Programação Linear - teoria de jogos

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

12 de novembro de 2020

Teoria de jogos

antes

- A teoria da dualidade estabelece relações entre dois problemas relacionados, o primal e o dual.

Guião

- A teoria de jogos estuda e modela o comportamento de pessoas quando as suas decisões interagem.
- Um exemplo ocorre em jogos de soma zero com dois jogadores.
- A designação advém de "o que um jogador ganha, o outro perde".
- A teoria de jogos não está relacionada com a solução de puzzles.

A programação linear (PL) e teoria da dualidade mostram:

- como os jogadores devem escolher as suas estratégias;
- que existe um ponto de equilíbrio, se usarem as estratégias óptimas.

Conteúdo

- Conceitos elementares de teoria de jogos
- Formulação de PL do jogo de soma zero com dois jogadores
- Relações minmax e dualidade

Exemplo 1: um jogo de soma zero com dois jogadores

- O jogador da coluna (X) escolhe uma opção, C1, C2 ou C3.
- O jogador da linha (Y) escolhe uma opção, L1, L2 ou L3.

A matriz de prémios do jogo *(pay-off matrix)*, designada por $A = [a_{ij}]$,

- representa o resultado da interacção entre as decisões dos jogadores.
- X recebe quando valor é positivo; paga, quando negativo.
- Para Y, é o contrário.

	(C1) papel	(C2) pedra	(C3) tesoura
papel (L1)	0	-1	1
pedra (L2)	1	0	-1
tesoura (L3)	-1	1	0

- Exemplo: X mostra papel (C1) e Y mostra tesoura (L3); X paga 1.

Estratégias

Tipos de estratégia

- Estratégia pura: o jogador usa sempre a mesma opção fixa.
- Estratégia mista: antes, o jogador estabelece uma distribuição de probabilidades de escolha de cada opção; quando joga, escolhe aleatoriamente as opções, obedecendo à distribuição estabelecida.

Uma estratégia mista é definida por um

- *vector de probabilidades* ou *vector estocástico*, um vector de elementos não-negativos cuja soma é a unidade.

- $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^\top$ é o vector (coluna) de probabilidades de X.
- $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m)$ é o vector (linha) de probabilidades de Y.

Exemplo 1: O que acontece se Y escolher mal a estratégia?

	(C1) papel	(C2) pedra	(C3) tesoura	Prob.
papel (L1)	0	-1	1	1
~~pedra (L2)~~	~~1~~	~~0~~	~~-1~~	~~0~~
~~tesoura (L3)~~	~~-1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

Caso 1

- Que estratégia deve X escolher se Y usar a estratégia pura de jogar sempre papel (L1)?

Exemplo 1: O que acontece se Y escolher mal a estratégia?

	(C1) papel	(C2) pedra	(C3) tesoura	Prob.
papel (L1)	0	-1	1	1
~~pedra (L2)~~	~~1~~	~~0~~	~~-1~~	~~0~~
~~tesoura (L3)~~	~~-1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

Caso 1

- Que estratégia deve X escolher se Y usar a estratégia pura de jogar sempre papel (L1)?
- X deve jogar sempre tesoura (C3).
- O valor esperado de ganho de X é 1.

Exemplo 1: O que acontece se Y escolher mal a estratégia?

	(C1) papel	(C2) pedra	(C3) tesoura	Prob.
papel (L1)	0	-1	1	1/2
pedra (L2)	1	0	-1	1/2
~~tesoura (L3)~~	~~-1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

Caso 2

- Que estratégia deve X escolher se Y jogar metade das vezes papel (L1) e a outra metade pedra (L2), e nunca jogar tesoura?

Exemplo 1: O que acontece se Y escolher mal a estratégia?

