

## Dodatek

### Wstęp

W dodatku odpowiemy na pytanie: Jaki rozkład prędkości mają elektrony emisji termoelektronowej z metalu do próżni? Dodatkowo podamy uproszczony opis charakterystyki napięciowo prądowej diody próżniowej.

Założmy że, w przewodniku elektrony z zewnętrznych powłok atomowych mogą poruszać się swobodnie w całej jego objętości. Uproszczając, przyjmijmy że, elektrony są zamknięte w studni potencjału o nieskończonej 'barierze potencjału'. Zaniedbując oddziaływania między elektronami i jonami, elektrony można traktować jako gaz swobodnych cząstek. Podobnie jak cząstki gazu doskonałego (podlegające statystyce klasycznej -*rozkład makswellowski*) elektrony w metalu ulegają zderzeniom/rozproszeniom. Jednak, w przewodniku poziomy energii zajmowane przez elektrony, w odróżnieniu od cząstek gazu idealnego, mają charakter dyskretny. Dodatkowo elektrony obowiązuje zasada *Pauliego*. Przy tych założeniach energie/prędkości elektronów opisuje *rozkład Fermiego-Diraca*. Nieunormowany rozkład prędkości elektronów na jednostkę objętości opisuje wzór:

$$\Delta N(v) = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 4\pi v^2 \frac{1}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1} \Delta v$$

Gdzie:  $E = mv^2/2$  oraz  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Stąd łatwo przejść do rozkładu energii elektronów na jednostkę objętości:

$$\Delta N(E) = 8\pi\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}h^3 \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1} \Delta E = g(E)\Delta E$$

Opisując zjawisko termoemisji elektronowej z metalu do próżni wygodnie jest stosować rozkład prędkości wyrażony za pomocą składowych prędkości w postaci:

$$\Delta N = f(v_x, v_y, v_z) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1} \quad (*)$$

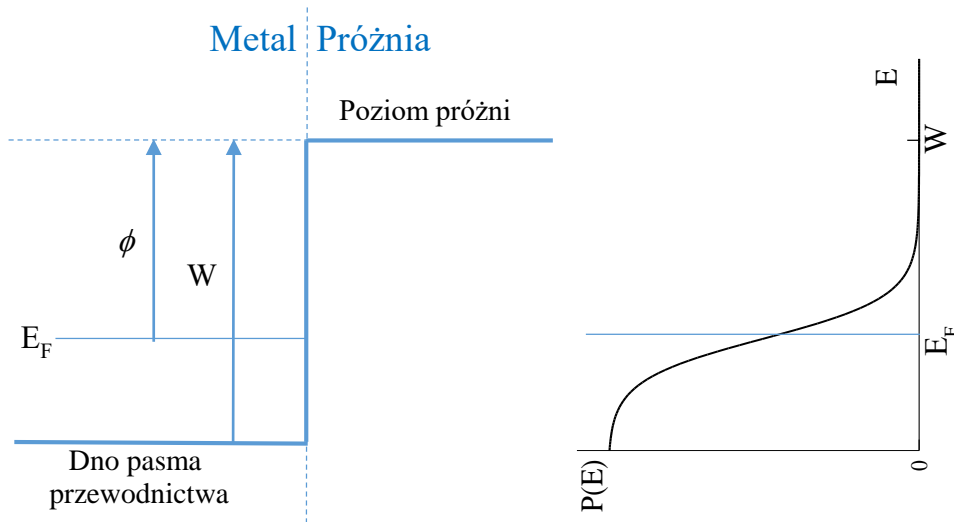
Występująca we wzorze wielkość  $E_F$  to *Poziom Fermiego* wynikający z warunku unormowania:

$$\int_0^\infty g(E) dE = N,$$

gdzie:  $N$  oznacza liczbę swobodnych elektronów w jednostce objętości. Interpretację poziom Fermiego jest prosta dla temperatury  $T = 0$ . Analizując czynnik  $P(E) = 1/(\exp[(E - E_F)/kT] + 1)$  widzimy że, elektrony zajmują wszystkie poziomy energetyczne dla  $E < E_F$  natomiast poziomy dla  $E > E_F$  są puste. Dla  $T > 0$  i  $E_F - E \gg kT$  czynnik ten jest bliski jedności, dla  $E = E_F$  równy  $1/2$ , i co ważne dla  $E - E_F \gg kT$  zmienia się jak  $\exp[-(E - E_F)/kT]$ .

