

Wydział: Fizyki	Dzień: Poniedziałek 14-17 Data: 20.03.2017		Zespół: 8
Imiona i nazwiska: Marta Pogorzelska Paulina Marikin	Ocena z przygotowania:	Ocena ze sprawozdania:	Ocena końcowa:
Prowadzący:		Podpis:	

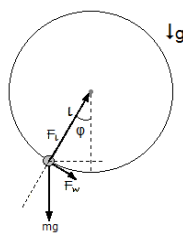
Ćwiczenie 3: Wahadło matematyczne

1 Cel badań

Zbadanie zjawiska anharmoniczności drgań wahadła matematycznego, tj: zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia oraz wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła różnicowego.

2 Wstęp teoretyczny

Wahadłem matematycznym jest ciało o masie punktowej m , zawieszone na cienkiej, nieważkiej lince, poruszające się po okręgu w jednorodnym polu grawitacyjnym.



Rysunek 1: Wahadło matematyczne

Ciało porusza się po okręgu wychylając się z położenia równowagi o pewien kąt i zakreślając łuk o długości:

$$S = l\varphi \tag{1}$$

,gdzie l - odległość punktu materialnego od osi obrotu, φ - kąt wychylenia wahadła
Równanie ruchu dla takiego ciała ma postać:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -mg \sin \varphi \tag{2}$$

Po podstawieniu wzoru (1) do równania (2) otrzymujemy i dodaniu stronami:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Rozwiązaniem tego równania dla ruchu oscylującego i jednocześnie wzorem na okres drgań wahadła jest:

$$T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (4)$$

Jest to jednak równanie czyste teoretyczne i nie ma podejściu apraktycznego, gdyż liczba zliczeń dąży do nieskończoności. W przeprowadzonym doświadczeniu kąt wychylenia jest nieduży ($\varphi < \frac{\pi}{2}$). Dla dokładności 3 miejsc znaczących wystarczy brać pod uwagę jedynie sumy dla $n=3$. Po podstawieniu tych zależności do wzoru (2) otrzymujemy:

$$T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Dla wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego należy zmierzyć 3 wielkości: kąt wychylenia wahadła φ , okres jego drgań T oraz długość linki l . To ostatnie jest jednak trudne do wykonania w warunkach laboratoryjnych ze względu na trudność wyznaczenia środka masy soczewki wahadła. W tym celu wykorzystana zostanie metoda obliczeń dla wahadła różnicowego, gdzie dokonuje się pomiaru zmiany długości wahadła (l_i, l_j - dwie różne długości wahadła). Wzór (5) ma wtedy postać:

$$T_i(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l_i}{g}} f^2(\varphi) \quad T_j(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l_j}{g}} f^2(\varphi) \quad (6)$$

,gdzie $f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\varphi}{2} \right)$; T_i, T_j - okresy drgań wahadła zmierzone dla kolejnych długości nici l_i, l_j .

Po podniesieniu do kwadratu wzorów (6) i odjęciu stronami dostajemy:

$$T_i^2 - T_j^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_i - l_j) f^2(\varphi) \quad (7)$$

3 Opis układu i metody pomiarowej

Aparatura pomiarowa

- model wahadła matematycznego
 - statyw
 - metalowe ciało o regularnym kształcie
 - jedwabna nić
 - czujka do mierzenia okresu
- elektroniczny układ pomiarowy z automatycznym pomiarem okresu
- linijka

3.1 Badanie zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia

Najpierw wykonano pomiar długości linki przy użyciu linijki od środka masy kulki do punktu zaczepienia i włączono stoper, który nastawiono na pomiar 3 okresów.

$$T_{sr} = \frac{t}{n} \quad (8)$$

,gdzie T_{sr} - średni okres drgań wahadła, t - czas n wachnięć wahadła

Następnie odchyłono kulkę o kąt 10° od położenia równowagi i puszczono tak, by poruszała się równolegle do kątomierza na statywie. Na koniec złapano kulkę i spisano wynik z urządzenia oraz kąt odchylenia kulki po jej złapaniu. Czynność powtórzono pięciokrotnie, a pomiary wykonano dla kątów odchylenia 10° , 20° , 30° i 40° .