	(C1) papel	(C2) pedra	(C3) tesoura	Prob.
papel (L1)	0	-1	1	1/2
pedra (L2)	1	0	-1	1/2
~~tesoura (L3)~~	~~-1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

Caso 2

- Que estratégia deve X escolher se Y jogar metade das vezes papel (L1) e a outra metade pedra (L2), e nunca jogar tesoura?
- X deve jogar sempre papel (C1): ganhará metade das vezes, empatará a outra metade e nunca perde.
- O valor esperado de ganho de X é 1/2.

Qual o valor esperado de ganho de X (ou valor do jogo)?

- Cada jogada possível ocorre com probabilidade $y_i \times x_j$, dado que os jogadores escolhem de uma forma independente.
- Valor esperado de ganho de X no jogo é:

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \qquad (= yAx, \text{ em notação matricial}).$$

Caso 1: Y sempre papel (L1); X sempre tesoura (C3)

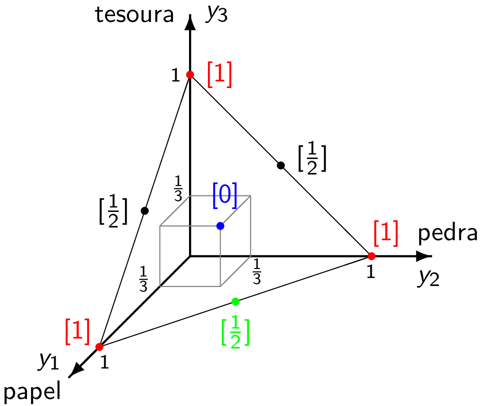
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Caso 2: Y metade papel (L1), metade pedra (L2); X sempre papel (C1)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Estratégias de Y e ganho de X: interpretação geométrica

- Estratégias de Y são os pontos do plano.



Estratégias de Y:

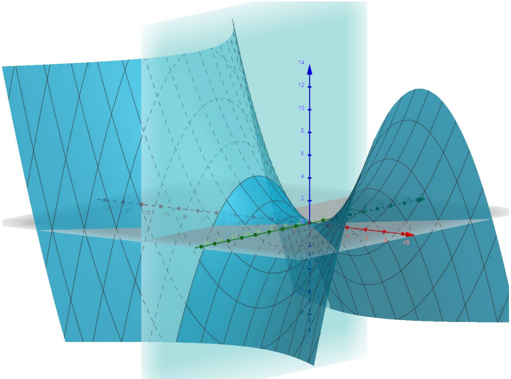
- a vermelho: estratégias puras.
- a verde, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$: estratégia metade papel, metade pedra.
- a azul, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: estratégia mista óptima de Y.

[Valor esperado do ganho de X]

- quando X escolhe a melhor estratégia para responder a Y (ver slide seguinte).

- O valor esperado do ganho de X não é uma função linear das coordenadas do plano; é 0 se Y usar a estratégia mista óptima.

A função $G(x, y)$ tem forma de uma sela



Cada ponto do domínio é um par de vectores de probabilidade (x, y)

- Se Y escolher um ponto (uma estratégia) não-óptima $\widehat{y}$,
- e X escolher ponto com valor máximo ao longo dessa coordenada, $x^*_{\widehat{y}}$ (a melhor estratégia para responder a $\widehat{y}$),
- o ganho de X é $G(x^*_{\widehat{y}}, \widehat{y}) = \widehat{y}Ax^*_{\widehat{y}}$.

A figura mostra a função $f(x, y) = x^2 - y^2$, que também é em forma de sela.

Se X e Y usarem estratégias óptimas, há equilíbrio

Objectivo e assumpção: cada jogador

- quer maximizar o valor esperado do seu ganho, e
- é capaz de identificar a sua estratégia óptima, qualquer que seja a estratégia do adversário, mesmo a que lhe é mais adversa.(*)

Em resultado disso, atinge-se um *ponto de equilíbrio*

- Há equilíbrio num jogo quando nenhum jogador tem vantagem em alterar a sua estratégia se o adversário não o fizer.

- E esse equilíbrio existe sempre:

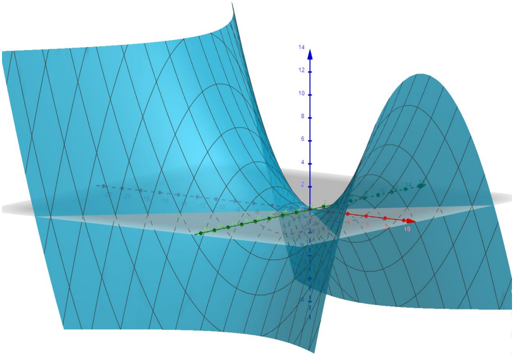
Teorema (von Neumann (1928))

Qualquer jogo finito de soma zero de dois jogadores com estratégias mistas tem um ponto de equilíbrio.

Vamos ver uma prova que usa a teoria da dualidade.

(*) Há quem questione se é assim que as pessoas decidem. A área de Behavioral Game Theory é uma área actual de investigação.

O ponto de equilíbrio é um ponto de sela



- O ponto de sela tem coordenadas (x^*, y^*), em que x^* e y^* são as estratégias óptimas de X e Y, respectivamente.
- Aí, X consegue o ganho máximo face à estratégia y^*,
- e Y consegue o pagamento mínimo face à estratégia x^*.

Exemplo 2

- Equilíbrio não significa que todos os jogos sejam equitativos, *i.e.*, com iguais valores esperados de ganho.

- Se antecipar prémios compensadores, um jogador pode ter interesse em pagar para entrar num jogo não equitativo.

	(C1)	(C2)	(C3)
(L1)	-1	2	-1
(L2)	-1	0	2
(L3)	2	-1	-1

- Se fossem o jogador X, quanto é que estavam dispostos a pagar para entrar neste jogo?

Exemplo 2

- Equilíbrio não significa que todos os jogos sejam equitativos, *i.e.*, com iguais valores esperados de ganho.

- Se antecipar prémios compensadores, um jogador pode ter interesse em pagar para entrar num jogo não equitativo.

	(C1)	(C2)	(C3)
(L1)	-1	2	-1
(L2)	-1	0	2
(L3)	2	-1	-1

- Se fossem o jogador X, quanto é que estavam dispostos a pagar para entrar neste jogo?
- Vamos usar um modelo de PL para determinar o que X espera ganhar.

Exemplo 2: que vector de probabilidades deve X escolher?

	(C1)	(C2)	(C3)
(L1)	-1	2	-1
(L2)	-1	0	2
(L3)	2	-1	-1

Variáveis de decisão

- x_j : percentagem de vezes que X escolhe a opção j, $j = 1, 2, 3$.

Valor esperado de ganho de X é:

- $-1x_1 + 2x_2 - 1x_3$, quando Y usa L1
- $-1x_1 \qquad + 2x_3$, quando Y usa L2
- $2x_1 - 1x_2 - 1x_3$, quando Y usa L3

X quer escolher a estratégia que maximiza o seu ganho,

- mas Y vai usar a estratégia que melhor se lhe opõe.
- O ganho de X nunca irá ser superior ao menor destes valores.

Exemplo 2: modelo de PL e solução óptima de X

$$
\begin{array}{llcrrr}
\max & v & & & & \\
\text{suj. a} & v & \leq & -1x_1 & +2x_2 & -1x_3 \\
& v & \leq & -1x_1 & & +2x_3 \\
& v & \leq & 2x_1 & -1x_2 & -1x_3 \\
& 1 & = & x_1 & +x_2 & +x_3 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0, v \text{ sem restrição}}
\end{array}
$$

A solução (estratégia mista) óptima do modelo do jogador X é:

- $x_1 = x_2 = 3/8, \quad x_3 = 2/8 \quad v = 1/8.$

	(C1)	(C2)	(C3)	Ganho
(L1)	-1	2	-1	1/8
(L2)	-1	0	2	1/8
(L3)	2	-1	-1	1/8
	$x_1 = 3/8$	$x_2 = 3/8$	$x_3 = 2/8$	

Qualquer que seja a estratégia de Y, o ganho esperado de X é 1/8:

- trata-se de um ganho esperado *garantido*.

