

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	999 (preencher)
a11111	Nome1 (preencher)
a22222	Nome2 (preencher)
a33333	Nome3 (preencher)
a44444	Nome4 (preencher, se aplicável, ou apagar)

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell** (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **D** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **C** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

3.1 Stack

O **Stack** é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em **Haskell**. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulos principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de dependências externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao **GHCI** utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as dependências externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na directoria *app*.

Problema 1

Os tipos de dados algébricos estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

Symbolic differentiation consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando o valor da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão e o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

```
data ExpAr a = X
  | N a
  | Bin BinOp (ExpAr a) (ExpAr a)
  | Un UnOp (ExpAr a)
  deriving (Eq, Show)
```

onde *BinOp* e *UnOp* representam operações binárias e unárias, respectivamente:

```
data BinOp = Sum
  | Product
  deriving (Eq, Show)
data UnOp = Negate
  | E
  deriving (Eq, Show)
```

O construtor *E* simboliza o exponencial de base *e*.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

Bin Sum X (N 10)

designa $x + 10$ na notação matemática habitual.

1. A definição das funções *inExpAr* e *baseExpAr* para este tipo é a seguinte:

```
inExpAr = [X, num_ops] where
  num_ops = [N, ops]
  ops = [bin, Un]
  bin (op, (a, b)) = Bin op a b
  baseExpAr f g h j k l z = f + (g + (h × (j × k) + l × z))
```

Defina as funções *outExpAr* e *recExpAr*, e teste as propriedades que se seguem.

Propriedade [QuickCheck] 1 *inExpAr* e *outExpAr* são testemunhas de um isomorfismo, isto é, *inExpAr* · *outExpAr* = *id* e *outExpAr* · *inExpAr* = *id*:

```
prop_in_out_idExpAr :: (Eq a) => ExpAr a -> Bool
prop_in_out_idExpAr = inExpAr · outExpAr ≡ id
prop_out_in_idExpAr :: (Eq a) => OutExpAr a -> Bool
prop_out_in_idExpAr = outExpAr · inExpAr ≡ id
```

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o X , a função

$$eval_exp :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 12 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 2 A função *eval_exp* respeita os elementos neutros das operações.

$$\begin{aligned} prop_sum_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idr \textbf{ where} \\ sum_idr &= eval_exp a (Bin Sum exp (N 0)) \\ prop_sum_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_sum_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} sum_idl \textbf{ where} \\ sum_idl &= eval_exp a (Bin Sum (N 0) exp) \\ prop_product_idr &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idr a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idr \textbf{ where} \\ prod_idr &= eval_exp a (Bin Product exp (N 1)) \\ prop_product_idl &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_product_idl a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} prod_idl \textbf{ where} \\ prod_idl &= eval_exp a (Bin Product (N 1) exp) \\ prop_e_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_e_id a &= eval_exp a (Un E (N 1)) \equiv expd 1 \\ prop_negate_id &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\ prop_negate_id a &= eval_exp a (Un Negate (N 0)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.

$$\begin{aligned} prop_double_negate &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_double_negate a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} eval_exp a (Un Negate (Un Negate exp)) \end{aligned}$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optimize_eval :: (Floating a, Eq a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 12 expressa como um hilomorfismo² e teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 4 A função *optimize_eval* respeita a semântica da função *eval*.

$$\begin{aligned} prop_optimize_respects_semantics &:: (Floating a, Real a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow Bool \\ prop_optimize_respects_semantics a exp &= eval_exp a exp \stackrel{?}{=} optimize_eval a exp \end{aligned}$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:³

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

²Qual é a vantagem de implementar a função *optimize_eval* utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

³Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating a \Rightarrow ExpAr a \rightarrow ExpAr a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 5 A função *sd* respeita as regras de derivação.

```
prop_const_rule :: (Real a, Floating a) => a -> Bool
prop_const_rule a = sd (N a) == N 0

prop_var_rule :: Bool
prop_var_rule = sd X == N 1

prop_sum_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_sum_rule exp1 exp2 = sd (Bin Sum exp1 exp2) == sum_rule where
  sum_rule = Bin Sum (sd exp1) (sd exp2)

prop_product_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> ExpAr a -> Bool
prop_product_rule exp1 exp2 = sd (Bin Product exp1 exp2) == prod_rule where
  prod_rule = Bin Sum (Bin Product exp1 (sd exp2)) (Bin Product (sd exp1) exp2)

prop_e_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_e_rule exp = sd (Un E exp) == Bin Product (Un E exp) (sd exp)

prop_negate_rule :: (Real a, Floating a) => ExpAr a -> Bool
prop_negate_rule exp = sd (Un Negate exp) == Un Negate (sd exp)
```

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema calculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$ad :: Floating a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr a \rightarrow a$$

que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 6 Calcular o valor da derivada num ponto *r* via *ad* é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto *r*.

```
prop_congruent :: (Floating a, Real a) => a -> ExpAr a -> Bool
prop_congruent a exp = ad a exp == eval_exp a (sd exp)
```

Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer **programação dinâmica** por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.⁴

Para o caso de funções sobre os números naturais (\mathbb{N}_0 , com functor $F X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado **Cálculo de Programas**. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{aligned} fib\ 0 &= 1 \\ fib\ (n + 1) &= f\ n \end{aligned}$$

⁴Lei (3.94) em [?], página 98.

$$f\ 0 = 1$$

$$f\ (n + 1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$fib' = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (fib, f) = (f, fib + f)$$

$$\text{init} = (1, 1)$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.⁵
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em \mathbb{N}_0 . Seguindo o método estudado nas aulas⁶, de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$f\ 0 = c$$

$$f\ (n + 1) = f\ n + k\ n$$

$$k\ 0 = a + b$$

$$k\ (n + 1) = k\ n + 2\ a$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for loop init where}$$

$$\text{loop } (f, k) = (f + k, k + 2 * a)$$

$$\text{init} = (c, a + b)$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o *n*-ésimo **número de Catalan**,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

derivar uma implementação de C_n que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \dots \cdot \text{for loop init where } \dots$$

que implemente esta função.

Propriedade [QuickCheck] 7 A função proposta coincide com a definição dada:

$$prop_cat = (\geq 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Problema 3

As **curvas de Bézier**, designação dada em honra ao engenheiro **Pierre Bézier**, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto $\{P_0, \dots, P_N\}$ de pontos de controlo, onde N é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

⁵Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

⁶Secção 3.17 de [?] e tópico **Recursividade mútua** nos vídeos das aulas teóricas.



Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da [Wikipedia](#).

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto $\{P_0\}$ (ordem 0) é o próprio ponto P_0 . O valor de uma curva de Bézier de ordem N é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros $N - 1$ pontos e da curva de Bézier dos últimos $N - 1$ pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo $[0, 1]$, é dada pela seguinte função:

```
linear1d :: Q → Q → OverTime Q
linear1d a b = formula a b where
  formula :: Q → Q → Float → Q
  formula x y t = ((1.0 :: Q) - (toQ t)) * x + (toQ t) * y
```

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão N é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados *NPoint* representa um ponto com N dimensões.

```
type NPoint = [Q]
```

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

```
p2d = [1.2, 3.4]
p3d = [0.2, 10.3, 2.4]
```

O tipo de dados *OverTime a* representa um termo do tipo a num dado instante (dado por um *Float*).

```
type OverTime a = Float → a
```

O anexo C tem definida a função

```
calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
```

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

```
deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
```

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente *calcLine* como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 8 *Definição alternativa.*

```
prop_calcLine_def :: NPoint → NPoint → Float → Bool
prop_calcLine_def p q d = calcLine p q d ≡ zipWithM linear1d p q d
```

2. Implemente a função *deCasteljau* como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 9 *Curvas de Bézier são simétricas.*

```
prop_bezier_sym :: [[Q]] → Gen Bool
prop_bezier_sym l = all (<Δ) · calc_difs · bezs ($) elements ps where
  calc_difs = (λ(x, y) → zipWith (λw v → if w ≥ v then w - v else v - w) x y)
  bezs t = (deCasteljau l t, deCasteljau (reverse l) (fromQ (1 - (toQ t))))
  Δ = 1e-2
```

3. Corra a função `runBezier` e aprecie o seu trabalho⁷ clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicial) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla `Delete` apaga o ponto mais recente.

Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia x ,

$$\text{avg } x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (2)$$

onde $k = \text{length } x$. Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é fácil de ver que

$$\begin{aligned} \text{avg } [a] &= a \\ \text{avg } (a : x) &= \frac{1}{k+1} (a + \sum_{i=1}^k x_i) = \frac{a + k(\text{avg } x)}{k+1} \text{ para } k = \text{length } x \end{aligned}$$

Logo `avg` está em recursividade mútua com `length` e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função `avg_aux = ([b, q])` tal que `avg_aux = (avg, length)` em listas não vazias.
2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma `LTree` recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

Propriedade [QuickCheck] 10 *A média de uma lista não vazia e de uma `LTree` com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

```
prop_avg :: [Double] → Property
prop_avg = nonempty ⇒ diff ≤ 0.000001 where
  diff l = avg l - (avgLTree · genLTree) l
  genLTree = ([lsplit])
  nonempty = (>[])
```

Problema 5

(NB: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do `Haskell`, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o `F#` da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos `Cp`, `Nat` e `LTree` codificados em `F#`. O que se pede é a biblioteca `BTree` escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo `D`. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

⁷A representação em Gloss é uma adaptação de um `projeto` de Harold Cooper.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁸

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina⁹, onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $\exp x = e^x$, via série de Taylor:

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3)$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$\begin{aligned}
 e\ x\ 0 &= 1 \\
 e\ x\ (n+1) &= h\ x\ n + e\ x\ n \\
 h\ x\ 0 &= x \\
 h\ x\ (n+1) &= x / (s\ n) * h\ x\ n \\
 s\ 0 &= 2 \\
 s\ (n+1) &= 1 + s\ n
 \end{aligned}$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$\begin{aligned}
 e'\ x &= prj \cdot \text{for loop init where} \\
 init &= (1, x, 2) \\
 loop\ (e, h, s) &= (h + e, x / s * h, 1 + s) \\
 prj\ (e, h, s) &= e
 \end{aligned}$$

⁸Exemplos tirados de [?].

⁹Cf. [?], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

```
expd :: Floating a => a -> a
expd = Prelude.exp
type OutExpAr a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr a, ExpAr a)) + (UnOp, ExpAr a)))
```

Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan¹⁰:

```
oracle = [
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452
]
```

Problema 3

Algoritmo:

```
deCasteljau :: [NPoint] -> OverTime NPoint
deCasteljau [] = nil
deCasteljau [p] = p
deCasteljau l = λpt -> (calcLine (p pt) (q pt)) pt where
  p = deCasteljau (init l)
  q = deCasteljau (tail l)
```

Função auxiliar:

```
calcLine :: NPoint -> (NPoint -> OverTime NPoint)
calcLine [] = nil
calcLine (p : x) = g p (calcLine x) where
  g :: (Q, NPoint -> OverTime NPoint) -> (NPoint -> OverTime NPoint)
  g (d, f) l = case l of
    [] -> nil
    (x : xs) -> λz -> concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z
```

2D:

```
bezier2d :: [NPoint] -> OverTime (Float, Float)
bezier2d [] = (0, 0)
bezier2d l = λz -> (fromQ × fromQ) · (λ[x, y] -> (x, y)) $ ((deCasteljau l) z)
```

Modelo:

```
data World = World { points :: [NPoint]
  , time :: Float
  }
initW :: World
initW = World [] 0
```

¹⁰Fonte: [Wikipedia](#).

```

tick :: Float → World → World
tick dt world = world { time = (time world) + dt }

actions :: Event → World → World
actions (EventKey (MouseButton LeftButton) Down _ p) world =
  world { points = (points world) ++ [(λ(x,y) → map toQ [x,y]) p] }
actions (EventKey (SpecialKey KeyDelete) Down _ _) world =
  world { points = cond (≡ []) id init (points world) }
actions _ world = world

scaleTime :: World → Float
scaleTime w = (1 + cos (time w)) / 2

bezier2dAtTime :: World → (Float, Float)
bezier2dAtTime w = (bezier2dAt w) (scaleTime w)

bezier2dAt :: World → OverTime (Float, Float)
bezier2dAt w = bezier2d (points w)

thicCirc :: Picture
thicCirc = ThickCircle 4 10

ps :: [Float]
ps = map fromQ ps' where
  ps' :: [Q]
  ps' = [0, 0.01 .. 1] -- interval

```

Gloss:

```

picture :: World → Picture
picture world = Pictures
  [ animateBezier (scaleTime world) (points world)
  , Color white · Line · map (bezier2dAt world) $ ps
  , Color blue · Pictures $ [ Translate (fromQ x) (fromQ y) thicCirc | [x,y] ← points world ]
  , Color green $ Translate cx cy thicCirc
  ] where
  (cx, cy) = bezier2dAtTime world

```

Animação:

```

animateBezier :: Float → [NPoint] → Picture
animateBezier _ [] = Blank
animateBezier _ [_] = Blank
animateBezier t l = Pictures
  [ animateBezier t (init l)
  , animateBezier t (tail l)
  , Color red · Line $ [a, b]
  , Color orange $ Translate ax ay thicCirc
  , Color orange $ Translate bx by thicCirc
  ] where
  a@(ax, ay) = bezier2d (init l) t
  b@(bx, by) = bezier2d (tail l) t

```

Propriedades e main:

```

runBezier :: IO ()
runBezier = play (InWindow "Bézier" (600,600) (0,0))
  black 50 initW picture actions tick

runBezierSym :: IO ()
runBezierSym = quickCheckWith (stdArgs { maxSize = 20, maxSuccess = 200 }) prop_bezier_sym

```

Compilação e execução dentro do interpretador:¹¹

```

main = runBezier
run = do { system "ghc cp2021t"; system "./cp2021t" }

```

¹¹Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary UnOp where
  arbitrary = elements [Negate, E]
instance Arbitrary BinOp where
  arbitrary = elements [Sum, Product]
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (ExpAr a) where
  arbitrary = do
    binop <- arbitrary
    unop <- arbitrary
    exp1 <- arbitrary
    exp2 <- arbitrary
    a <- arbitrary
    frequency · map (id × pure) $ [(20, X), (15, N a), (35, Bin binop exp1 exp2), (30, Un unop exp1)]
infixr 5  $\stackrel{?}{=}$ 
( $\stackrel{?}{=}$ ) :: Real a => a -> a -> Bool
( $\stackrel{?}{=}$ ) x y = (to $_{\mathbb{Q}}$  x) == (to $_{\mathbb{Q}}$  y)
```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```
infixr 0 =>
(>=) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f =  $\lambda$ a -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f =  $\lambda$ a -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4  $\equiv$ 
( $\equiv$ ) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\equiv$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\equiv$  g a
infixr 4  $\leq$ 
( $\leq$ ) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f  $\leq$  g =  $\lambda$ a -> f a  $\leq$  g a
infixr 4  $\wedge$ 
( $\wedge$ ) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f  $\wedge$  g =  $\lambda$ a -> (f a)  $\wedge$  (g a)
```

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

São dadas:

```
cataExpAr g = g · recExpAr (cataExpAr g) · outExpAr
anaExpAr g = inExpAr · recExpAr (anaExpAr g) · g
hyloExpAr h g = cataExpAr h · anaExpAr g
```

$eval_exp :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$
 $eval_exp\ a = cataExpAr\ (g_eval_exp\ a)$
 $optimize_eval :: (Floating\ a, Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$
 $optimize_eval\ a = hyloExpAr\ (gopt\ a)\ clean$
 $sd :: Floating\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a$
 $sd = \pi_2 \cdot cataExpAr\ sd_gen$
 $ad :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow a$
 $ad\ v = \pi_2 \cdot cataExpAr\ (ad_gen\ v)$

1. $outExpAr$ e $recExpAr$

As funções $outExpAr$ e $recExpAr$ são deduzidas através do tipo de dados do problema e com auxílio de alguns diagramas.

Sabendo que :

$$ExpAr\ A \xleftarrow{inExpAr} 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A) + (UnOp \times ExpAr\ A)))$$

$$\begin{aligned}
inExpAr &= [\underline{X}, [N, [bin, \widehat{Un}]]] \\
inExpAr \cdot outExpAr &= id \\
outExpAr \cdot inExpAr &= id
\end{aligned}$$

Pelas definições acima:

$$\begin{aligned}
& outExpAr \cdot inExpAr = id \\
\equiv & \quad \{ \text{Definição de } inExpAr \} \\
& outExpAr \cdot [\underline{X}, [N, [bin, \widehat{Un}]]] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{Fusão + (20)} \} \\
& [outExpAr \cdot \underline{X}, outExpAr \cdot [N, [bin, \widehat{Un}]]] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{Universal + (17) e Natural-id (1)} \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot \underline{X} = i_1 \\ outExpAr \cdot [N, [bin, \widehat{Un}]] = i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{Fusão + (20), Universal + (17) e Natural-id (1)} \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot \underline{X} = i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot [bin, \widehat{Un}] = i_2 \cdot i_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{Fusão + (20), Universal + (17) e Natural-id (1)} \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot \underline{X} = i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} outExpAr \cdot bin = i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 \\ outExpAr \cdot \widehat{Un} = i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{Igualdade Extensional (71) e Def-Comp (72)} \} \\
& outExpAr\ \underline{X}\ x = i_1\ x \\
& outExpAr\ (N\ x) = i_2 \cdot i_1\ x \\
& outExpAr\ (bin\ (op, (a, b))) = i_2 \cdot i_2 \cdot i_1\ (op, (a, b)) \\
& outExpAr\ \widehat{Un}\ (op, a) = i_2 \cdot i_2 \cdot i_2\ (op, a) \\
\equiv & \quad \{ \text{Definição de Bin e Un} \} \\
& outExpAr\ X = i_1\ ()
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
outExpAr (N x) &= i_2 \cdot i_1 x \\
outExpAr (Bin op a b) &= i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 (op, (a, b)) \\
outExpAr (Un op a) &= i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 (op, a)
\end{aligned}$$

Concluiu-se que:

$$\begin{aligned}
outExpAr X &= i_1 () \\
outExpAr (N a) &= i_2 \cdot i_1 \$ a \\
outExpAr (Bin op a b) &= i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 \$ (op, (a, b)) \\
outExpAr (Un op a) &= i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \$ (op, a)
\end{aligned}$$

$$ExpAr A \xrightarrow{outExpAr} 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr A \times ExpAr A) + (UnOp \times ExpAr A)))$$

$$recExpAr x = baseExpAr id id id x x id x$$

2. *g_eval_exp*

De seguida, apresenta-se a definição da função:

$$\begin{aligned}
g_eval_exp \text{ num} &= [\underline{num}, [id, [\widehat{f}, \widehat{g}]]] \\
\textbf{where} \\
f \text{ Sum} &= \widehat{(+)} \\
f \text{ Product} &= \widehat{(*)} \\
g \text{ E} &= expd \\
g \text{ Negate} &= negate
\end{aligned}$$

