Programação Linear - análise de sensibilidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

21 de Março de 2022

Análise de sensibilidade

antes

- Até aqui, assumimos que os dados não eram alteráveis.
- Na realidade, os dados podem não estar totalmente correctos, ou podemos querer avaliar se deveremos actuar para os alterar.

Guião

- Para além de determinar a solução óptima, é importante analisar como é que a solução óptima varia quando varia o valor de um qualquer dado (passaremos a tratá-lo como um parâmetro),
- ou seja, analisar a sensibilidade da solução óptima ao parâmetro.
- Parâmetros a analisar: quantidade de recurso disponível e coeficiente da função objectivo.
- Analisaremos também a atractividade de novas actividades.

depois

- Os *solvers* de programação linear produzem relatórios que ajudam a efectuar a análise de sensibilidade.

Motivação

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
       max:  30x1 +20x2 +10x3;
restricao1:   1x1 + 1x2 + 2x3 <=  40;
restricao2:   2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;
restricao3:   2x1 + 1x2       <=  20;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	500
x1	0
x2	20
x3	10

- Para além de conhecer a solução óptima (fazer 20 unidades da actividade 2 e 10 unidades da actividade 3) e o valor do óptimo (500), podemos querer saber ...

E se ...?

Questões pós-optimização:

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, qual o efeito no valor da solução óptima?
- Qual o lucro mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?
- Se o lucro da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?

Uma designação alternativa é *Análise pós-optimização*:

- o objectivo é analisar os efeitos na solução óptima que resultam da alteração (dentro de certos limites) de um dado do problema, *e.g.*,
  - o custo de uma matéria prima, por oscilações de preço do mercado;
  - a quantidade de um recurso, enquadrada numa acção deliberada de aquisição de mais recursos;

Para além de determinarem a solução óptima do problema,

- os *solvers* de PL produzem *Relatórios de análise de sensibilidade* com informação para responder às questões pós-optimização.

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conteúdo

- Parte I
  - Alteração do termo independente b_i de uma restrição
  - Preço-sombra (de uma restrição / recurso)
- Parte II
  - Avaliação de uma nova actividade
- Parte III
  - Alteração de um coeficiente c_j da função objectivo
  - Custo reduzido (de uma variável)
- Apêndices

Alteração do termo independente b_i

- O valor do termo independente b_i da restrição $\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{x} \leq b_i$ indica frequentemente a quantidade de recurso disponível.

Conteúdo

- Interpretação geométrica
- Preço-sombra (de uma restrição / recurso)
- Relatório *Duals*
- Análise: efeito e limites de variação sem alterar a base óptima.

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Duals:

```
      max:   12x1 +10x2;
tmaquina:    3x1 + 2x2<=120;
maodobra:    1x1 + 2x2<= 80;
material:    1x1       <= 30;
```

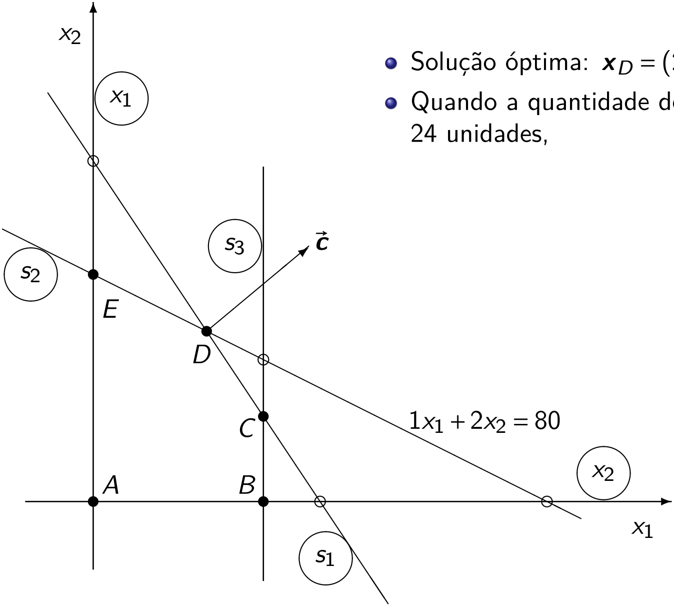
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Duals			
Variables	value	from	till
objective	540	540	540
tmaquina	3,5	80	140
maodobra	1,5	60	120
material	0	$-\infty$	$+\infty$
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$

- Como varia o valor da solução óptima quando o valor do parâmetro `maodobra` aumenta de 80 para 104?