Exemplo 2: que vector de probabilidades deve Y escolher?

	(C1)	(C2)	(C3)
(L1)	-1	2	-1
(L2)	-1	0	2
(L3)	2	-1	-1

Variáveis de decisão

- y_i : percentagem de vezes que Y escolhe a opção i, $i = 1, 2, 3$.

Valor esperado dos pagamentos de Y a X é:

- $-1y_1 - 1y_2 + 2y_3$, quando X usa C1
- $2y_1 \qquad - 1y_3$, quando X usa C2
- $-1y_1 + 2y_2 - 1y_3$, quando X usa C3

Y quer escolher a estratégia que minimiza os seus pagamentos a X,

- mas X vai usar a estratégia que melhor se lhe opõe.
- Os pagamentos a X nunca serão inferiores ao maior destes valores.

Exemplo 2: modelo de PL e solução óptima de Y

$$
\begin{array}{llcrrr}
\min & w & & & & \\
\text{suj. a} & w & \geq & -1y_1 & -1y_2 & +2y_3 \\
 & w & \geq & 2y_1 & & -1y_3 \\
 & w & \geq & -1y_1 & +2y_2 & -1y_3 \\
 & 1 & = & y_1 & +y_2 & +y_3 \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0, w \text{ sem restrição}}
\end{array}
$$

A solução (estratégia mista) óptima do modelo do jogador Y é:

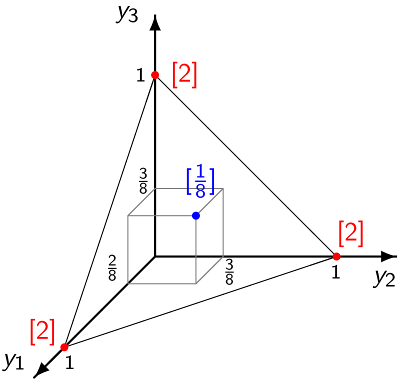
- $y_1 = 2/8, \qquad y_2 = y_3 = 3/8, \qquad w = 1/8.$

	(C1)	(C2)	(C3)
(L1)	-1	2	-1
(L2)	-1	0	2
(L3)	2	-1	-1
Pagt.	1/8	1/8	1/8

Prob.
$y_1 = 2/8$
$y_2 = 3/8$
$y_3 = 3/8$

- O pagamento esperado mínimo *garantido* é $1/8$.

- Estratégias de Y são os pontos do plano.



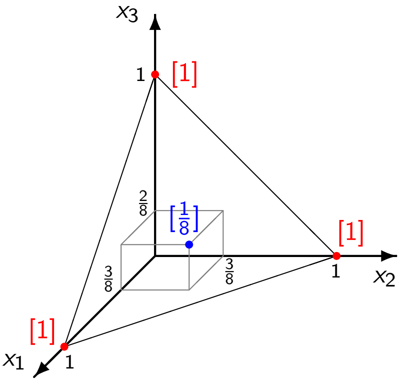
Estratégias de Y e [ganhos de X]:

- Pontos a vermelho são as estratégias puras.
- Ponto a azul, $(\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$, é a estratégia mista óptima de Y.

- Nota: verificar no modelo de PL de X que X pode ganhar 2 se Y usar qualquer uma das estratégias puras.

Estratégias de X e ganho de Y: interpretação geométrica

- Estratégias de X são os pontos do plano.



Estratégias de X e [ganhos de Y]:

- Pontos a vermelho são as estratégias puras.
- Ponto a azul, $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8})^\top$, é a estratégia mista óptima de X.

- Nota: verificar no modelo de PL de Y que Y pode ganhar 1 (ou seja, pagar -1 a X) se X usar qualquer uma das estratégias puras.