E o seu diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
ExpAr A & \xrightarrow{outExpAr} & 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr A \times ExpAr A) + (UnOp \times ExpAr A))) \\
\downarrow eval_exp \text{ num} & & \downarrow id + (id + ((id \times (g_eval_exp \text{ num})^2) + (id \times g_eval_exp \text{ num})) \\
A & \xleftarrow{g_eval_exp \text{ num}} & 1 + (A + (BinOp \times (A \times A) + (UnOp \times A)))
\end{array}$$

3. *clean* e *gopt*

Optimizando a *ExpAr A* dada, através da utilização das regras da absorção e do elemento neutro, obtém-se:

$$\begin{aligned}
clean (Bin Product (N 0) _) &= outExpAr (N 0) \\
clean (Bin Product _ (N 0)) &= outExpAr (N 0) \\
clean (Bin Product (N 1) l) &= outExpAr l \\
clean (Bin Product l (N 1)) &= outExpAr l \\
clean (Bin Sum a (N 0)) &= outExpAr a \\
clean (Bin Sum (N 0) a) &= outExpAr a \\
clean (Bin op (N a) (N b)) &= outExpAr (N ((f op) a b)) \\
\textbf{where} \\
f \text{ Sum} &= (+) \\
f \text{ Product} &= (*) \\
clean (Un op (N a)) &= outExpAr (N ((g op) a)) \\
\textbf{where} \\
g \text{ E} &= expd \\
g \text{ Negate} &= negate \\
clean l &= outExpAr l
\end{aligned}$$

Feita essa otimização, fez-se a substituição do X pelo valor dado e calculou-se o respetivo valor da expressão, reutilizando a função g_eval_exp :

$$\begin{aligned} gopt :: Floating\ c \Rightarrow c \rightarrow b + (c + ((BinOp, (c, c)) + (UnOp, c))) \rightarrow c \\ gopt = g_eval_exp \end{aligned}$$

De seguida, apresenta-se o diagrama do hilomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} ExpAr\ A & \xrightarrow{clean} & 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A) + (UnOp \times ExpAr\ A))) \\ \downarrow [(clean)] & & \downarrow id + (id + (id \times (clean)^2) + (id \times clean)) \\ ExpAr\ A & \xleftrightarrow[inExpAr]{outExpAr} & 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A) + (UnOp \times ExpAr\ A))) \\ \downarrow [gopt\ num] & & \downarrow id + (id + (id \times (gopt\ num)^2) + (id \times gopt\ num)) \\ A & \xleftarrow{gopt\ num} & 1 + (A + (BinOp \times (A \times A) + (UnOp \times A))) \end{array}$$

4. sd_gen

$$\begin{aligned} sd_gen :: Floating\ a \Rightarrow \\ () + (a + ((BinOp, ((ExpAr\ a, ExpAr\ a), (ExpAr\ a, ExpAr\ a))) + (UnOp, (ExpAr\ a, ExpAr\ a)))) \\ \rightarrow (ExpAr\ a, ExpAr\ a) \\ sd_gen = [(X, (N\ 1)), [construi_n, [construi_bin, construi_un]]] \\ \textbf{where} \\ construi_n\ a = (N\ a, N\ 0) \\ construi_bin\ (Sum, (a, b)) = (Bin\ Sum\ (\pi_1\ a)\ (\pi_1\ b), Bin\ Sum\ (\pi_2\ a)\ (\pi_2\ b)) \\ construi_bin\ (Product, (a, b)) = (Bin\ Product\ (\pi_1\ a)\ (\pi_1\ b), segundo_bin) \\ \textbf{where} \\ segundo_bin = Bin\ Sum\ (Bin\ Product\ (\pi_1\ a)\ (\pi_2\ b))\ (Bin\ Product\ (\pi_2\ a)\ (\pi_1\ b)) \\ construi_un\ (E, a) = (Un\ E\ (\pi_1\ a), Bin\ Product\ (Un\ E\ (\pi_1\ a))\ (\pi_2\ a)) \\ construi_un\ (Negate, a) = (Un\ Negate\ (\pi_1\ a), Un\ Negate\ (\pi_2\ a)) \end{aligned}$$

É de notar que a função sd_gen retorna o par $(ExpAr\ A, ExpAr\ A)$, no qual, o segundo elemento irá ser a $ExpAr\ A$ derivada da $ExpAr\ A$ contida no primeiro elemento do par.