Uwaga. W dalszych rozważaniach przyjmijmy mniej wyidealizowaną sytuację. W metalu istnieje skończona bariera potencjału, tak więc elektrony o dostatecznie dużej energii kinetycznej mogą opuszczać metal. Zakładamy że, dla elektronów o energiach większej od bariery potencjału, obowiązuje *rozkład Fermiego-Diraca*. W tym zakresie energii *rozkład Fermiego-Diraca* pokrywa się z *rozkładem Maxwella*.

Położenie poziomów energetycznych układu metal-próżnia, oraz wykresu funkcji  $P = P(E)$  przedstawia rysunek 1. Energia  $W$  - to różnica między energią elektronu w spoczynku (z dna pasma przewodnictwa) a energią elektronu znajdującego się w spoczynku na zewnątrz metalu. Praca wyjścia  $\phi$  jest zdefiniowana jako różnica:  $\phi = W - E_F$ .



Rys. 1. Wykres poziomów energetycznych układu metal-próżnia oraz odpowiadający mu dla temperatury  $T > 0$  wykres zależności  $P=P(E)$ .

Przyjmijmy układ współrzędnych tak by oś X była prostopadła do płaszczyzny metalu i skierowana na zewnątrz niej. Elektron-y przechodzące przez powierzchnię rozdziału metal-próżnia powinny mieć dostateczną energię by pokonać barierę potencjału  $W$  tj.  $m_1 v_{x1}^2/2 \geq W$ . Dla elektronów obowiązuje zasada zachowania energii (w kierunku X) i zasada zachowania pędu (dla składowych w kierunku Y i Z).

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 + W, \quad m_1 v_{1y} = m_1 v_{2y}, \quad m_1 v_{1z} = m_1 v_{2z}$$

Gdzie indeks 1 odnosi się do elektronów w metalu (np.  $m_1$  to masa efektywna elektronu w metalu) natomiast indeks 2 do elektronów w próżni. Dla  $W - E_f \gg kT$ , słuszne jest przybliżenie:

$$P(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} \cong \exp\left(\frac{-E + E_F}{kT}\right) \quad (**)$$

Wzór na gęstość szybkich elektronów o składowych prędkości zawartych w przedziałach  $(v_{1x}, v_{1x} + \Delta v_{1x})$ ,  $(v_{1y}, v_{1y} + \Delta v_{1y})$ ,  $(v_{1z}, v_{1z} + \Delta v_{1z})$  dostajemy z zależność (\*). W tym celu należy wykorzystać (\*\*) oraz zastosować podstawienie  $E = (m v_{1x}^2 + m v_{1y}^2 + m v_{1z}^2)/2$ . Stąd mamy:

$$\Delta N = \frac{2}{h^3} \exp\left[\frac{\left(E_F - \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1y}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1z}^2\right)}{kT}\right] m_1 \Delta v_x m_1 \Delta v_y m_1 \Delta v_z$$

Liczba elektronów dochodzących do jednostkowej powierzchni rozdziału w ciągu czasu  $\Delta t$  mających składowe prędkości z przedziałów  $(v_{1x}, v_{1x} + \Delta v_{1x})$ ,  $(v_{1y}, v_{1y} + \Delta v_{1y})$ ,  $(v_{1z}, v_{1z} + \Delta v_{1z})$  wynosi:

$$\begin{aligned} \Delta v_{1x} \Delta t \Delta N &= \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{E_f}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2}{kT}\right) m_1 v_{1x} \Delta t \Delta v_{1x} \\ &\times \exp\left(\frac{-\frac{1}{2} m_1 v_{1y}^2}{kT}\right) m_1 \Delta v_{1y} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2} m_1 v_{1z}^2}{kT}\right) m_1 \Delta v_{1z} \end{aligned}$$