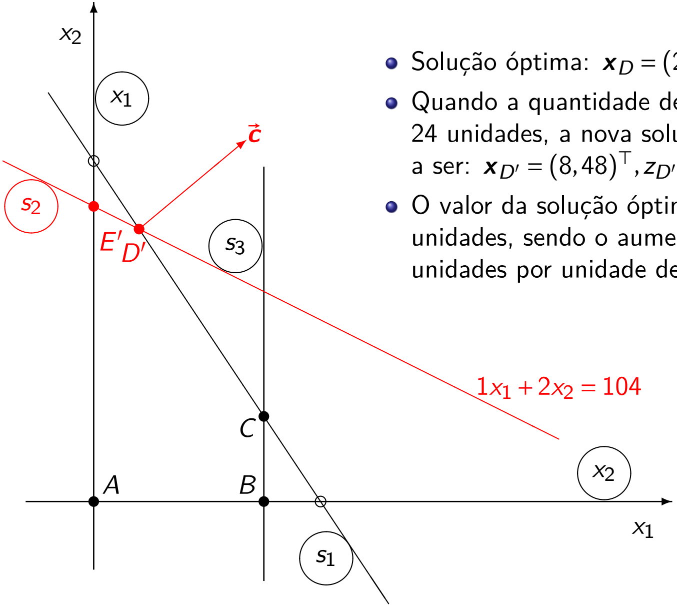
- Do ponto de vista geométrico, a variação de um parâmetro b_i traduz-se numa translação da recta associada à restrição.

Variação do valor do óptimo: interpretação geométrica

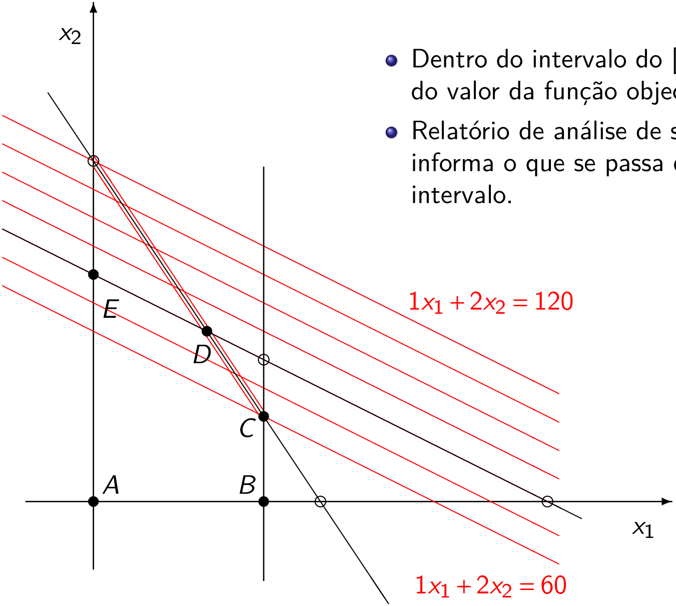


- Solução óptima: $\boldsymbol{x}_D = (20, 30)^\top, z_D = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades,

