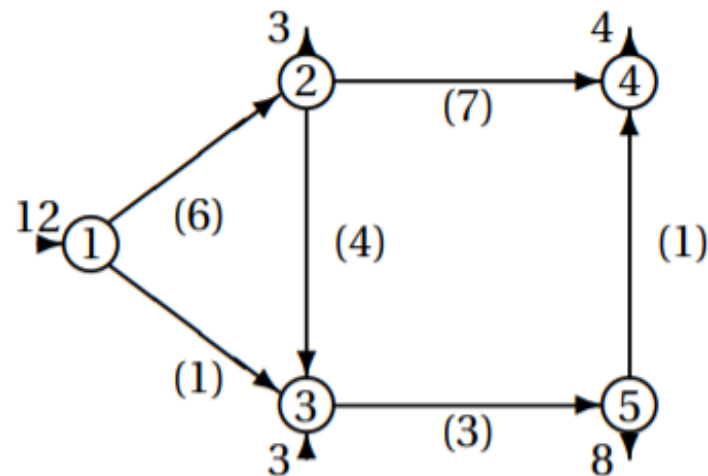


# Ex 11.1

Considere a rede apresentada na figura, em que os valores associados aos arcos,  $(C_{ij})$ , representam o custo unitário de transporte, e os valores associados aos vértices representam ofertas e procura.

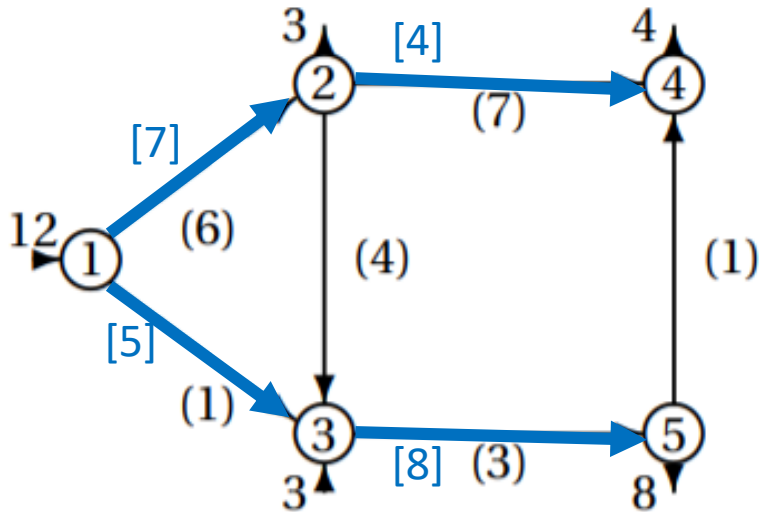


Considere a seguinte solução:  $x_{12} = 7$ ;  $x_{13} = 5$ ;  $x_{24} = 4$ ; e  $x_{35} = 8$ .

- Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.
- Partindo da solução indicada na alínea a), utilizando o método de otimização de redes, determine a solução ótima do problema.
- Existirão soluções ótimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

## Ex 11.1 – a)

Considere a seguinte solução:  $x_{12} = 7$ ;  $x_{13} = 5$ ;  $x_{24} = 4$ ; e  $x_{35} = 8$ .



a) Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.

Solução admissível se o nº de arcos com fluxo = nº vértices – 1 = 5-1 = 4 → ok!

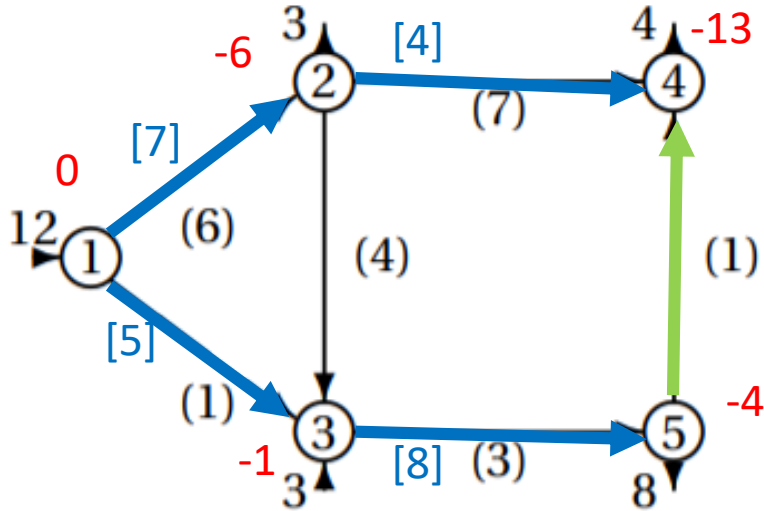
Variáveis básicas:  $x_{12}$ ;  $x_{13}$ ;  $x_{24}$ ;  $x_{35}$

Variáveis não básicas:  $x_{23}$ ;  $x_{54}$

# Ex 11.1 – b)

Partindo a) determinar a solução ótima do problema.

