

Programação Linear - representação matricial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

9 de Março de 2022

Programação Linear - representação matricial

antes

- O algoritmo simplex foi implementado usando quadros.

Guião

- Uma matriz é uma forma de representar e condensar informação.
- As operações realizadas podem ser descritas usando matrizes.
- A representação matricial oferece uma nova perspectiva, que permite evidenciar o significado de componentes do quadro simplex,
- e conceber operações mais complexas, e.g., mudar directamente de um quadro inicial para qualquer outro quadro final, efectuando simultaneamente um conjunto dos pivôs.

depois

- A representação matricial será usada em análise de sensibilidade.

- Sistema de equações e soluções básicas
- Operação matricial de mudança de base
- Significado de alguns componentes do quadro simplex
- Referência a aplicações
 - Análise de sensibilidade
 - Implementação computacional do algoritmo simplex
- Apêndice
 - Perspectiva: o algoritmo simplex como leilão
 - Implementação computacional do algoritmo simplex
 - Perspectiva: representação em bases diferentes

Problema de PL e representação matricial

Geral	Exemplo																																																			
$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{0}\mathbf{s} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{su}j. \quad & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \quad \quad + s_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$																																																			
a matriz do quadro inicial:																																																				
<table><tr><td>\mathbf{A}</td><td>\mathbf{I}</td><td>\mathbf{b}</td></tr><tr><td>$-\mathbf{c}$</td><td>$\mathbf{0}$</td><td>0</td></tr></table>	\mathbf{A}	\mathbf{I}	\mathbf{b}	$-\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$	0	<table><tr><td></td><td>z</td><td>x₁</td><td>x₂</td><td>x₃</td><td>s₁</td><td>s₂</td><td>s₃</td><td></td></tr><tr><td>s₁</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>40</td></tr><tr><td>s₂</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>150</td></tr><tr><td>s₃</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>z</td><td>1</td><td>-30</td><td>-20</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃		s ₁	0	1	1	2	1	0	0	40	s ₂	0	2	2	1	0	1	0	150	s ₃	0	2	1	0	0	0	1	20	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
\mathbf{A}	\mathbf{I}	\mathbf{b}																																																		
$-\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$	0																																																		
	z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃																																													
s ₁	0	1	1	2	1	0	0	40																																												
s ₂	0	2	2	1	0	1	0	150																																												
s ₃	0	2	1	0	0	0	1	20																																												
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0																																												

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{(n-m)}]$ e $\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_m]$, sendo $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ um vector coluna com um elemento 1 na posição i .
- $\mathbf{c} = (c_1 c_2 \dots c_{(n-m)})$

Sistema de equações e soluções básicas

- Dada uma qualquer escolha de variáveis básicas, o problema $\max z = \mathbf{c}\mathbf{x}$, suj. a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ é equivalente a:

$$\begin{array}{lll} \max z & = & \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \\ \text{suj. a} & & \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- em que o vector de variáveis \mathbf{x} é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_B \in \mathbb{R}_+^{m \times 1} & : \text{ subvector de } \mathbf{x} \text{ com as variáveis básicas,} \\ \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}_+^{(n-m) \times 1} & : \text{ subvector de } \mathbf{x} \text{ com as variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- o vector de custos \mathbf{c} é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{c}_B \in \mathbb{R}^{1 \times m} & : \text{ subvector de } \mathbf{c} \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ \mathbf{c}_N \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)} & : \text{ subvector de } \mathbf{c} \text{ com os custos das variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- a matriz \mathbf{A} é partida em duas submatrizes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m} & : \text{ submatriz de } \mathbf{A} \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} & : \text{ submatriz de } \mathbf{A} \text{ das variáveis não-básicas.} \end{array}$$

Resolve-se o sistema de equações em ordem a \mathbf{x}_B ...

- pré-multiplicando o sistema de equações por \mathbf{B}^{-1} , obtendo-se o seguinte sistema de equações equivalente:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N) &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N\end{aligned}$$

- Substituindo \mathbf{x}_B na função objectivo, obtém-se:

$$\begin{aligned}Z &= \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = \\ &= \mathbf{c}_B(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = \\ &= \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N\end{aligned}$$

Quando $\tilde{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, a solução do sistema de equações é a *solução básica* $\tilde{\mathbf{x}}$:

- $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_B \\ \tilde{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$
- que tem um valor de função objectivo $\tilde{z} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B\tilde{\mathbf{x}}_B$

- Se $\tilde{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$ então $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma *solução básica admissível*.