Variação do valor do óptimo: interpretação geométrica

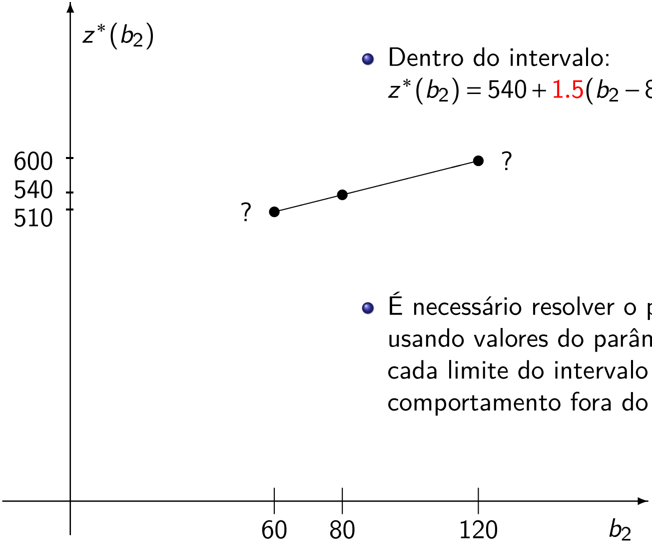


- Solução óptima: $\boldsymbol{x}_D = (20, 30)^\top, z_D = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades, a nova solução óptima passa a ser: $\boldsymbol{x}_{D'} = (8, 48)^\top, z_{D'} = 576$.
- O valor da solução óptima aumenta 36 unidades, sendo o aumento de 1.5 unidades por unidade de recurso.



- Dentro do intervalo do [60, 120], a variação do valor da função objectivo é linear.
- Relatório de análise de sensibilidade só informa o que se passa dentro desse intervalo.

Variação do valor do óptimo em função do parâmetro b_2

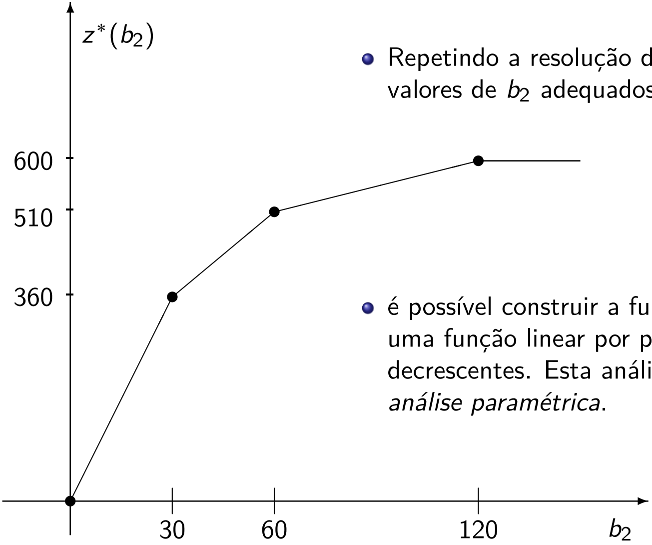


- Dentro do intervalo:
  $z^*(b_2) = 540 + 1.5(b_2 - 80), \forall b_2 \in [60, 120]$.

- É necessário resolver o problema de novo usando valores do parâmetro b_2 iguais a cada limite do intervalo para saber o comportamento fora do intervalo.

- Discussão: quais são os recursos mais críticos?

Valor de $z^*(b_2)$ em toda a extensão do parâmetro b_2



- Repetindo a resolução do problema para valores de b_2 adequados,
- é possível construir a função $z^*(b_2)$, que é uma função linear por partes, com declives decrescentes. Esta análise designa-se por *análise paramétrica*.

- A forma da função ilustra a *Lei dos ganhos marginais decrescentes*.

Preço-sombra de uma restrição (recurso)

Preço-sombra: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

- medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

- O valor é algo individual: diferentes agentes económicos podem atribuir valores diferentes a um mesmo recurso.
- Cada agente optimiza um modelo semelhante, mas com diferenças, *e.g.*, nas quantidades disponíveis dos restantes recursos.

Preço-sombra de um recurso vs. custo de um recurso

- O custo de um recurso (preço no mercado) é uma coisa diferente.
- A comparação do preço-sombra e do custo ajuda a tomar decisões no âmbito da análise pós-optimização.

O preço-sombra é definido com respeito a uma solução óptima, e o seu valor é válido em torno da solução óptima para variações cujos limites vamos determinar usando uma análise matricial

Na sua determinação, assume-se que todos os restantes dados do problema permanecem iguais (*i.e.*, *et cæteris paribus*).

É equivalente definir como o decremento do valor da função objectivo resultante de se usar menos uma unidade do recurso.

Também se usa a designação *Valor marginal do recurso i*.

Exemplo 2: o *preço-sombra* no quadro simplex

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

O *preço-sombra* do recurso i é dado pelo elemento i do vector $\boldsymbol{c_B B}^{-1}$:

- $(\boldsymbol{c_B B}^{-1})_i = \delta z / \delta(-s_i)$, *i.e.*,
- o valor da função objectivo aumenta $\delta z / \delta(-s_i)$ unidades por cada unidade adicional do recurso i;

- acontece o oposto do que quando se aumenta a variável de folga s_i.

Exemplo 2: preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z/\delta(-s_1) = +5$.
- O valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1.

- O preço-sombra do recurso 2 é $\delta z/\delta(-s_2) = +0$.
- O aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga s_2 : não há interesse em ter unidades adicionais.

Relatório *Duals* (vamos ver que há um *problema dual*)

- A coluna *value* apresenta os valores da linha da função objectivo do quadro simplex:
  - {x1,...,x3} $\leftrightarrow$ variáveis de folga do dual (de facto, são os valores simétricos, porque o *LPSolve* apresenta o vector $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c_B} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}$).
  - {recurso1,...,recurso3} $\leftrightarrow$ variáveis de decisão do dual ($\boldsymbol{c_B} \boldsymbol{B}^{-1}$).

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

- O relatório *Duals* indica que o preço-sombra do recurso 1 é 5.
- Vamos ver como se calculam os limites **from** e **till** dos recursos.

Relatório *Duals:* interpretação

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

_e.g._, relativamente ao recurso 1:

- quando a quantidade de recurso 1 (b_1) varia desde 20 até 240, o valor do óptimo da função objectivo é dado por:

$$z^*(b_1) = 500 + 5\,(b_1 - 40), \quad \forall b_1 \in [20, 240],$$

- e as variáveis básicas óptimas continuam a ser as mesmas.

Análise matricial: alteração de um b_i

Quais os vectores / matrizes que sofrem alterações no quadro óptimo?

- Quando há uma alteração de um elemento do vector $\boldsymbol{b}$ (vector dos termos independentes das restrições),
- as únicas alterações no quadro óptimo são no vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ e no elemento $\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \boldsymbol{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \; * \; \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{b} \\ \hline -\boldsymbol{c} & \mathbf{0} & 0 \\ \hline \end{array} \; =$$

$$= \; \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \end{array}$$

Exemplo 2: efeito da variação de b_1 (passa a ser $40+\alpha$)

- Novo vector $\boldsymbol{b}_{novo}$:

$$\boldsymbol{b}_{novo} = \begin{bmatrix} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Novo vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo}$:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+1/2\alpha \\ 100-1/2\alpha \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Novo valor de $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo}$:

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 500+5\alpha$$

Exemplo 2: quadro óptimo quando há uma variação de b_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	$40 + \alpha$
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	$10 + 1/2\alpha$
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	$100 - 1/2\alpha$
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	$500 + 5\alpha$

- Este quadro é óptimo enquanto todos os elementos de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo}$ forem não-negativos, o que define limites máximos de variação de α.
- Dentro dos limites, as variáveis básicas óptimas são x_3, s_2 e x_2.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo no lado direito do quadro, e é necessário usar o simplex dual [veremos depois] para determinar o novo quadro óptimo.

Exemplo 2: determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} = \begin{bmatrix} 10+1/2\alpha \\ 100-1/2\alpha \\ 20 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 200 \end{cases}$$

ou seja,

$$-20 \leq \alpha \leq 200.$$

- Limites de variação de b_1 (no quadro inicial, $b_1 = 40$):

$$40-20 \leq b_1 \leq 40+200,$$

ou seja,

$$20 \leq b_1 \leq 240.$$

- Estes são os valores apresentados no relatório *Duals*.

nota: coluna do quadro mostra alterações em $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

- O novo vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{ant} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{ant} = \\ &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{ant} + \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}_{novo} - \boldsymbol{b}_{ant})\end{aligned}$$

- As alterações produzidas em $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{ant}$ seguem a alteração existente na coluna da variável de folga associada ao recurso que varia (neste exemplo, a coluna de s_1).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_{novo} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

nota: preço-sombra mostra alteração do valor de $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$

- O novo valor da função objectivo $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{novo} &= \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{novo} + \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{ant} - \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{ant} = \\ &= \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{ant} + \boldsymbol{c_B B^{-1}}(\boldsymbol{b}_{novo} - \boldsymbol{b}_{ant}) \end{aligned}$$

- As alterações produzidas em $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{ant}$ seguem o preço-sombra associado ao recurso que varia (neste exemplo, o recurso associado à variável de folga s_1).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c_B B^{-1} b}_{novo} &= 500 + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 500 + 5\alpha \end{aligned}$$

Avaliação de uma nova actividade

- Será que uma dada nova actividade é atractiva quando também podemos realizar as actividades da solução óptima?

