

# Ćwiczenie 3

## Obwody rezonansowe

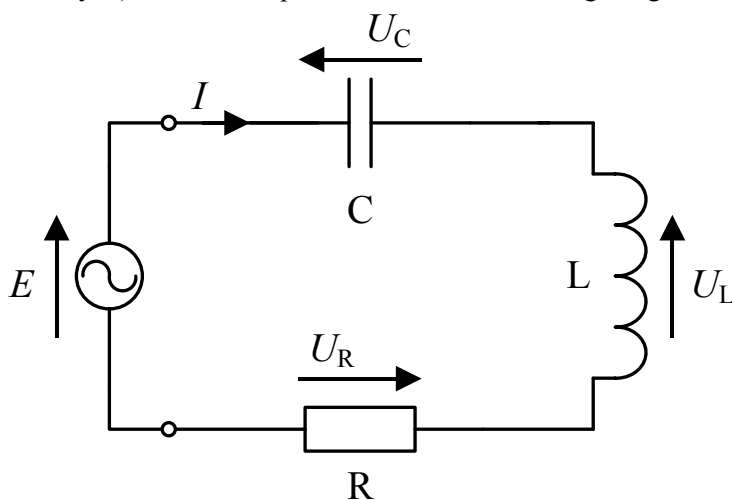
Opracowali dr inż. Krzysztof Świtkowski oraz mgr inż. Adam Czerwiński

Pierwotne wersje ćwiczenia i instrukcji są dziełem mgr inż. Leszka Widomskiego

Celem ćwiczenia jest poznanie właściwości obwodów rezonansowych i ich parametrów, reakcji obwodów selektywnych na sygnały i harmoniczne i prostokątne oraz możliwości zastosowań.

### Wprowadzenie

Układy drgające, w elektronice – obwody drgające, zawierające cewki i kondensatory, klasyfikuje się na podstawie liczby stopni swobody. Najprostszy obwód rezonansowy o jednym stopniu swobody (opisuje go tylko jedno równanie różniczkowe i charakteryzuje tylko jedna częstotliwość drgań własnych), może mieć postać albo obwodu szeregowego, albo równoległego.



Rys 1: Szeregowy obwód rezonansowy zawierający elementy idealne

Szeregowy obwód rezonansowy, zawierający elementy idealne, przedstawiono na rys. 1. Z drugiego prawa Kirchhoffa  $E=ZI$ , gdzie  $E$ ,  $I$ , oznaczają zespolone amplitudy odpowiednio siły elektromotorycznej (SEM) źródła napięć sinusoidalnych i natężenia prądu w obwodzie, zaś  $Z$  oznacza impedancję obwodu, równą:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Badanie drgań wymuszonych w takim obwodzie sprowadza się do rejestracji modułu natężenia prądu w obwodzie  $|I|$  przy stałej amplitudzie  $|E|$  w funkcji częstotliwości  $f$  (pulsacji  $\omega=2\pi f$ ). Moduł natężenia prądu:

$$|I| = \frac{|E|}{|Z|}$$

osiąga maksimum, gdy:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

a więc gdy częstotliwość drgań źródła (pulsacja  $\omega$ ) jest równa częstotliwości  $f_0$  (pulsacja  $\omega_0$ ) drgań własnych (rezonans):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Wtedy:

- $|I|_{max} = |E|/|Z|$
- Natężenie prądu  $I$  jest w fazie z SEM  $E$  źródła
- Impedancja obwodu jest rzeczywista  $Z=R$

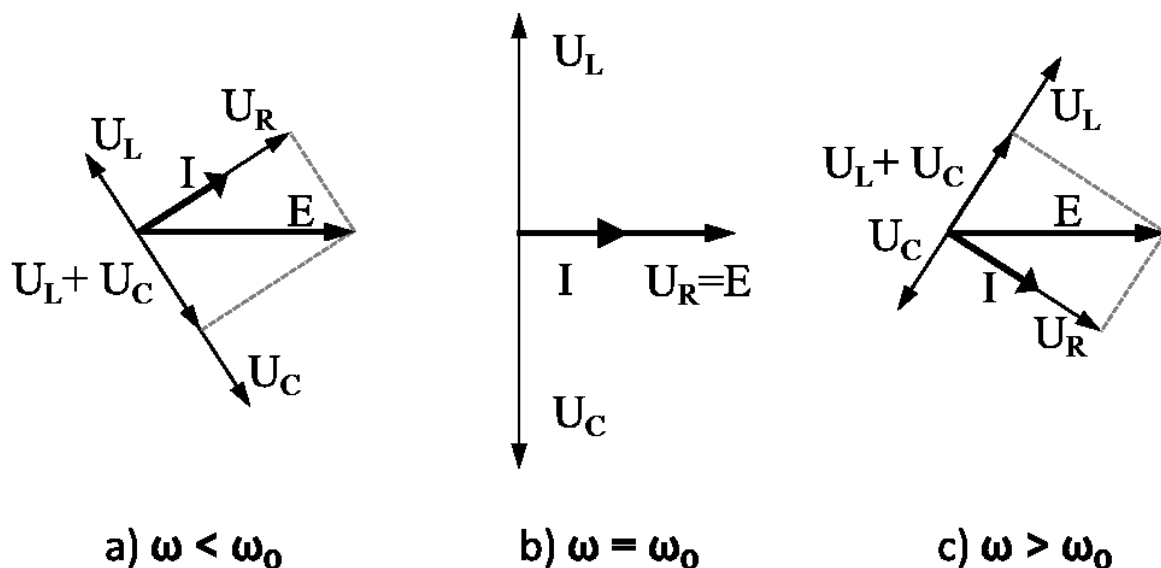
Również napięcie na oporniku  $R$  jest w fazie z  $E$  i wynosi  $U_R = E$ , natomiast napięcia na cewce  $U_L$  i kondensatorze  $U_C$  w rezonansie są sobie równe co do modułu, lecz jak przy każdej częstotliwości, mają fazy przeciwne:

$$U_L = j\omega LI, \quad U_C = \frac{1}{j\omega_0 C} = -j \frac{1}{\omega_0 C}$$

Dlatego mówi się, że w obwodzie szeregowym zachodzi rezonans napięć. Moduł napięcia na kondensatorze i na cewce wynosi w rezonansie:

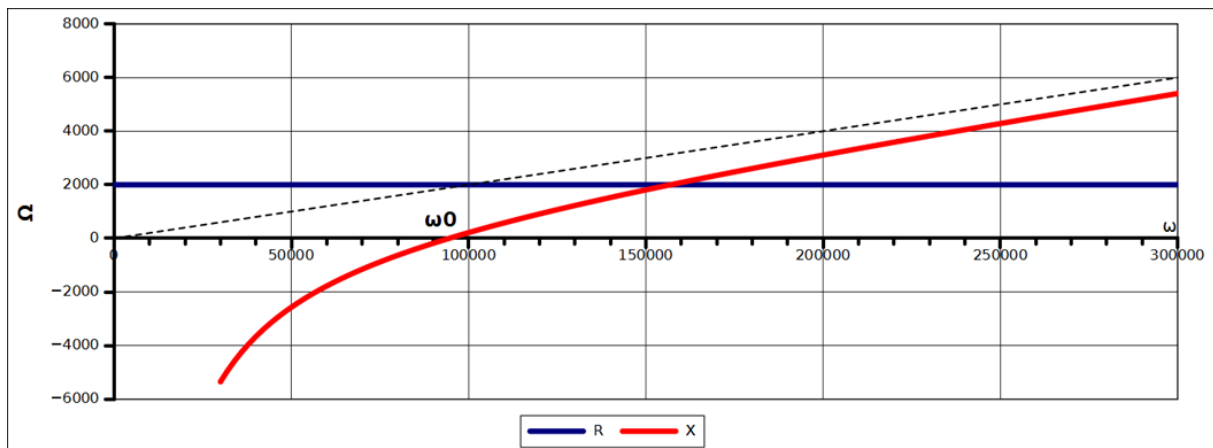
$$|U_C| = \frac{|E|}{\omega_0 CR} = \frac{|E|\omega_0 L}{R} = \frac{|E|}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q|E|$$

Wielkość  $Q=\omega_0 L/R$  nazywa się dobrocią obwodu; podana powyżej definicja szczegółowa wynika z ogólnej definicji energetycznej dobroci fizycznych układów drgających (patrz np. Skrypt – L. Widomski, L. Tykarski – Podstawy fizyki, Wyd. Politechniki Warszawskiej 1979, str. 72). Zwykle dobroć  $Q>1$ , a często nawet  $Q\gg 1$ . Dlatego napięcia na kondensatorze i na cewce w stanie rezonansu są  $Q$ -krotnie większe od modułu SEM  $|E|$  źródła, czyli od napięcia na oporniku  $R$  (suma napięć na kondensatorze i na cewce jest wtedy zero). Wykresy wskazowe napięć i prądów w szeregowym obwodzie rezonansowym podano na rys. 2 dla trzech częstotliwości SEM wymuszającej drgania: mniejszej równiej i większej od częstotliwości rezonansowej.

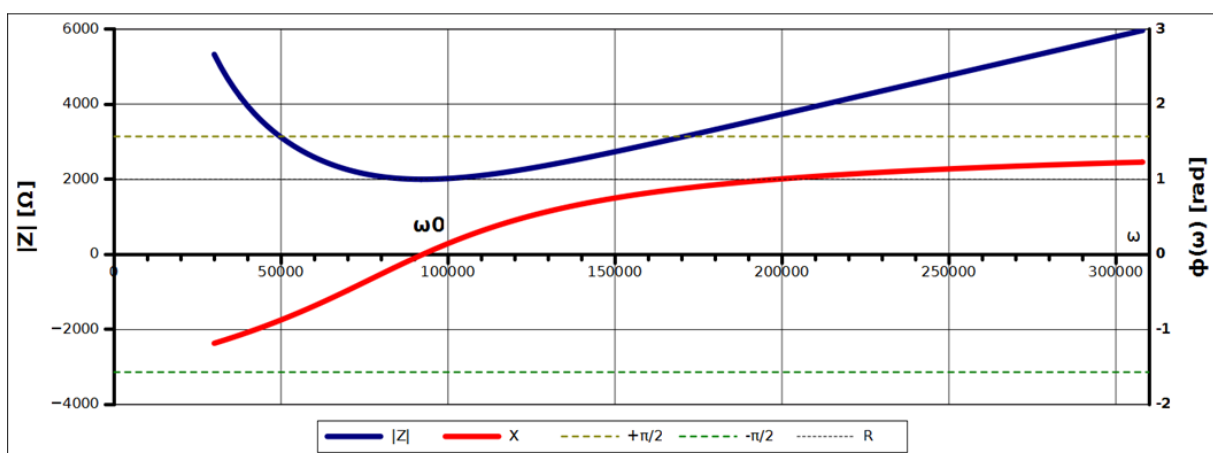


Rys. 2: Wykresy wskazowe dla szeregowego obwodu RLC

Zachowanie się obwodu w funkcji opisuje się za pomocą pary funkcji rzeczywistych  $R(\omega)$ ,  $X(\omega)$ , gdzie  $R(\omega)+jX(\omega)=Z(\omega)$ , bądź za pomocą pary funkcji  $|Z(\omega)|$  i  $\phi(\omega)$ , gdzie  $Z(\omega)=|Z(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$  (rys 3.)



$$R(\omega) = R = \text{const} \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \phi(\omega) = \arctan \left[ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$$

Rys. 3: Wykresy rezystancji, reakcji, modułu impedancji oraz fazy od pulsacji  $\omega$  dla obwodu z rys. 1

W tym drugim przypadku można wykorzystać postać uniwersalną zależności modułu impedancji od częstotliwości, jeżeli wprowadzić rozstrojenie względne  $v$ :

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$Z = R + j \left( \omega_0 L \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega} \right) = R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R(1 + jQv)$$

Zależność modułu unormowanego natężenia prądu  $y = I/I_{\max}$  od względnego rozstrojenia  $v$  opisuje funkcja spotykana w opisie wielu zjawisk fizycznych, zwana funkcją lorezowską (rys. 4):

$$y = \left| \frac{I}{I_{\max}} \right| = \frac{R}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}}$$

W pobliżu rezonansu  $|v| \ll 1$  wielkość rozstrojenia względnego można w przybliżeniu wyrazić przez rozstrojenie bezwzględne  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  i wtedy otrzyma się postać przybliżoną funkcji  $y = y(\Delta\omega)$ :

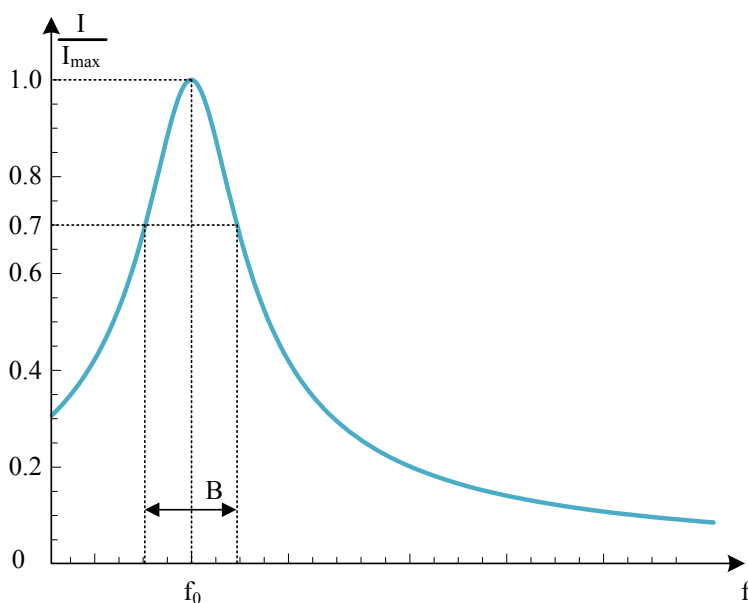
$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Jednym z parametrów krzywej rezonansowej jest jej szerokość  $B$ , zdefiniowana jako różnica takich częstotliwości, przy których moduł natężenia prądu w obwodzie szeregowym przyjmuje wartości  $\sqrt{2}$  razy mniejsze od wartości maksymalnej (odpowiada to zmniejszenia rzędnej przedstawionej na skali logarytmicznej czyli wyrażonej w dB o około 3dB). Są to tak zwane punkty połowy mocy, gdyż moc czynna tracona na oporniku  $R$  obwodu stanowi przy tych częstotliwościach połowę mocy traconej w oporniku  $R$  przy częstotliwości rezonansowej. Zachodzi to wtedy, gdy  $Qv = \pm 1$ , a więc dla  $v = \pm 1/Q$ , czyli w przybliżeniu, gdy  $2Q(\Delta\omega/\omega_0) = 2Q(\Delta f/f_0) = \pm 1$ , a więc dla dwóch częstotliwości:  $f_1 = f_0 - f_0/2Q$  i  $f_2 = f_0 + f_0/2Q$ , skąd otrzymuje się dla szerokości krzywej rezonansowej:

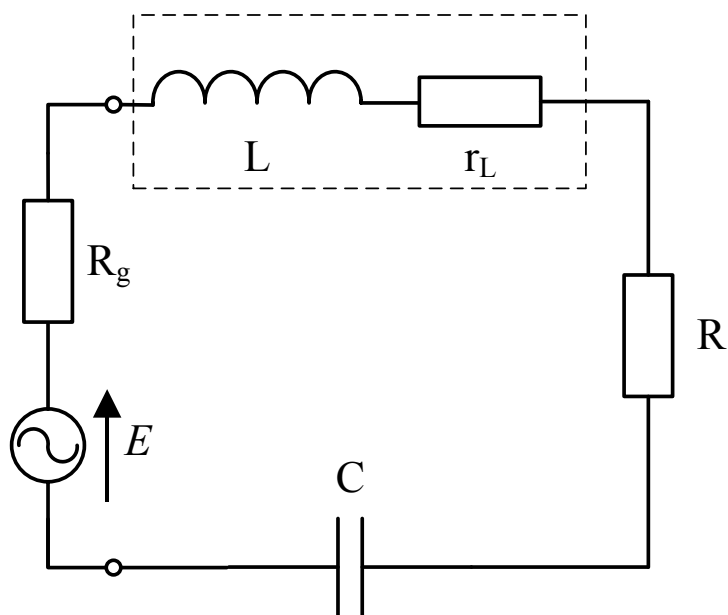
$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$

(wynik jest słuszny również bez przybliżeń). Krzywa rezonansowa jest tym „ostrzejsza”, im mniejsza jest szerokość krzywej rezonansowej obwodu  $B$ , czyli im większa jest dobroć obwodu: zdolność obwodu do wyróżniania spośród wielu sygnałów o różnych częstotliwościach sygnałów o częstotliwościach bliskich lub równych częstotliwości rezonansowej  $f_0$ .



Rys. 4: Zależność modułu unormowanego natężenia prądu od względnego rozstrojenia  $v$  (krzywa lorezowska)

W praktyce obwód szeregowy może zawierać rzeczywiste źródła napięciowe o oporności wewnętrznej  $R_w$  (ogólnie: o impedancji  $Z_g$ ), cewkę rzeczywistą o oporności strat  $r_L$ , i dodatkowy opornik  $R$  (rys 5.),



Rys. 5: Szeregowy obwód RLC zawierający elementy rzeczywiste

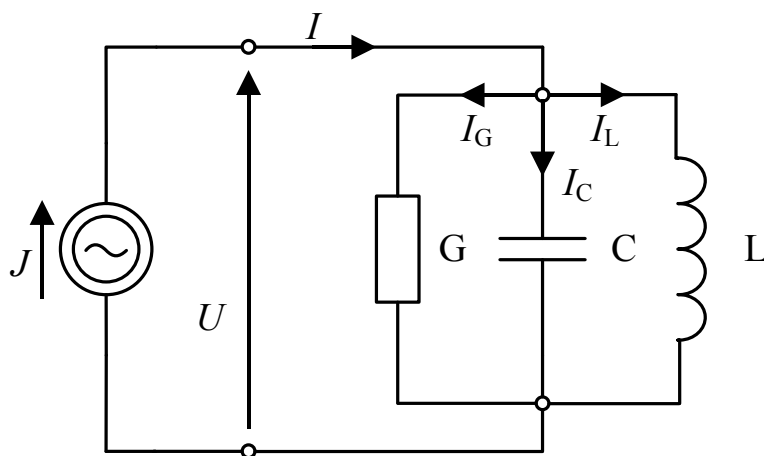
na którym napięcie jest proporcjonalne do natężenia prądu. Wtedy obok dobroci obwodu  $Q$  wprowadza się pojęcie dobroci cewki  $Q_L$ , zdefiniowanej jako:

$$Q_L = \omega_0 L / r_L$$

Związek między dobrociami obwodu  $Q$  i cewki  $Q_L$  łatwo ustalić, jeśli zauważyć, że:

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_g + R + r_L}{\omega_0 L} = \omega_0 C (R_g + R) + \frac{r_L}{\omega_0 L} = \omega_0 C (R_g + R) + \frac{1}{Q_L}$$

Zależności te pozwalają wyznaczyć  $r_L$  i  $Q_L$  cewki na podstawie znajomości  $f_0$  i  $Q$  oraz wartości  $R_g$ ,  $R$ ,  $C$ . Należy zauważyć, że oporność  $r_L$  jest modelową opornością zastępczą, reprezentującą wszystkie możliwe straty energii w cewce, a więc nie tylko straty cieplne w oporności przewodu, którym nawinięto cewkę, lecz również straty energii w rdzeniu oraz straty związane z promieniowaniem. Dlatego błędem jest przypuszczenie, że dobroć cewki nie zależy od częstotliwości i modelowe parametry cewki  $r_L$  i  $Q_L$  mają różne wartości dla różnych częstotliwości. Jedynie w niewielkim zakresie zmian częstotliwości usprawiedliwione jest przybliżenie, polegające na przyjęciu stałości tych parametrów.



Rysunek 6: Równoległy obwód RLC zawierający elementy idealne

Prosty obwód równoległy pobudzany z idealnego źródła prądowego o wydajności prądowej  $J$  przedstawiono na rys. 6. Opisuje go równanie  $J=YU$ , gdzie  $U$  oznacza napięcie na obwodzie równoległym, zaś  $Y$  admitancję tego obwodu, równą:

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

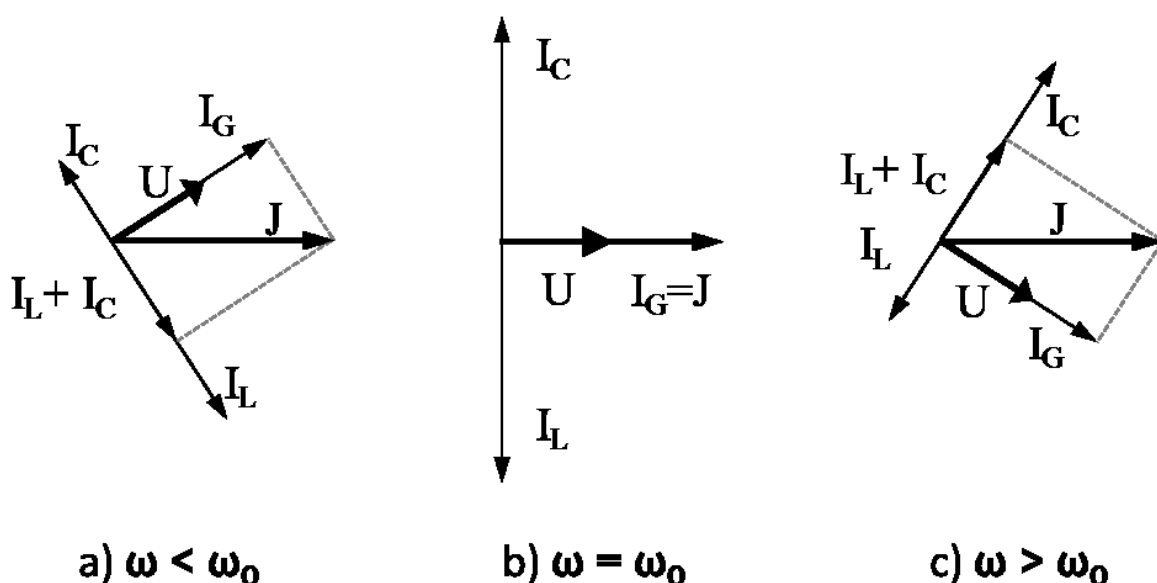
Badanie drgań wymuszonych polega tu na wyznaczeniu zależności napięcia na obwodzie od częstotliwości  $f$  drgań źródła przy stałej amplitudzie wydajności prądowej  $|J|$ . Gdy  $\omega C - 1/(\omega L) = 0$ , a więc przy częstotliwości  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$  takiej, że  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  następuje rezonans i wtedy:

- moduł napięcia  $U$  osiąga maksimum równe  $|U_{\max}| = J/G$
- napięcie  $U$  jest w fazie z prądem  $J$
- admitancja  $Y$  jest rzeczywista:  $Y=G$

W rezonansie prąd płynący przez konduktancję  $G$  jest równy  $J$ , zaś prąd płynący przez cewkę  $I_L$  jest równy co do modułu prądowi płynącemu przez kondensator  $I_C$ , lecz fazy tych prądów są przeciwne (w sumie dają zero):

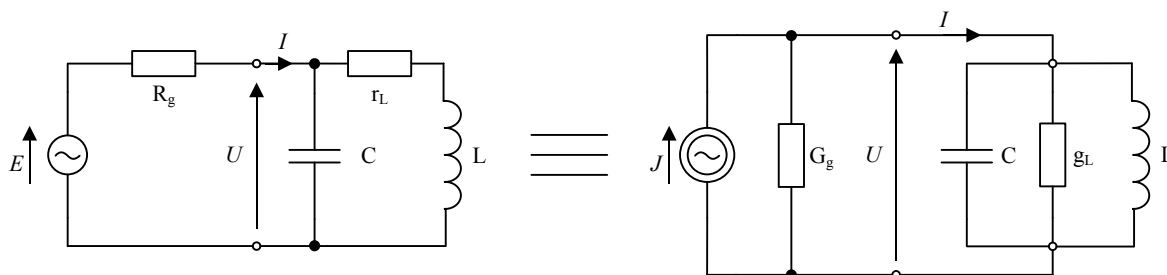
$$I_L = \frac{U}{j\omega_0 L} = -j \frac{U}{\omega_0 L}, \quad I_C = j\omega_0 C U$$

W obwodzie równoległym zachodzi rezonans prądów. Wprowadzając dobroć obwodu  $Q = \omega_0 C/G$  można stwierdzić, że w rezonansie prądy  $I_L$  i  $I_C$  mają moduły  $Q$ -krotnie większe niż wydajność prądowa  $J$ . Wykresy wskazowe napięć i prądów w stanie rezonansu i poza nim podano na rys. 7 (porównajmy go z rys. 2 i zauważmy dualizm obwodów szeregowego i równoległego). Zależność modułu napięcia na obwodzie od częstotliwości drgań źródła opisuje znana już krzywa lorezowska (proszę to sprawdzić!), identyczna jest też charakterystyka fazowa.



Rys. 7: Wykresy wskazowe dla równoległego obwodu RLC

Dobroć obwodu równoległego jest tym większa im mniejsza jest konduktancja  $G$ ; w przypadku obwodu idealnego  $G=0$  i dobroć byłaby nieskończenie wielka. W praktycznych obwodach równoległych zwykle nie dołącza się zewnętrznego opornika, a pomimo tego dobroć obwodu jest skończona. Jest to skutkiem dwóch powodów: źródło prądowe nie jest idealne i podobnie cewka nigdy nie jest idealna. Generatory laboratoryjne są z reguły źródłami napięciowymi, zatem do badania obwodów równoległych buduje się z nich źródła prądowe przez dołączenie w szereg opornika o wielkiej oporności.



Rys. 8: Z lewej obwód praktyczny zawierający elementy rzeczywiste. Z prawej prosty obwód równoległy.

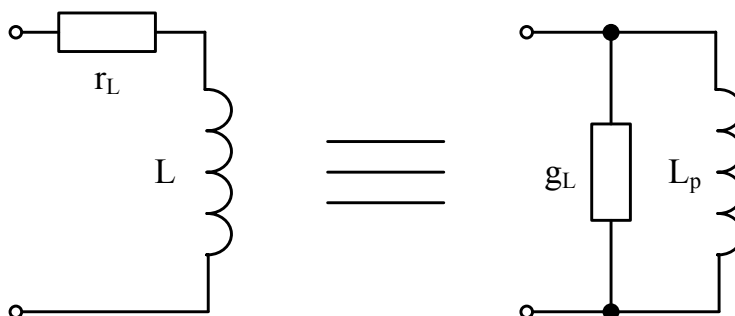
Jeżeli uwzględnić ponadto oporność strat cewki, to praktyczny obwód ma postać przedstawioną na rys 8 z lewej strony. Opisują go równania:

$$E = R_g I + U, \quad I = U \left( j\omega C + \frac{1}{r_L + j\omega L} \right)$$

z których można wyznaczyć zależność modułu  $|U|$  od częstotliwości źródła przy stałej amplitudzie  $E$ . Zależność ta nie jest opisana krzywą lorezowską, a jej maksimum nie wypada przy  $\omega = \omega_0$ . Można ją jednak tak opisać w przybliżeniu, jeżeli cewkę o dobroci  $Q_L$ , przedstawić przy pomocy równoległego schematu zastępczego z rys. 9, dla którego:

$$L_p = L \left( 1 + \frac{1}{Q^2} \right), \quad g_L = \frac{1}{r_L} \frac{1}{1 + Q_L^2}$$

Równoważne parametry obowiązują jedynie w wąskim zakresie częstotliwości (jest to właściwość lokalna).