Exemplo 0: o quadro inicial

- As colunas das vars básicas s_1, s_2 e s_3 formam a matriz identidade.

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- Para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas s_1, s_2 e s_3 ; as matrizes \mathbf{B}, \mathbf{N} e os vectores \mathbf{c}_B e \mathbf{c}_N são:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Assim, $\mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}$.

Exemplo 0: quando $B = I = B^{-1}$ e $c_B B^{-1} = 0$,

- o resultado são as equações tal como aparecem no quadro inicial:

$$\begin{aligned}x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\x_B &= b - N x_N \\ \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\z &= 0 b + (c_N - 0 N) x_N \\z &= 0 + [30 \ 20 \ 10] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Os valores das variáveis básicas são: $\tilde{x}_B = (s_1, s_2, s_3)^T = (40, 150, 20)^T$
- Os valores das vars não-básicas são: $\tilde{x}_N = (x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$
- $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^T = (0, 0, 0, 40, 150, 20)^T$

Exemplo 1: efectuar um pivô ...

- para um vértice adjacente, entrando x_1 na base, e saindo s_3 ,

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- equivale a resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas s_1, s_2 e x_1 ; as matrizes \mathbf{B}, \mathbf{N} e os vectores \mathbf{c}_B e \mathbf{c}_N são:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} c_2 & c_3 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Não vamos resolver este exemplo, mas sim o seguinte, em que o novo quadro corresponde a um vértice que não é adjacente.

Exemplo 2: efectuar vários pivôs simultaneamente ...

- para um vértice não adjacente, em que as vars básicas são x_3, s_2 e x_2 .

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- Para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas x_3, s_2 e x_2 , as matrizes \mathbf{B} , \mathbf{N} e os vectores \mathbf{c}_B e \mathbf{c}_N são:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & c_2 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} & \mathbf{c}_N &= \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Nota: as colunas da matriz \mathbf{B} e do vector \mathbf{c}_B estão ordenadas na sequência pretendida para as variáveis básicas no quadro final.

Exemplo 2: cálculo de B^{-1} e $c_B B^{-1}$

- Dada uma matriz B , podemos calcular a matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$, que aparecem várias vezes nos cálculos:

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & e_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Perspectiva: a matriz B^{-1} como operador matricial

- A matriz B^{-1} opera uma mudança de base, guardando informação sobre todos os pivôs efectuados para fazer entrar na base as variáveis básicas pretendidas.

Exemplo 2: cálculo da solução, determinando $\tilde{\mathbf{x}}_B$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \mathbf{x}_N$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- A solução é admissível: $\tilde{\mathbf{x}}_B$ têm coordenadas não-negativas.
- Os valores das variáveis básicas são: $\tilde{\mathbf{x}}_B = (x_3, s_2, x_2)^T = (10, 100, 20)^T$
- Os valores das vars não-básicas são: $\tilde{\mathbf{x}}_N = (x_1, s_1, s_3)^T = (0, 0, 0)^T$
- $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^T = (0, 20, 10, 0, 100, 0)^T$

Exemplo 2: cálculo do valor da solução, \tilde{z}

$$z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N$$

$$z = [5 \ 0 \ 15] * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} + \left([30 \ 0 \ 0] - [5 \ 0 \ 15] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$z = 500 + [-5 \ -5 \ -15] * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- O valor da função objectivo da solução obtida, \tilde{z} , é 500.
- A solução também é óptima para o problema de maximização (dado que $z = 500 - 5x_1 - 5s_1 - 15s_3$).

Exemplo 2: o quadro inicial e o quadro final

- A informação anterior pode ser usada para construir o quadro final, reordenando as colunas.

quadro inicial		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

quadro final		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Os dois quadros apresentam dois sistemas de equações equivalentes, representados nas bases $\beta_{Q_I} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\beta_{Q_F} = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2\}$, respectivamente (ver Apêndice).

