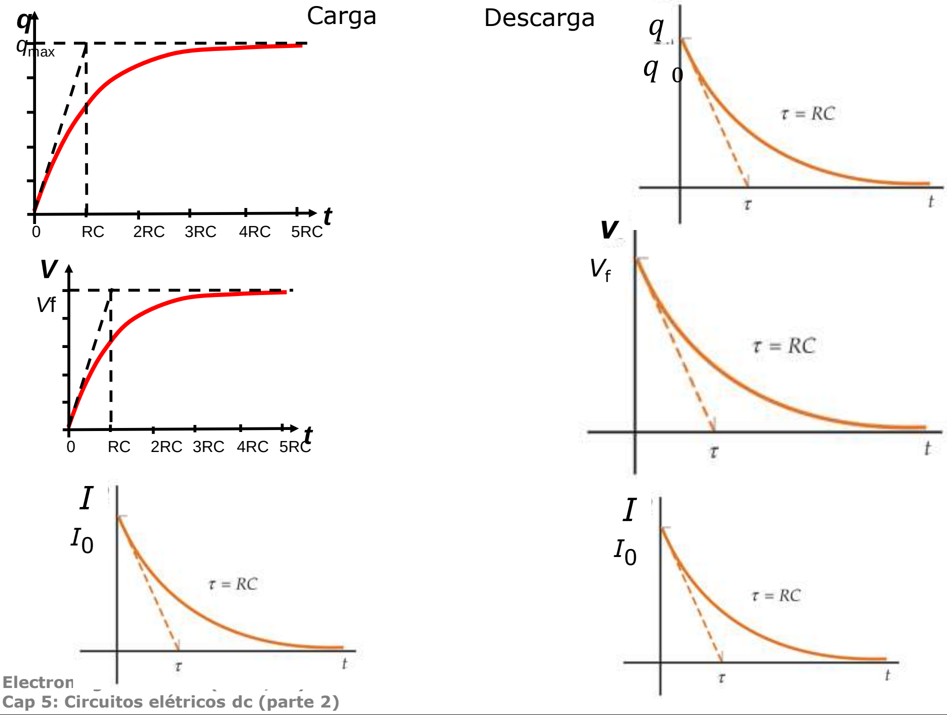
$V_C = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow V_C = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{RC}} = V_f e^{-\frac{t}{RC}} = V_f e^{-\frac{t}{\tau}}$



E a corrente? $q(\mathrm{t}) = V_f C e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow q(\mathrm{t}) = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{RC}} = q_{\text{máx}} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$I = \frac{dq(t)}{dt} \quad \Rightarrow I = \frac{q_{\text{máx}}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$





Checkpoint

Uma bateria de $6V$, com resistência interna negligenciável, é utilizada para carregar um condensador de $2\mu F$, através de uma resistência de 100Ω. Calcule:

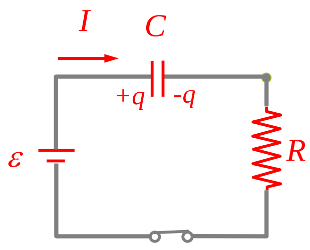
a) a corrente inicial; $I = 60$ mA

b) a carga final do condensador; $q = 12$ µC

c) o tempo necessário para que a carga do condensador atinja 90% do valor máximo. $t = 460$ µs ε= **6V**

C =*2μF*

R = ***100Ω.***



a) a corrente inicial

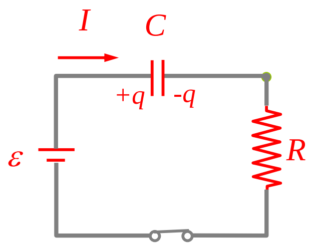
No inicio (t=0) a *ddp* aos terminais do condensador é nula. Aplicando a lei das malhas, vem:

$$\varepsilon = RI + \overbrace{\frac{Q}{C}}^{=0} \Leftrightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \frac{6V}{100\Omega} = 0.06A$$

ε= **6V**

C =*2μF*

R = ***100Ω.***



b) a carga final do condensador;

Quando o condensador fica completamente carregado a *ddp* aos seus terminais é igual à *ddp* aos terminais da fonte:

$$\varepsilon = \overbrace{RI}^{=0} + \frac{Q}{C}$$

$$t \to \infty \Rightarrow V_c = \varepsilon$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = VC = 6(V) \times 2 \times 10^{-6}(F)$$

$$Q = 12 \times 10^{-6} C$$

$\varepsilon = 6V$

$C = 2\mu F$

$R = 100\Omega.$

c) o tempo necessário para que a carga do condensador atinja 90% do valor máximo.

$$q(t) = CV_f(1 - e^{-t/RC})$$

$$q(t) \to 0.9Q \qquad CV_f \to Q$$

$$0.9\cancel{Q} = \cancel{Q}(1 - e^{-t/2\times10^{-4}})$$

$$\ln(0.1) = -\frac{t}{2\times10^{-4}}$$

$$t = 460\,\mu s$$