Considere a seguinte solução:  $x_{12} = 7$ ;  $x_{13} = 5$ ;  $x_{24} = 4$ ; e  $x_{35} = 8$ .



Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = \pi_i - \pi_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

Básicas:  $C_{ij} = \pi_i - \pi_j$

$$C_{12} = \pi_1 - \pi_2 \leftrightarrow 6 = 0 - \pi_2 \leftrightarrow \pi_2 = -6$$

$$C_{13} = \pi_1 - \pi_3 \leftrightarrow 1 = 0 - \pi_3 \leftrightarrow \pi_3 = -1$$

$$C_{24} = \pi_2 - \pi_4 \leftrightarrow 7 = -6 - \pi_4 \leftrightarrow \pi_4 = -13$$

$$C_{35} = \pi_3 - \pi_5 \leftrightarrow 3 = -1 - \pi_5 \leftrightarrow \pi_5 = -4$$

Não básicas (ganhos):  $\delta_{ij} = C_{ij} - \pi_i + \pi_j$

$$\delta_{23} = C_{23} - \pi_2 + \pi_3 \leftrightarrow \delta_{23} = 4 + 6 - 1 = 9$$

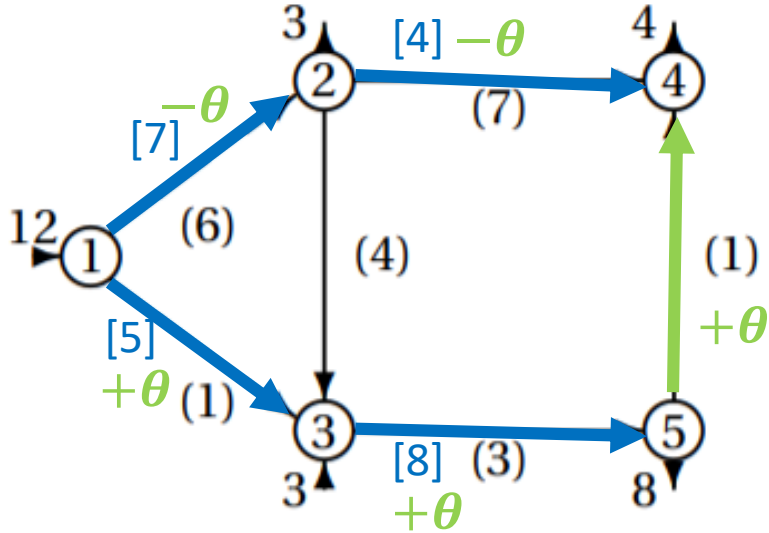
$$\delta_{54} = C_{54} - \pi_5 + \pi_4 \leftrightarrow \delta_{54} = 1 + 4 - 13 = -8$$

Atrativo

# Ex 11.1 – b)

Partindo a) determinar a solução ótima do problema.

Considere a seguinte solução:  $x_{12} = 7$ ;  $x_{13} = 5$ ;  $x_{24} = 4$ ; e  $x_{35} = 8$ .



$$\theta = 4$$

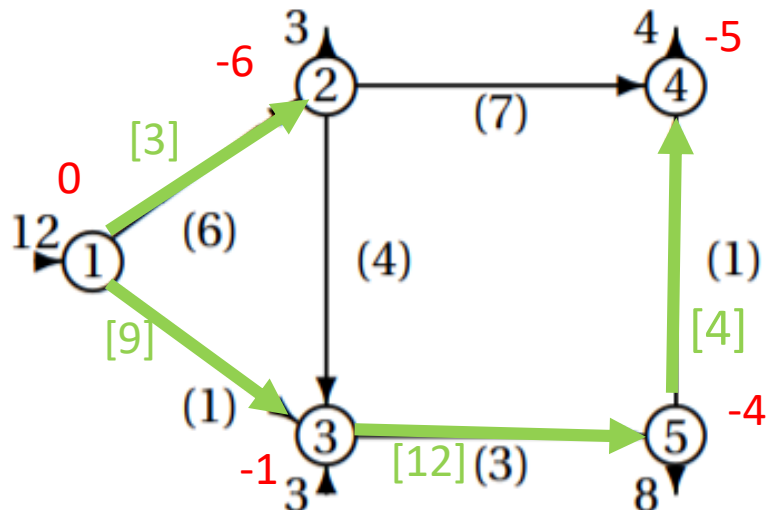
Básicas:  $C_{ij} = \pi_i - \pi_j$

$$C_{12} = \pi_1 - \pi_2 \leftrightarrow 6 = 0 - \pi_2 \leftrightarrow \pi_2 = -6$$

$$C_{13} = \pi_1 - \pi_3 \leftrightarrow 1 = 0 - \pi_3 \leftrightarrow \pi_3 = -1$$

$$C_{35} = \pi_3 - \pi_5 \leftrightarrow 3 = -1 - \pi_5 \leftrightarrow \pi_5 = -4$$

$$C_{54} = \pi_5 - \pi_4 \leftrightarrow 1 = -4 - \pi_4 \leftrightarrow \pi_4 = -5$$