Tym elektronom odpowiada liczba elektronów  $\Delta N'$  emitowanych w jednostkowym czasie z jednostkowej powierzchni o składowych prędkości z przedziałów  $(v_{2x}, v_{2x}+\Delta v_{2x})$ ,  $(v_{2y}, v_{2y}+\Delta v_{2y})$ ,  $(v_{2z}, v_{2z}+\Delta v_{2z})$ . Przyjmując, że liczba elektronów odbitych od bariery potencjału (efekt kwantowy) jest do pominięcia oraz wykorzystując kolejno zależności:

$$E_F - \frac{1}{2}m_1v_{1x}^2 = E_F - \left(\frac{1}{2}m_2v_{2x}^2 + W\right) = (E_F - W) - \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2 = -\phi - \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta N' = \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}m_2v_{2x}^2}{kT}\right) m_2v_{2x}\Delta t\Delta v_{2x} \\ \times \left(\frac{-\frac{1}{2}m_2v_{2y}^2}{kT}\right) m_2\Delta v_{2y} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}m_2v_{2z}^2}{kT}\right) m_2\Delta v_{2z} \quad (***) \end{aligned}$$

Składowa  $v_{2x}$  może zmieniać się w zakresie od 0 do  $+\infty$ , podczas gdy składowe  $v_{2y}$  i  $v_{2z}$  mają zakres zmienności od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

Dalej w tekście, rozważając elektrony w próżni, będziemy pomijać indeks rozróżniający elektrony w próżni i metalu.

Liczbę elektronów  $\Delta N_x$  o składowych prędkości w kierunku X zawartych w przedziale  $(v_x, v_x+\Delta v_x)$  emitowanych z jednostkowej powierzchni i w jednostkowym czasie otrzymamy całkując wyrażenie (\*\*\*) względem  $v_y$  i  $v_z$ .

$$\begin{aligned} \Delta N_x = \frac{2}{h^3} \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) mv_x\Delta v_x \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_y^2}{kT}\right) mdv_y \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}\right) mdv_z \end{aligned}$$

I ostatecznie:

$$\Delta N_x = \frac{4m^2\pi kT}{h^3} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) v_x\Delta v_x \quad (****)$$

Wykonując analogiczne podwójne całkowanie względem  $v_x$  i  $v_y$  oraz  $v_x$  i  $v_z$  dostajemy:

$$\begin{aligned} \Delta N_y = \frac{2\sqrt{2\pi(mkT)^3}}{h^3} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_y^2}{kT}\right) \Delta v_y \\ \Delta N_z = \frac{2\sqrt{2\pi(mkT)^3}}{h^3} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}\right) \Delta v_z \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę pomiędzy rozkładem dla składowej prędkości  $v_x$  i rozkładami dla składowych prędkości  $v_y$  i  $v_z$ . Pierwszy zawiera dodatkowo wyraz  $v_x$ . Ponadto dla składowej prędkości  $v_x$  przedziałem zmienności jest  $0 \leq v_x \leq +\infty$  (mówimy w tym przypadku o tzw. rozkładzie prędkości w strumieniu) podczas gdy dla  $v_y$  i  $v_z$  są to przedziały  $(-\infty \leq v_y \leq +\infty, -\infty \leq v_z \leq +\infty)$ .

### Wzór Richardsona

Emisji elektronów z metalu towarzyszy przepływ prądu. Całkowita gęstość prądu  $j$  (ładunek elektryczny przechodzący przez powierzchnię jednostkową w jednostkowym czasie) z powierzchni metalu otrzymujemy mnożąc przez ładunek elektronu wyrażenie (\*\*\*) wysumowane po wszystkich możliwych prędkościach elektronów:

$$j = eN_e = \frac{2e}{h^3} \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) mv_x dv_x \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_y^2}{kT}\right) mdv_y \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}\right) mdv_z$$

W rezultacie dostajemy wzór *Richardsona-Dushmana* (1922r.) na emisję elektronów z metalu do próżni:

$$j = eN_e = \frac{4\pi em(kT)^2}{h^3} \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right) = AT^2 \exp\left(\frac{-\phi}{kT}\right)$$

UWAGA. W przedkwantowej teorii metali *Drudego – Lorentza* zakładano że, elektrony podlegają statystyce klasycznej (*rozkład Maxwella*) otrzymując nieco inny wzór.

$$j = ne \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} T^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-W}{kT}\right) = aT^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-W}{kT}\right)$$

Gdzie  $n$  to koncentracja elektronów. Zauważmy, w tym wzorze temperatura jest w potęgze  $\frac{1}{2}$  a nie w potęgze drugiej i  $W$  zastępuj  $\phi = W - E_F$ . Wzór w tej postaci podał *Richardson* (1901r.).

### Rozkłady składowych prędkości elektronów termicznych

Całkowita liczba elektronów  $N_e$  emitowanych w jednostkowym czasie z jednostkowej powierzchni równa jest  $j/e$ . Wobec tego korzystając ze wzoru *Richardsona -Dushmana* możemy podać wzory na prawdopodobieństwa że, składowe prędkości  $v_x$ ,  $v_y$  i  $v_z$  emitowanych elektronów są zawarte w przedziałach odpowiednio  $(v_x, v_x + \Delta v_x)$ ,  $(v_y, v_y + \Delta v_y)$  i  $(v_z, v_z + \Delta v_z)$ :

$$\Delta P_x(v_x) = \frac{\Delta N_x}{N_e} = \frac{m}{kT} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) v_x \Delta v_x \\ \Delta P_y(v_y) = \frac{\Delta N_y}{N_e} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_y^2}{kT}\right) \Delta v_y \\ \Delta P_z(v_z) = \frac{\Delta N_z}{N_e} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}\right) \Delta v_z$$

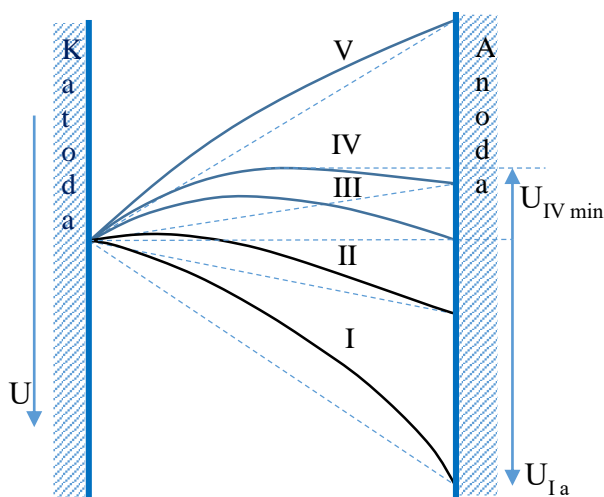
Tak więc składowe prędkości  $v_y$  i  $v_z$  są opisane *maxwellowskim rozkładem prędkości* natomiast składową  $v_x$ , jak zauważono wyżej, opisuje *zmodyfikowany rozkład maxwellowski*.

### Charakterystyka napięciowo-prądowa diody planarnej.

Opis ilościowy charakterystyki napięciowo-prądowej diody próżniowej nawet przy dużych uproszczeniach wymaga dość zaawansowanych metod obliczeniowych (I. Langmuir

*Phys. Rev.* **21** (1923) 419-435). Dlatego omawiając zjawiska zachodzące w diodzie próżniowej ograniczymy się głównie do opisu jakościowego. Opis ilościowy podamy jedynie dla przypadku nie wymagającego zaawansowanej matematyki tj. zakresu dużych ujemnych napięć anodowych. Zakres ten obejmują pomiary prowadzone w ćwic. 27.

Przyjrzyjmy się zjawiskom zachodzącym w diodzie planarnej. W opróżnionej z powietrza bańce szklanej umieszczone są dwie elektrody. Z podgrzanej do wysokiej temperatury katody emitowane są elektrony. W wyniku tego między elektrodami powstaje niejednorodny ładunek przestrzenny ('chmura elektronowa'). Jednocześnie na skutek emisji/ubytku elektronów z katody polaryzuje się ona dodatnio. W polu elektrycznym wytworzonym przez dodatni ładunek katody i ujemny ładunek przestrzenny, głównie zgromadzony blisko katody, najwolniejsze z wyemitowanych elektronów będą zawracane do katody. Natomiast szybkie elektrony pokonując barierę potencjału dotrą do anody polaryzując ją ujemnie. Tak więc, po połączeniu elektrod płynie między nimi prąd. Dla niewielkich bezwzględnych wartości napięcia anodowego (rys. 2. krzywe IV, III, II) rozkład potencjału między katodą i anodą ma lokalne minimum (stanowiącą barierę potencjału dla najwolniejszych wyemitowanych elektronów). W tym zakresie napięć istotną rolę odgrywa ładunek przestrzenny.

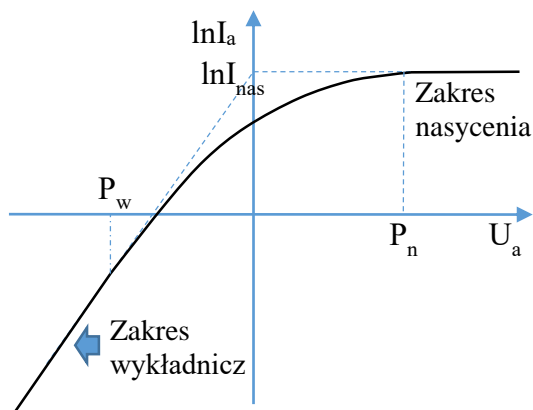


Rys. 2. Krzywe rozkładu potencjału w planarnej diodzie próżniowej przy różnych napięciach anodowych. Rozkłady potencjału dla tych samych napięć anodowych ale bez ładunku przestrzennego przedstawiają krzywe przerywane. Na czarno krzywe dla dodatnich napięć na anodzie.

Podanie dodatniego napięcia na anodę powoduje przyciąganie/ściągnięcie przez nią elektronów z chmury elektronowej. Wzrostowi napięcia anodowego towarzyszy przesuwanie się w kierunku katody i zanikanie lokalnej bariery potencjału przy jednoczesnym wzroście prądu anodowego. Gdy napięcie na anodzie jest dostatecznie duże (powyżej punktu nasycenia  $P_n$ , rys. 3, krzywa I na rys. 2) wszystkie wyemitowane elektrony są przyspieszane i docierają do anody. Obserwujemy tzw. 'nasycenie' prądu anodowego tj. płaski odcinek charakterystyki. Tak naprawdę stosujemy tu duże uproszczenie tj. pomijamy efekt *Schottky'eg*, który powoduje dalszy powolny wzrost prądu anodowego przy rosnącym napięciu na diodzie.

Generalnie omawiając charakterystykę diody próżniowej wygodnie jest podzielić ją na trzy zakresy co pokazuje rysunek 3.

Uwaga. Charakterystyka na rys. 3 zakłada brak istnienia napięcia kontaktowego tj. przypadek kiedy anoda i katoda są wykonane z tego samego metalu (prace wyjścia z anody i katody są jednakowe). Na wykresie obserwujemy przecinanie się prostych przerywanych dla  $U_a=0$ . Do określenia napięcia kontaktowego należy dysponować pełną charakterystyką napięciowo prądową. Ponieważ w ćwiczeniu 27 mierzymy charakterystykę jedynie dla ujemnych napięć anodowych to nie dysponujemy pełnymi danymi dla określenia napięcia kontaktowego. Pełne omówienie zjawiska znajdziemy w literaturze specjalistycznej.



Rys. 3. Wykres charakterystyki napięciowo-prądowej diody plenarnej.  $P_w$  i  $P_n$ , odpowiednio, punkt wykładniczy i punkt nasycenia. Między punktami  $P_w$  i  $P_n$  znajduje się zakres występowania ładunku przestrzennego.

Rozpatrzmy zakres charakterystyki napięciowo-prądowej badany w ćwiczeniu tj. dla ujemnych napięć anodowych  $U_a$ . Przy zwiększaniu ujemnego napięcia anodowego elektrony są hamowane również bliżej anody, zwiększa się tu ładunek przestrzenny, lokalne minimum potencjału przesuwają się w kierunku anody (rys. 2 krzywa IV). Tak więc, prąd anodowy maleje. Dalszy wzrost ujemnego napięcia na anodzie prowadzi do powstania napięcia hamującego w całej przestrzeni między elektrodami (krzywa V z rys. 2). Znikaniu lokalnego minimum potencjału odpowiada na charakterystyce z rysunku 3 punkt wykładniczy  $P_w$ . Dla jeszcze większych ujemnych napięć anodowych do anody docierają jedynie elektrony, dla których energia początkowa spełnia warunek  $mv_x^2/2 > -eU_a$ . Dla wygody obliczeń zdefiniujemy napięcie  $V_o$ , dla którego zachodzi  $mv_x^2/2 = eV_o$ . Liczbę elektronów emitowanych w jednostkowym czasie z jednostkowej powierzchni o energiach odpowiadających napięciom z zakresu  $(V_o, V_o + dV_o)$  można policzyć z podstawowego wzoru (\*\*\*) w postaci, w której wykorzystano wzór *Richardsona-Dushmana*:

$$\Delta N_x = \frac{j}{e} \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}\right) v_x \Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)$$

Co po podstawieniu  $eV_o = mv_x^2/2$  daje :

$$N(V_o)dV_o = \frac{j}{e} \exp\left(\frac{-eV_o}{kT}\right) \Delta\left(\frac{eV_o}{kT}\right)$$

Całkowitą liczbę elektronów docierających do anody, a stąd całkowitą gęstość prądu, otrzymamy sumując liczbę elektronów o energiach z zakresu od  $eV_o$  do  $+\infty$ .

$$j_a = \int_{-U_a}^{\infty} e N(V_o)dV_o = \left\{x = \frac{eV_o}{kT}\right\} = j \int_{-eU_a/kT}^{\infty} \exp(-x) dx = j \cdot \exp\left(\frac{eU_a}{kT}\right)$$

Pamiętajmy, napięcie  $U_a$  w tym wzorze uważa się za ujemne. Zgodnie z worem *Richardsona - Dushmana* gęstość prądu  $j_a(0) = j$  zależy od temperatury  $T$  i pracy wyjścia  $\phi$ .

Reasumując, pokazano że, dla napięć poniżej punktu wykładniczego  $P_w$  charakterystykę napięciowo-prądową można opisać funkcją wykładniczą. W rozpatrywanym zakresie napięć powinniśmy obserwować zależność liniową pomiędzy  $\ln(j_a/j)$  i  $U_a$  (rys. 3). Dla małych ujemnych napięć  $U_a$  tj. powyżej punktu  $P_w$  charakterystyka leży poniżej prostej opisanej wzorem teoretycznym. Jest to tzw. zakres ładunku przestrzennego. Do anody nie docierają najwolniejsze elektrony zatrzymane przez lokalną barierę potencjału związaną z powstaniem ładunku przestrzennego. Zakres ten jest stosunkowo mały (punkty  $P_w$  i  $P_n$  leżą blisko siebie) dla małych prądów emisyjnych.