Interpretação do significado dos preços-sombra

J.M. Valério de Carvalho

12 de Outubro de 2017

1 Introdução

Uma das questões típicas de uma análise de sensibilidade é "Quanto é que estaria disposto a pagar para aumentar a quantidade disponível de um recurso?". A variável dual associada ao recurso, que se designa por *preço-sombra*, fornece informação sobre a variação da função objectivo quando a quantidade disponível do recurso varia, permanecendo todos os restantes dados do problema iguais (ou *cæteris paribus*[1], como, por vezes, se refere).

O preço-sombra é o valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso, medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso. Cada decisor tem um problema diferente, que depende de um conjunto de recursos e de outros dados, e a solução óptima desse problema fornece um conjunto de preços-sombra. Portanto, o preço-sombra de um recurso depende do problema em análise.

É de salientar que o preço-sombra é um conceito diferente do custo do recurso no mercado. Pode haver um recurso com custo baixo no mercado que tenha um preço-sombra elevado, por esse recurso ser indispensável para uma utilização mais eficaz de outros recursos mais valiosos. Cada decisor compete no mercado, e tem preços-sombra diferentes dos seus concorrentes.

A Investigação Operacional (IO) é uma disciplina que envolve a aplicação de métodos analíticos avançados para ajudar a tomar as melhores decisões. Em sistemas complexos em que há muitas decisões admissíveis, a optimização ajuda a seleccionar a(s) opção(ões) que usa(m) de uma forma mais eficaz os recursos disponíveis. É uma disciplina que lida com recursos escassos, que têm normalmente custos associados.

Se um recurso não é escasso, estando, por exemplo, disponível no mercado numa quantidade que, do ponto de vista do problema em análise, pode ser considerada como ilimitada, esse recurso não condiciona directamente o espaço de decisões admissíveis, não dando origem a uma restrição. No entanto, os recursos não-escassos não deixam de ser importantes na selecção das melhores decisões, porque influenciam o custo das actividades. Esse factor pode ser tido em conta considerando o custo do recurso usado na actividade como um termo (de entre vários) que dão origem ao coeficiente da respectiva variável de decisão na função objectivo.

Por outro lado, se o recurso é escasso, interessa saber como é que se altera a solução óptima quando a quantidade disponível desse recurso varia. É esse um dos objectivos da análise de sensibilidade, ou análise pós-optimização, como também é conhecida. Nesse caso, o preço-sombra fornece informação essencial.

O preço-sombra associado a um recurso deve ser interpretado no contexto do modelo em análise. A definição matemática do preço-sombra é $\delta z/\delta(-s_i)$, que significa a variação do valor da função objectivo em relação à variação do recurso i. Esta definição é invariante, mas a resposta à questão "Quanto é que estaria disposto a pagar para aumentar a quantidade disponível de um recurso?"depende do modelo, e, em particular, da sua função objectivo. Por exemplo, um dos aspectos cruciais é averiguar se o custo do recurso escasso está a ser considerado (implicitamente) na função objectivo, como uma parcela de um coeficiente que representa o lucro líquido associado a uma variável de decisão.

Iremos analisar essa questão nos exemplos apresentados nas secções seguintes. É importante na análise identificar a dimensão das unidades em que se exprimem os recursos e as diversas funções lineares, pelo que será dada particular atenção a esse detalhe.

Na análise de sensibilidade, assume-se também que a variação da quantidade de recurso é suficientemente pequena para não haver nenhuma alteração no conjunto de variáveis básicas da

[1] as outras coisas iguais

solução óptima. De facto, se a variação da quantidade de recurso for suficientemente pequena, dentro dos limites de variação indicados nos relatórios de análise de sensibilidade, o valor da função objectivo varia de uma forma linear. Se a variação da quantidade de recurso for maior dos que os limites de variação, haverá uma alteração da base óptima, com novas variáveis básicas, e os valores dos preços-sombra alteram-se, como será analisado na secção 4.

