Otimização não linear

Isabel Espírito Santo

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

iapinho@dps.uminho.pt

Métodos de resolução ($n = 1$)

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

- Métodos de procura (ou pesquisa) direta
- Métodos de aproximação
- Métodos mistos

O método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- é um método iterativo que só usa informação da função objetivo, f
- é um método misto constituído por uma fase de procura e uma fase de aproximação
- a fase de aproximação é baseada numa interpolação quadrática
- destina-se a problemas de otimização unidimensionais

Método misto de DSC

1. **Fase de procura**
   constrói, em cada iteração, 3 pontos igualmente distanciados que definem um intervalo que contém o minimizante da função, comparando apenas os valores da função em diversos pontos.
2. **Fase de aproximação**
   aproxima a função no intervalo por uma quadrática e usa o seu minimizante como aproximação ao minimizante da função.

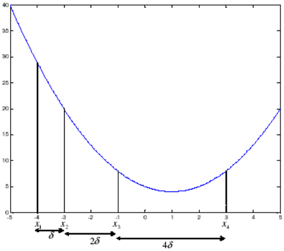
Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- A procura começa com 1 aproximação inicial x_1 e uma perturbação $\delta > 0$.
- A partir do x_1 e no sentido positivo, calcula-se uma sequência de pontos $x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$ distanciados uns dos outros de, respectivamente, $\delta, 2\delta, 4\delta, 8\delta, \ldots$

$$
\begin{aligned}
& x_1 \\
& x_2 = x_1 + \delta \\
& x_3 = x_2 + 2\delta \\
& \ldots \\
& x_k = x_{k-1} + 2^{k-2}\delta
\end{aligned}
$$

até que no ponto x_k se tenha $f\left(x_k\right) > f\left(x_{k-1}\right)$.

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)



Nesta altura, tem-se

$$\cdots < x_{k-2} < x_{k-1} < x_k$$

em que $f(x_{k-2}) \geq f(x_{k-1})$ e $f(x_{k-1}) < f(x_k)$ e a distância entre x_k e x_{k-1} é duas vezes a distância entre x_{k-1} e x_{k-2}.

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

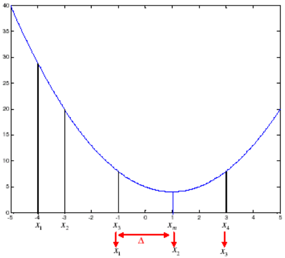
- Calcula-se o ponto médio do último intervalo:

$$x_m = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

e fica-se com 4 pontos igualmente espaçados

$$x_{k-2} < x_{k-1} < x_m < x_k$$

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)



- Para a aproximação quadrática, é necessário seleccionar três dos quatro pontos. Para isso, comparam-se os valores de $f\,(x)$ nos dois pontos interiores do intervalo:
  <u>Se</u> $f\,(x_{k-1}) \leq f\,(x_m)$ <u>então</u> escolhem-se os pontos x_{k-2}, x_{k-1} e x_m
  <u>senão</u> $(f\,(x_{k-1}) > f\,(x_m))$ escolhem-se os pontos x_{k-1}, x_m e x_k

Fase de aproximação do método DSC

MIN q O minimizante da quadrática, $x^*(q)$, que passa por estes três pontos (nesta fase, redefinidos por $x_1 < x_2 < x_3$) determina-se por

$$x^*(q) = x_2 + \Delta \frac{f(x_1) - f(x_3)}{2(f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1))}$$

com $\Delta = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2)$.

- De seguida, verifica-se o critério de paragem, que consiste em verificar se a distância entre os pontos que foram usados para construir a quadrática não excede uma certa quantidade:

$$(x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \Delta \leq \varepsilon$$

em que $\varepsilon > 0 \quad (\approx 0)$.

Paragem do método DSC

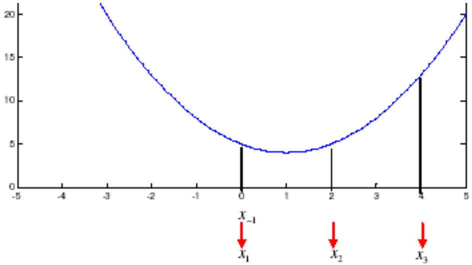
i) Se o critério de paragem for verificado, o processo iterativo termina, sendo $x^*(q)$ a melhor aproximação calculada à solução;

ii) Se o critério de paragem não se verificar, o processo repete-se e o minimizante da quadrática, $x^*(q)$, passa a ser o x_1 da nova iteração. A perturbação δ também deve ser reduzida através de: $\delta = M\delta$, com $M < 1$.

- Quando, a partir de $x_1,$ o valor de $f(x_2) > f(x_1)$ (para $x_2 = x_1 + \delta$) a procura deve voltar-se para o sentido negativo, a começar novamente por x_1. Neste caso, o próximo ponto, na procura, é $x_{-1} = x_1 - \delta$, e

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

i) Se $f(x_{-1}) > f(x_1)$, significa que o intervalo definido por $[x_{-1}, x_2]$, com x_1 como ponto médio, contém o minimizante desejado. Nesta altura, determina-se o minimizante da quadrática (que passa pelos três pontos agora calculados), $x^*(q)$, tal como está descrito no ponto **MIN q**.



Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

ii) No entanto, se $f\left(x_{-1}\right) < f\left(x_1\right)$, significa que a procura deve continuar no sentido negativo até que $f(x_{-k}) > f(x_{-(k-1)})$, isto é, procede-se da seguinte forma: Nesta altura, tem-se

$$x_{-k} < x_{-(k-1)} < x_{-(k-2)} < \cdots$$

em que $f\left(x_{-(k-2)}\right) \geq f\left(x_{-(k-1)}\right)$ e $f\left(x_{-(k-1)}\right) < f\left(x_{-k}\right)$

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

e a distância entre x_{-k} e $x_{-(k-1)}$ é duas vezes a distância entre $x_{-(k-1)}$ e $x_{-(k-2)}$.
Calcula-se o ponto médio do <u>último intervalo</u>:

$$x_m = \frac{x_{-k} + x_{-(k-1)}}{2}$$

e fica-se com 4 pontos igualmente espaçados

$$x_{-k}, x_m, x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}$$

<u>Se</u> $f(x_m) < f\left(x_{-(k-1)}\right)$ <u>então</u> escolhem-se os pontos x_{-k}, x_m e $x_{-(k-1)}$ <u>senão</u> $\left(f(x_m) \geq f\left(x_{-(k-1)}\right)\right)$ escolhem-se os pontos $x_m, x_{-(k-1)}$ e $x_{-(k-2)}$

Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

O processo entra na fase de aproximação - ponto **MIN q** - calcula-se o minimizante da quadrática que passa pelos 3 pontos agora seleccionados - tal como foi descrito na procura no sentido positivo: