

Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

MIEI - Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2020/21

Folhas de Exercícios

Maria Teresa Torres Monteiro

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

1. Um medicamento L precisa, entre outros componentes, de duas substâncias A e B na sua composição. Após reação química, a massa m_L (g) de uma pastilha do medicamento, obedece à seguinte fórmula matemática:

$$m_L = (m_A)^2 + e^{m_B}$$

em que m_A e m_B , correspondem às massas das respectivas substâncias antes da reação química. Considerando $m_A = 1.053$ e $m_B = 0.31$ estime um limite superior do erro absoluto da massa da pastilha, devido ao facto de A e B não terem sido medidas exatamente. Qual o número de algarismos significativos da massa da pastilha, m_L ?

2. Calcule um limite superior do erro absoluto no cálculo da expressão

$$f(x, y, z) = -x + y^2 + \text{sen}(z)$$

sabendo que são usados os seguintes valores aproximados:

$$x = 1.1 \ (\delta_x = 0.05); \ y = 2.04 \ (\delta_y = 0.005); \ z = 0.5 \text{ rad.} \ (\delta_z = 0.05).$$

Quantos algarismos significativos apresenta o valor calculado de f ?

3. Com base no limite superior do erro absoluto do valor calculado da expressão

$$f(x, y, z) = \frac{2xy}{x^2 + z},$$

e sabendo que são usados os seguintes valores aproximados

$$x = 3.1416 \text{ de } \pi; \ y = 1.732 \text{ de } \sqrt{3}; \ z = 1.4142 \text{ de } \sqrt{2}$$

quantos algarismos significativos tem o valor calculado de f ?

4. A energia cinética, K , é a energia que está relacionada com o estado de movimento de um corpo. É uma grandeza escalar que depende da massa, m , e do módulo da velocidade do corpo em questão, v , sendo definida por:

$$K(m, v) = \frac{m v^2}{2}$$

Considerando um corpo com $m = 0.793 \text{ Kg}$ e $v = 12.5 \text{ m/s}$ estime um limite superior do erro absoluto da sua energia cinética, devido ao facto de m e v não terem sido medidas exatamente. Qual o número de algarismos significativos da energia cinética, K ?

5. Considere a matriz A e o vector b :

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 14.6 \\ -11.4 \\ 14.0 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

- (a) Resolva o sistema correspondente por um método directo e estável.
- (b) Calcule o determinante de A por um método directo e estável.
- (c) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

6. Considere os três sistemas de equações lineares

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule as três soluções de uma só vez, usando um método directo e estável.

7. Um engenheiro supervisiona a produção de 3 modelos de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e plástico. As quantidades

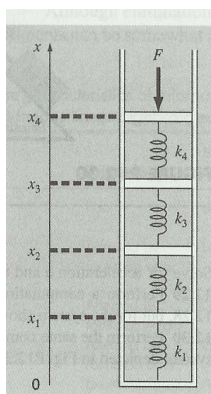
para produzir um carro de cada modelo são:

	metal (kg./carro)	tecido(kg./carro)	borracha(Kg./carro)
‘Jeep’	2.71	4.11	2.69
‘coupé’	1.63	2.44	1.64
‘V6’	0.32	0.19	0.36

Existem em *stock*, respectivamente 38.48, 56.69, 38.54 kg. de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos com a quantidade de *stock* existente?

Resolva o sistema por um método direto e estável usando 4 casas decimais nos cálculos.

8. Considere a figura representando um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força F de 2000 Kg .



Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:

$$\begin{cases} k_2(x_2 - x_1) = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) = k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) = k_3(x_3 - x_2) \\ F = k_4(x_4 - x_3) \end{cases}$$

em que $k_1 = 150$, $k_2 = 50$, $k_3 = 75$ e $k_4 = 225$ são as constantes das molas (kg/s^2).

Resolva o sistema por um método direto e estável.

9. Uma equipa de três paraquedistas ligados por uma corda de peso desprezável é lançada em queda livre a uma velocidade $v = 5 \text{ m/s}$ conforme a figura.

Considere os seguintes dados:

Paraquedista (i)	Massa (m_i) (Kg)	Coef. de resistência (c_i) (Kg/s)
1	70	10
2	60	14
3	40	17

O sistema linear resultante permite calcular a tensão em cada secção da corda (R e T) e a aceleração da equipa (a).

$$\begin{cases} m_1g & -T & -c_1v & & = m_1a \\ m_2g & +T & -c_2v & -R & = m_2a \\ m_3g & & -c_3v & +R & = m_3a \end{cases}$$



(considere $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

Resolva o sistema por um método direto e estável.

10. Localize através do método gráfico as raízes das equações não lineares em x :

(a) $f(x) \equiv x^3 - 3x + 1 = 0$.

(b) $f(x) \equiv \text{sen}(x) + x - 2 = 0$.

(c) $f(x) \equiv e^x + x - 1 = 0$.

(d) $f(x) \equiv x + \ln(x) = 0$.

11. Baseado num trabalho de Frank-Kamenetski, em 1955, a temperatura no interior de um material, quando envolvido por uma fonte de calor, pode ser determinada se resolvermos a seguinte equação não linear em x :

$$\frac{e^{-0.5x}}{\cosh(e^{0.5x})} = \sqrt{0.5L}$$

Para $L = 0.088$, calcule a raiz da equação, usando um método que não recorra a derivadas.

Tome como aproximação inicial o intervalo $[-1, 0]$ e pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon_1 = 0.5$ e $\varepsilon_2 = 0.1$, ou ao fim de 2 iterações.

Nota: $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

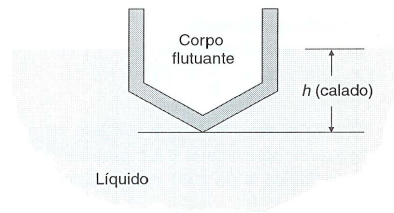
12. O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

$$v(h) = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

- (a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h , num tanque de raio $r = 1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$ e considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.
- (b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo $[2.5, 3]$. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.
13. Pela aplicação do Princípio de Arquimedes para determinação do calado de embarcações, pretende determinar-se a profundidade h correspondente ao equilíbrio tal que

$$\gamma_s V_s = \gamma_l V_l(h)$$

com $\gamma_s = 918.35 \text{ kg/m}^3$ (densidade do sólido), $V_s = 1700 \text{ m}^3$ (volume do sólido), $\gamma_l = 1.025 \text{ kg/m}^3$ (densidade do líquido) e $V_l(h)$ volume do líquido deslocado (ver figura).



Utilize o método de Newton para calcular o valor de h , supondo $V_l(h) = h(h - 40)^2$. Utilize para aproximação inicial $h^{(1)} = 140$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, ou no máximo 3 iterações.

14. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

a) $\text{sen}(x) = 0;$
 b) $\text{cos}(x) + 1 = 0.$

Aplique o método de Newton com $x_1 = 3$ e $\epsilon_2 = 10^{-4}$ em cada caso a) e b).

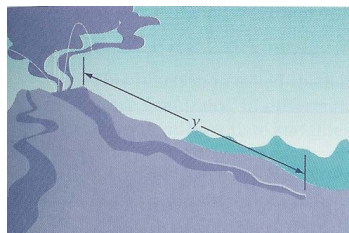
Compare os resultados obtidos e o número de iterações calculadas.

15. A concentração de uma bactéria $c(t)$ num depósito decresce de acordo com a seguinte expressão

$$c(t) = 70e^{-1.5t} + 25e^{-0.075t}.$$

Utilize um método iterativo que recorre ao cálculo da derivada para determinar o tempo necessário até a concentração da bactéria ficar reduzida a 9. Use a seguinte aproximação inicial $t_1 = 5$. Para a paragem do processo iterativo use $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.05$ ou $n_{\max} = 3$.

16. A figura representa um vulcão em erupção.



A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:

$$y(t) = 7 (2 - 0.9^t).$$

Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de protecção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia. Considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo 3 iterações.

Nota: $(a^x)' = a^x \ln(a)$

17. Uma das soluções para os resíduos de material nuclear é colocá-los em barris especiais que serão mais tarde depositados no fundo do oceano. Se os recipientes permanecerem intactos, a contaminação do ambiente circundante é mínima. Resolvendo as equações de movimento para os barris à medida que eles descem na água, chega-se à seguinte relação entre a velocidade de impacto, v , e a profundidade da água, D :

$$D = \frac{1}{k^2 g} \left[W(W - B) \ln \left(1 + \frac{kv}{W - B} \right) - Wkv \right],$$

em que W é o peso dos barris, B é a sua flutuabilidade, g é a constante gravitacional e k é o coeficiente de atrito. A flutuabilidade dos barris pode ser determinada através do seu volume, sendo igual a 470. O coeficiente de atrito é determinado experimentalmente e é dado por $k = 0.08$. A constante gravitacional é $g = 32$ e o peso dos barris $W = 527$.

- (a) Determine a velocidade de impacto v usando o método da secante, quando os barris são lançados numa zona cuja profundidade é $D = -300$. Utilize como aproximações iniciais $v_1 = 40$ e $v_2 = 45$, e no critério de paragem $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{\max} = 2$.
- (b) Através de experiências, mostrou-se que os barris se danificam se a velocidade de impacto com o fundo do oceano for superior a 40. Na situação da alínea anterior, haverá risco de contaminação?

18. Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento P , o pagamento anual A , o número de anos n e a taxa de juro i é a seguinte:

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Utilize o método iterativo mais adequado para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo $[0.05, 0.15]$. Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{max} = 3$.

19. A velocidade ascendente, v , de um foguetão pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - q t}\right) - g t$$

em que u é a velocidade relativa a que o combustível é expelido, m_0 é a massa inicial do foguetão no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo de combustível e g é a aceleração da gravidade. Considerando $u = 2200 \text{ m/s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m_0 = 1.6 \times 10^5 \text{ Kg}$ e $q = 2680 \text{ Kg/s}$, calcule o tempo para o qual o foguetão atinge a velocidade $v = 1000 \text{ m/s}$, sabendo que esse instante está entre 20 s e 30 s.

Utilize o método que achar mais adequado, com $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ ou no máximo 3 iterações.

20. Escreva o sistema das equações não lineares

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

que surge quando se pretende calcular um dos pontos de intersecção da circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 3 com a recta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

A partir da aproximação inicial $(0, 0)$, implemente o método iterativo de Newton para calcular uma solução do sistema. Comente o resultado. Recomece o processo iterativo com o ponto $(2, 0)$.

21. Usando o método iterativo de Newton, determine um dos pontos de intersecção da circunferência

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais $(x_1, x_2)^{(1)} = (1.5, 0.5)$ e para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{max} = 2$.

22. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{cases}$$

em que m e n são parâmetros.

Considere $m = 3$ e $n = 2$. Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto $x^{(1)} = (1, -2)^T$. Para o critério de paragem use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ (ou no máximo 2 iterações).

23. Pensei em dois números x e y . O produto dos dois somado ao cubo do segundo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1. Em que números pensei?

(a) Formule o problema como um sistema de equações.

(b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$. Apresente o resultado obtido no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

24. Num colector solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 &= 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (0.3, 0.3)$, implemente uma iteração do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

25. Use o método iterativo de Newton para determinar um ponto do espaço (x_1, x_2, x_3) que, pertence à esfera de raio 2 de equação

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,$$

está sobre o plano $x_3 = 1$ e dista uma unidade do ponto $(0, 1, 1)$.

Tome como aproximação inicial o ponto $(1, 1, 1)$. No critério de paragem use $\varepsilon_1 = 0.1$ e $\varepsilon_2 = 0.05$ (2 iterações).

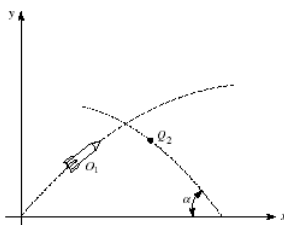
26. A posição de um determinado objecto O_1 no plano xy é descrita em função do tempo (t) pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = t \quad y_1(t) = 1 - e^{-t}$$

A posição de um segundo objecto O_2 é descrita pelas seguintes equações:

$$x_2(t) = 1 - t \cos(\alpha) \quad y_2(t) = -0.1t^2 + t \sin(\alpha)$$

em que α representa o ângulo, como mostra a figura

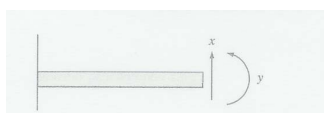


Determine os valores de t e α na posição em que os dois objectos colidem, *i.e.*, na posição em que se igualam as coordenadas x e y :

$$\begin{aligned} t &= 1 - t \cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} &= -0.1t^2 + t \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Considere os valores iniciais $(t, \alpha)^{(1)} = (4.3, 2.4)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$ ou no máximo duas iterações.

27. Considere a seguinte figura de uma viga em balanço:



Um modelo de elementos finitos de uma viga em balanço sujeita a carga e momentos é obtido pela optimização de

$$f(x, y) = 5x^2 - 5xy + 2.5y^2 - x - 1.5y,$$

em que x e y são o deslocamento e o momento da extremidade, respectivamente. Calcule os valores de x e y que minimizam $f(x, y)$, utilizando o método iterativo de Newton. Para aproximação inicial use $(1, 1)$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$ ou no máximo duas iterações. Comente os resultados.

28. Duas estações eléctricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais económica possível. O custo total de operação das duas estações é dado por

$$f(x_1, x_2) = 0.1 + 0.01x_1x_2 + 0.15x_2^4 + 0.01x_1^4 - 0.25(x_1 + x_2 - 100)$$

em que x_1 é a energia fornecida pela primeira estação e x_2 é a energia fornecida pela segunda estação. Determine os valores de x_1 e x_2 por forma a minimizar o custo total de operação das duas estações. Utilize como aproximação inicial o ponto $(2.0, 0.5)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.2$ (uma iteração).

29. A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

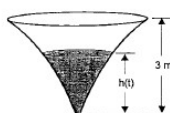
- (a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.
- (b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?
30. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	a	2	1	0	4

$a \in \mathbb{R}.$

Determine a de modo a que o polinómio interpolador de $f(x)$ nos pontos da tabela dada seja de grau 3. Justifique.

31. A figura representa um reservatório com 2.1 metros de altura. Considere que, no início, o reservatório está cheio de água. Num certo instante abre-se a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.



A altura (em metros) de água do reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)$, de acordo com a tabela

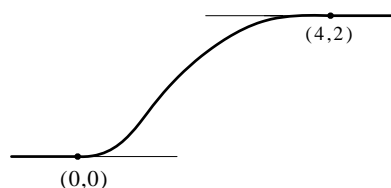
Instante, t_i	0	1	4	7	8	10	14
Altura de água, $h(t_i)$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

Use um polinómio interpolador de grau 2 para estimar a altura de água no reservatório ao fim de 5 horas.

32. A tabela seguinte apresenta a velocidade de queda de um paraquedista em função do tempo:

<i>tempo (seg)</i>	1	3	5	7	20
<i>vel (cm/seg)</i>	800	2310	3090	3940	8000

- (a) Estime o valor da velocidade no instante de tempo $t = 10\text{seg}$, utilizando um polinómio interpolador de grau 3.
- (b) Calcule uma aproximação do erro cometido na alínea anterior.
33. Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0,0)$ e $(4,2)$, como mostra a figura



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa uma *spline* cúbica natural para definir a trajetória do desvio e calcular $f(2)$.

34. A resistência de um certo fio de metal, $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x . Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

x_i	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma “spline” cúbica natural para calcular esta aproximação.

35. A distância requerida para parar um automobilista é função da velocidade a que ele se desloca. Os seguintes dados experimentais foram recolhidos para quantificar essa relação:

<i>vel (Km/h)</i>	15	20	25	30	40	50
<i>distância (m)</i>	16	20	34	40	60	90

Estime a distância necessária para parar um carro que se desloca a uma velocidade de 45 Km/h , utilizando uma spline cúbica completa.

36. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
Nº de pontos, x_i	10	12	18	27	30	34
Nº de golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

- (a) Use uma spline cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7ª equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.
- (b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

37. Considere a função $f(x)$ definida por

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-8	0	1	8

Sabendo que $s_3^{1''}(-2) = 12$ e $s_3^{n''}(2) = 20$ estime o valor de $f(-1)$ através de uma 'spline' cúbica.

38. A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0, 3]$, poderá representar uma spline cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

39. Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X's.

t_i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

- (a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajectória do robô por uma *spline* cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5$.
- (b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante $t = 1.5$
- (c) Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da *spline* calculada para aproximar a velocidade do robô.
40. Foram registados os consumos, $f(x_i)$, de um aparelho em determinados instantes, x_i (em segundos):

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
$f(x_i)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.6	0.6	0.7	0.8

- (a) Estime o consumo total ao fim de 10 segundos.
- (b) Estime o erro cometido no intervalo $[0.6, 9.6]$.
41. A função $F(t)$ surge na determinação da tensão à superfície de um líquido que rodeia uma bolha esférica de gás:

$$F(t) = \int_0^t \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

em que

$$P(x) = 3 + 3x + x^2$$

$$Q(x) = 3 + 6x + 6x^2 + 2x^3$$

Determine $F(1)$ considerando apenas os seguintes valores de x no cálculo do integral

$$0, 0.25, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$$

42. O comprimento do arco da curva $y = f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Calcule uma aproximação numérica ao comprimento do arco da curva $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0, 1]$, usando 5 pontos igualmente espaçados no intervalo.

43. A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t} \frac{I(a)}{\pi}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x, a) dx \quad \text{com } f(x, a) = \frac{e^{ax}}{x}$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.05.

44. O valor de π pode ser calculado através do seguinte integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx.$$

Estime o valor de π utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.01.

45. Determine uma aproximação ao valor do integral definido

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

através da fórmula de Simpson, com um erro de truncatura, em valor absoluto, inferior a 0.0005

46. O tempo t (seg) para um carro acelerar desde 40 mph até a velocidade v (mph) é dado, para seis valores de v , pela seguinte tabela:

i	1	2	3	4	5	6
$v_i(\text{mph})$	40	45	50	55	60	70
$t_i(\text{seg})$	0.00	0.69	1.40	2.15	3.00	3.90

Estime a distância x (ft) que o carro percorre desde a aceleração de 40 mph até 70 mph , através da seguinte expressão:

$$x = \frac{22}{15} \left[t_6 v_6 - \int_{40}^{70} t \, dv \right]$$

Estime o erro de truncatura cometido no período $[60, 70]$.

47. O trabalho realizado por uma força $F(x)$ cujo ângulo entre a direcção do movimento e a força é dado por $\theta(x)$, pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cos(\theta(x)) dx$$

em que x_0 e x_n são a posição inicial e final, respectivamente.

- (a) Calcule a melhor aproximação ao trabalho realizado, W , ao puxar um bloco da posição 0 ft até à posição 30 ft sabendo que a força aplicada e o ângulo usado são dados na tabela seguinte.

x	0	2.5	5	15	20	25	30
$F(x)$	0.0	7.0	9.0	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$	0.5	0.9	1.4	0.9	1.3	1.48	1.5

- (b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no intervalo $[5, 15]\text{ft}$.

