Otimização não linear

Isabel Espírito Santo

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

iapinho@dps.uminho.pt

Otimização

Otimização:

- surge no processo de tomada de decisões para se atingir o melhor resultado possível;
- é um dos objetivos dos profissionais das áreas das **Ciências de Gestão** e **Engenharia**;
- está relacionada com a **maximização** ou **minimização** de modelos matemáticos - **função objetivo**;
- em certos casos, as **variáveis de decisão** estão sujeitas a condições, designadas **restrições**,
- também surge noutras áreas: ciências aplicadas, economia, finanças, medicina e estatística.

Classificação de problemas

Os problemas de otimização são divididos em Problemas de Otimização Linear e **Problemas de Otimização Não Linear** - de acordo com as características das funções objetivo e de restrição:

- Otimização Linear: se a função objetivo e as restrições são lineares;
- **Otimização Não Linear (ONL)**: se o objetivo e as restrições contêm funções não lineares nas variáveis;

  casos particulares:
  - problemas quadráticos
  - problemas convexos (funções convexas)
  - problemas sem restrições.

Classificação de problemas - exemplos

ONL:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + 3x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1 + 5x_2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Problema quadrático
rest. de desigualdade
funções diferenciáveis

ONL:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

rest. de igualdade
funções diferenciáveis

Classificação de problemas - exemplos

ONL:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = -1 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 0.5 \end{array}$$

rest. de igualdade
funções diferenciáveis

ONL:

$$\min \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^3 - x_1 x_2$$

sem restrições
função diferenciável

ONL:

$$\max \quad 2(-x_1^2 - x_2^2 + 1) + x_1$$

sem restrições
função diferenciável

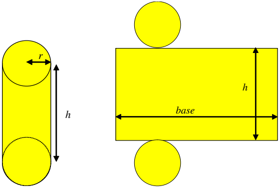
ONL:

$$\min \quad \max\{x_1, x_2\} + (|x_1| + |x_2|)$$

sem restrições
função não diferenciável

Exemplo 1

Tendo como objetivo fabricar latas cilíndricas com um volume de 1000 cm^3 e tapá-las em ambas as extremidades, qual deverá ser o raio da base e a altura da lata de modo a minimizar a quantidade de placa metálica, em termos de área superficial?



Exemplo 1 (cont.)

$$\begin{aligned}
\text{Área Total} &= \text{Área}_{\text{retângulo}} + 2 \times \text{Área}_{\text{círculo}} \\
&= base \times h + 2\left(\pi r^2\right) \\
&= \text{Perímetro}_{\text{círculo}} \times h + 2\pi r^2 \\
&= 2\pi r h + 2\pi r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi r^2 \times h \\
1000 &= \pi r^2 \times h
\end{aligned}$$

Formulação do problema:

$$\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & A(r,h) \equiv 2\pi r h + 2\pi r^2 \\
\text{sujeito a} & \pi r^2 h = 1000
\end{array}$$

Problema com 2 variáveis e 1 restrição

Exemplo 1 (cont.)

Este problema pode ser transformado num problema sem restrições e uma variável: $1000 = \pi r^2 \times h \Leftrightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$
Substituindo em $A(r, h)$ vem

$$A(r) = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2, r \neq 0$$

Problema unidimensional sem restrições

$$\min_{r \in \mathbb{R}} \quad A(r) \equiv \frac{2000}{r} + 2\pi r^2, \quad r \neq 0$$

Exemplo 2

O produto de três números positivos é igual a A (dado). Determine esses números por forma que a sua soma seja máxima.

Problema com 3 variáveis e com 1 restrição

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 x_3 = A \end{array}$$

Sendo $x_3 = \dfrac{A}{x_1 x_2}$ e substituindo $\Rightarrow$

Problema com 2 variáveis sem restrições

$$\max_{x_1, x_2} \quad x_1 + x_2 + \frac{A}{x_1 x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0$$

Formulação de um problema sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1}$$

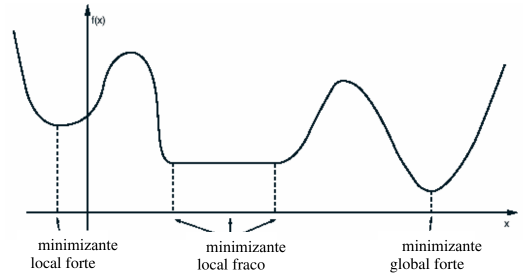
- Se $n = 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{problema unidimensional} \\ x \text{ é escalar} \end{array} \right.$
- Se $n > 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{problema multidimensional} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ é vetor de dimensão } n \end{array} \right.$

Classificação de mínimos (e máximos)

Seja $V(x, \delta)$ uma vizinhança (bola aberta) de x^* de raio δ $(\delta > 0)$.

x^* é **minimizante local forte (fraco)** se $\exists \delta > 0$:

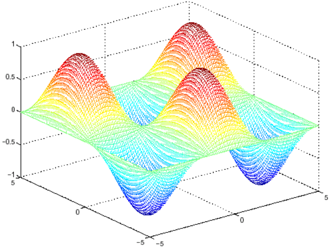
- $f(x)$ é definida em $V(x^*, \delta)$
- $f(x^*) < \ (\leq) \, f(x), \ \forall x \in V(x^*, \delta); \ x \neq x^*$



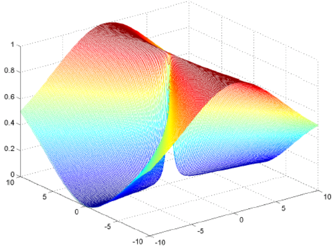
Classificação de mínimos (e máximos)

x^* é **maximizante local forte (fraco)** se $\exists \delta > 0$:

- $f(x)$ é definida em $V(x^*, \delta)$
- $f(x^*) > \ (\geq) \, f(x) \ \ \forall x \in V(x^*, \delta); \ \ x \neq x^*$



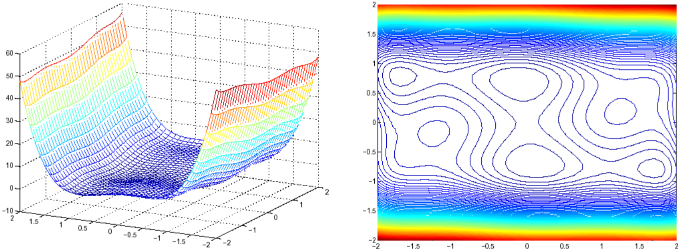
(máximos e mínimos fortes)



(máximos e mínimos fracos)

Classificação de mínimos (e máximos)

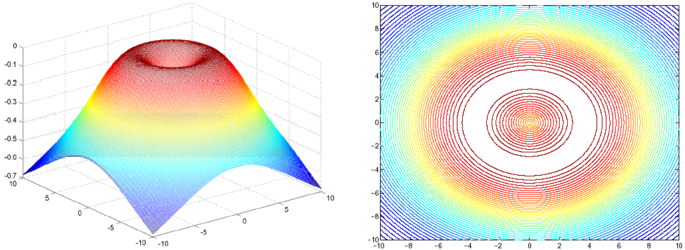
x^* é **minimizante global forte (fraco)** se $f(x^*) < (\leq) f(x)$, para todo o x que pertence ao domínio de $f(x)$ (onde a função é definida);



(2 mínimos globais e 4 mínimos locais)

Classificação de mínimos (e máximos)

x^* é **maximizante global forte (fraco)** se $f(x^*) > (\geq) f(x)$ para todo o x que pertence ao domínio de $f(x)$ (onde a função é definida);



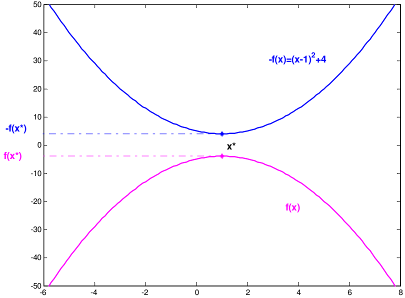
(máximos globais fracos)

Nota: Todo o ótimo global é local; no entanto, um ótimo local pode não ser global.

Mínimos *vs* máximos

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

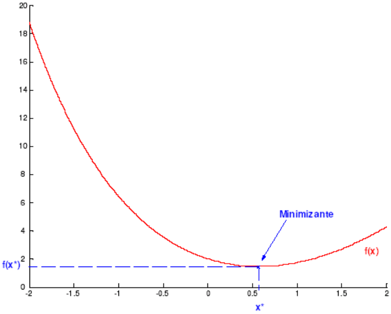
$$x^* = \underbrace{\arg\max\left(f\left(x\right)\right)}_{\text{maximizante}} = \underbrace{\arg\min\left(-f\left(x\right)\right)}_{\text{minimizante}}$$



Problema unidimensional ($n = 1$)

Exemplo 3

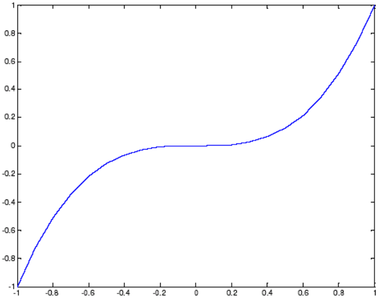
$$\min_{x \in \mathbb{R}} \; f(x) \equiv x^2 + 2e^{-x}$$



(tem 1 mínimo)

Exemplo 4

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \; f(x) \equiv x^3$$



(não tem mínimos)

Condições de otimalidade

Assume-se $f(x)$ continuamente diferenciável até à 2^a ordem.

Condição necessária (e suficiente) de 1^a ordem:

Se x^* é uma solução do problema (1) ($n = 1$) então

- $f'(x^*) = 0$.

Nota: A equação $f'(x) = 0$ define os pontos estacionários da função objetivo $f(x)$:

$$\begin{cases} \text{minimizante (exemplo 3)} \\ \text{maximizante} \\ \text{ponto de inflexão (exemplo 4).} \end{cases}$$

Exemplo: $\displaystyle \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \equiv x^2 + 2e^{-x}$

Pontos estacionários: $f'(x) \equiv 2x - 2e^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow$ $2(x - e^{-x}) = 0 \;\Leftrightarrow$ as soluções **desta equação não linear** em x - resolução pelo método iterativo da secante ou Newton - são: (única) 0.567143

Condições de otimalidade

Condição necessária de 2^a ordem:

Se x^* é uma solução do problema (1) ($n = 1$) que satisfaz a condição de 1^a ordem, então

- $f''(x^*) \geq 0$.

Condição suficiente de 2^a ordem:

- Se x^* é tal que $f'(x^*) = 0$ e se
$$f''(x^*) > 0$$
então x^* é um minimizante local forte de (1).
- Se x^* é tal que $f'(x^*) = 0$ e se
$$f''(x^*) < 0$$
então x^* é um maximizante local forte de (1).