- É possível responder à questão sem resolver o problema com a nova actividade desde o início,

porque

- a informação existente no quadro óptimo permite calcular como aparece a respectiva coluna no quadro óptimo.

A coluna no quadro óptimo de uma dada ...

nova actividade, definida por um $\boldsymbol{a}_{novo}$ e um c_{novo}, tem

- no corpo central, o vector $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{novo}$, e
- na linha da função objectivo, o elemento $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{novo} - c_{novo}$.

- O elemento permite avaliar se a nova actividade é atractiva.
- Se não for, podemos rejeitá-la; caso contrário, podemos partir do quadro com a nova coluna, para determinar a nova solução óptima.

Exemplo:

- A nova actividade é descrita pela coluna $\boldsymbol{a}_{novo} = (2\ 0\ 1)^\top$ e tem um lucro associado $c_{novo} = 30$.

Esta operação é designada por *Pricing out an activity*.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	1	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	-30	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	?	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	?	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	?	0	0	1	20
z	1	5	0	0	?	5	0	15	500

- Cálculo do elemento da linha da função objectivo no quadro óptimo:

$$\mathbf{c_B B^{-1} a}_{novo} - c_{novo} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 30 = -5$$

- A nova actividade é atractiva.

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	1	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	-30	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	?	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	?	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	?	0	0	1	20
z	1	5	0	0	-5	5	0	15	500

- É necessário calcular o resto da coluna:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{novo} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: nova coluna no quadro óptimo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	1	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	-30	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	x_{novo}	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	-5/2	0	0	1	20
z	1	5	0	0	-5	5	0	15	500

- Para obter a solução óptima, é necessário re-optimizar o quadro:
- a variável x_{novo} entra na base, e sai a variável x_3.

Alteração num coeficiente da função objectivo

- O valor do coeficiente c_j da função objectivo está frequentemente relacionado com o preço de venda ou com o lucro associado a uma actividade.

Conteúdo

- Interpretação geométrica
- Relatório *Objective*
- Custo reduzido (de uma variável)
- Análise: efeito e limites de variação sem alterar a base óptima.

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Objective:

```
     max:   12x1 +10x2;
tmaquina:    3x1 + 2x2<=120;
maodobra:    1x1 + 2x2<= 80;
material:    1x1       <= 30;
```

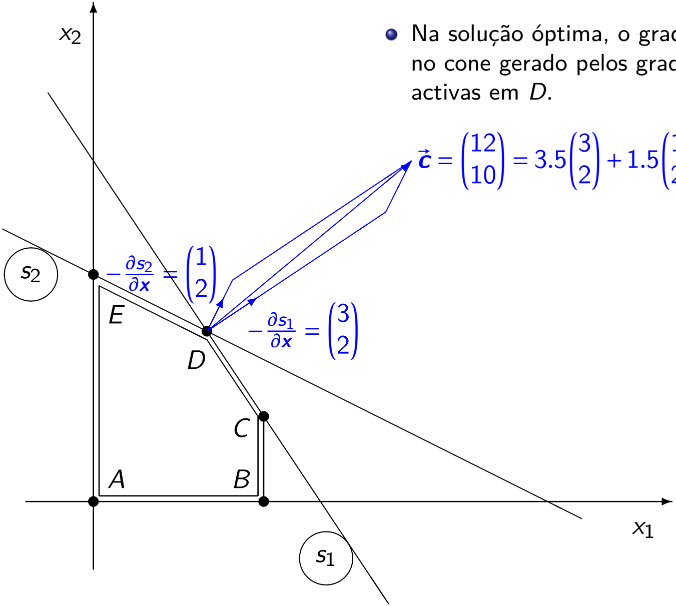
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	540	540	540	540
x1	5	15	$-\infty$	0
x2	8	24	$-\infty$	0

- Porque é que a solução óptima muda se o valor do coeficiente c_1 estiver fora do intervalo $[5, 15]$?