Não básicas (ganhos):  $\delta_{ij} = C_{ij} - \pi_i + \pi_j$

$$\delta_{23} = C_{23} - \pi_2 + \pi_3 \leftrightarrow \delta_{23} = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$\delta_{24} = C_{24} - \pi_2 + \pi_4 \leftrightarrow \delta_{24} = 7 + 6 - 5 = 8$$

$\delta_{ij} \geq 0 \rightarrow$  Solução ótima!

## Ex 11.1 – c)

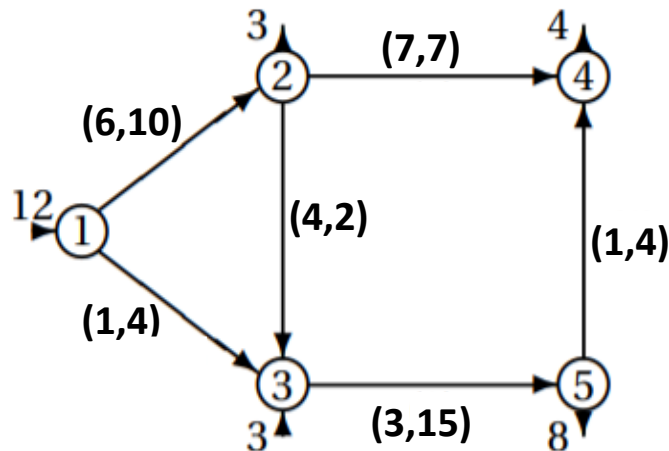
Existirão soluções ótimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

*Não existem soluções alternativas.* Porquê?

*Porque não existem  $\delta_{ij} = 0$ .*

## Ex 11.2

Considere a rede apresentada na figura, em que os valores associados aos arcos,  $(c_{ij}, u_{ij})$ , representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente, e os valores associados aos vértices representam ofertas e procura.

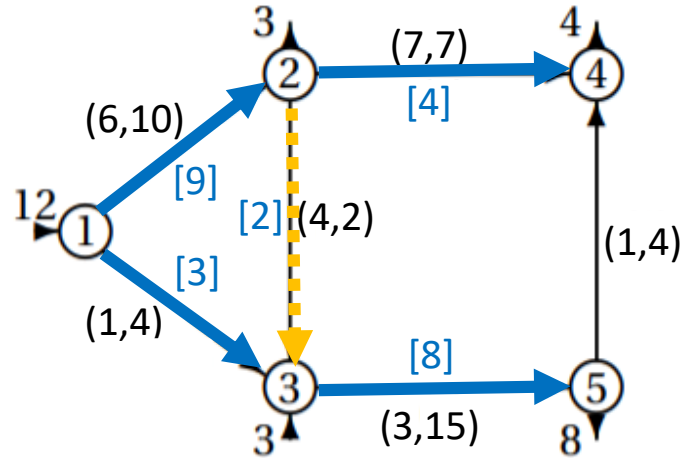


Considere a seguinte solução:  $x_{12}=9$ ,  $x_{13}=3$ ,  $x_{23}=2$ ,  $x_{24}=4$ , e  $x_{35}=8$ .

- Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.
- Partindo da solução indicada na alínea a), utilizando o método de otimização de redes com limites superiores, determine a solução ótima do problema.
- Existirão soluções ótimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

## Ex 11.2 a)

Considere a seguinte solução:  $x_{12}=9$ ,  $x_{13}=3$ ,  $x_{23}=2$ ,  $x_{24}=4$ , e  $x_{35}=8$ .