Uma base de um espaço vectorial é um conjunto ordenado de vectores linearmente independentes que geram esse espaço (e.g., $\beta_{Q_F} = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2\}$). Também designamos por base o conjunto ordenado de variáveis básicas (e.g., $\beta_{Q_F} = \{x_3, s_2, x_2\}$).

Motivação: as operações matriciais no quadro simplex

- De seguida, vamos realizar as mesmas operações, mas mantendo as colunas na mesma ordem em que aparecem no quadro simplex.
- Vamos identificar a matriz M que opera a mudança de base, do quadro inicial para o quadro final.
- A matriz do quadro final Q_F é o produto da multiplicação da matriz M pela matriz do quadro inicial Q_I :

$$Q_F = M * Q_I$$

Operação matricial de mudança de base - i

- Para obter o quadro simplex final em que as variáveis básicas são as variáveis de \mathbf{x}_B , temos de identificar:
 - a matriz \mathbf{B} , que é a submatriz de $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ com as colunas das variáveis básicas de \mathbf{x}_B , e
 - o vector \mathbf{c}_B , com os coeficientes do vector \mathbf{c} das mesmas variáveis.

A matriz que opera a mudança do quadro inicial para o final é:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$$

Prova:

- No quadro simplex final, as variáveis básicas são as pretendidas, porque:
 - a matriz identidade I aparece nas posições da matriz B , e
 - o vector nulo aparece na linha da função objectivo.

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} B \\ \hline -c_B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} B^{-1}B + 0(-c_B) \\ \hline c_B B^{-1}B + 1(-c_B) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

Operação matricial de mudança de base - iii

- O produto da multiplicação da matriz M pela matriz do quadro inicial Q_I é a matriz do quadro final Q_F :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & 0 \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & 0 & 0 \\ \hline \end{array} =$$
$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- Nota: tal como vimos, nas posições que a matriz B ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

O mesmo Exemplo 2

- Dado o Quadro Inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para obter o quadro com as variáveis básicas x_3, s_2 e x_2 , a matriz que opera a mudança de base é M :

$$B = [a_3 \quad e_2 \quad a_2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = [c_3 \quad 0 \quad c_2]$$

$$c_B = [10 \quad 0 \quad 20]$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 15 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo 2

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ \hline -1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 15 & 1 \\ \hline \end{array} \quad * \quad \begin{array}{c|cccc|ccc|c} & z & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ s_2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ s_3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline z & 1 & -30 & -20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|cccc|ccc|c} & z & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_3 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 10 \\ s_2 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -3/2 & 100 \\ x_2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline z & 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 500 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & 0 \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \quad *$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

=

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- No exemplo, o quadro final é a solução óptima, porque eu escolhi as variáveis básicas que sabia de antemão serem as da solução óptima.
- No caso geral, quando se escolhe um conjunto de variáveis básicas:
 - se algum elemento do vector $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ for negativo, obtém-se uma solução não-admissível;
 - se algum elemento dos vectores $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ ou $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}$ for negativo, obtém-se uma solução que não é óptima (prob. de maximização).

Linha da função objectivo do quadro óptimo

- Usam-se designações especiais para os coeficientes da linha da função objectivo do quadro óptimo.

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Custo reduzido da variável de decisão x_j

- é o valor do elemento $c_j - c_B B^{-1}a_j$ do vector $-(c - c_B B^{-1}A)$.
- Os valores do vector custo c são reduzidos de $c_B B^{-1}A$.

Preço-sombra da restrição i (recurso i)

- é o valor do elemento $(c_B B^{-1})_i$ do vector $c_B B^{-1}$.

- Vamos explorar o que significam na Análise de sensibilidade.

O vector $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$, e o vector \mathbf{c} reduzido de $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$

Perspectiva

- O vector $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ guarda informação sobre as transformações efectuadas na linha da função objectivo quando a ela se subtraem múltiplos das linhas pivôs.
- Vamos calcular $(\mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})$ e o resultado é $-(\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c})$.
- Exemplo: $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [5 \quad 0 \quad 15]$
- A forma como a função objectivo aparece no quadro óptimo é:

$$\begin{array}{rcll} & (& 30x_1 & + & 20x_2 & +10x_3 & &) \\ -5 & (& 1x_1 & + & 1x_2 & + 2x_3 & +1s_1 & = & 40) \\ -0 & (& 2x_1 & + & 2x_2 & + 1x_3 & & +1s_2 & = & 150) \\ -15 & (& 2x_1 & + & 1x_2 & & & + 1s_3 & = & 20) & = \\ \hline = - & (& 5x_1 & & & & +5s_1 & & +15s_3 & = & 500) \end{array}$$

Aplicação 1: análise de sensibilidade

- A *Análise de sensibilidade*, também designada por *Análise pós-otimização* é efectuada depois de obter a solução óptima,
 - para estudar os efeitos na solução óptima de uma alteração de dados.
-
- Neste âmbito, dispomos do quadro inicial e do quadro óptimo (que apresenta a matriz \mathbf{B}^{-1} e o vector $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$), o que permite construir a matriz que opera a mudança de base.
-
- Portanto, podemos recalcular o quadro final que resulta de uma alteração de um elemento dos vectores \mathbf{b} ou \mathbf{c} do quadro inicial.

Aplicação 2: implementação do algoritmo simplex

Ideia chave da implementação computacional:

- O algoritmo apenas mantém e actualiza a matriz \mathbf{B}^{-1} ,
- porque a matriz \mathbf{B}^{-1} e as matrizes do quadro inicial $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ são suficientes para calcular todos os elementos do quadro simplex.

Mas não é preciso calculá-los todos. Para determinar o elemento pivô,

- só é preciso calcular a linha da função objectivo (para identificar a coluna pivô), e
- a coluna do lado direito e a coluna pivô, para identificar a linha pivô.

- Não é necessário calcular mais nenhuma coluna; para actualizar a matriz \mathbf{B}^{-1} , apenas são necessárias as colunas das variáveis básicas.

- Informação adicional no Apêndice.

- A representação matricial oferece uma nova perspectiva das operações efectuadas no método simplex;
- explica o significado de componentes do quadro simplex;
- permite ver a forma de realizar operações mais complexas, como a mudança entre bases não adjacentes;
- permite conceber uma implementação do algoritmo simplex com grandes economias de cálculo, o que possibilita a resolução de problemas de muito grande dimensão.

Perspectiva: o algoritmo simplex como leilão

Ideias gerais

- O algoritmo simplex pode ser visto como um leilão em que as actividades competem pelos recursos disponíveis.
- Cada actividade tem um lucro associado, e necessita de recursos, pelos quais tem de pagar.
- Cada recurso tem um valor que resulta da procura pelas actividades.
- São as actividades capazes de pagar o valor de mercado dos recursos as que são realizadas (na solução óptima).
- O leilão é que determina o valor de cada recurso.

Perspectiva

- c_j é o valor (lucro) unitário da actividade j .
- $(\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1})_i$ é o valor de uma unidade de recurso i .

Significado de $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$ da actividade j

$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade j :

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1})_i \times a_{ij} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j, \quad \forall j,$$

- a_{ij} é a quantidade de recurso i usado numa unidade da actividade j .
- c_j é o valor unitário da actividade j .

Na solução óptima de um problema de maximização,

- se $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = 0$, o valor da actividade iguala o valor dos recursos usados; esta actividade dá o maior valor possível aos recursos;
- se $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da actividade; é melhor não a fazer, porque há outras que usam melhor os recursos.

- Cada actividade compete pelos recursos disponíveis, e paga por eles.
- O leiloeiro tem o poder de decidir os preços unitários dos recursos;
- o seu objectivo é maximizar o valor total dos recursos vendidos, e o que faz é ajustá-los iterativamente.

Em cada iteração:

- O leiloeiro anuncia o preço $(c_B B^{-1})_i$ tentativa de cada recurso i .
 - Face a esses preços, a actividade j tem um custo de uso de recursos $c_B B^{-1} a_j$.
 - Se o seu valor c_j for maior do que o custo, a actividade é atractiva; a licitação mais alta é a da actividade cujo saldo é mais positivo.
 - A actividade faz um lance para reservar recursos, alterando a quantidade reservada de cada recurso, e também cada preço.
-
- O leilão repete-se até à iteração em que nenhuma actividade licita.
 - As actividades óptimas são aquelas que repartem os recursos reservados, e os conseguem pagar aos preços finais do leilão.

Algoritmo simplex primal na forma matricial

- 1 /* Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas */
Calcular $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad \forall j$
- 2 /* Testar optimalidade (prob. de maximização) */
Se $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \geq 0, \forall j$, a solução é ótima. Senão,
- 3 /* Seleccionar coluna pivô k */

$$k = \operatorname{argmin}_{j \in N} \{ \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \}$$

- 4 Calcular coluna pivô, $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$
- 5 Se todos os elementos de $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k \leq 0$, a solução é ilimitada. Senão,
- 6 Calcular coluna do lado direito, $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, e seleccionar linha pivô p

$$p = \operatorname{argmin}_i \{ (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i / (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k)_i \}.$$

- 7 Actualizar a matriz \mathbf{B}^{-1} , e voltar ao passo 1.

Notar que $(\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1})_i$ é um caso particular de $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$ quando se trata da variável de folga i ($\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$ (a coluna i da matriz identidade) e $c_j = 0$).

Implementação: alguns pormenores

Adicionalmente

- A matriz \mathbf{A} é tipicamente uma matriz dispersa (esparsa). A percentagem de elementos não-zero de \mathbf{A} pode ser 2% ou 5%.
 - Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.
 - A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.
-
- A matriz \mathbf{B}^{-1} é guardada como o produto de uma matriz triangular inferior (*lower*) e uma matriz triangular superior (*upper*), i.e., uma factorização LU.
 - Isso permite a sua actualização eficiente em cada pivô.

- Um quadro simplex apresenta um conjunto de equações, das restrições e da função objectivo.
- Apesar de serem sempre as mesmas, as equações são representadas numa base diferente em cada quadro simplex.
- A análise das equações matriciais fornece uma perspectiva do significado de alguns componentes de um quadro simplex.

Lembrete

- Uma base de um espaço vectorial \mathcal{V} é um conjunto ordenado de vectores linearmente independentes que geram esse espaço (e.g., $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$).
- Qualquer vector \vec{v} do espaço vectorial \mathcal{V} pode ser representado como uma combinação linear (única) dos vectores da base:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m$$

- Os valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ são as coordenadas do vector \vec{v} na base β .

Exemplo: as mesmas equações em 2 quadros simplex

	z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	
s ₁	0	1	1	2	1	0	0	40
s ₂	0	2	2	1	0	1	0	150
s ₃	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

	z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	
x ₃	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s ₂	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x ₂	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

Quadro inicial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} & * \mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N} * \mathbf{x}_N \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} & * \mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} * \mathbf{x}_N \\
 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * \begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Quadro final:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_B & = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} * \mathbf{x}_N \\
 \begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Exemplo 1: Os elementos do vector $B^{-1}\mathbf{b}$ são

- as coordenadas do vector \mathbf{b} na base $\beta = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \begin{matrix} & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 \end{matrix} * B^{-1}\mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = 10 \mathbf{a}_3 + 100 \mathbf{e}_2 + 20 \mathbf{a}_2$$

- As coordenadas do vector \mathbf{b} na base $\beta = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2\}$ são os valores das variáveis na solução $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = (x_3, s_2, x_2)^T = (10, 100, 20)^T$.
- A equação matricial, expressa com os vectores coluna do quadro inicial, mostra como as actividades usam os recursos.

Exemplo 2: os elementos do vector $B^{-1}a_1$ são

- as coordenadas do vector a_1 na base $\beta = \{a_3, e_2, a_2\}$.

$$\begin{aligned} a_1 &= B * B^{-1} a_1 \\ &\quad \begin{matrix} a_3 & e_2 & a_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -1/2 a_3 - 3/2 e_2 + 2 a_2$$

- A equação matricial, expressa com as colunas do quadro inicial, mostra como devem variar os valores das variáveis num pivô.
- Quando se aumenta a variável x_1 , associada a a_1 , de 1 unidade, os valores das variáveis básicas variam de acordo com os coeficientes.
- Garante-se assim o uso das mesmas quantidades dos recursos.

Operações com matrizes: exemplos

- Adição de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Fim