O diagrama correspondente à função é:

$$\begin{array}{ccc} ExpAr\ A & \xrightarrow{outExpAr} & () + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A) + (UnOp \times ExpAr\ A))) \\ \downarrow sd & & \downarrow id + (id + (id \times (sd_gen \times sd_gen) + (id \times sd_gen))) \\ ExpAr\ A & \xleftarrow{\pi_2 \cdot sd_gen} & ((() + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A \times ExpAr\ A) + (UnOp \times ExpAr\ A))))^2 \end{array}$$

5. ad_gen

$$\begin{aligned} ad_gen\ a = [(a, 1), [g, [\widehat{bin_op}, \widehat{un_op}]]] \\ \textbf{where} \\ g = \langle id, 0 \rangle \\ bin_op\ Sum\ (a, b) = ((+) (\pi_1\ a)\ (\pi_1\ b), (+) (\pi_2\ a)\ (\pi_2\ b)) \\ bin_op\ Product\ (a, b) = ((* (\pi_1\ a)\ (\pi_1\ b), (+) ((* (\pi_1\ a)\ (\pi_2\ b)) ((* (\pi_2\ a)\ (\pi_1\ b)))) \\ un_op\ E\ a = (expd (\pi_1\ a), (* (\pi_2\ a)\ (expd (\pi_1\ a)))) \\ un_op\ Negate\ a = (negate (\pi_1\ a), negate (\pi_2\ a)) \end{aligned}$$

Note que a função ad_gen retorna o par (A, A) , onde, o primeiro elemento irá ser o valor da $ExpAr\ A$ com a substituição do valor dado e o segundo, irá ser o valor da sua derivada.

O diagrama correspondente à função é:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ExpAr } A & \xrightarrow{\text{outExpAr}} & () + (A + (\text{BinOp} \times (\text{ExpAr } A \times \text{ExpAr } A) + (\text{UnOp} \times \text{ExpAr } A))) \\
 \text{ad} \downarrow & & \downarrow \text{id} + (\text{id} + (\text{id} \times (\text{ad_gen } A \times \text{ad_gen } A) + (\text{id} \times \text{ad_gen } A))) \\
 A & \xleftarrow{\pi_2 \cdot \text{ad_gen}} & (() + (A + (\text{BinOp} \times ((A \times A) \times (A \times A)) + (\text{UnOp} \times (A \times A))))
 \end{array}$$

Problema 2

Definir

$$\begin{aligned}
 \text{loop } (c, (s, h)) &= (c * s \div h, (s + 4, h + 1)) \\
 \text{inic} &= (1, (2, 2)) \\
 \text{prj} &= \pi_1
 \end{aligned}$$

por forma a que

$$\text{cat} = \text{prj} \cdot \text{for loop inic}$$

seja a função pretendida. **NB:** usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

Sabendo que:

$$c \ n = \frac{(2 \ n)!}{(n+1)! * n!}$$

Vamos calcular $c \ (n+1)$:

$$c \ (n+1) = \frac{(2 \ n+2)!}{(n+2)! * (n+1)!} = \frac{(2 \ n+2) * (2 \ n+1) * (2 \ n)!}{(n+2) * (n+1)! * (n+1) * n!} = \frac{(2 \ n+2) * (2 \ n+1) * (c \ n)}{(n+2) * (n+1)} = \frac{2 * (2 \ n+1)}{n+2} * (c \ n)$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
 s \ n &= 2 * (2 \ n + 1) = 4 * n + 2 \\
 h \ n &= n + 2
 \end{aligned}$$

Podendo, com isto concluir:

$$\begin{cases} c \ 0 = 1 \\ c \ (n+1) = c \ n * \frac{s \ n}{h \ n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \ 0 = 2 \\ s \ (n+1) = s \ n + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h \ 0 = 2 \\ h \ (n+1) = h \ n + 1 \end{cases}$$