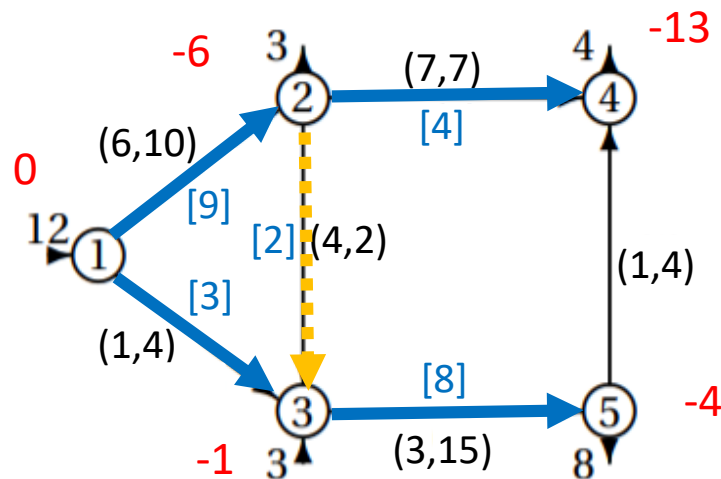


a) Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.

- Árvore? → **ok!**
- $V-1$  arcos básicos?  $5 - 1 = 4$  → **ok!**
- Limite superior dos arcos é respeitado? → **ok!**
- Há conservação de fluxo entre os nós? → **ok!**
- Variáveis básicas:  $x_{12}$ ,  $x_{13}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{35}$
- Não básicas: (limite inferior)  $x_{54}$  (limite superior)  $x_{23}$

# Ex 11.2 b)

Partindo da solução:  $x_{12}=9$ ,  $x_{13}=3$ ,  $x_{23}=2$ ,  $x_{24}=4$ , e  $x_{35}=8$ .



b) utilizando o método de otimização de redes com limites superiores, determine a solução ótima do problema.

Básicas:

$$u_1 = 0$$

$$6 = 0 - u_2 \rightarrow u_2 = -6$$

$$1 = 0 - u_3 \rightarrow u_3 = -1$$

$$7 = -6 - u_4 \rightarrow u_4 = -13$$

$$3 = -1 - u_5 \rightarrow u_5 = -4$$

Não básicas:

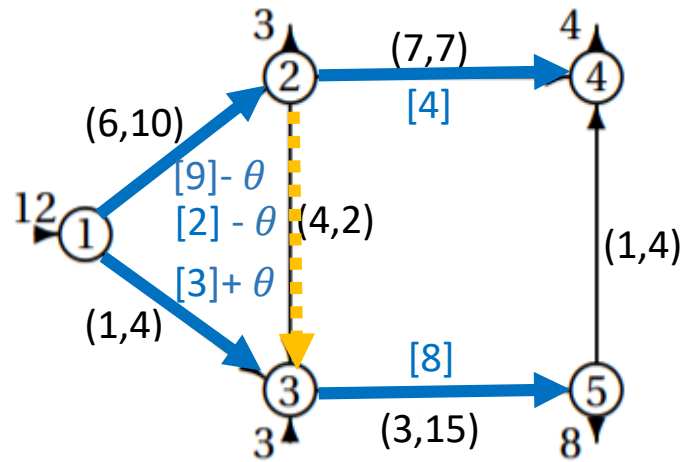
$$(\text{limite sup}) \delta_{23} = C_{23} - u_2 + u_3 = 4 + 6 - 1 = 9 \rightarrow \text{atrativo} \leftarrow + \text{atrativo}$$

$$(\text{limite inf}) \delta_{54} = C_{54} - u_5 + u_4 = 1 + 4 - 13 = -8 \rightarrow \text{atrativo}$$

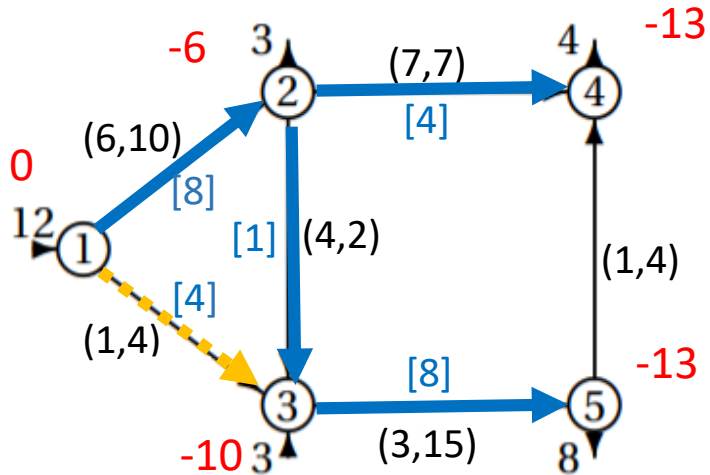


# Ex 11.2 b)

$$\theta_{max} = \min\{2, 9, 1\} = 1$$



Nova solução:



