Otimização não linear

Isabel Espírito Santo

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

iapinho@dps.uminho.pt

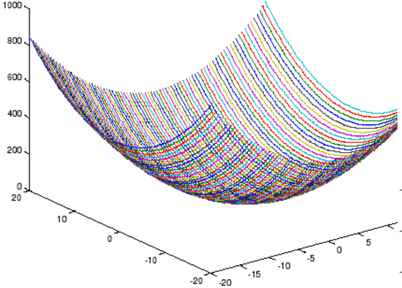
Formulação de um problema sem restrições

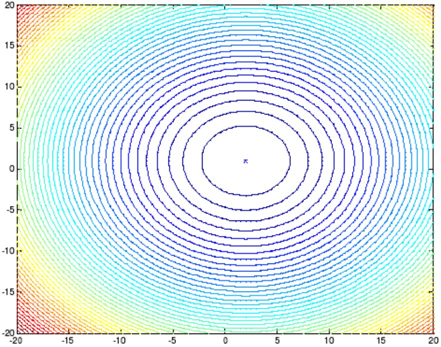
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1}$$

- Se $n = 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{problema unidimensional} \\ x \text{ é escalar} \end{array} \right.$
- Se $n > 1 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{problema multidimensional} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ é vetor de dimensão } n \end{array} \right.$

Problema multidimensional ($n > 1$) sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

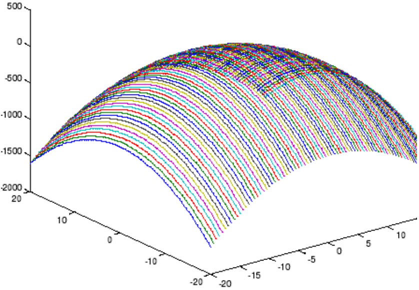


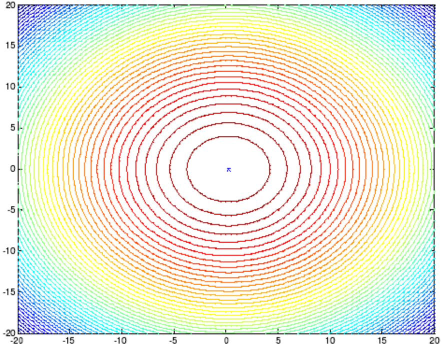


$f(x)$ - função objetivo

Problema multidimensional ($n > 1$) sem restrições

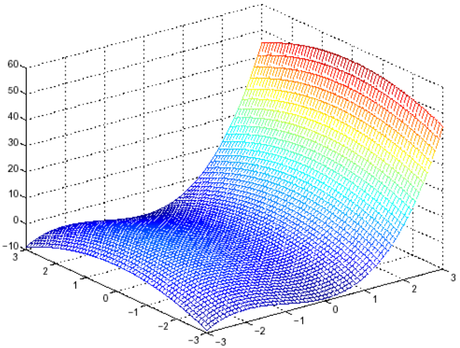
$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv 2(-x_1^2 - x_2^2 + 1) + x_1$$

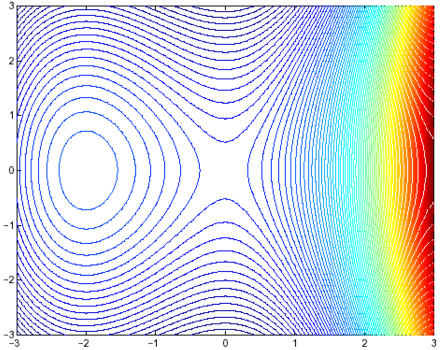




Problema multidimensional ($n > 1$) sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv 3x_1^2 - x_2^2 + x_1^3$$

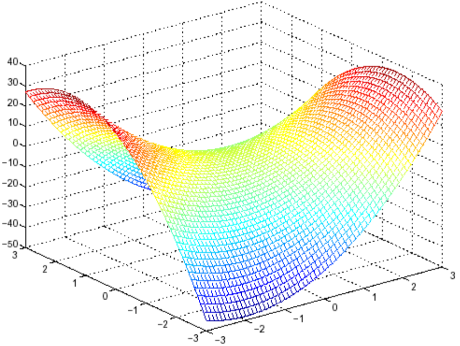


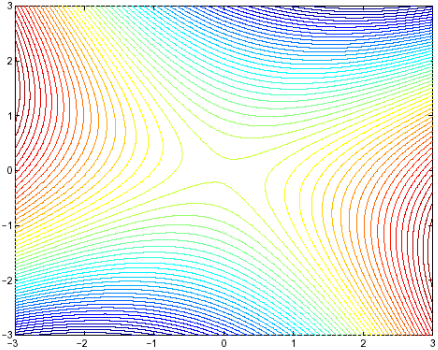


Ponto sela em $(0, 0)$

Problema multidimensional ($n > 1$) sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2$$





Ponto sela em $(0, 0)$

Notação

Vetor <u>gradiente</u> da função $f(x)$ - $x \in \mathbb{R}^n$ -

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{vector de } \mathbb{R}^n$$

Matriz <u>Hessiana</u> da função $f(x)$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matriz simétrica de $n \times n$

Condições de otimalidade

Assume-se $f(x)$ continuamente diferenciável até à 2^a ordem.

Condição necessária (e suficiente) de 1^a ordem:

Se x^* é uma solução do problema (1) então $\nabla f\left(x^*\right)=0$;

(Se $\nabla f\left(x^*\right)=0$ então x^* é candidato a minimizante);

Nota: A condição $\nabla f\left(x\right)=0$ define os <u>pontos estacionários</u> de f:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{minimizante - exemplo 5}\\ \text{maximizante - exemplo 6}\\ \text{ponto sela - exemplos 7 e 8}\end{array}\right.$$

Condições de otimalidade

Condição necessária de 2^a ordem:
Se x^* é uma solução do problema (1) que satisfaz a condição de 1^a ordem, então $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva.

Condição suficiente de 2^a ordem:
Se x^* é um ponto que verifica a condição de 1^a ordem e se $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então x^* é um **minimizante local forte** de (1).

Condições de otimalidade

Assumindo $\nabla f(x^*) = 0$:

- as condições necessária e <u>suficiente</u> de 2^a ordem para um **maximizante** são respetivamente
  - $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida negativa
  - $\nabla^2 f(x^*)$ é <u>definida negativa</u>

- se $\nabla^2 f(x^*)$ é <u>indefinida</u>, então x^* é ponto sela (ou de descanso).

Conclusão

Seja x^* um ponto para o qual $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) \neq$ matriz nula:

- Se $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva então x^* é minimizante
- Se $\nabla^2 f(x^*)$ é definida negativa então x^* é maximizante
- Se $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva então x^* é minimizante ou ponto sela
- Se $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida negativa então x^* é maximizante ou ponto sela
- Se $\nabla^2 f(x^*)$ é indefinida então x^* é ponto sela.