14.1

Considere o seguinte problema de programação inteira e a solução ótima da respetiva relaxação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/6	1/6	5

Na prática, para a solução de problemas de programação inteira, é frequente recorrer a métodos que combinam o uso de planos de corte com *branch and bound*. Determine a solução ótima (ou uma das soluções ótimas) deste problema de programação inteira, utilizando o método a seguir indicado:

a) Introduza **apenas** 1 plano de corte.

b) Determine a equação do plano de corte em função das variáveis de decisão do problema original.

c) Partindo da solução obtida na alínea a), prossiga, utilizando o método de *branch and bound*.

14.1 a)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/6	1/6	5

Fracionário

Plano gerador de corte:

$$x_2 + \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{3}{2}$$

Parte fracionária → plano de corte: $\boxed{\frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \ge \frac{1}{2}}$

$$Restrição\ \ge \text{é}\ necessário\ transformar\ em\ \le trocando\ os\ sinais\ todos: -\frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 \le -\frac{1}{2}$$

Incluir plano de corte no quadro simplex:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	$1/6$	$-1/6$	0	1
x_2	0	1	$1/4$	$1/4$	0	$3/2$
s_3	0	0	$-1/4$	$\boxed{-1/4}$	1	$-1/2$
	0	0	$5/6$	$1/6$	0	5
			$\left\lvert\frac{5/6}{-1/4}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{1/6}{-1/4}\right\rvert$		

Simplex Dual

Elemento Pivot

14.1 a)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{suj.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{array}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/6	1/6	5

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	$^1/_3$	**0**	$-^2/_3$	$^4/_3$
x_2	0	1	0	**0**	1	1
$\boldsymbol{s_2}$	0	0	1	**1**	-4	2
	0	0	$^2/_3$	**0**	$^2/_3$	$^{14}/_3$

14.1

b) equação do plano de corte em função das variáveis de decisão do problema original

Plano de corte: $\boxed{\frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 \geq \frac{1}{2}}$

Substituindo na inequação:

$$\frac{1}{4}(6 - 3x_1 - 2x_2) + \frac{1}{4}(3x_1 - 2x_2) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x_2 \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x_2 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_2 \leq 1}$$

C.A.

Restrições:

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \leftrightarrow \boxed{s_1 = 6 - 3x_1 - 2x_2}$$

$$-3x_1 + 2x_2 + s_2 = 0 \leftrightarrow \boxed{s_2 = 3x_1 - 2x_2}$$

14.1

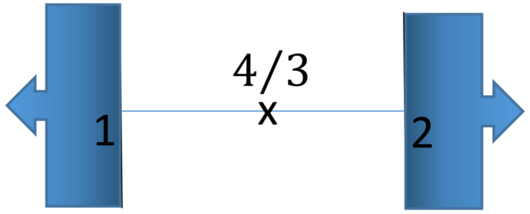
c) Partindo da solução obtida na alínea a) → o método de *branch and bound*

Da a) temos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	$1/3$	**0**	$-2/3$	$4/3$
x_2	0	1	0	**0**	1	1
$\boldsymbol{s_2}$	0	0	1	**1**	-4	2
	0	0	$2/3$	**0**	$2/3$	$14/3$

$z = 14/3$
$x_1 = 4/3$
$x_2 = 1$

$x_1 \leq 1$ | $x_1 \geq 2$



$$x_1 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3$$

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 \leq -\frac{2}{3}}$$

Novo plano de corte a acrescentar ao simplex

14.1

c) Partindo da solução obtida na alínea a) → o método de *branch and bound*

Da a) temos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	$1/3$	0	$-2/3$	0	$4/3$
x_2	0	1	0	0	1	0	1
s_2	0	0	1	1	-4	0	2
s_4	0	0	$1/3$	0	$\boxed{-2/3}$	1	$-2/3$
	0	0	$2/3$	0	$2/3$	0	$14/3$

Elemento Pivot

Simplex Dual

$z = 14/3$
$x_1 = 4/3$
$x_2 = 1$

$x_1 \leq 1$

$\boxed{x_1 \geq 2}$

$$\boxed{\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 \leq -\frac{2}{3}}$$

14.1

c) Partindo da solução obtida na alínea a) → o método de *branch and bound*

Da a) temos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	0	0	0	-1	2
x_2	0	1	$-1/2$	0	0	$3/2$	0
s_2	0	0	-1	1	0	-6	6
s_3	0	0	$-1/2$	0	1	$-3/2$	1
	0	0	1	0	0	1	4

Solução inteira!!
(1ª solução incumbente de valor 4)

$z = 14/3$
$x_1 = 4/3$
$x_2 = 1$

$x_1 \leq 1$ $\qquad$ $x_1 \geq 2$

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_3 \leq -\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{s_1} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{s_3} \leq -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$$

Nova restrição de partição a acrescentar ao simplex da alínea a)