Básicas:

$$u_1 = 0$$

$$6 = 0 - u_2 \rightarrow u_2 = -6$$

$$4 = -6 - u_3 \rightarrow u_3 = -10$$

$$7 = -6 - u_4 \rightarrow u_4 = -13$$

$$3 = -10 - u_5 \rightarrow u_5 = -13$$

Não básicas:

$$(\text{limite sup}) \delta_{13} = C_{13} - u_1 + u_3 = 1 - 0 - 10 = -9 \rightarrow \text{não atrativo}$$

$$(\text{limite inf}) \delta_{54} = C_{54} - u_5 + u_4 = 1 + 13 - 13 = 1 \rightarrow \text{não atrativo}$$

**Solução ótima!**

## Ex 11.2 c)

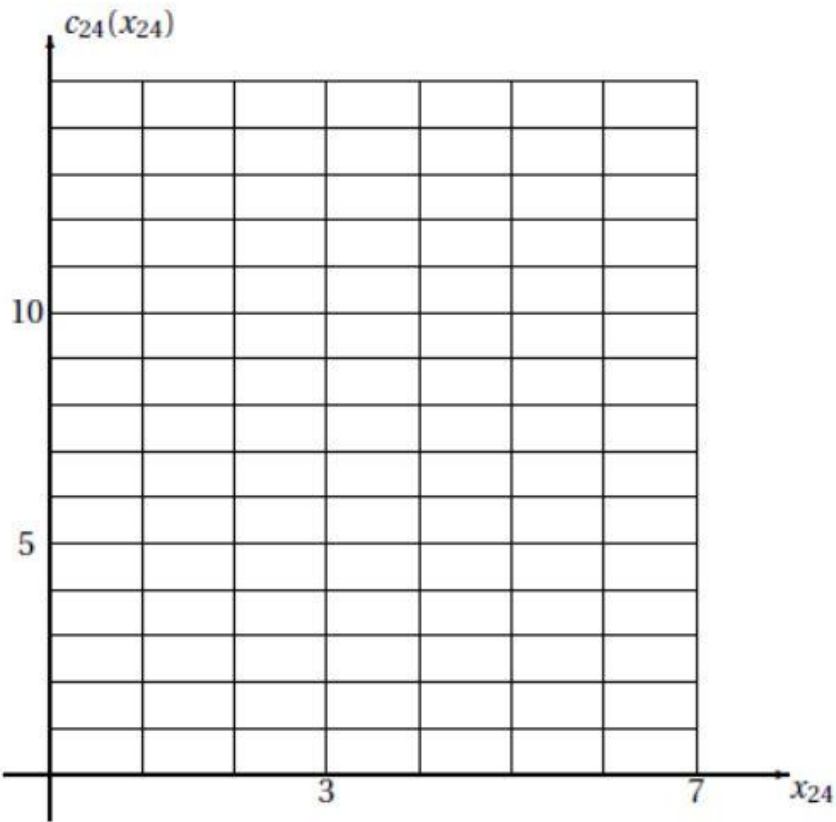
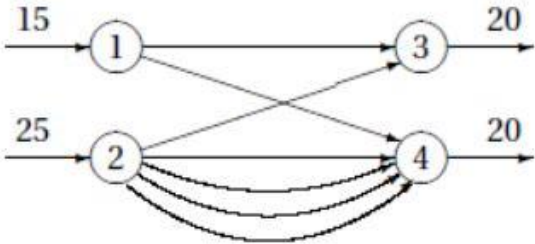
Existirão soluções ótimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

*Não existem soluções alternativas.* Porquê?

*Porque não existem  $\delta_{ij} = 0$ .*

# Quiz 11

Considere o seguinte problema de transportes com limites superiores nos arcos (capacidades) que foi resolvido com o Relax4. Os valores dos custos unitários de transporte e das capacidades dos arcos estão indicados no ficheiro de input do Relax4.



Input do Relax4:

4  
7  
1 3 11 1000  
1 4 12 1000  
2 3 13 1000  
2 4 1  
2 4 2  
2 4 3 2  
2 4 4 1000  
15  
25  
-20  
-20