48. O cálculo da entalpia, H ($J\text{ mol}^{-1}$), para um determinado composto, pode ser realizado através do seguinte integral

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_f} C_p(T) \, dT$$

onde os limites inferior e superior do integral são, respectivamente, a temperatura de referência e a temperatura final para a qual se pretende calcular a entalpia. Para o Azoto (supondo comportamento de gás ideal), a variação da capacidade calorífica, $C_p(T)$ ($J\text{ mol}^{-1} K^{-1}$), com a temperatura T (K), é dada por:

$$C_p(T) = 31.150 - 1.356 \times 10^{-2}T + 2.679 \times 10^{-5}T^2 - 1.168 \times 10^{-8}T^3.$$

Considere a temperatura de referência $T_{ref} = 273.0$.

- (a) Estime o valor da entalpia do Azoto para $T_f = 278$, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.15×10^{-4} .
- (b) Considerando o mesmo espaçamento h usado na alínea anterior, calcule, usando a fórmula de integração numérica mais adequada, o seguinte integral:

$$\int_{T_{ref}}^{T_f - h} C_p(T) dT$$

NOTA: use $h = 1$ caso não tenha resolvido a alínea anterior.

- (c) Comente a precisão do valor calculado na alínea anterior.

49. A velocidade de subida de um foguetão pode ser calculada com base na seguinte fórmula

$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

onde $v(t)$ é a velocidade de subida, u é a velocidade a que o combustível é expelido relativamente ao foguetão, m_0 é a massa inicial do foguetão no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo do combustível e g é a constante gravitacional (assuma $g = 9.8ms^{-1}$). Se $u = 2200ms^{-1}$, $m_0 = 160000kg$ e $q = 2680kgs^{-1}$,

- (a) indique quantos pontos seriam necessários para determinar a altitude do foguetão, com erro inferior a $100m$, após voar $30s$ se fosse aplicar uma regra do trapézio.
- (b) determine a altitude após $30s$ usando 15 pontos.

50. Pretende-se calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

com erro, em valor absoluto, inferior a $\frac{1}{600}$ usando a fórmula composta do trapézio.

- (a) Qual deve ser o passo escolhido?
- (b) Baseado na alínea a) calcule uma estimativa do integral.

51. A velocidade vertical (ms^{-1}) de um foguetão é dada por

$$v(t) = \begin{cases} 10t^2, & 0 \leq t \leq 10 \\ 1000 - 5t, & 10 < t \leq 20 \\ 45t + 2(t - 20)^2, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

(a) Calcule a distância percorrida ao fim de 30s com base nos seguintes pontos:

0 5 10 12 14 16 18 20 22.5 25 27.5 30 .

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no cálculo da distância. Comente o valor obtido.

52. A função distribuição normal acumulada é uma função importante em estatística. Sabendo que

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-x^2/2} dx}{2}$$

Calcule uma estimativa de $F(1)$, usando a fórmula composta do trapézio com 5 pontos no cálculo do integral.

53. Suponha que na construção de um templo egípcio com 150 m de altura foram necessários muitos anos, durante os quais cada operário realizou 1.742×10^6 Kg m de quantidade de trabalho. Sabe-se que a secção transversal horizontal do edifício, à altura x , é um quadrado cuja área é dada por $A(x) = \frac{9}{4}(200 - x)^2$.

Através da fórmula que dá a quantidade total de trabalho realizado

$$T = \rho \int_a^b x A(x) dx$$

em que $\rho = 2014$ Kg/m³ representa a densidade da rocha, calcule:

- (a) T , usando separadamente duas fórmulas compostas de integração, com base em 5 pontos;
- (b) os erros de truncatura cometidos na alínea a) e comente os resultados;

(c) o número de operários utilizados na construção do templo.

54. Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu x Km. Os resultados obtidos foram:

x distância em Km	0	1.25	2.5	3.75
$f(x)$ consumo em $\frac{l}{Km}$	0.260	0.208	0.172	0.145

- (a) Construa um *modelo quadrático*, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.
- (b) Avalie o modelo.
55. A docente responsável pela disciplina de Métodos Numéricos I registou para 8 alunos, os resultados obtidos nos mini-testes e a respectiva classificação final obtida na disciplina

mini-testes	1.2	1.75	1.1	2.0	0.5	0.8	1.0	1.5
classificação final	16	18	16	19	10	11	14	16

- (a) Determine no sentido dos mínimos quadrados a recta que melhor aproxima os dados da tabela.
- (b) Qual será a estimativa do resultado a ter nos mini-testes para poder obter uma classificação final de 17?
56. A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

Temperatura ($^{\circ}C$)	86.0	93.3	98.9	104.4	110.0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de $100^{\circ}C$, utilizando:

- (a) um polinómio interpolador de Newton de grau dois;
- (b) um polinómio de grau dois no sentido dos Mínimos Quadrados, usando os mesmos pontos que utilizou na alínea a).

Comente e justifique os resultados.

57. A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

x_i	1.5	2.0	3.0	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados:

- uma recta
 - o modelo linear: $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2x$
- (a) Calcule a recta.
 - (b) Calcule o modelo $M(x)$.
 - (c) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua escolha

58. Em sistemas de transportes urbanos, o preço das viagens depende da procura. Quanto maior é a procura, x , mais baixo é o preço, $P(x)$ (em euros). Os registos obtidos nos últimos quatro meses foram:

x_i	30	35	45	50
$P(x_i)$	12	12	10	8

Pretende-se construir um modelo que descreva o comportamento de P em função de x . Com base no modelo $M(x)$

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 e^{-x},$$

determine c_1 e c_2 de tal forma que

$$\min_{c_1, c_2} \sum_{i=1}^4 (P(x_i) - M(x_i))^2.$$

59. A tabela seguinte contém os registos efectuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

- (a) Ajuste o modelo $M(x) = c_1 x + c_2 \sin(x)$ aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados;
- (b) Use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto;
- (c) Avalie o modelo.
60. O custo de investimento (C) em construção civil de um arejador num sistema de lamelas activadas numa Estação de Tratamento de Águas Residuais depende do volume (v) do tanque da seguinte forma

$$C(v; c_1, c_2) = c_1 v^{c_2}$$

em que c_1 e c_2 são parâmetros a estimar pela técnica dos mínimos quadrados a partir dos dados recolhidos de uma construtora

v_i (em mil m^3)	0.4	0.6	1	1.3
C_i (em milhares de euros)	87	160	190	366

Estime os parâmetros c_1 e c_2 do modelo dado anteriormente, recorrendo à seguinte transformação que transforma o modelo dado num modelo polinomial de grau um:

$$\ln(C(v; c_1, c_2)) = \ln(c_1) + c_2 \ln(v)$$

$$\overline{C} = \overline{c_1} + c_2 \overline{v}$$

Comece por calcular os parâmetros \overline{c}_1 e c_2 do modelo polinomial usando a técnica dos mínimos quadrados, com base nos valores da tabela

$\overline{v}_i = \ln(v_i)$	-0.916	-0.511	0	0.262
$\overline{C}_i = \ln(C_i)$	4.466	5.075	5.247	5.903

e posteriormente apresente os valores solicitados.

61. Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ calcule os seus pontos estacionários e classifique-os.
62. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t - 0.01t^2}$$

onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações). Use 4 casas decimais nos cálculos.

63. Uma empresa precisa de usar x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 4 u.m. para colocar no mercado um certo número fixo de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1x_2 = 2500.$$

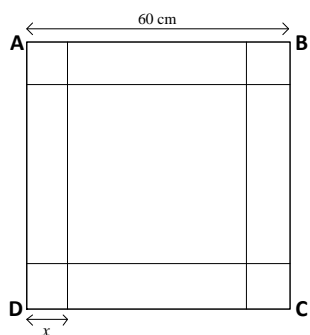
Calcule x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

- a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).

- b) Resolva o problema resultante usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com a aproximação inicial $x_1 = 50$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para as duas variáveis e o custo mínimo.

64. $[ABCD]$ representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x , como mostra a figura.

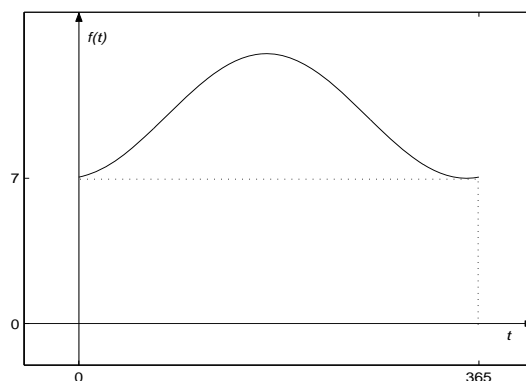


Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x . Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$. Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).

65. A função

$$f(t) = 10 + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

dá o número de horas com luz do dia numa certa região do país.



O dia 1 de Janeiro corresponde a $t = 0$. Determine o dia do ano (t) em que o número de horas com luz do dia é máximo, usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Use 2 casas decimais nos cálculos, $\pi = 3.14$ e inicie o processo iterativo com $t_1 = 200$. Considere ainda $\delta = 10$, $M = 0.1$ e $\varepsilon = 2$ (duas iterações). Use radianos nos cálculos.

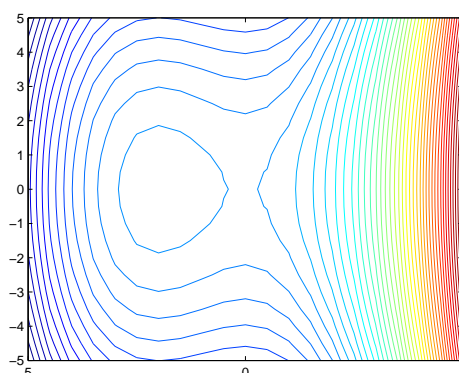
66. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

67. Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em $(-2, 0)$, tem um ponto sela em $(0, 0)$; e não tem mínimos.

68. Dada a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

69. Mostre que qualquer ponto da linha $x_2 - 2x_1 = 0$ é um mínimo de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

70. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

71. A soma de três números $(x_1, x_2$ e $x_3)$ positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

72. Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \quad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 25 - 0.0015x_2.$$

- a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

73. Três estações elétricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais econômica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$f_1 = 0.1 + 0.25x$$

$$f_2 = 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2$$

$$f_3 = 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$$

em que x , y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de x , y e z que minimizam o custo total, se a energia a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.05$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$. Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $x = 100 - y - z$.

74. Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z . O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direção a uma assíntota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto $(2, 1)$. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

75. Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro fatores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4 . Para $A = 2401$, determine esses fatores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de otimização sem restrições em função das 3 variáveis x_1, x_2 e x_3 .

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses fatores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

76. O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema elétrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

77. Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação P com duas componentes P_1 e P_2 . Pretende-se determinar os deslocamentos x_1 e x_2 das molas que minimizam a energia potencial total EP , definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1 \left(\sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1 \right)^2 + \frac{1}{2}K_2 \left(\sqrt{x_1^2 + (l_2 + x_2)^2} - l_2 \right)^2 - P_1x_1 - P_2x_2.$$

Sabendo que as características do sistema são: $l_1 = 10$, $l_2 = 10$, $K_1 = 8$, $K_2 = 1$, $P_1 = 5$ e $P_2 = 5$, resolva o problema através do método de Nelder-Mead com $\varepsilon = 0.5$ (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais: $(5, 2)$, $(3.25, 2.5)$ e $(0, 0)$.

78. Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

79. Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

80. Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$ ou $n_{\max} = 4$.