Rys. 9: Z lewej: szeregowy schemat zastępczy cewki rzeczywistej; z prawej: równoległy schemat zastępczy cewki rzeczywistej

Dla cewek o dużych dobrociach  $Q_L$  jest w przybliżeniu:

$$L_p \approx L, \quad \frac{1}{g_L} \approx Q^2 r_L$$

Obwód praktyczny z lewej strony rys. 8 sprowadza się do prostego obwodu równoległego z prawej strony tego rysunku, przy czym między wprowadzonymi poprzednio dobrociami obwodu  $Q$  i cewki  $Q_L = \omega_0 L / r_L = \omega_0 C / g_L$  zachodzi związek:

$$\frac{1}{Q} = \frac{G}{\omega_0 C} = \frac{G_g + g_L}{\omega_0 C} = \frac{G_g}{\omega_0 C} + \frac{1}{Q_L}$$

W rezonansie napięcie na obwodzie wynosi  $U_{\max} = I / g_L$ , a zatem obwód złożony z cewki rzeczywistej  $r_L$ ,  $L$  i kondensatora  $C$  zachowuje się jak oporność, równa  $U_{\max} / I = 1 / g_L = Q_L^2 r_L$ . Natomiast cały obwód łącznie z  $G_g$  wykazuje oporność dynamiczną równą:

$$\frac{1}{R_d} = \frac{J}{U_{\max}} = \frac{I + G_g U_{\max}}{U_{\max}}$$

a więc stanowi równoległe połączenie oporności dynamicznej samego obwodu (t.j. zawierającego oprócz kondensatora idealnego tylko cewkę rzeczywistą) oraz oporności źródła. Łatwo pokazać wpływ dodatkowej oporności dołączonej równoległe do obwodu, co można wykorzystać do

wyznaczenia nieznanej oporności (sposób stosowany w prostych badaniach właściwości dyspersyjnych różnych ciał w zakresie częstotliwości radiowych).

Oprócz prostych obwodów rezonansowych szeregowego i równoległego, w elektronice używa się obwodów sprzężonych, złożonych z dwóch i więcej obwodów prostych. Opis takich obwodów o wielu stopniach swobody jest złożony, gdyż obwody wpływają wzajemnie na siebie (przestrzają się) i częstotliwości własne są zwykle złożonymi funkcjami parametrów obwodu. Ich istotną zaletą jest jednak większa selektywność.

Proste i złożone obwody rezonansowe stosowane są do wyróżnienia tylko niektórych spośród wielu składowych sygnału wejściowego, przy czym można je albo wydzielić w celu dalszej obróbki, albo wytłumić względem pozostałych składowych. Wyodrębnienie składowych sygnału wejściowego wykorzystuje się w:

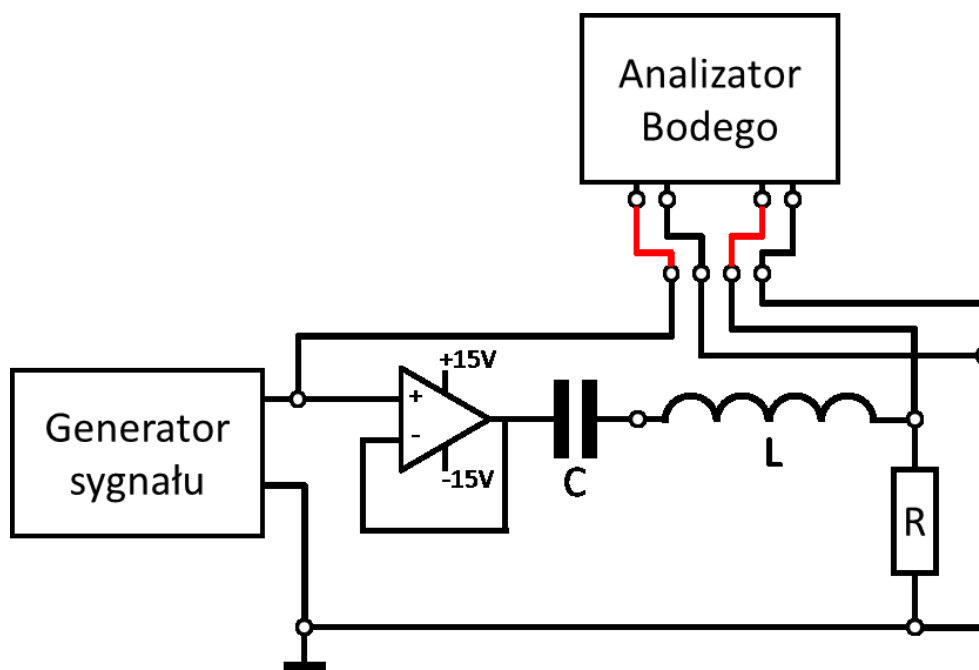
- obwodach wejściowych odbiorników radiowych i telewizyjnych,
- obwodach pośredniej częstotliwości odbiorników superheterodynowych
- analizatorach widma
- wzmacniaczach rezonansowych, pracujących z impulsami prądu wejściowego w t. zw. Klasie C,
- powielaczach częstotliwości

Wytłumienie niektórych składowych stosowane jest zwykle w celu zredukowania zakłóceń, np. dołączony do wejścia odbiornika radiowego obwód rezonansowy może zwierać składowe sygnałów zakłócających o pośredniej częstotliwości tych odbiorników 465kHz



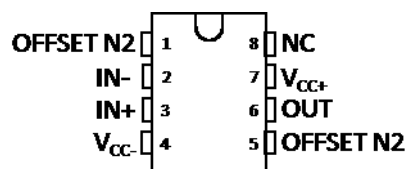
## Wykonanie ćwiczenia

- 1) Korzystając z systemu NI Elvis II+ połączyć układ pomiarowy z szeregowym obwodem rezonansowym z Rys. 10, w którym  $R=33\Omega$ ,  $C=6,2nF$ .



Rys. 10: Układ pomiarowy z szeregowym obwodem rezonansowym

Wyjścia układu na wirtualny analizator Bodego wyprowadzić poprzez złącza BNC systemu Elvis II+. Opis złączy wzmacniacza operacyjnego TL071 znajduje się Rys. 11:



Rys. 11: Opis złączy wzmacniacza operacyjnego TL071

Na wejście IN+ doprowadzamy sygnał z generatora. Na wejście IN- doprowadzamy sygnał z wyjścia wzmacniacza. Do złączy  $V_{CC+}$  i  $V_{CC-}$  doprowadzamy zasilanie ze złączy odpowiednio +15V i -15V z wyjść na płycie systemu ELVIS II+

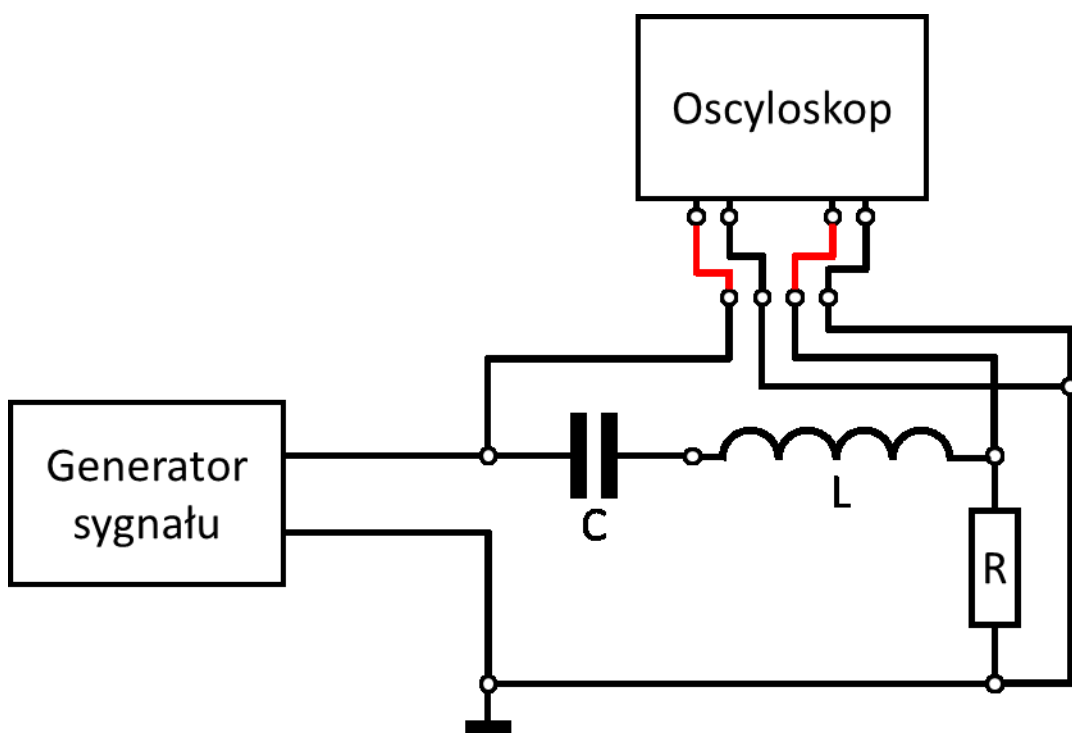
UWAGA:

Wzmacniacz operacyjny w układzie wtórnika napięciowego służy zmniejszeniu wpływu oporności wewnętrznej generatora na zachowanie obwodu.

Proporcjonalnie do natężenia prądu płynącego przez obwód na oporze wewnętrznym generatora pojawia się napięcie obniżające wartość napięcia wyjściowego generatora względem siły elektromotorycznej źródła. Wirtualny analizator Bodego oblicza w tym przypadku stosunek napięcia na oporniku R do napięcia wyjściowego generatora. Oprogramowanie nie udostępnia bezwzględnych wartości tych napięć. Na podstawie znajomości wartości siły elektromotorycznej i stosunku napięć nie da się wyznaczyć wartości napięcia na oporniku a tym samym wartości natężenia prądu płynącego przez obwód. Charakterystyka częstotliwościowa, wyznaczona przy założeniu że napięcie na wyjściu

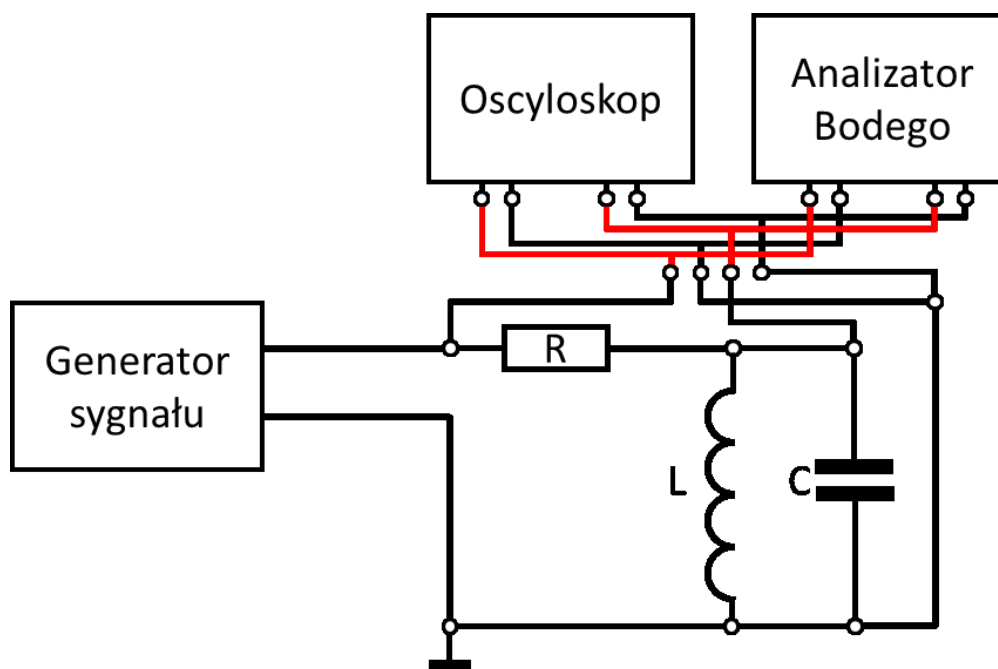
generatora jest stałe i równe sile elektromotorycznej źródła, będzie błędna. Zastosowanie wzmacniacza operacyjnego powoduje, że otrzymujemy prawie „stałe” napięcie odniesienia minimalizując błąd charakterystyki  $I(f)$  obwodu.

- 2) Używając wirtualnego analizatora Bodego zdjąć zależność modułu natężenia prądu  $|I|$  w obwodzie w funkcji częstotliwości. Wartości  $|I|$  otrzymuje się mierząc napięcie na oporniku  $R$  o znanej oporności. Pomiary przeprowadzić dla dwóch wartości  $R$ :  $33\Omega$  i  $130\Omega$
- 3) Przeprowadzić symulację eksperymentu z punktu 2 w programie NI Multisim. Wartość indukcyjności cewki wyznaczyć na podstawie częstotliwości rezonansowej układu rzeczywistego.
- 4) Przeprowadzić powtórny symulację eksperymentu z punktu 2, ale z uwzględnieniem oporności cewki.
- 5) Dla układu z Rys. 12 z opornikiem  $R=33\Omega$  na ekranie wirtualnego oscyloskopu obserwować napięcie  $U_R(t)$  przy pobudzeniu obwodu napięciem prostokątnym. Obserwacje przeprowadzić dla trzech częstotliwości przebiegu prostokątnego równych kolejno 1, 1/2 i 1/3 częstotliwości rezonansowej obwodu. Zarejestrować obserwowane przebiegi.



Rys. 12: Układ szeregowy do badania odpowiedzi obwodu w dziedzinie czasu.

- 6) Korzystając z systemu NI Elvis II+ połączyć układ pomiarowy z równoległym obwodem rezonansowym z Rys. 13, w którym  $R=30k\Omega$ ,  $C=6,2nF$ .



Rys. 13: Układ pomiarowy z równoległym obwodem rezonansowym

- 7) Używając wirtualnego analizatora Bodego zdjąć zależność modułu napięcia  $|U|$  w obwodzie w funkcji częstotliwości. Pomiary przeprowadzić dla dwóch wartości  $R$ :  $30\text{k}\Omega$  i  $10\text{k}\Omega$
- 8) Przeprowadzić symulację eksperymentu z punktu 7 w programie Multisim.
- 9) Przeprowadzić obserwacje identyczne jak w punkcie 5 dla układu równoległego z opornikiem  $30\text{k}\Omega$ .
- 10) Do układu równoległego dołączyć równolegle kondensator o nieznannej pojemności i wyznaczyć częstotliwość rezonansową obwodu w tych warunkach.

### Zadania do opracowania w sprawozdaniu.

- 1) Cel ćwiczenia
- 2) Wykaz użytego sprzętu
- 3) Wykreślić zależność modułu natężenia prądu w obwodzie w funkcji częstotliwości dla dwóch wartości oporu  $R$  na tym samym wykresie. Następnie na podstawie otrzymanych krzywych wyznaczyć ich szerokość oraz obliczyć dobroć każdego z obwodów i podać ją jako parametr krzywej. Na dwóch oddzielnych wykresach przedstawić porównanie wyników eksperymentu i symulacji dla obu wartości oporu  $R$ .
- 4) Na podstawie znanych  $f_0$  i  $Q$  oraz wartości  $R_g = 50\Omega$ ,  $R$ ,  $C$ , obliczyć parametry cewki przy częstotliwości rezonansowej: oporność strat cewki,  $r_L$ , indukcyjność własną  $L$ , dobroć cewki  $Q_L$ .
- 5) Powtórzyć zadanie z punktu 3 dla obwodu równoległego. Zmienną zależną jest teraz napięcie  $|U|$  na obwodzie.
- 6) Sporządzić wykresy doświadczalnej i teoretycznej (wyliczonej ze wzoru) uniwersalnej krzywej rezonansowej obwodu szeregowego czyli zależność unormowanego modułu natężenia prądu  $|I|/|I_{\text{MAX}}|$  w obwodzie szeregowym w funkcji rozstrojenia względnego  $v$ . Niezbędne dane pobrać z wyników doświadczenia oraz obliczeń w punkcie 3. Wykresy przedstawić we wspólnym układzie współrzędnych

- 7) Przedstawić i wyjaśnić reakcje obwodów szeregowego i równoległego na pobudzenie sygnałem prostokątnym. Obliczyć stosunki amplitud kolejnych harmonicznych (drugiej względem pierwszej i trzeciej względem pierwszej) w obu przypadkach i porównać z wynikami obliczonymi z rozkładu przebiegu prostokątnego na szereg Fouriera.
- 8) Na podstawie wyników z punktów 6) i 10) wykonanie ćwiczenia, obliczyć pojemność nieznanego kondensatora
- 9) Wyznaczyć błędy obliczanych wielkości w punktach 3,4 i 5. Wypisać wzory określające te błędy.