Métodos Numéricos

Integração Numérica

Teresa Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

tm@dps.uminho.pt

Objetivos

Calcular aproximações ao seguinte integral:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{com } a \text{ e } b \text{ finitos}$$

Porquê?

- $f(x)$ é impossível ou difícil de integrar analiticamente
- $f(x)$ é conhecida através de uma tabela de valores

Solução

Aproximação da função $f(x)$ por outra função cujo integral é mais fácil de calcular, como por exemplo polinómios interpoladores de $f(x)$

Sumário

- Introdução
- Fórmulas simples de Newton-Cotes
- Fórmulas compostas
- Aplicação a intervalos de amplitude variável
- Exercícios de aplicação

Fórmulas simples de Newton-Cotes

O polinómio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola a função $f(x)$ nos $n+1$ pontos $x_0, x_1, ..., x_n$:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

(L_i são os polinómios de Lagrange associados a estes nós)

Fórmulas simples de Newton-Cotes

Regra de integração ou fórmula de quadratura:

$$I \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

O cálculo exato do integral I é substituído pelo somatório ponderado de valores da função $f(x)$, **cujos pesos são os coeficientes** A_i

Consoante o número de pontos e a sua localização, surgirão as várias fórmulas de integração

Só serão estudadas as fórmulas do **Trapézio**, **Simpson** e dos **Três Oitavos**.

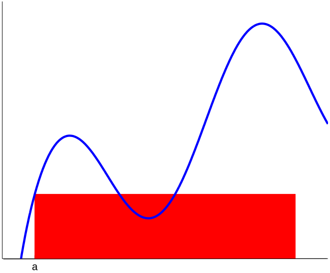
Regra do rectângulo

$$n = 0 \Rightarrow 1 \text{ ponto} : x_0 = a,\ L_0(x) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)}$$

com erro

$$\boxed{e_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta),\ \eta \in [a,b]}$$



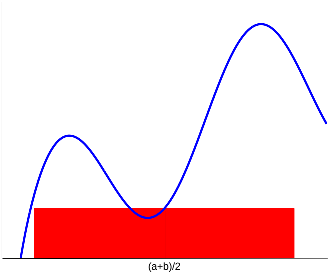
Regra do ponto médio

$$n = 0 \Rightarrow 1 \text{ ponto} : x_0 = \frac{a+b}{2}, \; L_0(x) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

com erro

$$\boxed{e_M = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \; \eta \in [a,b]}$$



Fórmula simples do Trapézio

Se $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ em

$$I \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) dx =$$

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

surge a **Fórmula simples do Trapézio**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

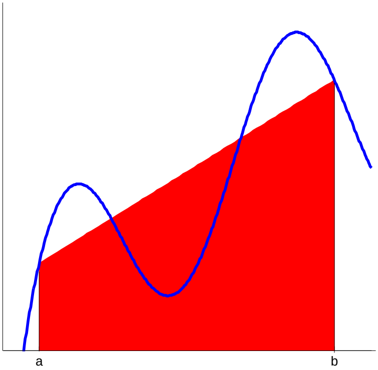
com erro de truncatura

$$|E_T| = I - \int_a^b p_n(x)dx = |-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)|,\ \xi \in [a,b]$$

Deve ser usada para um único intervalo ($n = 1$), ou seja dois pontos

Se a função a integrar $f(x)$ for um polinómio de grau 1 o erro de truncatura é zero.

Interpretação geométrica (Trapézio)



Fórmula simples de Simpson

Se $n=2$, $x_0=a$, $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ e $x_2=b$ em

$$I \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

$$= A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

surge a **Fórmula simples de Simpson**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$$

com erro de truncatura

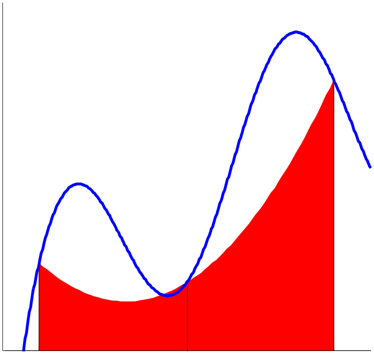
$$|E_S| = I - \int_a^b p_n(x)dx = |-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(iv)}(\xi)|,\ \xi \in [a,b]$$

Fórmula simples de Simpson

Deve ser usada para um par de intervalos de igual amplitude ($n = 2$), ou seja para três pontos igualmente distanciados