Cabeçalho:  
4 vértices  
7 arcos

Ligações entre pares de arcos

Custos de cada arco

Limites superiores: 1000→infinito

Oferta

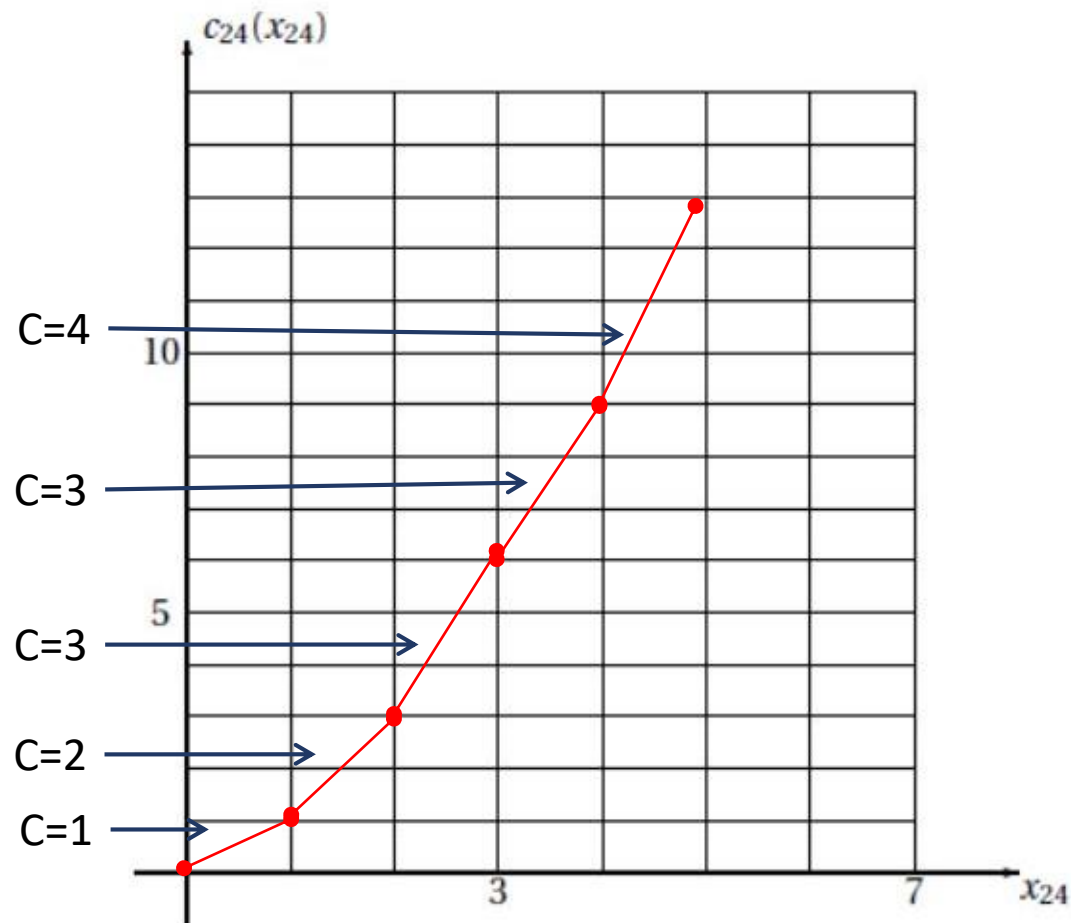
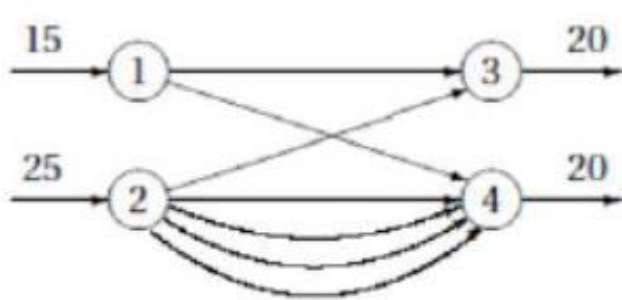
Procura

Output do Relax4:

```
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
1 3 15.
2 3 5.
2 4 1.
2 4 1.
2 4 2.
2 4 16.
OPTIMAL COST = 303.
```

1- Desenhe a função que indica o custo total de transporte,  $c_{24}(x_{24})$ , em função do número de unidades transportadas entre os vértices 2 e 4.

Quiz 1111.1



Input do Relax4:

```
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
```

2 4 1 1  
2 4 2 1  
2 4 3 2  
2 4 4 1000

forma de aproximar  
uma função convexa  
através de uma função  
linear por partes