- Do ponto de vista geométrico, a alteração de um coeficiente c_j traduz-se numa alteração da direcção do vector gradiente.

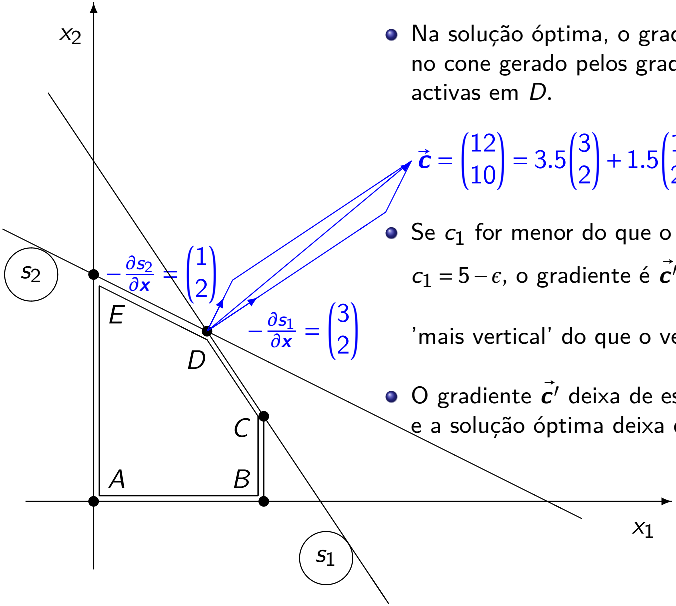
Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Na solução óptima, o gradiente $\vec{\boldsymbol{c}}$ está contido no cone gerado pelos gradientes das restrições activas em D.

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} = 3.5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo

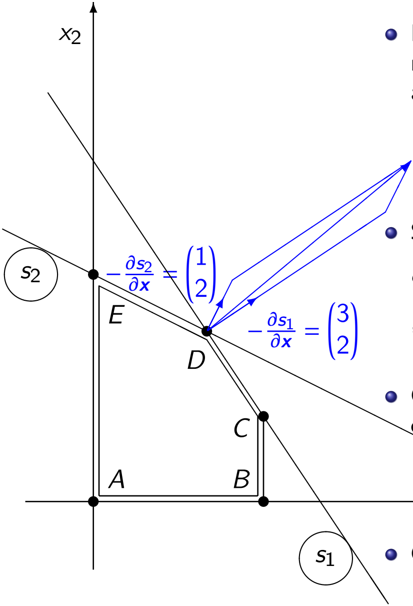


- Na solução óptima, o gradiente $\vec{\boldsymbol{c}}$ está contido no cone gerado pelos gradientes das restrições activas em D.

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} = 3.5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

- Se c_1 for menor do que o limite inferior, *e.g.*, $c_1 = 5-\epsilon$, o gradiente é $\vec{\boldsymbol{c}}' = \begin{pmatrix}5-\epsilon\\10\end{pmatrix}$, que é 'mais vertical' do que o vector $-\frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
- O gradiente $\vec{\boldsymbol{c}}'$ deixa de estar contido no cone, e a solução óptima deixa de ser D.

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Na solução óptima, o gradiente $\vec{\boldsymbol{c}}$ está contido no cone gerado pelos gradientes das restrições activas em D.

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = 3.5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Se c_1 for menor do que o limite inferior, *e.g.*, $c_1 = 5 - \epsilon$, o gradiente é $\vec{\boldsymbol{c}}' = \begin{pmatrix} 5-\epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$, que é 'mais vertical' do que o vector $-\frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- O gradiente $\vec{\boldsymbol{c}}'$ deixa de estar contido no cone, e a solução óptima deixa de ser D.
- O mesmo, se $c_1 = 15 + \epsilon$, e $\vec{\boldsymbol{c}}'' = \begin{pmatrix} 15+\epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$.

- Não há alteração das actividades atractivas (variáveis básicas na solução óptima) se todos os coeficientes da função objectivo pertencerem ao intervalo definido pelas colunas **from** e **till**.

Exemplo 2:

- Os coeficientes da função objectivo são $(c_1, c_2, c_3) = (30, 20, 10)$.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Alteração de c_j: quais as alterações no quadro óptimo?

- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável x_j é não-básica no quadro óptimo

- se se alterar o elemento c_j do vector $\boldsymbol{c}$ do quadro inicial,
- altera-se apenas o elemento $\boldsymbol{c_B B^{-1} a}_j - c_j$ do quadro final.

Caso II: Variável x_j é básica no quadro óptimo

- se se alterar o elemento c_j do vector $\boldsymbol{c}$ do quadro inicial, e portanto o vector $\boldsymbol{c_B}$ (que é construído a partir de $\boldsymbol{c}$),
- há alterações em $\boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ e $\boldsymbol{c_B B^{-1} b}$ do quadro final.

- nota: há alterações nos vectores e no elemento do quadro óptimo que envolvem os coeficientes da função objectivo que se alteram nos dados iniciais.

Exemplo 2: caso de var. não-básica no quadro óptimo

e.g., relativamente ao coeficiente da função objectivo c_1 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_1 for menor ou igual a 35.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- Acima desse valor, a variável não-básica x_1 torna-se atractiva para entrar na base, e é necessário usar o algoritmo simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Exemplo 2: caso de var. não-básica no quadro óptimo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Quando há uma alteração do coeficiente de custo c_j de uma variável não-básica, o único elemento que se altera no quadro óptimo é o *custo reduzido* de x_j, *i.e.*, o elemento $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j$ (ver Análise 1).

- O custo reduzido da variável não-básica x_1 (5) é justamente o valor do aumento do coeficiente c_1 a partir do qual a variável se torna atractiva ($c_1 > 35$) neste problema de maximização.

Custo reduzido (de uma variável)

Portanto, o custo reduzido de uma variável não-básica x_j indica

- o valor da melhoria do coeficiente de custo c_j a partir do qual ela se torna atractiva, e pode ter um valor positivo na solução óptima.

Pode ser interpretado como *Custo de oportunidade*

Para as variáveis básicas, os custos reduzidos são nulos.

O custo reduzido da variável não-básica x_j pode ser também interpretado como o preço-sombra associado à restrição $-x_j \leq 0$.

Custo reduzido (de uma variável)

Portanto, o custo reduzido de uma variável não-básica x_j indica

- o valor da melhoria do coeficiente de custo c_j a partir do qual ela se torna atractiva, e pode ter um valor positivo na solução óptima.

Pode ser interpretado como *Custo de oportunidade* (ou *Custo de opção*):

- perda de valor ou benefício (equivale, por isso, a um custo) que ocorre por se optar por uma dada actividade, em vez de realizar a(s) actividade(s) que proporciona(m) maior valor ou benefício.

O significado algébrico explica o conceito de custo de oportunidade:

- por cada unidade de incremento de x_j (igual a 0 na solução óptima), o valor da função objectivo z decresce $\boldsymbol{c_B B^{-1} a}_j - c_j$ unidades:

$$-(\boldsymbol{c_B B^{-1} a}_j - c_j) = \partial z / \partial x_j$$

Para as variáveis básicas, os custos reduzidos são nulos.

O custo reduzido da variável não-básica x_j pode ser também interpretado como o preço-sombra associado à restrição $-x_j \leq 0$.

Exemplo 2: caso de variável básica no quadro óptimo

e.g., relativamente ao coeficiente da função objectivo c_3 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_3 pertencer ao intervalo [0,20].

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- Se o valor for inferior a 0, a actividade x_3 deixa de ser atractiva.
- Se o valor for superior a 20, a actividade x_3 permanece atractiva, mas a solução óptima terá outras variáveis básicas.
- Ver informação adicional no Análise 2.