Se a função a integrar $f(x)$ for um polinómio de grau inferior ou igual a 3 o erro de truncatura é zero

Interpretação geométrica (Simpson)



Fórmula simples dos Três oitavos

Se $n = 3$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$ e $x_3 = b$ em

$$I \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

$$= A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

surge a **Fórmula dos Três oitavos**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{8} \left[f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b) \right]$$

com erro de truncatura

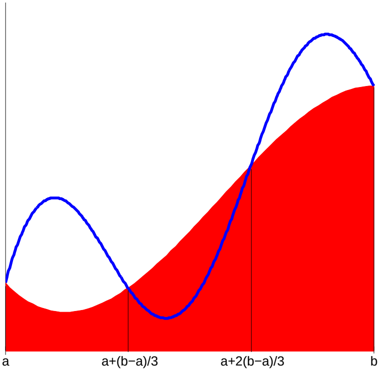
$$|E_{\frac{3}{8}}| = I - \int_a^b p_n(x)dx = | - \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(iv)}(\xi)|, \ \xi \in [a, b]$$

Fórmula dos Três oitavos

Deve ser usada para um terno de intervalos de igual amplitude ($n = 3$), ou seja para quatro pontos igualmente espaçados

Se a função a integrar $f(x)$ for um polinómio de grau inferior ou igual a 3 o erro de truncatura é zero

Interpretação geométrica (Três oitavos)



Fórmulas compostas

Todas as fórmulas dependem de uma potência de $(b - a)$, comprimento do intervalo

Se $(b - a)$ for reduzido também o erro o será!!!

Divide-se $[a, b]$ em n subintervalos de amplitude $\dfrac{b-a}{n}$ e aplica-se a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, ..., n$ e $a = x_0, b = x_n$, a fórmula simples

A contribuição da aplicação da fórmula simples a cada subintervalo origina a **fórmula composta**.

Fórmula composta do Trapézio

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f_i + f_{i+1}]$$

Fórmula composta do Trapézio :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-2} + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 \\
\hline
\sum & 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 & 1
\end{array}$$

Erro da Fórmula composta do Trapézio

O erro de truncatura da fórmula composta obtém-se somando os erros de truncatura das fórmulas simples aplicadas a cada um dos n subintervalos:

$$|E_T(h)| = |-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i)| = |-\frac{h^2}{12}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)|$$

em que $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

$$|E_T| = |-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)|, \; \eta \in [a, b]$$

Pode ser utilizada para qualquer número de subintervalos

Fórmula composta de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots +$$

$$+4f_{n-3} + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & 4 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 4 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 4 & 1 \\
\hline
\sum & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & \ldots & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1
\end{array}$$

$$|E_S| = | - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)|, \ \eta \in [a,b]$$

A fórmula composta de Simpson só pode ser aplicada a um **número par** de subintervalos iguais.

Fórmula composta dos Três oitavos

Fórmula composta dos Três oitavos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(3h)}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \cdots +$$

$$+2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n]$$

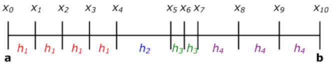
$$\begin{array}{c|cccccccccccccccccc}
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
\hline
\sum & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & \ldots & & & \ldots & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1
\end{array}$$

$$|E_{\frac{3}{8}}| = |-\frac{h^4}{80}(b-a)f^{(iv)}(\xi)|, \ \xi \in [a,b]$$

A fórmula composta dos Três oitavos só pode ser aplicada a um número **múltiplo de três** de subintervalos iguais.

Aplicação a intervalos com amplitudes diferentes

O que acontece quando os pontos do intervalo $[a, b]$ não estão todos igualmente espaçados?
É possível **agrupar** subintervalos com amplitudes iguais e aplicar em cada grupo uma fórmula de integração.
Por exemplo:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{10}} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)dx + \int_{x_5}^{x_7} f(x)dx + \int_{x_7}^{x_{10}} f(x)d$$

$$\approx \underbrace{S(h_1)}_{n=4} + \underbrace{T(h_2)}_{n=1} + \underbrace{S(h_3)}_{n=2} + \underbrace{3/8(h_4)}_{n=3}$$

Aplicação a intervalos com amplitudes diferentes

Os erros de truncatura dependem da amplitude do intervalo onde são usadas as respetivas fórmulas, do valor de h, dum coeficiente e também do valor de derivadas.

