10.1

Uma transportadora opera entre três localidades de origem e três localidades de destino. Os custos unitários de operação entre as origens e os destinos são dados pela seguinte tabela:

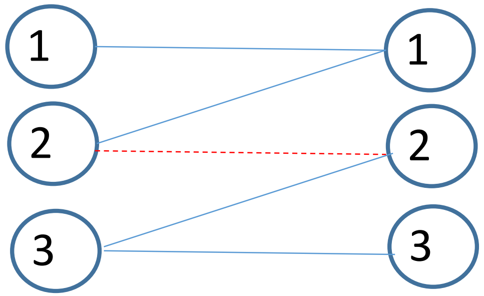
	1	2	3
1	2	6	8
2	4	3	5
3	1	7	3

As disponibilidades das origens são, respetivamente, iguais a 20, 15 e 30. As procuras nos destinos são, respetivamente, iguais a 35, 20 e 10.

a) Partindo da solução inicial dada pelo método do canto NW, determine a solução ótima.

10.1 – a) resolução

		1 v_1 = -2	2 v_2 = -1	3 v_3 = 3	
u_1 = 0	1	20 2	5 6	11 8	~~20~~
u_2 = 2	2	$15-\theta$ 4	$0+\theta$ 3	6 5	~~15~~
u_3 = 6 Atrativo	3	-7 $+\theta$ 1	$20-\theta$ 7	10 3	~~30~~ ~~10~~
		~~35~~ ~~15~~	~~20~~	~~10~~	65 65



m+n-1 = 3+3-1 = 5 → **Nok!**

Sol. Degenerada, acrescentar um zero numa célula não básica (arco com fluxo nulo) → 5 básicas (árvore formada)!

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

$$\boldsymbol{\theta_{max} = min\{15, 20\} = 15}$$

1º Básicas, por exemplo:

$$2 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 2 = 0 - v_1 \leftrightarrow v_1 = -2$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{12} = C_{12} - u_1 + v_2 \leftrightarrow \delta_{12} = 6 - 0 + (-1) = 5$$

10.1 – a) resolução

Atrativo

		v_1 = -2 1	v_2 = -8 2	v_3 = -4 3	
u_1 = 0	1	$20-\theta$ 2	-2 $+\theta$ 6	4 8	$\cancel{20}$
u_2 = -5	2	7 4	15 3	6 5	$\cancel{15}$
u_3 = -1	3	$15+\theta$ 1	$5-\theta$ 7	10 3	$\cancel{30}$ $\cancel{10}$
		$\cancel{35}$ $\cancel{15}$	$\cancel{20}$	$\cancel{10}$	65 65

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

1º Básicas, por exemplo:

$$2 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 2 = 0 - v_1 \leftrightarrow v_1 = -2$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{12} = C_{12} - u_1 + v_2 \leftrightarrow \delta_{12} = 6 - 0 + (-8) = -2$$

$$\boldsymbol{\theta_{max} = min\{5, 20\} = 5}$$

10.1 – a) resolução

		1 v_1 = -2	2 v_2 = -6	3 v_3 = -4	
u_1 = 0	1	15 2	5 6	$\boxed{4}$ 8	~~20~~
u_2 = -3	2	$\boxed{5}$ 4	15 3	$\boxed{4}$ 5	~~15~~
u_3 = -1	3	20 1	$\boxed{2}$ 7	10 3	~~30~~ ~~10~~
		~~35~~ ~~15~~	~~20~~	~~10~~	65 65

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

1º Básicas, por exemplo:

$$2 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 2 = 0 - v_1 \leftrightarrow v_1 = -2$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{13} = C_{13} - u_1 + v_3 \leftrightarrow \delta_{13} = 8 - 0 + (-4) = 4$$

$\delta_{ij} \geq 0$ → Solução ótima!

Custo Total = 15*2+5*6+15*3+20*1+10*3 = 155 UM

10.2

O seguinte problema de transportes ilustra o conhecido "Paradoxo do Problema de Transportes": há situações em que transportando mais unidades entre as origens e os destinos se podem obter custos totais mais baixos.

	D	E	F	G	
A	1	6	3	5	20
B	7	3	1	6	10
C	8	3	4	2	25
	11	13	17	14	

a) Apresente a solução inicial gerada pelo método dos custos mínimos.

b) Determine a solução ótima do problema e o seu custo.