2 Problema da dieta

Considere o problema de determinar a mistura óptima de rações para galinha, com 3 nutrientes, identificados por nut1, nut2 e nut 3, respectivamente, com 5 rações à venda no mercado, em que a variável de decisão x_j é a quantidade de ração j da mistura.

$$\begin{array}{rllllll}
\min z = & 6x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +9x_5 & \\
\texttt{nut1:} & 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & +2x_5 & \geq 3 \\
\texttt{nut2:} & 1x_1 & +4x_2 & & +1x_4 & +1x_5 & \geq 5 \\
\texttt{nut3:} & 2x_1 & +2x_2 & & & +2x_5 & \geq 4 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0}
\end{array}$$

As unidades em que se exprimem os diversos coeficientes e as funções lineares são as seguintes:

- x_j : quantidade diária de ração do tipo $j, j = 1,\dots,5$ [U.P./galinha/dia]
- c_j : custo de ração do tipo $j, j = 1,\dots,5$ [U.M./U.P.]
- z : custo diário de alimentação de uma galinha [U.M./galinha/dia]
- b_i : quantidade mínima diária de nutriente $i, i = 1,\dots,4$ [U.N./galinha/dia]
- a_{ij} : quantidade de nutriente i na unidade de peso da ração $i, i = 1,\dots,4, j, j = 1,\dots,5$ [U.N./U.P]

designando U.M. a unidade monetária, U.N. a unidade de nutriente e U.P. a unidade de peso.

A solução óptima do modelo é $z = 16, x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = x_5 = 0$, os quadros inicial e óptimo e os relatórios de análise de sensibilidade são os seguintes:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	1	0	2	-1	0	0	3
s_2	0	1	4	0	1	1	0	-1	0	5
s_3	0	2	2	0	0	2	0	0	-1	4
z	1	-6	-8	-2	-1	-9	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	
x_1	0	1	0	0	-1/3	1	0	-1/3	2/3	1
x_2	0	0	1	0	1/3	0	0	1/3	-1/6	1
x_3	0	0	0	1	0	1	1	0	-1/2	1
z	1	0	0	0	-1/3	-1	-2	2/3	-5/3	16

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	16	16	16	16
x1	5	7	$-\infty$	0
x2	6	9	$-\infty$	0
x3	2.2E-16	3	$-\infty$	0
x4	0.66666	$+\infty$	3	0
x5	8	$+\infty$	1	0

Duals			
Variables	value	from	till
objective	16	16	16
nut1	2	2	$+\infty$
nut2	0.66666	2	8
nut3	1.66666	2.5	6
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$
x3	0	$-\infty$	$+\infty$
x4	0.33333	-3	3
x5	1	$-\infty$	1

O preço-sombra associado à restrição i significa o aumento do custo diário de alimentação de uma galinha por unidade de aumento de quantidade mínima diária de nutriente i. O preço-sombra é expresso em unidades monetárias por unidade de nutriente [U.M./U.N.], dado a função objectivo ser o custo diário de alimentação de uma galinha [U.M./galinha/dia] e a restrição relativa ao nutriente i estar expressa em unidades de nutriente por galinha por dia [U.N./galinha/dia].

Quanto estaria disposto a pagar?

Vamos analisar o caso do `nut3`. Os relatórios de análise de sensibilidade informam que o preço-sombra do `nut3` é 1.6666 U.M./U.N. dentro do intervalo de variação [2.5,6]. Este preço-sombra é uma referência sobre **o máximo que estamos dispostos a pagar** para aumentar a quantidade diária deste nutriente.

Vamos supor que o `nut3` é um nutriente que, por estar em voga, passa a ser oferecido no mercado isoladamente, como suplemento alimentar, a um preço de 2 U.M./U.P.. Adicionalmente, há a recomendação de aumentar a quantidade diária de nutriente de 1 U.N./galinha/dia, aumentando o valor corrente de 4 para 5. Comprar o novo suplemento alimentar para o adicionar ao resto da ração aumenta o custo diário de alimentação de uma galinha de 16 para 18 U.M./galinha/dia.

Da análise de sensibilidade, podemos concluir que não devemos comprar o novo suplemento alimentar. A decisão é baseada em duas informações. A primeira é que o preço-sombra do `nut3` é inferior ao preço (de mercado) do novo suplemento. A segunda é que o aumento de uma unidade ainda se encontra dentro dos limites do intervalo [2.5,6]. Portanto, podemos aumentar a quantidade diária do nutriente usando as rações já disponíveis no mercado a um custo inferior.

Este resultado pode ser verificado resolvendo um novo modelo substituindo o valor de b_3 que passa a ser 5. A nova solução óptima tem o valor $z' = 17.6666$ e os valores das variáveis básicas (que continuam a ser as mesmas) são $x_1 = 1.6666, x_2 = 0.8333$ e $x_3 = 0.5$. A vantagem da análise de sensibilidade é que não é necessário voltar a resolver o problema para tomar a decisão de não comprar o novo suplemento alimentar.

Neste exemplo, a função objectivo envolve coeficientes que representam os custos unitários das rações. O preço-sombra representa o aumento do custo diário de alimentação de uma galinha por unidade de aumento de quantidade mínima diária de nutriente, e fornece uma indicação do valor máximo que estamos dispostos a pagar por uma unidade adicional de um determinado nutriente. No exemplo que se apresenta de seguida, o custo de um recurso é uma parcela de um coeficiente que representa um lucro. Nesse caso, a resposta à questão "Quanto é que está disposto a pagar por uma unidade adicional de um recurso?"é diferente do valor do preço-sombra.

3 Problema da produção

Considere o problema de produção de uma empresa que produz 2 tipos de artigos, o artigo 1 e o artigo 2.

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

As unidades em que se exprimem os diversos coeficientes e as funções lineares são as seguintes:

- x_j : quantidade de artigos de tipo j, $j = 1,2$, a fabricar diariamente [art./dia]
- c_j : lucro por artigo de tipo j, $j = 1,2$ [U.M./art.]
- z : lucro diário [U.M./dia]
- b_1 : quantidade de horas-máquina disponíveis diariamente [hora.maq./dia]
- b_2 : quantidade de horas-homem disponíveis diariamente [hora.hom./dia]
- b_3 : quantidade de unidades de material disponíveis diariamente [unid./dia]
- a_{1j} : quantidade de horas-máquina por artigo de tipo j, $j = 1,2$ [hora.maq./art.]
- a_{2j} : quantidade de horas-homem por artigo de tipo j, $j = 1,2$ [hora.hom./art.]
- a_{3j} : quantidade de unidades de material por artigo de tipo j, $j = 1,2$ [unid./art.]

A solução óptima do modelo é $z = 540, x_1 = 20, x_2 = 30$, os quadros inicial e óptimo e os relatórios de análise de sensibilidade são os seguintes:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	540	540	540	540
x1	5	15	$-\infty$	0
x2	8	24	$-\infty$	0

Duals			
Variables	value	from	till
objective	540	540	540
tmaquina	3,5	80	140
maodobra	1,5	60	120
material	0	$-\infty$	$+\infty$
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$

Análise dos custos de operação

Antes de discutirmos o significado do preço-sombra, vamos analisar com detalhe os custos de operação da empresa. Os valores de lucro unitários indicados no enunciado do problema, de 12 e 10 U.M./art., respectivamente, resultam dos valores do preço de venda dos artigos e dos custos reais dos recursos.

Os custos unitários dos recursos são os indicados na seguinte tabela.

Recurso	Custo unitário do recurso
tempo-máquina	2 [U.M./hora.maquina]
tempo-homem	6 [U.M./hora.homem]
material	1 [U.M./unid.material]

Esta informação conjugada com a informação relativa a outros custos, que não são imputados directamente aos recursos considerados nas restrições, permite calcular o custo de produção do artigo, em [U.M./art.]. A seguinte tabela fornece também o valor do preço de venda, em [U.M./art.], que não era apresentado no enunciado, desvendando como se obtém o valor do lucro unitário dos artigos, em [U.M./art.]:

	Artigo 1	Artigo 2
tempo-máquina	$3 \times 2 = 6$	$2 \times 2 = 4$
tempo-homem	$1 \times 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$
material	$1 \times 1 = 1$	$0 \times 1 = 0$
outros custos	15	11
custo unitário	28	27
preço venda unitário	40	37

O preço-sombra associado à restrição i significa o aumento do lucro diário por unidade de aumento da quantidade de recurso i. O preço-sombra é expresso em unidades monetárias por horas.homem [U.M./hora.hom.], dado a função objectivo ser o lucro diário [U.M./dia] e a restrição relativo ao recurso estar expressa em [hora.hom./dia].

Quanto estaria disposto a pagar?

Pretende-se ponderar se se devem contratar 3 novos colaboradores, o que faria aumentar a força de trabalho num total de 24 horas.homem/dia. Estamos interessados em responder à seguinte questão: "Quando é que estaria disposto a pagar a cada novo trabalhador?".

Cada novo trabalhador contribui com um aumento de 8 hora.hom./dia, traduzindo-se num aumento do lucro de 12 U.M./dia, dado o valor do preço-sombra, igual a 1.5 U.M./hora.hom.. Se se contratarem 3 novos colaboradores, haverá um aumento do valor da função objectivo de 36 U.M./dia, pelo que o novo valor da solução óptima será igual a 576 U.M./dia.

Esse aumento ocorre de facto por a variação da quantidade disponível do recurso 2, de $b_2 = 80$ para o novo valor de $b_2' = 104$, estar dentro dos limites de variação em que as variáveis básicas da solução óptima se mantêm as mesmas. O valor do recurso 2 poderia ser aumentado até 120 sem haver alteração da base óptima. Resolvendo de novo o problema com o valor de $b_2' = 104$, como indicado no quadro inicial, à esquerda, obtém-se a solução óptima indicada no quadro à direita.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	104
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	48
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	22
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	8
z	1	0	0	3.5	1.5	0	576

Considerando que o objectivo do problema é maximizar o lucro, uma nova solução que se traduza num aumento de lucro é atractiva. Portanto, o decisor deve estar disposto a pagar um valor de salário horário que conduza a uma nova solução em que se obtenha mais lucro.

Temos todos os dados para responder à questão formulada. O valor do preço-sombra é 1.5 U.M./hora.homem, e o decisor deve estar disposto a pagar ao trabalhador **até mais 1.5 U.M./hora.homem, para além do valor base de 6 U.M./hora.homem**, ou seja, 7.5 U.M./hora.homem.

É de salientar que, neste exemplo, o preço-sombra não indica o valor máximo que estamos dispostos a pagar por uma unidade adicional de recurso, devendo ser **interpretado de uma forma diferente do do exemplo anterior**. Isso resulta do facto de o custo de mão-de-obra ser usado implicitamente no cômputo do lucro unitário dos artigos.

Verificação do resultado

Para verificar este resultado, vamos comparar as duas soluções óptimas do problema, a solução óptima inicial e a solução óptima que resulta de contratar mais trabalhadores. Esses quadros, que foram apresentados anteriormente, resultam de resolver o problema com $b_2 = 80$ e $b'_2 = 104$, respectivamente, e são os seguintes:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	48
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	22
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	8
z	1	0	0	3.5	1.5	0	576

Há dois aspectos que é essencial reconhecer na solução óptima da direita. Em primeiro lugar, a nova solução óptima usa 104 unidades do recurso 2. A função usada na segunda restrição para descrever o número de hora.hom. usados por dia é $1x_1 + 2x_2$, e a substituição dos valores das variáveis óptimas nessa função produz o valor de 104. Em segundo lugar, como não houve alteração nos coeficientes da função objectivo, estamos implicitamente a pressupor que continuamos a pagar o mesmo salário horário de 6 U.M./hora.homem, quer aos trabalhadores anteriormente existentes, quer aos 3 novos contratados.

Este resultado é consistente com a definição de preço-sombra, e permite uma interpretação mais aprofundada. O preço-sombra, com o valor de 1.5 U.M./hora.hom., traduz o aumento do valor da função objectivo (o lucro) resultante de se usar uma unidade adicional do recurso **a um custo igual ao das unidades de recurso anteriormente disponíveis**.

De facto, os valores dos indicadores relevantes para as soluções óptimas com $b_2 = 80$ e $b'_2 = 104$, respectivamente, expressos em [U.M./dia], são os seguintes:

	$b_2 = 80$	$b'_2 = 104$
solução óptima	$(x_1^*, x_2^*)^\top = (20, 30)^\top$	$(x_1'^*, x_2'^*)^\top = (8, 48)^\top$
facturação	$40 \times 20 + 37 \times 30 = 1910$	$40 \times 8 + 37 \times 48 = 2096$
custo total	$28 \times 20 + 27 \times 30 = 1370$	$28 \times 8 + 27 \times 48 = 1520$
lucro total	540	576

Vamos agora entrar em linha de conta com o facto de o novo pessoal receber um salário horário superior ao dos funcionários existentes, e constatar que o valor da função objectivo, que traduz um lucro, vai aumentar de qualquer modo. Vamos supor que o valor a pagar era de 7 U.M./hora, valor que é inferior ao valor máximo que estamos dispostos a pagar. Isso representaria um custo acrescido de 24 U.M./dia, o que tiraria 24 U.M./dia ao aumento de lucro de 36 U.M./dia. O saldo líquido é um aumento do lucro de 12 U.M./dia, para 552 U.M./dia.

Isso pode ser confirmado calculando os custos associados à nova solução:

Recurso	Custo recurso	
tempo-máquina	240 [U.M./dia]	= 120 [h.maq/dia] x 2 [U.M./h.maq.]
tempo-homem	480 [U.M./dia]	= 80 [h.hom./dia] x 6 [U.M./h.hom.]
tempo-homem adicionais	168 [U.M./dia]	= 24 [h.hom./dia] x 7 [U.M./h.hom.]
material	8 [U.M./dia]	= 8 [art/dia] x 1 [mat./art.] x 1 [U.M./mat.]
outros custos do artigo 1	120 [U.M./dia]	= 8 [art./dia] x 15 [U.M./art.]
outros custos do artigo 2	528 [U.M./dia]	= 48 [art./dia] x 11 [U.M./art.]
total	1544 [U.M./dia]	

É fácil de verificar que se pagássemos o valor máximo de 7.5 U.M./hora aos novos contratados, o acréscimo de custo cancelaria o aumento do lucro, que continuaria igual a 540.

Esta análise permite compreender o significado do preço-sombra quando o custo do recurso está incluído no cálculo dos coeficientes de custo da função objectivo. Neste caso, o preço-sombra dá uma indicação de quanto estaríamos dispostos a pagar **para além do valor actual** do custo do recurso.

A IO serve para apoiar a decisão

A informação dada pelo quadro simplex é relevante para o processo de decisão, mas há outros factores a ter em conta, como se analisa de seguida.

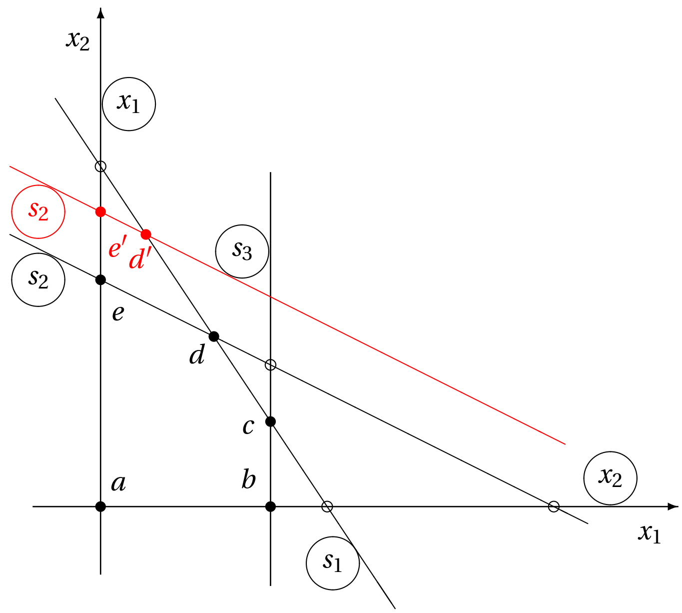
Os custos médios de trabalho iriam aumentar: (10 x 6 + 3 x 7)/ 13 = 81 / 13 = 6.23 U.M./h.hom., e haveria assimetrias de vencimento na empresa.

Além disso, há um indicador importante que também se degradaria. Um indicador usado para a avaliação das empresas é a razão entre os lucros (resultantes da diferença entre a facturação e os custos de operação) e o volume de facturação. Antes, a razão era igual a 28,3% (540 / 1910), enquanto que depois o valor desce para 26,3 % ((2096-1544) / 2096).

Aspectos com estes devem ser considerados no processo de decisão.

Interpretação geométrica da variação da quantidade disponível do recurso

Quando a quantidade de recurso tempo.homem passa de 80 para 104, a segunda restrição passa a ser $1x_1 + 2x_2 \leq 104$, o que se traduz na alteração do domínio admissível, que passa a ser delimitado pelos vértices a, b, c, d' e e', como é apresentado na Figura. Alterar a quantidade disponível do recurso tempo.homem desloca a solução óptima do vértice d para o ponto d', em que $x_1 = 8$ e $x_2 = 48$, sendo o novo valor da função objectivo igual a 576.



A variação do recurso 2, de 80 para o novo valor de 104, está dentro do intervalo de variação [60,120] em que as variáveis básicas da solução óptima se mantêm as mesmas. O mesmo é dizer que as variáveis não-básicas se mantêm, ou seja, que as rectas que suportam a solução óptima são as mesmas.

Isso não aconteceria se o novo valor da quantidade de recurso fosse estritamente maior do que o limite superior do intervalo. Nesse caso, a restrição passaria a ser redundante (por exemplo, se fosse $1x_1 + 2x_2 \leq 120 + \epsilon$), e a nova solução óptima seria o vértice $(0,60)^\top$. As rectas que suportam a solução óptima seriam as rectas $x_1 = 0$ e $3x_1 + 2x_2 = 120$, sendo as variáveis não-básicas x_1 e s_1. Haveria alteração das variáveis básicas, que seriam x_2, s_3 e s_2.

4 Outras questões

O que acontece fora dos limites de variação?

Os relatórios de sensibilidade informam quais os limites de variação (em torno da solução óptima) dentro dos quais o valor da função objectivo varia linearmente com a quantidade disponível de um dado recurso. Para além desses limites, a variação não é linear. Acima do limite superior, o preço-sombra é menor, e abaixo do limite inferior é maior.

Esta regra geral está de acordo com a intuição. A título ilustrativo, quando se analisa o comportamento acima do limite superior, é razoável que, à medida que temos mais recurso disponível, o seu valor (preço-sombra) seja cada vez menor. No limite, quando existe uma quantidade virtualmente infinita de recurso, o valor da função objectivo não aumenta mais, porque haverá outros recursos a limitar o valor do óptimo. Mais unidades adicionais de recurso traduzir-se-ão apenas em mais folga.

Vamos analisar a solução óptima de um problema em função do parâmetro quantidade de recurso disponível b_2, a quantidade de horas-homem disponíveis diariamente [h.hom./dia]. Recorde-se que o intervalo de variação do recurso b_2 (maodobra) era $[60, 120]$, e que a solução óptima era a seguinte:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

De seguida apresentam-se os quadros óptimos para duas situações distintas. Em primeiro lugar, a situação em que o recurso disponível tem um valor próximo do limite inferior de variação. O quadro da esquerda apresenta a solução óptima quando o recurso $b_2 = 60 - \epsilon$, valor que está baixo do limite inferior de variação, e o da direita a 60. Escolheu-se um valor de $\epsilon = 0.001$.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0	0.5	-0.5	14,999
s_1	0	0	0	1	-1	-2	0,001
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	0	5	7	509.995

i) $b_2 = 60 - \epsilon$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	15
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	0
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	30
z	1	0	0	3.5	1.5	0	510

ii) $b_2 = 60$

Em segundo lugar, a situação em que o recurso disponível tem um valor próximo do limite superior de variação. O quadro da esquerda apresenta a solução óptima quando o recurso $b_2 = 120$ e o da direita a $120 + \epsilon$, valor que está acima do limite superior de variação.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	60
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	30
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	0
z	1	0	0	3.5	1.5	0	600

iii) $b_2 = 120$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1.5	1	0.5	0	0	60
s_3	0	1	0	0	0	1	30
s_2	0	-2	0	-1	1	0	0,001
z	1	3	0	5	0	0	600

iv) $b_2 = 120 + \epsilon$

Os resultados apresentados permitem construir uma tabela com os valores da solução óptima e dos respectivos preço-sombra do recurso 2 para vários valores do parâmetro b_2 :

b_2	60-ϵ	60	…	80	…	120	120+ϵ
valor f.objectivo	509.995	510	…	540	…	600	600
preço-sombra	5.0	1.5	…	1.5	…	1.5	0

O preço-sombra do recurso varia em função do parâmetro. É interessante verificar que o preço-sombra decresce à medida que o valor da quantidade de recurso aumenta. Quanto mais escasso é o recurso, maior é o seu preço-sombra.

Neste exemplo, abaixo do limite inferior de variação, para $b_2 = 60 - \epsilon$, o preço-sombra do recurso mão-de-obra é de 5. Por outro lado, acima do limite superior de variação, o preço-sombra é nulo. Trata-se de um caso limite, em que o preço-sombra assume o menor valor que pode ter. Isso ocorre porque qualquer aumento da disponibilidade do recurso 2 não se traduz num aumento da função objectivo, apenas num aumento da folga existente no recurso 2. De facto, na solução óptima para $b_2 = 120+\epsilon$, há uma folga no recurso 2, $s_2 = \epsilon$. Este facto pode ser facilmente interpretado geometricamente através do desenho apresentado na Figura.

Quais os recursos mais críticos?

Os recursos com maior preço-sombra são os mais críticos. Uma pequena alteração na disponibilidade de um recurso com um preço-sombra elevado pode alterar significativamente o valor da solução óptima, enquanto uma alteração na disponibilidade de um recurso com um preço-sombra pequeno pode não ser relevante.