Análise matricial

Efeito e limites de variação sem alterar a base óptima

- 1. alteração de c_j (var. não-básica no quadro óptimo)
- 2. alteração de c_j (var. básica no quadro óptimo)

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$

1. Exemplo: efeito da variação de c_1

- Como a actividade 1 não é atractiva, interessa analisar o aumento do valor do coeficiente c_1, que passa a ser igual a $30+\alpha$,

Caso I: Variável x_1 é não-básica no quadro óptimo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ant} &= \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_{novo} &= \begin{bmatrix} 30+\alpha & 20 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Novo vector $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}_{novo}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}_{novo} &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}_{novo} + \mathbf{c}_{ant} - \mathbf{c}_{ant} = \\ &= (\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} A - \mathbf{c}_{ant}) + (\mathbf{c}_{ant} - \mathbf{c}_{novo}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}_{novo} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5-\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5-\alpha$	0	0	5	0	15	500

- O único elemento que se altera é $\boldsymbol{c_B B}^{-1}\boldsymbol{a}_1 - c_1$.
- Se $\alpha > 5$, a variável não-básica x_1 torna-se atractiva.

- o *custo reduzido da variável não-básica* x_1 é 5: a actividade 1 é candidata a entrar na base quando $c_1 > 35$.

1. Limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}_{novo} \quad = \quad \begin{bmatrix} 5-\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \; 5-\alpha \geq 0 \right. \qquad\qquad \left\{ \; \alpha \leq 5 \right.$$

ou seja,

$$-\infty \leq \alpha \leq 5.$$

- Limites de variação de c_1 :

$$-\infty \leq c_1 \leq 30+5,$$

ou seja,

$$-\infty \leq c_1 \leq 35.$$

Estes são os valores apresentados no relatório *Objective*.

- Como a actividade 3 é atractiva, interessa analisar o decremento do valor do coeficiente c_3, que passa a ser igual a $10 - \alpha$,

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ant} &= [30 \quad 20 \quad 10 \quad] \\ \mathbf{c}_{novo} &= [30 \quad 20 \quad 10-\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B\,ant} &= [10 \quad 0 \quad 20] \\ \mathbf{c}_{B\,novo} &= [10-\alpha \quad 0 \quad 20] \end{aligned}$$

(continua)

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

Novo vector $\boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1} &= [10-\alpha \quad 0 \quad 20] * \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [5-\alpha/2 \quad 0 \quad 15+\alpha/2]\end{aligned}$$

Novo vector $\boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}_{novo}$ (após efectuar todos os cálculos):

$$\boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}_{novo} = [5+\alpha/2 \quad 0 \quad 0]$$

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Este quadro é óptimo enquanto todos os elementos de $\boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c}_{novo}$ e de $\boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1}$ forem não-negativos, o que define limites máximos de variação de α.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

- Limites de variação de α :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}_{novo} &= \begin{bmatrix} 5+\alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}_{B\,novo}\boldsymbol{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} 5-\alpha/2 & 0 & 15+\alpha/2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5+\alpha/2 \geq 0 \\ 5-\alpha/2 \geq 0 \\ 15+\alpha/2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 10 \\ \alpha \geq -30 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$-10 \leq \alpha \leq 10.$$

- Limites de variação de c_3 :

$$10-10 \leq c_3 \leq 10-(-10),$$

ou seja,

$$0 \leq c_3 \leq 20.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

Conclusão

- Os conceitos de preço-sombra e de custo de oportunidade são conceitos fundamentais.
- A análise de sensibilidade permite avaliar alternativas ao cenário actual, ajudando em processos de decisão pós-optimização;
- pode permitir evitar ter de resolver novamente o problema com novos valores dos parâmetros.
- A análise de sensibilidade à variação simultânea de vários parâmetros pode ser feita com análise matricial.
- A análise de sensibilidade de elementos a_{ij} da matriz $\boldsymbol{A}$ é mais complexa.

Apêndices

1. Identificação da variável que entra na base quando há alteração do coeficiente de uma variável básica para além dos limites de variação
2. Significado do elemento **from value**

1. Aumento do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $20+\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = -10-\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $0-\epsilon$ $(i.e.,\ \alpha = 10+\epsilon)$?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

2. Significado do elemento **from value**

- No Relatório *Objective*, o elemento da coluna **from value** só é significativo para variáveis não-básicas na solução óptima.
- Quando x_1 é atractiva (coluna pivô), entra na base, e toma o valor $20/2 = 10$.
- É o valor da menor razão positiva (a linha pivô é a da variável básica x_2 (ver diapositivo seguinte).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5-\alpha$	0	0	5	0	15	500

Fim