1. Considere o problema de programação linear e o quadro simplex com a respectiva solução óptima abaixo apresentados. As variáveis de folga são s_1 e s_2.

$$
\begin{array}{ll}
\max & 1x_1 + 3x_2 \\
\text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 \leq 6 \\
 & -1x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

(a) Escreva o dual do problema original.

(b) Obtenha a solução do problema dual a partir do quadro apresentado, e verifique que se trata de uma solução admissível do problema dual.

(c) Calcule o valor da solução óptima dual.

(d) Multiplique as restrições do primal pelo valor das variáveis duais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do primal nunca pode ser superior a 14.

(e) Multiplique as restrições do dual pelo valor das variáveis primais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do dual nunca pode ser inferior a 14.

(f) Interprete o significado da relação obtida nas duas últimas alíneas.

1. Considere o problema de programação linear e o quadro simplex com a respectiva solução óptima abaixo apresentados. As variáveis de folga são s_1 e s_2.

$$\begin{array}{ll} \max & 1x_1 + 3x_2 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & -1x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

(a) Escreva o dual do problema original.

$$\begin{array}{ll} \min z^D = & 6y_1 + 6y_2 \\ \text{suj. a} & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

$$
\begin{array}{ll}
\min z^D = & 6y_1 + 6y_2 \\
\text{suj. a} & y_1 - y_2 \geq 1 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1,\ y_2 \geq 0
\end{array}
$$

(b) Obtenha a solução do problema dual a partir do quadro apresentado, e verifique que se trata de uma solução admissível do problema dual.

									Sol. Dual*						
1	y1	-	1	y2	>=	1		y1*=	5/3						
1	y1	+	2	y2	>=	3		y2*=	2/3						
1	5/3	-	1	2/3	>=	1									
1	5/3	+	2	2/3	>=	3									

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

$$
\begin{array}{ll}
\min z^D = & 6y_1 + 6y_2 \\
\text{suj. a} & y_1 - y_2 \geq 1 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1,\ y_2 \geq 0
\end{array}
$$

(c) Calcule o valor da solução óptima dual.

									Sol. Dual*						
6	y1	+	6	y2	=	zD		y1*=	5/3						
								y2*=	2/3						
								z* =	14						
6	5/3	+	6	2/3	=	14									

$$\begin{aligned} \max z^P = \quad & 1x_1 + 3x_2 \\ \text{suj. a} \quad & 1x_1 + 1x_2 \le 6 \\ & -1x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

(d) Multiplique as restrições do primal pelo valor das variáveis duais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do primal nunca pode ser superior a 14.

									Sol. Dual
		1	x1	+	1	x2	<=	6	(5/3)
		-1	x1	+	2	x2	<=	6	(2/3)
		5/3	x1	+	5/3	x2	<=	10	
	+	-2/3	x1	+	4/3	x2	<=	4	
		1	x1	+	3	x2	<=	14	

Qualquer ponto de coordenadas (x1,x2)T que obedeça às restrições do primal obedece também à relação que afirma que o valor da sua função objectivo do primal <= 14.

Esta relação (desigualdade válida) foi obtida com operações algébricas válidas.

$$
\begin{aligned}
\min z^D = \quad & 6y_1 + 6y_2 \\
\text{suj. a} \quad & y_1 - y_2 \geq 1 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1,\ y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

(e) Multiplique as restrições do dual pelo valor das variáveis primais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do dual nunca pode ser inferior a 14.

									Sol. Primal
		1	y1	-	1	y2	>=	1	(2)
		1	y1	+	2	y2	>=	3	(4)
		2	y1	-	2	y2	>=	2	
	+	4	y1	+	8	y2	>=	12	
		6	y1	+	6	y2	>=	14	

Qualquer ponto de coordenadas (y1,y2)T que obedeça às restrições do dual obedece também à relação que afirma que o valor da sua função objectivo do dual >= 14.

Esta relação (desigualdade válida) foi obtida com operações algébricas válidas.

$$\begin{aligned} \max z^P = \quad & 1x_1 + 3x_2 \\ \text{suj. a} \quad & 1x_1 + 1x_2 \le 6 \\ & -1x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z^D = \quad & 6y_1 + 6y_2 \\ \text{suj. a} \quad & y_1 - y_2 \ge 1 \\ & y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(f) Interprete o significado da relação obtida nas duas últimas alíneas.

1 x1 + 3 x2 <= 14 <= 6 y1 + 6 y2 ,

para todos os x admissíveis para o problema primal e
para todos os y admissíveis para o problema dual.

Este é o teorema da Dualidade Fraca.

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + x_2 \\ \text{suj.} & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & \qquad\;\; x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o modelo dual do problema acima apresentado.

b) Seleccione dois pontos admissíveis, um do domínio primal e outro do dual, com valores de função objectivo diferentes, e mostre que obedecem ao Teorema da Dualidade Fraca.

c) Considere os pontos do espaço primal $(x_1, x_2)^\top = (14, 4)^\top$ e do espaço dual $(y_1, y_2)^\top = (4, 9)^\top$. Será que eles são soluções óptimas do problema primal e do problema dual, respectivamente? Justifique.

d) Considere o ponto óptimo primal $(x_1, x_2)^\top = (14, 4)$ e o ponto óptimo dual $(y_1, y_2)^\top = (4, 9)$. Mostre que se verifica o Teorema da Folga Complementar.

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + x_2 \\ \text{suj.} & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & \qquad\; x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o modelo dual do problema acima apresentado.

$$\begin{array}{ll} \min z^D = & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{suj. a} & \quad y_1 \qquad \geq 4 \\ & -2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \max z^P = \quad & 4x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 - 2x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z^D = \quad & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{suj. a} \quad & y_1 \ge 4 \\ & -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

b) Seleccione dois pontos admissíveis, um do domínio primal e outro do dual, com valores de função objectivo diferentes, e mostre que obedecem ao Teorema da Dualidade Fraca.

	Solução primal		**solução dual**	
x1^ =	0	y1^ =	4	
x2^ =	0	y2^ =	10	
zP^ =	0	zD^ =	64	
	O valor da solução primal admissível é <= o valor da solução dual admissível.			
	Os dois pontos ilustram o teorema da dualidade fraca.			

$$\begin{array}{llll} \max z^P = & 4x_1 + x_2 & \min z^D = & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{suj. a} & x_1 - 2x_2 \leq 6 & \text{suj. a} & y_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 4 & & -2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 & & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{array}$$

c) Considere os pontos do espaço primal $(x_1, x_2)^\top = (14,4)^\top$ e do espaço dual $(y_1, y_2)^\top = (4,9)^\top$. Será que eles são soluções óptimas do problema primal e do problema dual, respectivamente? Justifique.

	Solução primal		solução dual	
x1^ =	14	y1^ =	4	
x2^ =	4	y2^ =	9	
zP^ =	4 (14) + 1 (4) = 56 + 4 = 60	zD^ =	6 (4) + 4 (9) = 24 + 36 = 60	
	O valor da solução dual (igual a 60) serve para comprovar que a solução primal é óptima.			
	O valor da solução primal (igual a 60) serve para comprovar que a solução dual é óptima.			
	As duas soluções são óptimas para os respectivos problemas.			

$$\begin{aligned} \max z^P = \quad & 4x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min z^D = \quad & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{suj. a} \quad & y_1 \geq 4 \\ & -2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

d) Considere o ponto óptimo primal $(x_1, x_2)^\top = (14, 4)$ e o ponto óptimo dual $(y_1, y_2)^\top = (4, 9)$. Mostre que se verifica o Teorema da Folga Complementar.

	Sol. Primal *			Sol. Dual *	folga complementar	
x1* =	14		u1* =	0	14 x 0 = 0	
x2* =	4		u2* =	0	4 x 0 = 0	
s1* =	0		y1* =	4	0 x 4 = 0	
s2* =	0		y2* =	9	0 x 9 = 0	

Podemos calcular os valores de s1 e s2:

x1 – 2 x2 + s1 = 6

x2 + s2 =4

Podemos calcular os valores de u1 e u2:

y1 – - u1 = 4

-2 y1 + y2 - u2 = 1

A solução óptima obedece ao teorema da folga complementar.

Ex. 8.4

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{suj.} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& 2x_1 - 1x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Resolver pelo método simplex dual.

Ex. 8.4

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 1x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Restrições de maior ou igual (≥).
Não é possível acrescentar folgas com coef. +1, dando origem a um quadro simplex com uma matriz identidade.
Isso só acontece se as restrições forem de ≤.

Como se transformam inequações de ≥ em inequações de ≤??

Multiplicando toda a inequação por (-1), trocando todos os sinais.

Assim, o modelo fica:

$$\begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ suj. \boldsymbol{-x_1 - x_2 - x_3 \leq -4} \\ \boldsymbol{-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -2} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Restrições de menor ou igual (≤).
Já é possível acrescentar folgas com coef. +1, dando origem a um quadro simplex com uma matriz identidade.

Transformando o problema num problema de maximização.

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -\max\ -2x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

Ex. 8.4

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	-1	-1	-1	1	0	-4
s_2	-2	1	-1	0	1	-2
	$+2$	$+3$	$+5$	0	0	0

Pode aplicar-se o SIMPLEX DUAL → quando
– há valores negativos na coluna dos termos independentes (matriz b) e
– os valores da linha da f. obj. cumprem condições de optimalidade.

- OK

Ex. 8.4

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	$\boxed{-1}$	-1	-1	1	0	-4
s_2	-2	1	-1	0	1	-2
	$+2$	$+3$	$+5$	0	0	0
	$\left\lvert\frac{+2}{-1}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{+3}{-1}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{+5}{-1}\right\rvert$			

Elemento pivot

1º) escolher o mais negativo

2º) Escolher o menor quociente em valor absoluto

Agora é igual ao SIMPLEX PRIMAL → x_1 entra na base, s_1 sai da base

Temos de colocar a coluna do x_1 como coluna da matriz identidade:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	1	1	-1	0	4
s_2	0	3	1	-2	1	6
	0	$+1$	$+3$	$+2$	0	-8

Como não há valores negativos na última coluna, nem na última linha, estamos perante a solução ótima.

Solução: Z*=8, $x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = 0$