Exercício sobre o método de Segurança de Newton

Isabel Espírito Santo

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

iapinho@dps.uminho.pt

Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

Resolução:

$$\max \overline{f}(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4$$

$$\min f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - 1) + x_2^4$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - 1) \\ 4x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - 1) & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton:

$x^1 = (1,1), \eta = 10^{-6}, \mu = 10^{-6}, \varepsilon = 1$

- **1ª iteração**

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d_N^1

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 12 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ sistema impossível $\Rightarrow d_{SN}^1 = -\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 80.158562 \quad \uparrow \end{cases}$

$\alpha = 0.5 \times 1 = 0.5$

$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 0.520574 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 0.520574 \leq 1 + 10^{-6} \times 0.5 \times (-17)$

$\Leftrightarrow 0.520574 \leq 1.0000085$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_2 = 4.095138 \leq \varepsilon \quad$ (falso)

- **2ª iteração**

$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.479426 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção d_N^2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.479426 & 0 & -0.877583 \\ 0 & 12 & 4 \end{array}\right) \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$\nabla f(x^2)^T d_N^2 = \begin{pmatrix} 0.877583 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix} = -2.939736$$

$\left| \nabla f(x^2)^T d_N^2 \right| = 2.939736 \leq 10^{-6}$, falso, logo d_N^2 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^2)^T d_N^2 = -2.939736 > 10^{-6}$, falso, logo d_N^2 não é ascendente.

$$d_{SN}^2 = d_N^2 = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^2 + \alpha d_{SN}^2 = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = 0.520574 \\ f(x^{\text{aux}}) = -0.527518 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^2) + \mu\alpha\nabla f(x^2)^T d_{SN}^2 \Leftrightarrow -0.527518 \leq 0.520574 + 10^{-6} \times 1 \times (-2.939736)$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$$x^3 = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*
  $$\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.688697 \\ -1.185187 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1.676108 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

Como o número máximo de iterações é dois,
$x_{\max} \approx \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$ e $f_{\max} \approx 0.527518$