14.1

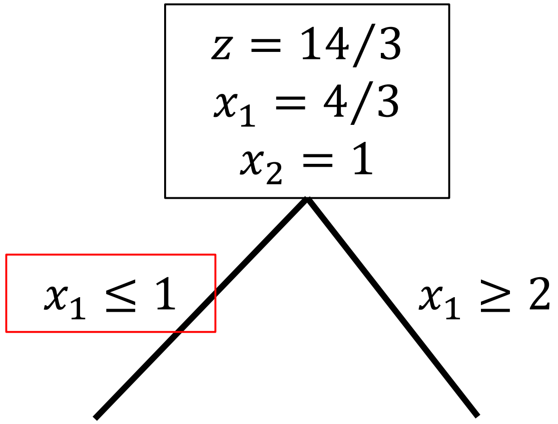
c) Partindo da solução obtida na alínea a) → o método de *branch and bound*

Da a) temos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	$^1/_3$	0	$-\,^2/_3$	0	$^4/_3$
x_2	0	1	0	0	1	0	1
s_2	0	0	1	1	-4	0	2
s_4	0	0	$\boxed{-\,^1/_3}$	0	$^2/_3$	1	$-\,^1/_3$
	0	0	$^2/_3$	0	$^2/_3$	0	$^{14}/_3$

Elemento Pivot

Simplex Dual



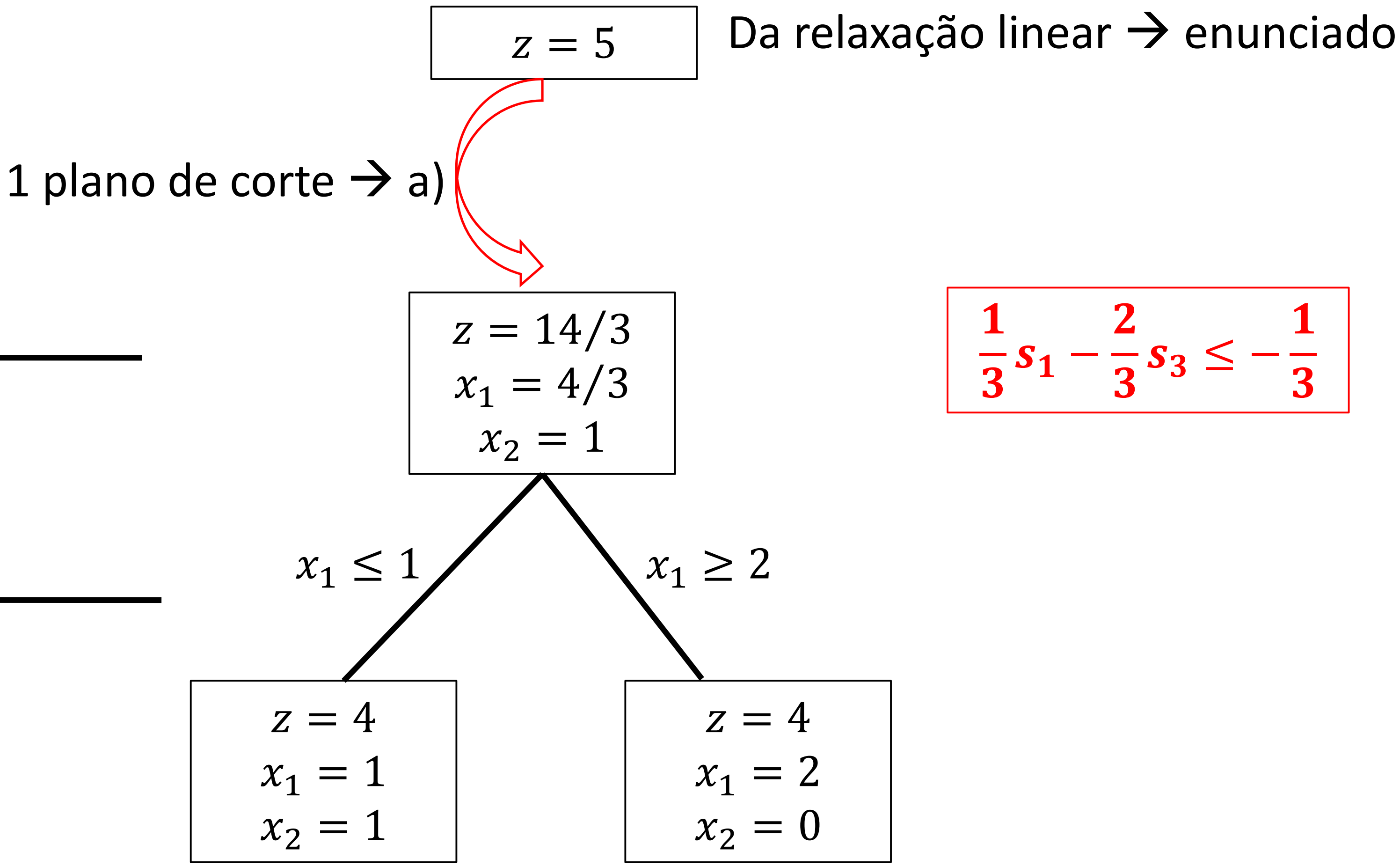
$$\boxed{\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 \leq -\frac{1}{3}}$$

14.1

c)

Da a) temos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
s_2	0	0	0	1	6	-3	1
s_1	0	0	1	0	-2	-3	1
	0	0	1	0	0	1	4



$$\boxed{\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 \leq -\frac{1}{3}}$$

Árvore toda explorada!

Solução inteira!!
(valor da solução = incumbente) → 2 soluções alternativas