3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{suj.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Determine a solução óptima do problema.

b) O espaço de soluções é limitado ou ilimitado? Justifique.

c) Existem soluções óptimas alternativas? O valor da solução óptima é limitado ou ilimitado? Justifique.

d) Diga o que se pode concluir em relação ao espaço de soluções e ao valor do óptimo.

e) (R) Determine a expressão analítica (das coordenadas dos pontos) do raio de soluções óptimas alternativas.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{suj.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Determine a solução óptima do problema.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
s1	0	2	-1	3	1	0	40
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	-2	1	-3	0	0	0

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

Será que esta é a solução óptima?

a) Determine a solução óptima do problema.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

Esta é a solução óptima.

(x1,x2,x3,s1,s2)T = (0,0,40/3,0,1)T

Não há variáveis não básicas que, ao aumentarem de valor, aumentem o valor da função objectivo.

Isso também acontece com, por exemplo, x2, que tem um coeficiente 0 na linha da função objectivo:

x3 = 40/3 - 2/3 x1 + 1/3 x2 - 1/3 s1
s2 = 1 - 1 x1
z = 40 – s1

Quando x2 aumenta (mantendo-se as outras variáveis não básicas, x1 e s1, iguais a 0), o valor da função objectivo não aumenta.

b) O espaço de soluções é limitado ou ilimitado? Justifique.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

x3 = 40/3 - 2/3 x1 + 1/3 x2 - 1/3 s1
s2 = 1 - 1 x1
z = 40 – s1

Por exemplo, quando x2 aumenta (mantendo-se as outras variáveis não básicas, x1 e s1, iguais a 0), não há nenhuma variável que decresça de valor.

O espaço de soluções é ilimitado, porque a coluna de x2 não tem elementos positivos no corpo central do quadro (elementos a vermelho).

Como todas as variáveis têm valores não-negativos (>=0) à medida que x2 aumenta, todas as soluções são admissíveis (até ao infinito).

Há um raio que tem origem no vértice (x1,x2,x3,s1,s2)T = (0,0,40/3,0,1)T

c) Existem soluções óptimas alternativas? O valor da solução óptima é limitado ou ilimitado? Justifique.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

x3 = 40/3 - 2/3 x1 + 1/3 x2 - 1/3 s1
s2 = 1 - 1 x1
z = 40 – s1

Todas as soluções são admissíveis ao longo do raio.

Todas as soluções têm o mesmo valor de função objectivo, 40.

O valor do óptimo é finito.

Isso não é de estranhar, porque a função envolvida na restrição é exactamente igual à função objectivo, e portanto a função objectivo não pode exceder 40.

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{suj.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

d) Diga o que se pode concluir em relação ao espaço de soluções e ao valor do óptimo.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

x3 = 40/3 - 2/3 x1 + 1/3 x2 + 1/3 s1
s2 = 1 - 1 x1
z = 40 – s1

O domínio é ilimitado e o valor do óptimo é finito.

e) (R) Determine a expressão analítica (das coordenadas dos pontos) do raio de soluções óptimas alternativas.

	z	x1	x2	x3	s1	s2	
x3	0	2/3	-1/3	1	1/3	0	40/3
s2	0	1	0	0	0	1	1
z	1	0	0	0	1	0	40

x3 = 40/3 - 2/3 x1 + 1/3 x2 + 1/3 s1
s2 = 1 - 1 x1
z = 40 – s1

Pista: identificar o vértice e a direcção do raio.

O raio é definido pelo vértice óptimo, dado pelo quadro simplex, e pela direcção, que pode ser determinada analisando como variam os valores das variáveis básicas quando a variável não básica x_2, com custo reduzido nulo, aumenta e as outras variáveis não básicas permanecem nulas. As coordenadas dos pontos do raio são:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 40/3 + 1/3\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall \theta \geq 0$$

É fácil verificar que qualquer ponto do raio (*i.e.*, $\forall \theta \geq 0$) :

- obedece às restrições do modelo;
- tem um valor de função objectivo igual a 40.

Pista: Para identificar a direcção, ver como variam as variáveis quando x2 aumenta.

Os coeficientes assinados a vermelho são derivados da seguinte forma: quando x2 aumenta Ө unidades, x3 aumenta 1/3 Ө unidades.

As outras variáveis não têm os seus valores alterados.