Os problemas de X e Y formam um par primal - dual

$$
\begin{array}{llcrrrc}
\max & v & & & & & \text{Var. dual} \\
\text{suj. a} & v & \leq & -1x_1 & +2x_2 & -1x_3 & (y_1) \\
 & v & \leq & -1x_1 & & +2x_3 & (y_2) \\
 & v & \leq & 2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & (y_3) \\
 & 1 & = & x_1 & +x_2 & +x_3 & (w) \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0, v \text{ sem restrição}} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcrrrc}
\min & w & & & & & \text{Var. dual do dual} \\
\text{suj. a} & w & \geq & -1y_1 & -1y_2 & +2y_3 & (x_1) \\
 & w & \geq & 2y_1 & & -1y_3 & (x_2) \\
 & w & \geq & -1y_1 & +2y_2 & -1y_3 & (x_3) \\
 & 1 & = & y_1 & +y_2 & +y_3 & (v) \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0, w \text{ sem restrição}} & \\
\end{array}
$$

- Os valores dos óptimos dos dois problemas, v^* e w^*, são iguais.

- nota: a uma restrição de igualdade, corresponde uma variável dual sem restrição de sinal.

O teorema minmax, de novo

Teorema (von Neumann (1928), Gale, Kuhn, Tucker (1951))

- Qualquer jogo finito de soma zero de dois jogadores com estratégias mistas tem um ponto de equilíbrio, em que o valor maxmin é igual ao valor minmax:

$$\max_x \min_y yAx = y^* Ax^* = \min_y \max_x yAx$$

- Prova: é a mesma relação do teorema da dualidade forte, que explicitámos do seguinte modo:

$$\max cx = cx^* = y^* Ax^* = y^* b = \min yb$$

- Como vimos, yAx é a função que representa o ganho de X, que X procura maximizar, e Y minimizar.

Notas - I

- O teorema que von Neumann provou, em 1928, usando o Fixed Point Theorem de Brouwer, é hoje conhecido por Teorema Minmax.
- Um dos marcos da fundação da teoria de jogos é a publicação, em 1944, do livro de John von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior;
- A teoria de jogos tem aplicações na análise de "uma série de fenómenos do mundo real, desde corridas a armamentento a escolhas políticas óptimas de candidatos presidenciais, de políticas de vacinação a negociações salariais da liga principal de beisebol. E hoje está estabelecida tanto nas ciências sociais como numa ampla gama de outras ciências."$^{(*)}$.

(*)) texto relativo à edição comemorativa do livro, no 60.º aniversário, em 2004:
https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691130613/theory-of-games-and-economic-behavior

Notas - II

- O desenvolvimento da teoria de programação linear tornou evidentes as relações com a teoria de jogos:
  - Gale, Kuhn, Tucker (1951) apresentaram uma nova prova do Teorema Minmax usando teoria da dualidade.
  - Dantzig (1951) mostrou que programação linear era equivalente a teoria de jogos.
- Há muitos outros tipos de jogos.
- Em 1950, John Nash estabeleceu as bases da teoria de jogos não-cooperativos e provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas, denominado de *Equilíbrio de Nash*.

Bibliografia

- John von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.
- Gale D, Kuhn HW, Tucker AW, Linear programming and the theory of games. In: Koopmans TC (ed) Activity analysis of production and allocation. Wiley, New York, pp 317–329, 1951.
- Dantzig GB, A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem. In: Koopmans TC (ed) Activity analysis of production and allocation. Wiley, New York, pp 330–335, 1951
- J. F. Nash Jr., Equilibrium Points in n-person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, pp. 48–49, 1950.
- J. F. Nash Jr., Non-Cooperative Games. PhD. Thesis. Princeton University Press, 1950.
- J. F. Nash Jr., The Bargaining Problem. Econometrica, pp. 155–162, 1950.
- J. F. Nash Jr., Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics, pp. 286–295, 1951.

Fim