15  
25  
-20  
-20

Output do Relax4:

```
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
```

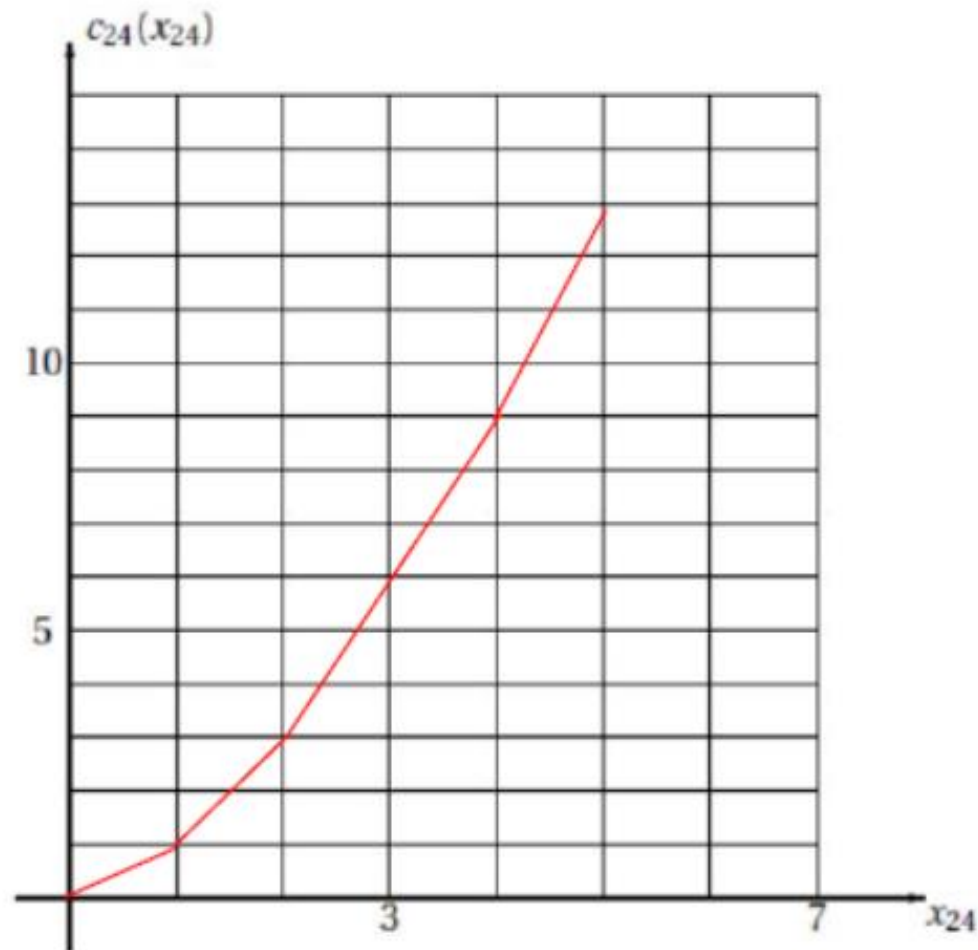
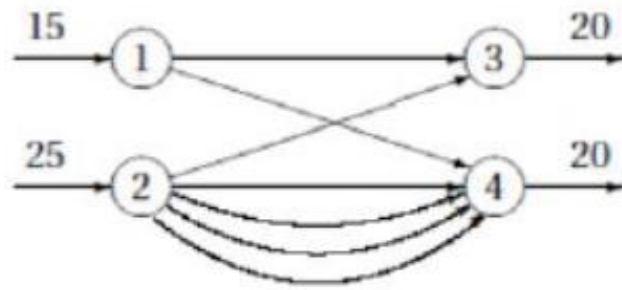
```
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
```

```
1 3 15.
2 3 5.
2 4 1.
2 4 1.
2 4 2.
2 4 16.
```

OPTIMAL COST = 303.

1- Desenhe a função que indica o custo total de transporte,  $c_{24}(x_{24})$ , em função do número de unidades transportadas entre os vértices 2 e 4.

# Quiz 1111.1



Input do Relax4:

```

4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000

```

```

2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000

```

forma de aproximar  
uma função convexa  
através de uma função  
linear por partes

```

15
25
-20
-20

```

Output do Relax4:

```

NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM

```

\*\*\*\*\*

TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.

TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

```

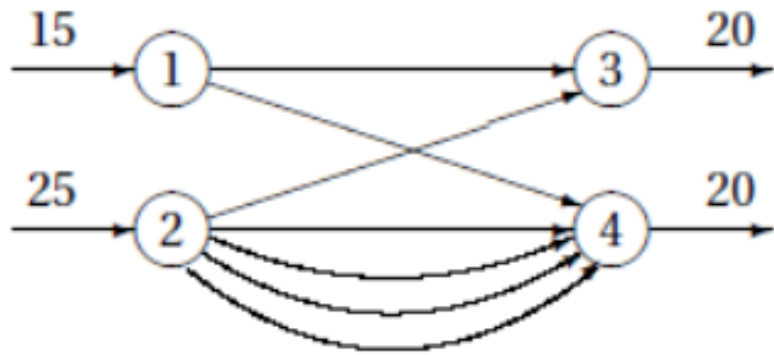
1 3 15.
2 3 5.
2 4 1.
2 4 1.
2 4 2.
2 4 16.

```

OPTIMAL COST = 303.



# Quiz 11



11.2 Da análise do output do Relax4, indique o fluxo ótimo em cada arco, e verifique o custo da solução ótima.

Input do Relax4:

```
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000
```

```
15
25
-20
-20
```

Output do Relax4:

```
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
```

\*\*\*\*\*

TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.