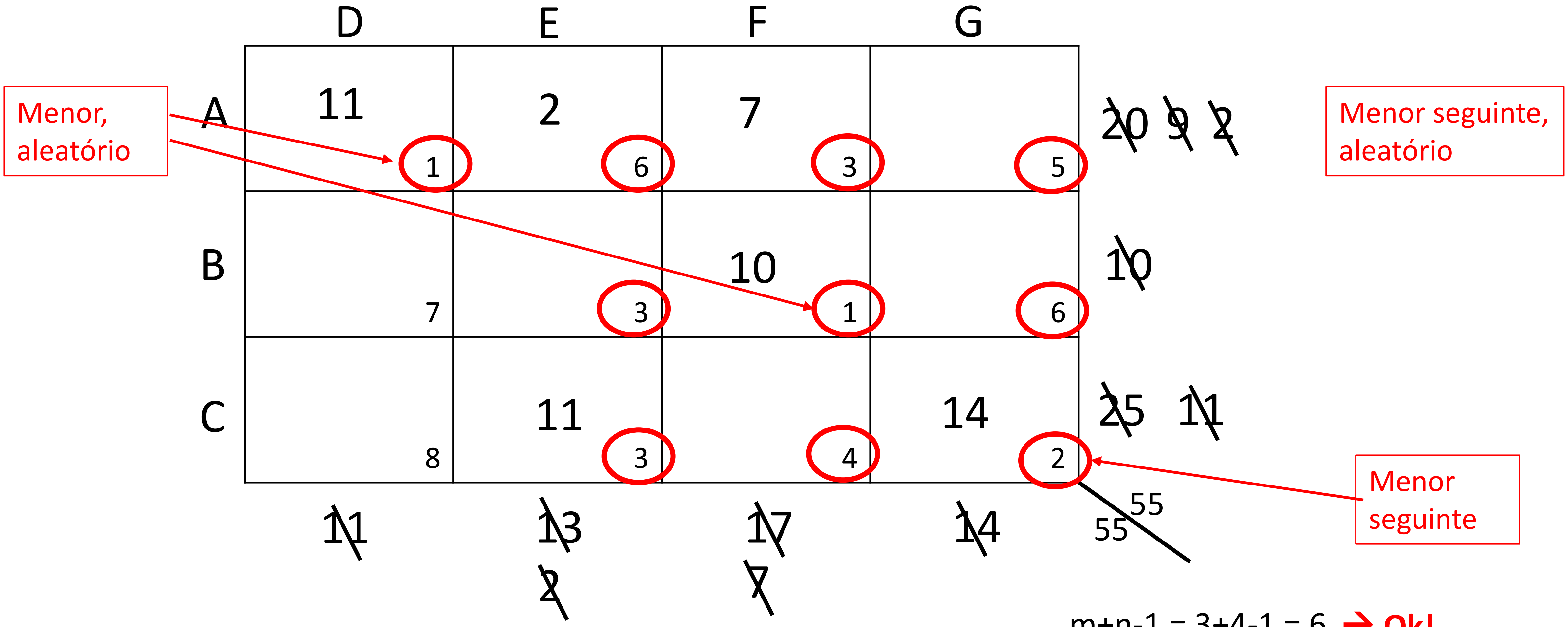
c) Se a quantidade requerida pelo destino D passasse de 11 a 12 unidades e a quantidade oferecida pela origem B passasse de 10 a 11 unidades, qual seria a nova solução ótima?

Pista: Resolva a partir da solução da alínea a), adicionando uma unidade à casa 21 (ou seja, BD), o que dá origem a uma solução não-básica; a partir dessa solução, obtenha uma solução básica, e depois otimize. Respostas que envolvam a solução do problema desde o início não serão consideradas.

d) Compare o custo da nova solução ótima com o custo da alínea b). Usando linguagem corrente, explique porque é que a nova solução é mais económica.

e) Identifique a relação que é necessário existir entre os valores de ci j e do ±i j (neste caso, entre c21 e ±21 da solução ótima da alínea b)) para que o paradoxo possa ocorrer. Justifique.

10.2 – a) resolução



	D	E	F	G	
A	11 1	2 6	7 3	5	~~20~~ ~~9~~ ~~2~~
B	7	3	10 1	6	~~10~~
C	8	11 3	4	14 2	~~25~~ ~~11~~
	~~11~~	~~13~~ ~~2~~	~~17~~ ~~7~~	~~14~~	55 55

Menor, aleatório

Menor seguinte, aleatório

Menor seguinte

m+n-1 = 3+4-1 = 6 → **Ok!**

Solução inicial válida!

10.2 – b) resolução - Determinar a solução ótima do problema e o seu custo

		D $v_1 = -1$	E $v_2 = -6$	F $v_3 = -3$	G $v_4 = -5$	
$u_1 = 0$	A	11 1	$2 - \theta$ 6	$7 + \theta$ 3	$\boxed{0}$ 5	20
$u_2 = -2$	B	$\boxed{8}$ 7	$\boxed{-1}$ $+\theta$ 3	$10 - \theta$ 1	$\boxed{3}$ 6	10
$u_3 = -3$	C	$\boxed{10}$ 8	11 3	$\boxed{4}$ 4	14 2	25
		11	13	17	14	

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

1º Básicas, por exemplo:

$$1 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 1 = 0 - \ v_1 \leftrightarrow v_1 = -1$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{14} = C_{14} - u_1 + v_4 \leftrightarrow \delta_{14} = 5 - 0 + (-5) = 0$$

$$\boldsymbol{\theta_{max} = min\{2, 10\} = 2}$$

10.2 – b) resolução - Determinar a solução ótima do problema e o seu custo

		D $v_1 = -1$	E $v_2 = -5$	F $v_3 = -3$	G $v_4 = -4$	
$u_1 = 0$	A	11 1	$\boxed{1}$ 6	9 3	$\boxed{1}$ 5	20
$u_2 = -2$	B	$\boxed{8}$ 7	2 3	8 1	$\boxed{4}$ 6	10
$u_3 = -2$	C	$\boxed{9}$ 8	11 3	$\boxed{3}$ 4	14 2	25
		11	13	17	14	

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

1º Básicas, por exemplo:

$$1 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 1 = 0 - \ v_1 \leftrightarrow v_1 = -1$$

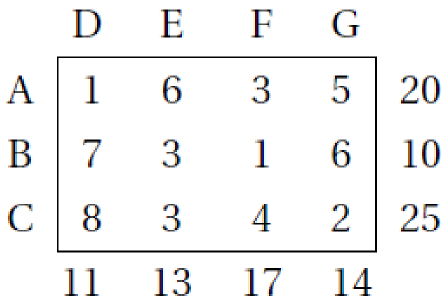
Não básicas (ganhos):

$$\delta_{14} = C_{14} - u_1 + v_4 \leftrightarrow \delta_{14} = 5 - 0 + (-5) = 0$$

$\delta_{ij} \geq 0$ → Solução ótima!

Custo Total = 11*1+9*3+2*3+8*1+11*3+14*2 = 113 UM

10.2



	D	E	F	G	
A	1	6	3	5	20
B	7	3	1	6	10
C	8	3	4	2	25
	11	13	17	14	

c) Se a quantidade requerida pelo destino D passasse de 11 a 12 unidades (D: 11 → 12) e a quantidade oferecida pela origem B passasse de 10 a 11 unidades (B: 10 → 11), qual seria a nova solução ótima?

Pista: Resolva a partir da solução da alínea a), adicionando uma unidade à casa 21 (ou seja, BD), o que dá origem a uma solução não-básica; a partir dessa solução, obtenha uma solução básica, e depois otimize.

Respostas que envolvam a solução do problema desde o início não serão consideradas.

10.2 – c) resolução – Aumentar D: 11 → 12 e B: 10 → 11. Nova solução e seu custo

	D	E	F	G	
A	$11+\theta$ 1	6	$9-\theta$ 3	5	20
B	$\boxed{8}$ $1-\theta$ 7	2 3	$8+\theta$ 1	6	11
C	8	11 3	4	14 2	25
	12	13	17	14	

m+n-1 = 3+4-1 = 6 → **Nok!**

Há 7 células preenchidas, logo a solução é não básica!

Célula BD aumenta 8 ao custo, logo é essa célula que tem de ficar não básica.

10.2 – c) resolução – Aumentar D: 11 → 12 e B: 10 → 11. Nova solução e seu custo

		D $v_1 = -1$	E $v_2 = -5$	F $v_3 = -3$	G $v_4 = -4$	
$u_1 = 0$	A	12 1	$\boxed{1}$ 6	8 3	$\boxed{1}$ 5	20
$u_2 = -2$	B	$\boxed{8}$ 7	2 3	9 1	$\boxed{4}$ 6	11
$u_3 = -2$	C	$\boxed{9}$ 8	11 3	$\boxed{3}$ 4	14 2	25
		12	13	17	14	

m+n-1 = 3+4-1 = 6 → **Ok!**

Multiplicadores:

1º Básicas:

$$C_{ij} = u_i - v_j$$

Não básicas (ganhos):

$$\delta_{ij} = C_{ij} - u_i + v_j$$

1º Básicas, por exemplo:

$1 = u_1 - v_1 \leftrightarrow 1 = 0 - \ v_1 \leftrightarrow v_1 = -1$

Não básicas (ganhos):

$\delta_{14} = C_{14} - u_1 + v_4 \leftrightarrow \delta_{14} = 5 - 0 + (-5) = 0$

$\delta_{ij} \geq 0$ → Solução ótima!

Custo Total = 12*1+8*3+2*3+9*1+11*3+14*2 = 112 UM

10.2

d) Compare o custo da nova solução ótima com o custo da alínea b). Usando linguagem corrente, explique porque é que a nova solução é mais económica.

$$C_{Tb)} = 113$$

$$C_{Tc)} = 112$$

O custo diminuiu 1 UM, ao transportar mais uma unidade.

10.2

e) Identifique a relação que é necessário existir entre os valores de C_{ij} e do δ_{ij} (neste caso, entre C_{21} e δ_{21} da solução ótima da alínea b)) para que o paradoxo possa ocorrer. Justifique.

$$\delta_{21} = 8$$

$$C_{21} = 7$$

$$(\delta_{21} > C_{21})$$

Ao incrementar uma unidade entre B e D tem um custo acrescido de 7 UM ($C_{21} = 7$), mas traduz-se numa economia de 8 ($\delta_{21} = 8$) resultante de alterar quantidades transportadas ao longo de um ciclo.

Isto permite fornecer clientes a partir de origens com custos de transporte unitário mais baixos

9.2

O responsável pelo planeamento da ABC deve decidir o número de automóveis a produzir mensalmente em cada uma das fábricas da empresa, sediadas em Alenquer, Barcelos e Coimbra. Os automóveis são depois enviados para centros de consumo em Douro, Évora e Faro. As capacidades máximas de produção mensais de cada fábrica e os respetivos custos unitários de produção (de um automóvel) são os indicados na seguinte tabela:

Fábrica	Capacidade Mensal	Custo Unitário de Produção
Alenquer	400	120
Barcelos	400	100
Coimbra	300	110

Para o mês em planeamento, as procuras em Douro, Évora e Faro são de 250, 250 e 400,respetivamente. Os custos unitários de transporte desde cada fábrica para cada centro de consumo são os seguintes:

	D	E	F
A	10	50	100
B	50	90	120
C	10	60	90

a) Construa um modelo de transportes que minimize os custos totais de operação.

b) Será que todas as fábricas irão laborar à capacidade máxima?

c) Os custos unitários de produção da fábrica de Coimbra acima apresentados são uma aproximação. Na realidade, o custo unitário das primeiras 150 unidades é de 100, enquanto todas as restantes unidades, até ao máximo de 300, são produzidas a um custo unitário de 120. Construa um modelo para esta situação, apresentando um quadro de transporte com uma solução básica admissível para este modelo. Justifique.

9.2 – a) resolução

(custos X10)

	D	E	F	
A	13	17	22	400
B	15	19	22	400
C	12	17	20	300
	250	250	400	1100 900

→ **Nok!**

9.2 – a) resolução

(custos X10)

	D	E	F	Fict.	
A	13	17	22	0	400
B	15	19	22	0	400
C	12	17	20	0	300
	250	250	400	200	1100 1100

→ **ok!**

Modelo de Transporte Balanceado.

9.2 – b)

Será que todas as fábricas irão laborar à capacidade máxima?

Não

Há excesso de capacidade (= 1100) em relação à procura (= 900) pelo que é necessário considerar um destino/procura fictícia.

9.2 – c)

Os custos unitários de produção da fábrica de Coimbra acima apresentados são uma aproximação. Na realidade, o custo unitário das primeiras 150 unidades é de 100, enquanto todas as restantes unidades, até ao máximo de 300, são produzidas a um custo unitário de 120. Construa um modelo para esta situação, apresentando um quadro de transporte com uma solução básica admissível para este modelo. Justifique.

$C_{inicial}$	12	17	20	0	300

Custos de transporte

Coimbra	**10**	**60**	**90**

Custos de produção:

100 UM para as primeiras 150 unidades
120 UM para as 150 unidades seguintes

$C_{de\ 0\ a\ 150}$	11	16	19	0	150
$C_{de\ 150\ a\ 300}$	13	18	21	0	150

Custos totais

110	**160**	**190**	< 150
130	180	210	> 150

9.2 – c) resolução

(custos X10)

Custo Mínimo

	D	E	F	Fict.	
A	13	250 17	150 22	0	~~400~~ ~~150~~
B	15	19	200 22	200 0	~~400~~ ~~200~~
C	150 11	16	19	0	~~150~~
C’	100 13	18	50 21	0	~~150~~ ~~50~~
	~~250~~ ~~100~~	~~250~~	~~400~~ ~~350~~ ~~200~~	~~200~~	

m+n-1 = 4+4-1 = 7 → **Ok!**