Linearização de módulos (ou valores absolutos)

Definição

- O módulo (ou valor absoluto) de uma função linear $f(x)$ é:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{, se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{, se } f(x) < 0, \end{cases}$$

- Há casos em que é possível linearizar funções com módulos, quer em restrições, quer na função objectivo, e usar programação linear (PL).
- Noutros casos, é necessário recorrer a modelos com variáveis binárias, do âmbito da programação inteira (PI).

Restrições do tipo $\leq$ com módulos

- Restrição do tipo $\leq$ com módulos é equivalente ao par de restrições:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & -b_i \end{array} \right.$$

- que determinam o conjunto convexo:

$$-b_i \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;\leq\; b_i$$

- e as restrições podem ser usadas num modelo de programação linear.

Exemplo

- Restrição: $|2x_1 - 3x_2| \leq 20$ é equivalente a: $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 - 3x_2 & \geq & -20 \end{array} \right.$

Restrições do tipo ≥ com módulos

- Restrição do tipo ≥ com módulos é equivalente ao par de restrições:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq b_i \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array}\right| \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array}$$

- que determinam um domínio não-convexo, com 2 regiões disjuntas, que só pode ser representado através de uma *disjunção* de restrições.
- Não é possível modelar restrições do tipo ≥ com módulos em PL.
- É necessário usar variáveis binárias para modelar este caso.

Exemplo

- Restrição $|x_1| \geq 2$ é equivalente a: $\left|\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & -2 \\ x_1 & \geq & 2 \end{array}\right.$
- Trata-se de um domínio não-convexo.

nota: em PL, a *conjunção* de restrições lineares determina sempre um conjunto convexo (ver diapositivos sobre método gráfico).

Função objectivo com módulos

- Seja uma função objectivo que contém um ou vários termos do tipo $|f(x)|$, em que $f(x)$ é uma função linear.
- Vamos assumir que se trata de um problema de minimização e que todos os coeficientes associados aos módulos são positivos.
- Caso contrário, é necessário usar variáveis binárias.

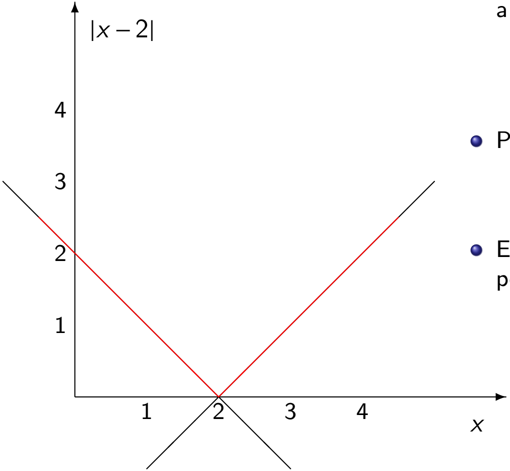
Exemplo:

$$\min z = +15\ |x-2|\ +15\ |y-8|$$

- Vamos analisar a função $|x-2|$.

É possível estabelecer as condições e fazer uma análise semelhante para problemas de maximização.

Exemplo: função $|x-2|$



- A função $|x-2|$ está representada a vermelho:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{, se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{, se } x < 2 \end{cases}$$

- Para cada valor de x,

$$|x-2| = \max\{x-2, -x+2\}.$$

- Em problemas de minimização, é possível linearizar esta função.

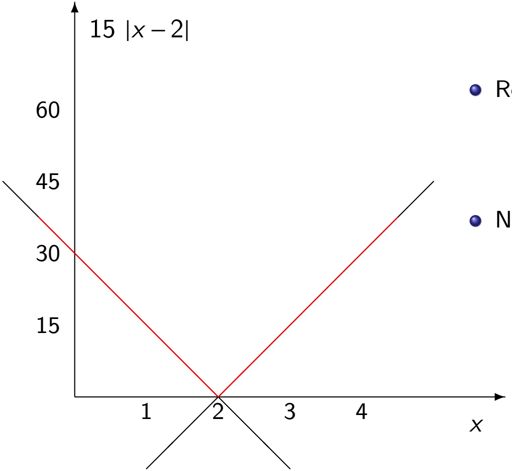
Linearização de uma função objectivo com módulos - I

- Usar uma variável adicional w, e incluir no modelo duas restrições adicionais:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\leq w \\
-f(x) &\leq w
\end{aligned}
$$

- Substituir $|f(x)|$ na função objectivo pela variável w.
- Como o coeficiente da função objectivo é positivo, a variável w tomará o menor valor que respeite as duas novas restrições.

Exemplo



- Função objectivo:

$$\min 15\ |x-2|$$

- Restrições a adicionar ao modelo:

$$\begin{cases} x-2 & \leq w \\ -x+2 & \leq w \end{cases}$$

- Nova função objectivo:

$$\min 15\ w$$

Linearização de uma função objectivo com módulos - II

- Existe uma outra forma de efectuar a linearização que é baseada em:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \text{ se } f(x) < 0, \end{cases}$$

- Incluir no modelo uma restrição adicional (e as de não-negatividade) para representar $f(x)$ como a diferença de 2 variáveis adicionais:

$$\begin{cases} f(x) = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- Substituir $|f(x)|$ na função objectivo por $x^+ + x^-$.
- Sendo o coeficiente do módulo positivo, todos os pares de valores (x^+, x^-) cuja diferença $x^+ - x^-$ seja igual a $f(x)$ são possíveis, mas o melhor par é aquele cuja soma $x^+ + x^-$ é mínima.
- Em consequência disso:
  - Se $f(x) \geq 0$, então $|f(x)| = x^+$, e x^- será igual a 0.
  - Se $f(x) < 0$, então $|f(x)| = x^-$, e x^+ será igual a 0.

nota: a diferença de 2 variáveis equivale a uma variável sem restrição de sinal.

Exemplo

- Função objectivo:

$$\min z = 15\ |x-2|$$

- Restrições adicionais:

$$\begin{cases} x-2 = x^{+} - x^{-} \\ x^{+}, x^{-} \geq 0 \end{cases}$$

- Nova função objectivo:

$$\min z = 15x^{+} + 15x^{-}$$

- Se $x-2=8$, *e.g.*, as variáveis adicionais podem ter os valores dos seguintes pares $(8,0)$ e $(10,2)$.
- No entanto, as somas dos dois pares são diferentes, iguais a 8 e 12, respectivamente.
- O par com a soma mínima é aquele em que uma das variáveis é positiva e a outra nula.