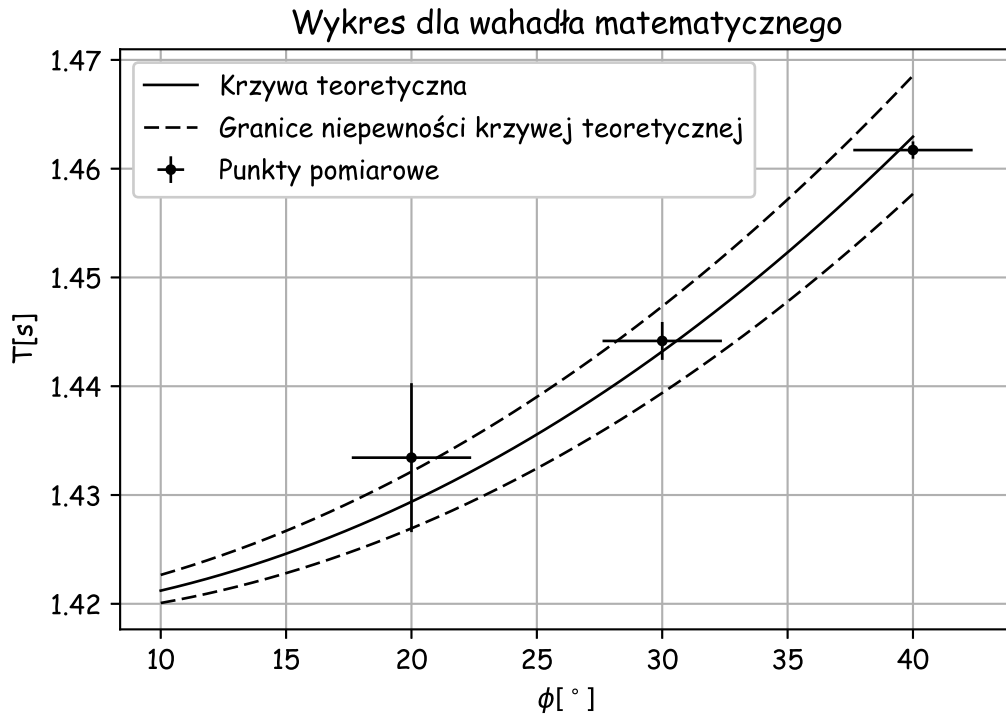
3.2 Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego

W tej części doświadczenia wykonane zostały pomiary okresów dla stałego kąta wychylenia, ale dla różnych długości linki wahadła. Przyjęto stały, mały kąt 15° i wykonano ćwiczenie analogicznie do poprzedniego. Długość odczytano z linijki na statywie, ponieważ do obliczeń potrzebna jest jedynie zmiana w długości wahadła, a nie odległość względem pewnego punktu odniesienia. Pomiary wykonano dla odczytów 50cm, 40cm, 30cm, 20cm, 10cm i 1,5cm. Do obliczeń korzystano ze wzoru (7).

4 Wyniki i analiza pomiarów

4.1 Wahadło matematyczne $l = 50(0.5)cm$

$\varphi[^\circ]$	10.0(1.2)	20.0(1.2)	30.0(1.2)	40.0(1.2)
4 okresy [s]	4.9223(0.0001)	5.7827(0.0001)	5.7889(0.0001)	5.8451(0.0001)
	5.6868(0.0001)	5.7221(0.0001)	5.7733(0.0001)	5.8451(0.0001)
	4.9163(0.0001)	5.7227(0.0001)	5.7745(0.0001)	5.8525(0.0001)
	5.6908(0.0001)	5.7202(0.0001)	5.7716(0.0001)	5.8456(0.0001)
	4.9222(0.0001)	5.7210(0.0001)	5.7750(0.0001)	5.8459(0.0001)
średnia(std)[s]	5.22(0.42)	5.733(0.027)	5.7766(0.0069)	5.8468(0.0031)
1 okres[s]	1.30(0.42)	1.433(0.027)	1.4441(0.0069)	1.4617(0.0031)
teoretyczny okres[s]	1.421(0.012)	1.4293(0.0094)	1.443(0.012)	1.462(0.015)

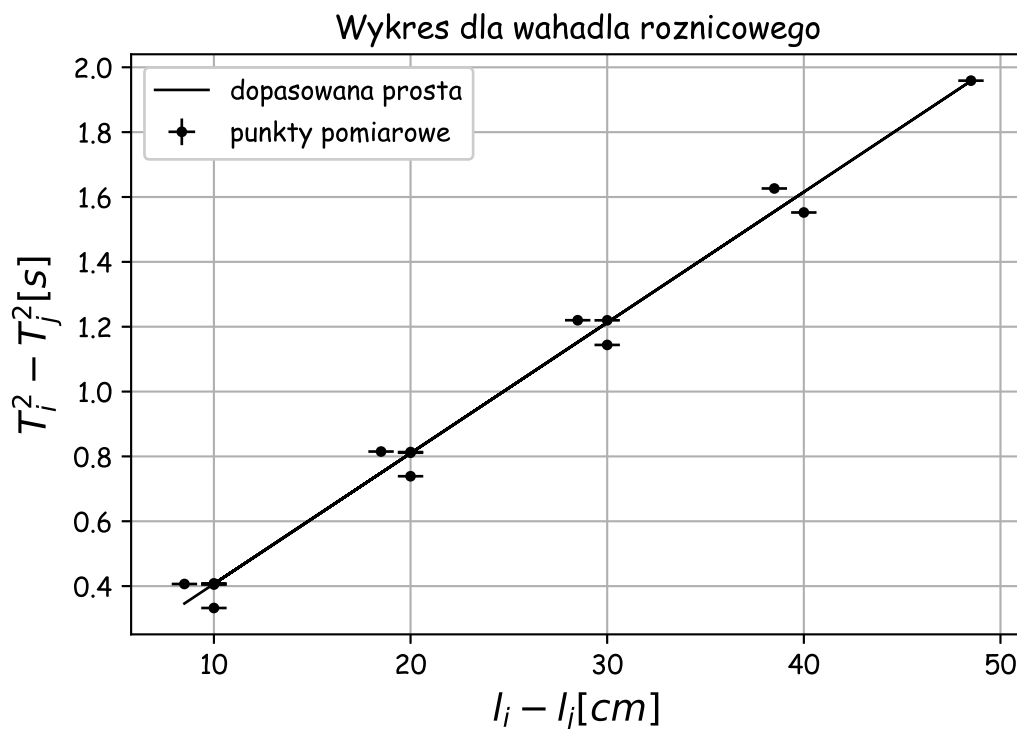


Rysunek 2

Z pomiarów czasu dla wszystkich serii dla obu wahadeł wyciągnięto średnią. Pomiar dla wahadła matematycznego zostały podzielone na cztery w celu uzyskania pojedynczego okresu. Krzywą teoretyczną wyliczono ze wzoru (3). Pomiar dla 10° został wyzucony jako błąd gruby, ze względu na dużą (ponad 15 razy większą niż pozostałe) niepewność. Pomiar dla pozostałych trzech rozważanych kątów leżą na krzywej teoretycznej w granicach swoich niepewności.

4.2 Wahadło różnicowe $\varphi = 15^\circ$

$l[\text{cm}]$	50	40	30	20	10	1
$t[\text{s}]$	1.2158(0.0001)	1.3703(0.0001)	1.5107(0.0001)	1.6406(0.0001)	1.7587(0.0001)	1.8516(0.0001)
	1.2122(0.0001)	1.3690(0.0001)	1.5121(0.0001)	1.6403(0.0001)	1.7599(0.0001)	1.8525(0.0001)
	1.2103(0.0001)	1.3705(0.0001)	1.5118(0.0001)	1.6403(0.0001)	1.7605(0.0001)	1.8518(0.0001)
	1.2121(0.0001)	1.3703(0.0001)	1.5124(0.0001)	1.6402(0.0001)	1.7597(0.0001)	1.8516(0.0001)
	1.2126(0.0001)	1.3706(0.0001)	1.5124(0.0001)	1.6408(0.0001)	1.7599(0.0001)	1.8518(0.0001)
	1.2136(0.0001)	1.3704(0.0001)	1.5120(0.0001)	1.6400(0.0001)	1.7605(0.0001)	1.8523(0.0001)
$T[\text{s}]$	1.2127(0.0019)	1.37018(0.00082)	1.51190(0.00085)	1.64036(0.00064)	1.75986(0.00087)	1.85193(0.0006)
$T^2[\text{s}^2]$	1.4708(0.0046)	1.8774(0.0022)	2.2858(0.0025)	2.6908(0.0021)	3.0971(0.0030)	3.4296(0.002)



Rysunek 3

Pomiary zostały opracowane zgodnie ze wzorem (7), od każdego pomiaru długości (i kwadratu odpowiadającego mu pomiaru okresu) odjęto wszystkie pomiary odeń mniejsze. Otrzymane różnice przedstawiono na wykresie wraz z dopasowaną do nich prostą. Prosta została dopasowana funkcją *polyfit* pakietu *numpy* w Pythonie.

$a = 0.0402878(0.0000015)$

Parametr kierunkowy dopasowanej prostej został przyrównany do pozostałej części zależności (7):

$$a = \frac{4\pi^2}{g} f(\varphi) \quad (9)$$

gdzie a - parametr kierunkowy. Przekształcenie powyższej równości pozwoliło na wyliczenie przyspieszenia ziemskiego, którego wyliczona wartość wynosi $g = 9.841(0.299) [\frac{m}{s^2}]$

5 Analiza niepewności

Niepewność pomiarów to:

- długość $\Delta l = 0.5cm$
- czas $\Delta T = 0.001s$
- kąt $\Delta \varphi = 2^\circ$

Dla wszystkich okresów przy wyliczaniu niepewności wzięto pod uwagę także ich odchylenie standardowe.

$$\mu(T) = \sqrt{std^2 + \frac{\Delta T^2}{3}}$$

Zarówno dla długości jak i dla kąta do niepewności doliczono niepewność eksperymentatora równa połowie niepewności pomiaru

$$\mu(x) = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{3} + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}$$

Niepewność dopasowanej prostej stanowi pierwiastek kowariancji zwracanej przez funkcję *polyfit* pakietu *numpy* w Pythonie. Dla g niepewność wyliczono metodą propagacji niepewności:

$$\mu(g) = \sqrt{(\Delta a \frac{4\pi^2 f(\varphi)}{a^2})^2 + (\Delta f(\varphi) \frac{4\pi^2}{a})^2}$$

6 Wnioski

Okres wahadła matematycznego jest zależny od kąta wychylenia. Wysoka (w zakresie jednego przedziału niepewności) zgodność większości punktów pomiarowych do krzywej teoretycznej skłania do potwierdzenia, iż badana teoria poprawnie opisuje daną zależność. Pomiar dla 10° wydaje się być niepoprawny ze względu na dużą (w porównaniu z innymi niepewność) i jego odchylenie od krzywej nie musi wskazywać na niepoprawność tezy. Jednak cztery, a tym bardziej trzy punkty pomiarowe to dość mało. By potwierdzić tezę należałoby wykonać pomiary dla większej ilości kątów wychyleń.

Badana zależność dla wahadła różnicowego wyraźnie wykazuje charakter liniowy. Wyznaczone przyspieszenie ziemskie jest zbliżone do tablicowego.