Analisando:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} c \ 0 = 1 \\ c \ (n+1) = c \ n * \frac{s \ n}{h \ n} \end{cases} \\
 &\begin{cases} s \ 0 = 2 \\ s \ (n+1) = s \ n + 4 \end{cases} \\
 &\begin{cases} h \ 0 = 2 \\ h \ (n+1) = h \ n + 1 \end{cases} \\
 \equiv &\{ \text{Igualdade extensional (71) (6 vezes)} \} \\
 &\begin{cases} c \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ c \cdot \text{succ} = (\widehat{*}) \cdot \langle c, (\widehat{/}) \cdot \langle s, h \rangle \rangle \end{cases} \\
 &\begin{cases} s \cdot \underline{0} = \underline{2} \\ s \cdot \text{succ} = (+4) \cdot s \end{cases} \\
 &\begin{cases} h \cdot \underline{0} = \underline{2} \\ h \cdot \text{succ} = \text{succ} \cdot h \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{Eq-} + (27) \text{ (3 vezes)} \} \\
&\quad [c \cdot \underline{0}, c \cdot \text{succ}] = [\underline{1}, (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot \langle c, s \rangle, h \rangle] \\
&\quad [s \cdot \underline{0}, s \cdot \text{succ}] = [\underline{2}, (+4) \cdot s] \\
&\quad [h \cdot \underline{0}, h \cdot \text{succ}] = [\underline{2}, \text{succ} \cdot h] \\
&\equiv \{ \text{in} = [\underline{0}, \text{succ}] , \text{Fusão} \times (3 \text{ vezes}) \} \\
&\quad c \cdot \text{in} = [\underline{1}, (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot \langle c, s \rangle, h \rangle] \\
&\quad s \cdot \text{in} = [\underline{2}, (+4) \cdot s] \\
&\quad h \cdot \text{in} = [\underline{2}, \text{succ} \cdot h] \\
&\equiv \{ \text{Absorção} + \} \\
&\quad c \cdot \text{in} = [\underline{1}, (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_1 \cdot \pi_2 \rangle, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (id + \langle c, \langle s, h \rangle \rangle) \\
&\quad s \cdot \text{in} = [\underline{2}, (+4) \cdot (\pi_1 \cdot \pi_2)] \cdot (id + \langle c, \langle s, h \rangle \rangle) \\
&\quad h \cdot \text{in} = [\underline{2}, \text{succ} \cdot (\pi_2 \cdot \pi_2)] \cdot (id + \langle c, \langle s, h \rangle \rangle) \\
&\equiv \{ \text{Def-} \times (\text{lei 10}) \text{ e Fokkinga com 3 elementos} \} \\
&\quad \langle c, \langle s, h \rangle \rangle = (\langle [\underline{1}, (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot (id \times \pi_1), \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle], \langle [\underline{2}, (+4) \cdot \pi_1 \cdot \pi_2], [\underline{2}, \text{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2] \rangle \rangle) \\
&\equiv \{ \text{Lei da troca (28)} \} \\
&\quad \langle c, \langle s, h \rangle \rangle = (\langle [\underline{1}, (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot (id \times \pi_1), \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle], [\langle \underline{2}, \underline{2} \rangle, \langle (+4) \cdot \pi_1 \cdot \pi_2, \text{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle] \rangle) \\
&\equiv \{ \} \\
&\quad \langle c, \langle s, h \rangle \rangle = (\langle [\langle \underline{1}, \langle \underline{2}, \underline{2} \rangle \rangle, \langle (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot (id \times \pi_1), \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle, \langle (+4) \cdot \pi_1 \cdot \pi_2, \text{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle] \rangle) \\
&\equiv \{ \text{for } b \text{ i} = (\underline{i}, b) \} \\
&\quad \langle c, \langle s, h \rangle \rangle = \text{for } (1, (\underline{2}, \underline{2})) \langle (\widehat{\diagup}) \cdot \langle (\widehat{*}) \cdot (id \times \pi_1), \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle, \langle (+4) \cdot \pi_1 \cdot \pi_2, \text{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Problema 3

1. calcLine

Com base na função fornecida, obteve-se:

```

calcLine :: NPoint → (NPoint → OverTime NPoint)
calcLine = cataList [·, nil, g] where
  g (d, f) l = case l of
    [] → nil
    (x : xs) → λz → concat $ (sequenceA [singl · linear1d d x, f xs]) z

```

2. deCasteljau

Com o auxílio do diagrama abaixo apresentado e da função dada, atingiu-se o resultado seguinte:

```

deCasteljau :: [NPoint] → OverTime NPoint
deCasteljau l pt = hyloAlgForm alg coalg l where
  coalg list = case list of
    [] → i1 []
    [a] → i1 a
    _ → i2 $ ⟨init, tail⟩ list
  alg = [id, f]
  f (p, q) = calcLine p q pt

```

```

hyloAlgForm h g = ⟨h⟩ · ⟨g⟩

```

$$\begin{array}{ccc}
[NPoint] & \xrightarrow{coalg} & [NPoint] + (LTree [NPoint] \times LTree [NPoint]) \\
\downarrow [(coalg)] & & \downarrow id + (coalg \times coalg) \\
LTree [NPoint] & \xrightleftharpoons[inLTree]{outLTree} & [NPoint] + ([NPoint] \times [NPoint]) \\
\downarrow (\ll alg \gg) & & \downarrow id + (alg \times alg) \\
OverTime\ NPoint & \xleftarrow{alg} & [NPoint] + (NPoint \times NPoint)
\end{array}$$