Trapézio

$$|E_T| = |-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)|,\ \eta \in [a,b]$$

Simpson

$$|E_S| = |-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)|,\ \eta \in [a,b]$$

Três oitavos

$$|E_{\frac{3}{8}}| = |-\frac{h^4}{80}(b-a)f^{(iv)}(\eta)|,\ \eta \in [a,b]$$

Aplicação a intervalos com amplitudes diferentes

A escolha da melhor fórmula deve ter em conta dois aspetos:

- a especificidade quanto ao n^o de subintervalos
- o valor do erro

Análise da especificidade quanto ao n^o de subintervalos:
Trapézio simples $\rightarrow$ 1 subintervalo

Simpson simples $\rightarrow$ 2 subintervalos

Três oitavos simples $\rightarrow$ 3 subintervalos

Composta de Simpson $\rightarrow$ n^o de subintervalos múltiplo de 2

Comp. dos Três oitavos $\rightarrow$ n^o de subintervalos múltiplo de 3

Composta do Trapézio $\rightarrow$ nos outros casos

$$|E_T| = |-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)|, \ \eta \in [a,b]$$

$$|E_S| = |-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)|, \ \eta \in [a,b]$$

$$|E_{\frac{3}{8}}| = |-\frac{h^4}{80}(b-a)f^{(iv)}(\eta)|, \ \eta \in [a,b]$$

Análise do valor do erro:

- A fórmula do trapézio depende de f'', de h^2 e de $\frac{1}{12}$
- A fórmula de Simpson depende de f^{iv}, de h^4 e de $\frac{1}{180}$
- A fórmula dos $\frac{3}{8}$ depende de f^{iv}, de h^4 e de $\frac{1}{80}$

Pequeno exemplo

Considere o seguinte integral

$$\int_0^{32} f(x)dx$$

Sabendo que $f''(x) = f^{iv}(x)$ no intervalo de integração e conhecendo $f(0)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(12)$, $f(16)$, $f(20)$, $f(24)$, $f(28)$ e $f(32)$ qual a melhor fórmula a utilizar?

O n^o de subintervalos é 8 (poderá ser usada Simpson ou Trapézio) **MAS** $h = 4$. Se compararmos os erros e considerando $f'' = f^{iv} = A$:

$$|E_T| = |-\frac{4^2}{12}(32-0)A = 42.(6)A$$

$$|E_S| = |-\frac{4^4}{180}(32-0)A = 45.5(1)A$$

Quando $f(x)$ é conhecida e é dado o erro

Um pára-quedista, com uma massa de $68.1kg$, salta de um balão de ar quente estacionário. A distância percorrida, em $metros$, ao fim de $10\ segundos$ é dada por

$$d = \frac{gm}{c} \int_0^{10} \left(1 - e^{-(c/m)t}\right) dt$$

em que $g = 9.8m/s^2$ é a constante gravitacional, $c = 12.5kg/s$ é o coeficiente de atrito e m é a massa do pára-quedista. Calcule d, usando a fórmula composta do Trapézio, de tal forma que o erro de truncatura seja inferior a 0.20.

Resolução

Este é um exercício em que é fornecido o erro e indicada a fórmula a usar.

A partir do erro da fórmula composta do Trapézio :

$$|E_T| = |-\frac{h^2}{12}(10-0)f^{''}(\eta)|, \ \eta \in [0,10] \leq 0.20$$

tem de determinar-se o valor do espaçamento h.

É necessária a expressão da segunda derivada de $f(t)$ (a expressão analítica de $f(t)$ é conhecida):

$$f^{''}(t) = -0.0337e^{-0.1836t}$$

e majorar o seu módulo no intervalo $[0,10]$

Resolução

$$|f''(0)| = 0.0337e^{0} = 0.0337$$

$$|f''(10)| = 0.0337e^{-0.1836\times 10} = 0.0053736$$

No intervalo $[0,10]$ o módulo da segunda derivada é uma função decrescente, atingindo o seu máximo em $t=0$. Então,

$$|E_T| = |-\frac{h^2}{12}\times 10\times 0.0337| \leq 0.20 \Leftrightarrow h \leq 2.6687$$

Em termos do número de subintervalos:

$$h = \frac{b-a}{n} \leq 2.6687 \Leftrightarrow \frac{10}{n} \leq 2.6687 \Leftrightarrow n \geq 3.7471$$

Seja $n=4$, ou seja, $h = \dfrac{10-0}{4} = 2.5$

t_i	0	2.5	5	7.5	10
f_i	0	0.3681	0.6007	0.7477	0.8405

Aplicando a fórmula composta do Trapézio tem-se:

$\int_0^{10} \left(1 - e^{-(c/m)t}\right) dt \approx$

$\approx \frac{2.5}{2} [0 + 2 \times (0.3681 + 0.6007 + 0.7477) + 0.8405] = 5.3419$

$$d \approx \frac{9.8 \times 68.1}{12.5} \times 5.3419 = 285.2062$$

Quando a função $f(x)$ é apresentada em tabela

Um fluido atravessa a secção de um tubo com uma velocidade $v(r)$, sendo r a distância radial ao centro da secção. Determine a quantidade Q de fluido que atravessa esta secção por unidade de tempo, dada por:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} r\, v(r) dr$$

em que $r_0 = 4.5$ é o raio da secção circular do tubo, usando os valores da tabela:

r	0	0.5	1	1.5	2	3	3.5	4	r_0
$v(r)$	3	2.9499	2.8942	2.8312	2.7584	2.5643	2.4199	2.1918	0

Use 4 casas decimais nos cálculos.
Estime também o erro de truncatura cometido no intervalo $[2, 3]$.

Resolução

Primeiro, há que identificar o que se quer integrar: $r\,v(r)$, acrescenta-se uma linha à tabela dada:

r	0	0.5	1	1.5	2	3	3.5	4	4.5
$v(r)$	3	2.9499	2.8942	2.8312	2.7584	2.5643	2.4199	2.1918	0
$r\,v(r)$	0	1.4750	2.8942	4.2468	5.5168	7.6929	8.4697	8.7672	0

Em seguida agrupam-se os intervalos com o mesmo espaçamento:

$$\int_0^{4.5} r\,v(r)dr = \int_0^{2} r\,v(r)dr + \int_2^{3} r\,v(r)dr + \int_3^{4.5} r\,v(r)dr$$

- $[0,2]$- $\int_0^2 r\,v(r)dr$ (4 subintervalos, $h = 0.5$) - fórmula composta de Simpson:

$$\int_0^2 r\,v(r)dr \approx \frac{2\times 0.5}{6}[0{+}4{\times}1.4750{+}2{\times}2.8942{+}4{\times}4.2468{+}5.5168]$$

- $[2,3]$ - $\int_2^3 r\,v(r)dr$ (1 subintervalo, $h = 1$)- fórmula simples do Trapézio:

$$\int_2^3 r\,v(r)dr \approx \frac{1}{2}[5.5168 + 7.6929] = 6.6049$$

- $[3,4.5]$ - $\int_3^{4.5} r\,v(r)dr$ (3 subintervalos com $h = 0.5$) - fórmula simples dos Três Oitavos:

$$\int_3^{4.5} r\,v(r)dr \approx \frac{3\times 0.5}{8}[7.6929{+}3{\times}8.4697{+}3{\times}8.7672{+}0] = 11.138$$

$$\int_0^{4.5} r\,v(r)dr \approx 5.6987 + 6.6049 + 11.1382 = 23.4418$$

$$Q \approx 2 \times \pi \times 23.4418 = 147.2825$$

Estimação do erro de truncatura

Para estimar o erro cometido no intervalo $[2, 3]$:

$$|E_T| = | - \frac{(3-2)^3}{12} f''(\xi)|, \ \xi \in [2, 3]$$

Como não é conhecida a expressão analítica da função a integrar, neste caso $r\, v(r)dr$, vai estimar-se o valor da segunda derivada a partir da **tabela das diferenças divididas.**

Para se chegar às diferenças divididas de ordem 2 são necessários pelo menos 3 pontos. O ponto a adicionar deverá ser o mais próximo de $[2, 3]$ - como existem 2 pontos à mesma distância (1.5 e 3.5) constrói-se a tabela com os quatro pontos e escolhe-se a diferença dividida de segunda ordem (dd_2) de maior módulo

Estimação do erro de truncatura

x	$f(x)$	dd_1	dd_2
1.5	4.2468		
		2.54	
2	5.5168		-0.2426
		2.1761	
3	7.6929		-0.415
		1.5536	
3.5	8.4697		

A estimativa do erro será então:

$$|E_T| \leq |-\frac{(3-2)^3}{12} \times (-0.415) \times 2!| = 0.0692$$

NOTA: não esquecer que a estimativa da derivada de ordem n é obtida através do produto da diferença dividida de ordem n por $n!$.