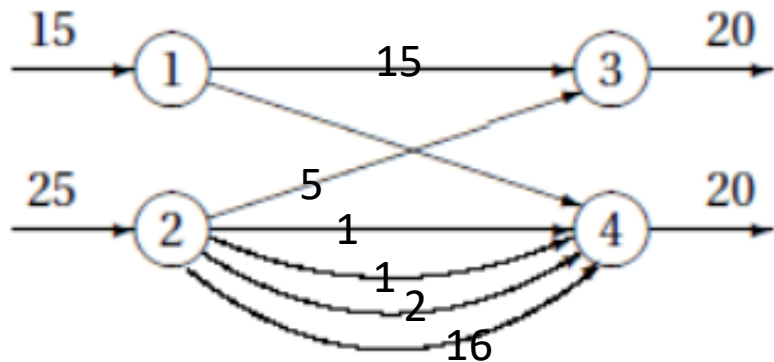
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

```
1 3 15.
2 3 5.
2 4 1.
2 4 1.
2 4 2.
2 4 16.
```

Solução

OPTIMAL COST = 303.

# Quiz 11



Solução ótima

Fluxo em cada arco:

$$x_{13} = 15$$

$$x_{23} = 5$$

$$x_{24} = 20 \text{ (total)}$$

Custo da solução:

$$C = 11(15) + 13(5) + 1(1) + 2(1) + 3(2) + 4(16) = 303$$

Input do Relax4:

```
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000
```

15

25

-20

-20

Output do Relax4:

```
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
```

\*\*\*\*\*

TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.

TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

1 3 15.

2 3 5.

2 4 1.

2 4 1.

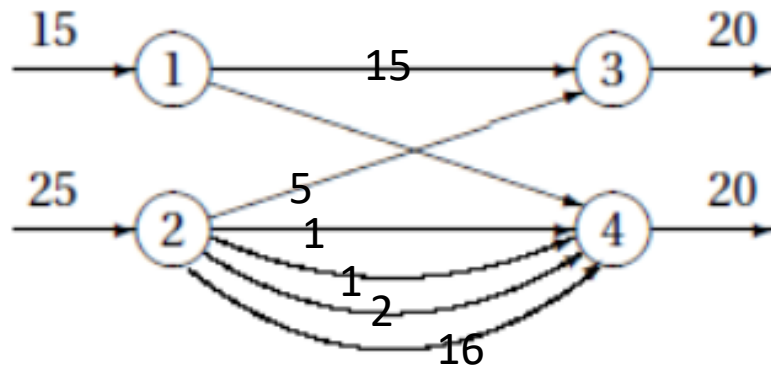
2 4 2.

2 4 16.

Com custos  
diferentes

OPTIMAL COST = 303.

# Quiz 11



Qual a árvore associada à base da solução ótima?

Input do Relax4:

```
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000
```

```
15
25
-20
-20
```

Output do Relax4:

```
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
```

\*\*\*\*\*

TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.

TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

1 3 15.

2 3 5.

2 4 1.

2 4 1.

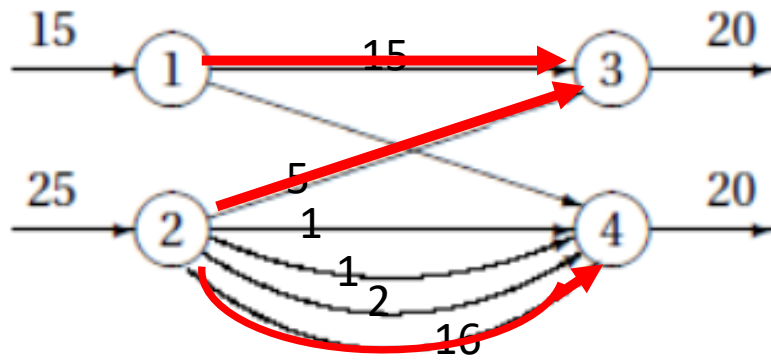
2 4 2.

2 4 16.

OPTIMAL COST = 303.



# Quiz 11



A **árvore** associada à base da solução ótima é constituída pelos arcos básicos (correspondentes às variáveis com fluxo positivo e diferente do valor do limite superior).

Variáveis básicas:

**$x_{13}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{24}(4,1000)$**

Variáveis não-básicas no limite inferior:

$x_{14}$

Variáveis não-básicas no limite superior:

$x_{24}(1,1)$ ,  $x_{24}(2,1)$ ,  $x_{24}(3,2)$

Input do Relax4:

```
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000
```

15

25

-20

-20

Output do Relax4:

NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7

CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM

CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM

\*\*\*\*\*

TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.

TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.

1 3 15.

2 3 5.

2 4 1.

2 4 1.

2 4 2.

2 4 16.

OPTIMAL COST = 303.

Dúvidas?