

# Métodos Numéricos

## Sistemas de equações lineares - Métodos diretos

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt



- Introdução
- Existência e unicidade de solução
- Métodos diretos
- Eliminação de Gauss com pivotagem parcial
- Determinante e inversa de uma matriz
- Exercícios de aplicação

- $A_{n \times n}$  - matriz dos coeficientes do sistema com  $n$  linhas e  $n$  colunas (matriz quadrada)

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$  - vetor solução (coluna)

- $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$  - termo independente (coluna)

- $[A|b]$  - matriz ampliada do sistema ( $n \times (n + 1)$ ).

# Método directo vs Método iterativo

## Directo

A solução do sistema é obtida após um número **finito** de operações

## Iterativo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$$

A partir de uma **estimativa inicial**  $x^{(1)}$  da solução, gera-se uma sucessão de vetores  $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(k)}$  que se pretende que convirja para a **solução exata**  $x^*$ . A solução do sistema é obtida após um número **infinito** de operações

# Existência e unicidade da solução do sistema $Ax = b$

- O sistema de equações lineares tem sempre solução?
- A solução é única ?
- Depende de  $c(A)$  - característica da matriz  $A$  - número de linhas ou colunas linearmente independentes.
- Seja  $c(A|b)$  a característica da matriz ampliada.

# Existência e unicidade da solução

Relação direta entre  $c(A)$ ,  $\det(A)$  e a existência de  $A^{-1}$ :

$$\text{se } c(A) = n \begin{cases} \det(A) \neq 0 \\ A^{-1} \text{ existe} \\ \text{sistema possível determinado (solução única)} \end{cases}$$

$$\text{se } c(A) < n \begin{cases} \det(A) = 0 \\ A^{-1} \text{ não existe} \\ \text{se } \begin{cases} c(A) = c(A|b) \begin{cases} \text{sistema possível indeterminado} \\ \text{(infinitude de soluções)} \end{cases} \\ c(A) < c(A|b) \begin{cases} \text{sistema impossível} \\ \text{(não tem solução)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

# Exemplos - análise da característica

- Sistema com  $c(A) = 2$  (as linhas de  $A$  são linearmente independentes)

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \right] \text{ (possível determinado)}$$

- Sistema com  $c(A) < 2$  e  $c(A) = c(A|b) = 1$  (a 1ª linha de  $[A|b]$  é o dobro da segunda)

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \text{ (possível indeterminado)}$$

- Sistema com  $c(A) < 2$  ( $= 1$ ) e  $c(A) < c(A|b)$  ( $= 2$ ) (a 1ª linha de  $[A]$  é o dobro da segunda, mas a de  $[A|b]$  não)

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \text{ (impossível)}$$



# EGPP - Método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial

O método a estudar baseia-se na ideia de transformar o sistema noutro mais fácil de resolver, constituído por uma matriz triangular.

Este método transforma o sistema  $Ax = b$  noutro equivalente  $Ux = c$ , cuja matriz dos coeficientes é triangular superior:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \dots \quad Ux = c$$

Os sistemas  $Ax = b$  e  $Ux = c$ , são equivalentes, têm a mesma solução mas... $U$  é **triangular!!!**

# Operações elementares sobre matrizes

Troca de duas linhas

Multiplicação de uma linha por um escalar  $\neq 0$

Substituição de uma linha pela que dela se obtém adicionando o produto de outra linha paralela por um escalar

Este processo tem  $n - 1$  etapas:

- na primeira etapa anulam-se todos os elementos de  $A$  abaixo do elemento  $a_{11}$
- na segunda etapa anulam-se todos os elementos abaixo de  $a_{22}$
- ...
- na última etapa (etapa  $n - 1$ ) anulam-se os elementos abaixo de  $a_{n-1,n-1}$ , *i.e.*, o elemento  $a_{n,n-1}$

# Resolução de $Ux = c$ - substituição inversa

Após este processo a matriz  $A$  e o termo independente  $b$  são transformados em  $U$  e  $c$ , respectivamente. O sistema resultante é agora de fácil resolução - **substituição inversa**.

$$\left\{ \begin{array}{llllll} u_{11}x_1 & + u_{12}x_2 & + \dots & & + u_{1n}x_n & = c_1 \\ & u_{22}x_2 & + \dots & & + u_{2n}x_n & = c_2 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & u_{n-1n-1}x_{n-1} & + u_{n-1n}x_n & = c_{n-1} \\ & & & & u_{nn}x_n & = c_n \end{array} \right.$$

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \left( c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, \dots, 2, 1$$

❶ Para ( $i = 1$  até  $n - 1$ ) fazer (etapa  $i$ ):

- cálculo do elemento  $pivot_i$ :

$$pivot_i = \max(|a_{ii}|, |a_{ji}| \mid j = i + 1, \dots, n)$$

se o máximo for  $|a_{ii}|$  não há troca de linhas, senão a linha  $i$  é trocada com a linha  $j$

- cálculo dos  $(n - i)$  multiplicadores  $m_{ji}, j = i + 1, \dots, n$ :

$$m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{pivot_i}$$

- multiplicador  $m_{ji}$  vai multiplicar a linha pivot  $i$  e somar o resultado à linha  $j$  (a linha pivot não se altera).

❷ Resolução do sistema resultante por substituição inversa.

# Pivotagem - porquê?

A pivotagem, *i.e.*, a escolha de pivot, tem como objectivo evitar a propagação do erro de arredondamento resultante das várias operações aritméticas de que o sistema vai sendo alvo, evitando a instabilidade do processo numérico.

A escolha para pivot do maior elemento em valor absoluto, poderá levar à troca de linhas, originando multiplicadores, que em valor absoluto vão ser **inferiores ou iguais a um**.

# Resolução de um sistema por EGPP

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 22 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \\ 2x_1 - 10x_2 + 2x_3 = -12 \end{cases}$$

**Resolução:**

Etapla 1:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 22 \\ -5 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array} \right]$$

Troca linha 1 com 2:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 5 & 22 \\ 2 & -10 & 2 & -12 \end{array} \right]$$

$$m_{21} = -\frac{1}{-5} = 0.2, \quad m_{31} = -\frac{2}{-5} = 0.4$$

# Resolução de um sistema por EGPP

Etapa 2:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ & 2.6 & 5.2 & 20.8 \\ & -10.8 & 2.4 & -14.4 \end{array} \right]$$

Troca linha 2 com 3:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ & -10.8 & 2.4 & -14.4 \\ & 2.6 & 5.2 & 20.8 \end{array} \right]$$

$$m_{32} = -\frac{2.6}{-10.8} = 0.240741$$



# Resolução de um sistema por EGPP

A matriz já é triangular:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & -14.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 17.(3) \end{array} \right]$$

Solução (obtida por substituição inversa):

$$\left[ \begin{array}{l} x_1 = (-6 - 3 + 2 \times 2) / -5 = 1 \\ x_2 = (14.4 - 2.4 \times 3) / -10.8 = 2 \\ x_3 = 17.(3) / 5.(7) = 3 \end{array} \right]$$

# Cálculo do determinante de uma matriz

## Determinante de $A$

Começa-se por transformar  $A$  em  $U$ ,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(U) \times (-1)^t = \\ &= \prod_{i=1}^n u_{ii} \times (-1)^t = \\ &= u_{11} \times u_{22} \times \dots \times u_{nn} \times (-1)^t \end{aligned}$$

( $t$  é o número de troca de linhas efetuado)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & -10.8 & 2.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(U) \times (-1)^2 = (-5) \times (-10.8) \times 5.(7) \times (-1)^2 = 312$$

( $t = 2$  - houve duas trocas de linhas).

# Cálculo da matriz inversa

Calcule a matriz inversa de  $A$ :

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -10 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Aplicando EGPP ao conjunto:

$$[A|I] \rightarrow (\text{EGPP}) \rightarrow [U|J]$$

$$[U|J] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 1 & 0.296296 & 0.240741 \end{array} \right]$$

# Cálculo da matriz inversa

Para calcular a 1ª coluna de  $A^{-1}$  resolve-se o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 1 \end{array} \right]$$

Cuja solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 0.019231 \\ 0.038462 \\ 0.173077 \end{bmatrix} \quad (1^a \text{ coluna de } A^{-1})$$

# Cálculo da matriz inversa

Para calcular a  $2^a$  coluna de  $A^{-1}$  resolve-se o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 0.296296 \end{array} \right]$$

Cuja solução é:  $x = \begin{bmatrix} -0.179487 \\ -0.025641 \\ 0.051282 \end{bmatrix}$  ( $2^a$  coluna de  $A^{-1}$ )

# Cálculo da matriz inversa

Para calcular a 3ª coluna de  $A^{-1}$  resolve-se o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10.8 & 2.4 & 1 \\ 0 & 0 & 5.(7) & 0.240741 \end{array} \right]$$

Cuja solução é:  $x = \begin{bmatrix} 0.041667 \\ -0.083333 \\ 0.041667 \end{bmatrix}$  (3ª coluna de  $A^{-1}$ )

A matriz inversa de  $A$  é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.019231 & -0.179487 & 0.041667 \\ 0.038462 & -0.025641 & -0.083333 \\ 0.173077 & 0.051282 & 0.041667 \end{bmatrix}$$