3. Resultado da runBezier

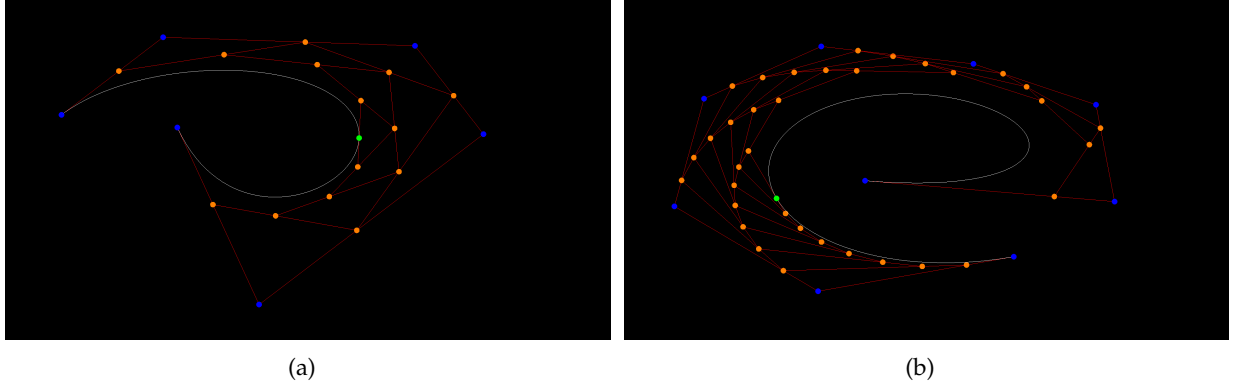


Figura 2: Resultados da função runBezier.

Problema 4

1. Solução para listas não vazias:

$$\begin{aligned}
avg &= \pi_1 \cdot avg_aux \\
avg_aux &= cataList\ gene \\
\textbf{where} \\
gene &= [\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle, \langle \widehat{(\prime)} \cdot \widehat{(\prime)} \cdot \langle \pi_1, \widehat{(\ast)} \cdot \pi_2 \rangle, succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle, succ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle]
\end{aligned}$$

Descrita pelo diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
A^* & \xrightarrow{outList} & 1 + (A \times A^*) \\
\downarrow avg & & \downarrow id + (id \times avg_aux) \\
A & \xleftarrow{\pi_1 \cdot avg_aux} & 1 + (A \times (A \times A))
\end{array}$$

2. Solução para árvores de tipo **LTree**:

$$\begin{aligned}
avgLTree &= \pi_1 \cdot (\ll gene \gg) \textbf{ where} \\
gene &= [\langle id, \underline{1} \rangle, final] \\
final &= \langle \widehat{(\prime)}, \pi_2 \rangle \cdot (\widehat{(\prime)} \times \widehat{(\prime)}) \cdot \langle \widehat{(\ast)} \times \widehat{(\ast)}, \pi_2 \times \pi_2 \rangle
\end{aligned}$$

Na definição do gene acima, apresenta-se a versão pointfree da função "final", correspondendo à versão pointwise seguinte:

$$final = \langle \widehat{(\prime)}, \pi_2 \rangle \cdot (\widehat{(\prime)} \times \widehat{(\prime)}) \cdot \langle \widehat{(\ast)} \times \widehat{(\ast)}, \pi_2 \times \pi_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{Igualdade Extensional (71) e Def-comp(72)} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = \langle \widehat{(/)}, \pi_2 \rangle \cdot \langle \widehat{(+)} \times \widehat{(+)} \rangle \cdot \langle \widehat{(*)} \times \widehat{(*)}, \pi_2 \times \pi_2 \rangle ((a, b), (c, d)) \\
&\equiv \{ \text{Def-split (76) e Natural-}\pi_2 \text{ (13) (2 vezes)} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = \langle \widehat{(/)}, \pi_2 \rangle (\langle \widehat{(+)} \times \widehat{(+)} \rangle (\langle \widehat{(*)} \times \widehat{(*)} \rangle ((a, b), (c, d)), (\pi_2 \times \pi_2) ((a, b), (c, d)))) \\
&\equiv \{ \text{Def-X (77)} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = \langle \widehat{(/)}, \pi_2 \rangle (\langle \widehat{(+)} \times \widehat{(+)} \rangle (\langle \widehat{(*)} (a, b), \widehat{(*)} (c, d) \rangle, (\pi_2 (a, b), \pi_2 (c, d)))) \\
&\equiv \{ \text{Uncurry (84), Definição de } * \text{ (multiplicação) e Natural-}\pi_2 \text{ (13)} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = \langle \widehat{(/)}, \pi_2 \rangle (\langle \widehat{(+)} \times \widehat{(+)} \rangle ((a * b, c * d), (b, d))) \\
&\equiv \{ \text{Def-split (76), Uncurry (84) e Definição da soma} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = \langle \widehat{(/)}, \pi_2 \rangle (a * b + c * d, b + d) \\
&\equiv \{ \text{Def-split (76), Uncurry (84), Definição da divisão e Natural-p2 (13)} \} \\
&\quad final((a, b), (c, d)) = ((a * b + c * d) / (b + d), b + d)
\end{aligned}$$

Chegando assim à versão pointwise:

$$final((a, b), (c, d)) = ((a * b + c * d) / (b + d), b + d)$$

O diagrama correspondente é:

$$\begin{array}{ccc}
LTree\ A & \xrightarrow{outLtree} & A + ((LTree\ A) \times (LTree\ A)) \\
\downarrow avgLTree & & \downarrow id + (gene \times gene) \\
A & \xleftarrow{\pi_1 \cdot gene} & A + ((A \times A) \times (A \times A))
\end{array}$$

Problema 5

Inserir em baixo o código **F#** desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`: