

### Ćwiczenie nr 43

## Wyznaczanie $c_p/c_v$ dla powietrza metodą rezonansu akustycznego (Pomiar prędkości dźwięku w powietrzu)

### 1. Wstęp

Stan danej masy gazu jest jednoznacznie określony przy pomocy trzech parametrów:

**p – T – V** (ciśnienia, temperatury i objętości zajmowanej przez gaz). Związek pomiędzy tymi parametrami opisuje równanie stanu gazu doskonałego (**Clapeyrona**)

$$pV = nRT = \frac{M}{\mu} RT \quad (1)$$

gdzie:  $n$  – liczba moli gazu

$R$  – uniwersalna stała gazowa = 8.31 J/mol °K

$\mu$  – masa molowa (cząsteczkowa)

$T$  – temperatura powietrza w czasie pomiarów

Uniwersalna stała gazowa równa jest różnicy ciepła molowego pod stałym ciśnieniem i ciepła molowego w stałej objętości:

$$c_p \mu - c_v \mu = C_p - C_v = R \quad (2)$$

Zależność ta znana jest pod nazwą równania **Mayera**,

Gdzie  $c_p$  i  $c_v$  odpowiednio ciepła właściwe gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości,

### 2. Metody pomiarowe

Pomiar stosunku ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem  $c_p$  do ciepła właściwego w stałej objętości  $c_v$  (opisany w klasycznej metodzie **Clementa i Desormesa**) zakłada przeprowadzenie przemiany adiabatycznej gazu, a następnie przemiany izochorycznej.

Przeprowadzenie takich przemian w warunkach laboratoryjnych wymaga dużej staranności i precyzji w wyznaczaniu parametrów przemiany, dlatego proponujemy opisaną przez **Laplace’a** metodę wyznaczania  $\kappa$  (**kappa**), wykorzystującą zjawisko rezonansu fali akustycznej w powietrzu.

### 3. Definicje

- Falą mechaniczną** - nazywamy zaburzenie przemieszczające się w ośrodku sprężystym, rozróżniamy fale mechaniczne poprzeczne i podłużne.
- Fala podłużna** – gdy kierunek drgań cząstek ośrodka jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fali.
- Fala poprzeczna** – gdy kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali

- d) Prędkość rozchodzenia się fali mechanicznej zależy od sprężystości ośrodka :  
W ciałach stałych mogą rozchodzić się zarówno fale poprzeczne jak i podłużne

Dla fali podłużnej  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  gdzie: E – moduł Younga ,  $\rho$  - gęstość ciała

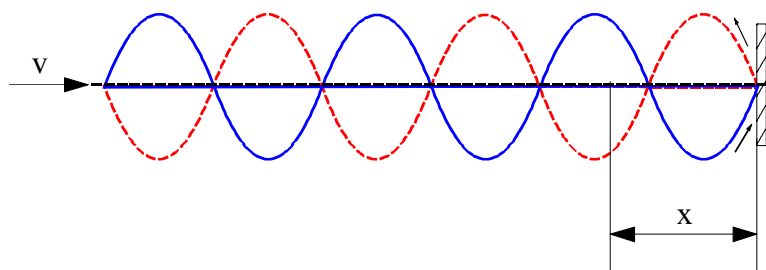
Dla fali poprzecznej  $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  gdzie: G – moduł sztywności (sprężystość postaci)

e) **Powietrze**-mieszanina gazów (78% azotu i 21% tlenu + śladowe domieszki innych gazów) nie ma sprężystości postaci , dlatego nie mogą się w nim rozchodzić fale poprzeczne, natomiast dzięki sprężystości objętościowej możliwe jest rozchodzenie się fali podłużnej np. fali akustycznej.

f) **Fala akustyczna** – jest zaburzeniem ośrodka wywołanym drganiem dowolnego urządzenia, powodującego okresowy ruch cząstek powietrza. W naszym doświadczeniu źródłem fali akustycznej jest drgająca z określoną (16Hz-20kHz) częstotliwością membrana głośnika. Zaburzenie wywołane drganiami głośnika rozchodzi się dzięki sprężystości ośrodka. Zjawisku temu towarzyszy przenoszenie energii pędu przez cząstki gazu bez zmiany ich średnich położeń , cząstki gazu oscylują wokół położenia równowagi przekazując energię pędu z obszaru o większym ciśnieniu-gęstości do sąsiedniego obszaru o mniejszym ciśnieniu. Prędkość fali dźwiękowej zależy od sprężystości ośrodka (dlatego niemożliwe jest rozchodzenie się fali dźwiękowej w próżni). Podsumowując , propagacji dźwięku w powietrzu towarzyszy:

- 1) ruch gazu wywołujący miejscową zmianę gęstości
- 2) zmianę gęstości odpowiadają lokalne zmiany ciśnienia

- a) **Fala stojąca** – powstaje wtedy gdy spotykają się dwa ciągi fal mające tę samą częstotliwość i amplitudę, lecz rozchodzące się w przeciwnych kierunkach. Dzieje się tak gdy fala rozchodząca się w ośrodku ograniczonym spotyka falę odbitą od granicy ośrodka bez straty energii.



Rys. 1 Powstawanie fali stojącej

Równanie falowe dla fali bieżącej zapisujemy w postaci:

$$\xi_1 = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

zaś dla fali odbitej zapisujemy jako :

$$\xi_2 = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right)$$

W wyniku superpozycji (suma) równanie fali wypadkowej ma postać:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos \frac{\omega \left( t + \frac{x}{v} \right) - \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)}{2} \cos \omega t = 2A \cos \omega \frac{x}{v} \cos \omega t = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t$$

Zapisując jeszcze raz wynik dodawania, otrzymamy:

$$\xi = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t \quad (3)$$

w punktach w których :  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$ , amplituda ruchu jest równa zero. Punkty te pozostają stale w spoczynku i nazywamy je węzłami fali stojącej. Warunek ten jest spełniony gdy:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{tzn. gdy } x = (2n+1)\lambda/2, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \quad \text{a więc } x = \lambda/4; 3\lambda/4; 5\lambda/4$$

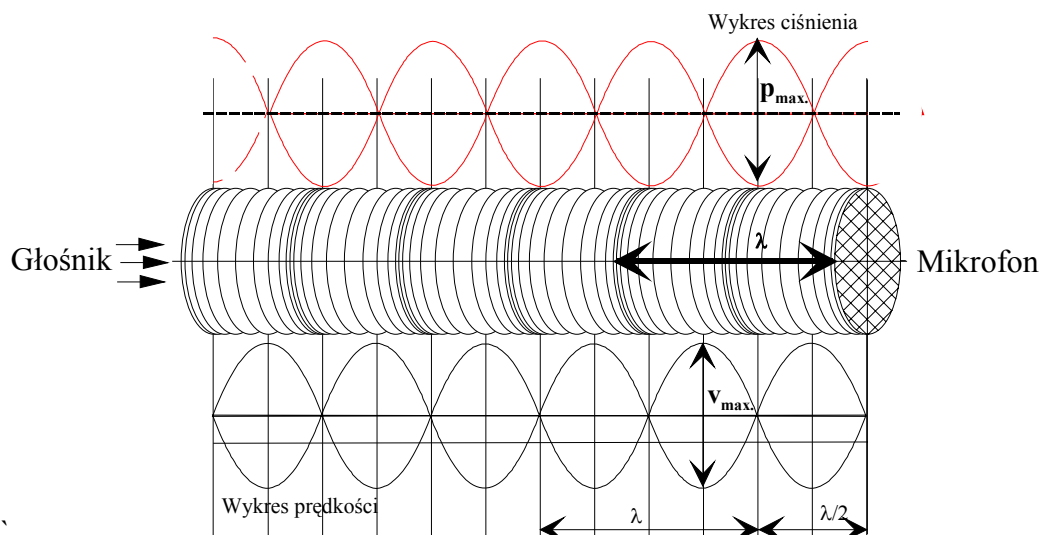
natomiast w punktach w których  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$  amplituda ruchu jest maksymalna, punkty te nazywamy strzałką fali stojącej.

Warunek ten jest spełniony gdy:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \quad \text{czyli gdy } x = n\lambda/2 \quad \text{a więc dla } x = 0; \lambda/2; \lambda; 3\lambda/2, \dots$$

Do pełnego opisu powstawania fali stojącej należy omówić zjawisko odbicia fali od przeszkody. W przypadku gdy fala odbija się od ośrodka gęstszego to w miejscu odbicia (na granicy ośrodków) powstaje węzeł fali stojącej, natomiast gdy odbija się od ośrodka rzadszego to w miejscu odbicia powstaje strzałka fali stojącej.

Jeżeli w słupie powietrza wytworzymy (*podłużną*) stojącą falę akustyczną (Rys.2) to mówiąc o węzłach i strzałkach takiej fali należy zauważyć, że w fali akustycznej mamy do czynienia z węzłami i strzałkami zagęszczeń i rozrzedzeń (czyli zmianami ciśnienia  $p$ ) oraz z przesuniętą względem niej o  $\pi/2$  falą prędkości drgań cząsteczek powietrza. Oznacza to, że węzłom ciśnienia odpowiadają strzałki prędkości i odwrotnie. Na przeszkodzie sztywnej powstaje strzałka ciśnienia i węzeł prędkości.



**Rys.2** Wykresy ciśnienia i prędkości cząstek w fali stojącej.

Fala akustyczna (fala podłużna) przemieszczająca się w powietrzu w postaci lokalnych zagęszczeń i rozrzedzeń ośrodka (lokalne zmiany ciśnienia), rozchodzi się na tyle szybko, że nie zachodzi wymiana ciepła pomiędzy cząsteczkami gazu podlegającym zmianom a nie zaburzonym otoczeniem. Oznacza to, że zmiany ciśnienia zachodzą adiabatycznie-zgodnie z równaniem adiabaty:

$$pV^{\kappa} = \text{const.} \quad (4)$$

gdzie:  $\kappa$  - nosi nazwę współczynnika adiabaty lub współczynnika Poissona i równa się:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (5)$$

Współczynnik adiabaty  $\kappa = c_p/c_v$  jest wielkością charakterystyczną dla danego gazu i zależy od jego budowy:

dla gazów jednoatomowych	$\kappa = 5/3 = 1.67$
dla dwuatomowych	$\kappa = 7/5 = 1.40$
a dla trójatomowych	$\kappa = 8/6 = 1.33$

Jednocześnie możemy wykazać, że:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{v^2 \rho}{p} \quad (6)$$

Stosunek  $c_p/c_v$  opisany powyższym wzorem wiąże prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej w powietrzu z jego parametrami, ciśnienia i temperatury.

gdzie:  $v$  – prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu  
 $\rho$  – gęstość powietrza  
 $p$  – ciśnienie powietrza

Wzór ten wyprowadzimy wiedząc, że:

$$v = \sqrt{\frac{Q}{\rho}} \quad (7)$$

gdzie  $Q$  = moduł ściśliwości ośrodka (sprężystości objętościowej), dla gazów:

$$Q = -\frac{dp}{dV} V \quad (8)$$

równa się stosunkowi przyrostu ciśnienia do względnego ubytku objętości, podstawiając do (7) otrzymamy:

$$v = \sqrt{-\frac{dp V}{dV \rho}} \quad (9)$$

a skoro wiemy że zmiany ciśnienia w trakcie rozchodzenia się fali akustycznej podlegają przemianie adiabatycznej  $pV^\kappa = \text{const.}$ , logarytmując a następnie różniczkując powyższe równanie otrzymamy:

$$\ln p + \kappa \ln V = \text{const.}$$

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dV}{V} = 0$$

$$-\frac{dp}{dV} = \frac{\kappa \cdot p}{V} \quad (10)$$

po wstawieniu do (9) otrzymamy

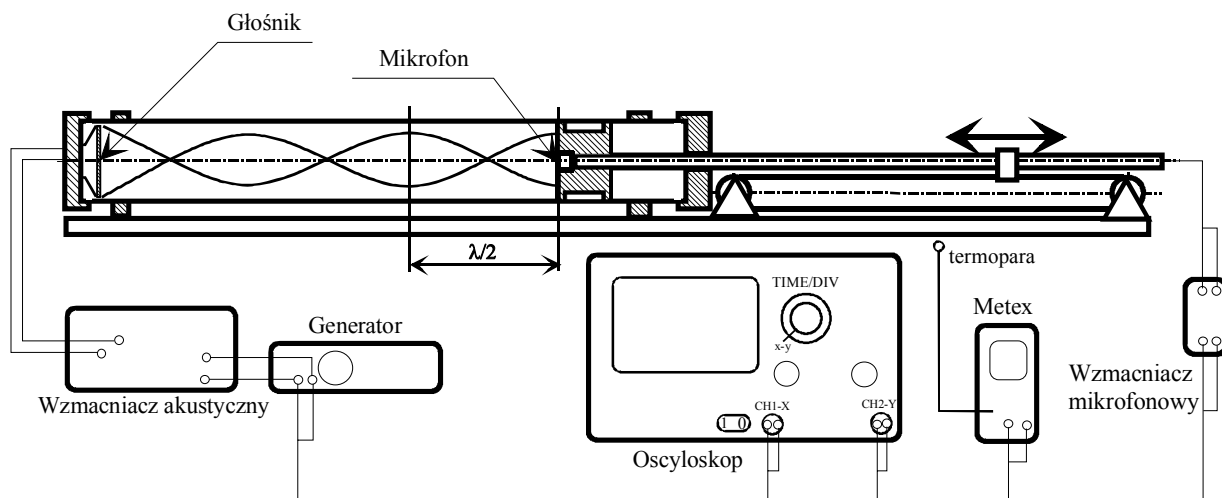
$$v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{V} \frac{V}{\rho}} \quad (11)$$

i po przekształceniu ostatecznie otrzymujemy zależność (6)

$$\kappa = \frac{v^2}{p} \frac{\rho}{c_v} = \frac{c_p}{c_v}$$

### 3. Opis aparatury

Prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej w powietrzu wyznaczamy metodą pomiaru  $\lambda$  fali stojącej w układzie przedstawionym na rys 3.



Rys.3 Schemat układu do pomiaru długości fali akustycznej

Układ pomiarowy składa się z rury plexiglasowej z głośnikiem umieszczonym na jednym jej końcu i ruchomego tłoka z zainstalowanym wewnątrz mikrofonem. Głośnik zasilany jest poprzez wzmacniacz akustyczny z regulowanego generatora np. G-432. Sygnał z generatora podawany jest na pierwszy kanał oscyloskopu w celu dokładnego wyznaczenia częstotliwości generowanej fali. Jeżeli ustawimy tłok w pozycji maksymalnego sygnału, to odległość do najbliższego maksimum równa będzie połowie długości fali stojącej powstałej w rurze.

Położenia w których sygnał jest maksymalny znajdujemy obserwując wskazania miernika oraz sygnał na drugim kanale oscyloskopu. Znając częstotliwość pracy generatora ( $f$ ) możemy obliczyć  $v$ .

$$v = \lambda f \quad (12)$$

Natomiast gęstość powietrza można wyznaczyć z równania stanu gazu:

$$pV = \frac{m}{M} kT \quad (13)$$

gdzie:  $p$  i  $T$  ciśnienie i temperatura powietrza w czasie pomiarów

$m$  – masa powietrza

$V$  – objętość powietrza

$M$  – masa jednej cząsteczki powietrza =  $4,81 \times 10^{-26}$  (kg)

$k$  – stała Boltzmanna =  $R/N = 1,3806 \times 10^{-23}$  (J/°K)

$R$  – stała gazowa =  $8,3144$  (J/mol °K)

$N$  – liczba Avogadra =  $6,02245 \times 10^{23}$  (1/mol)

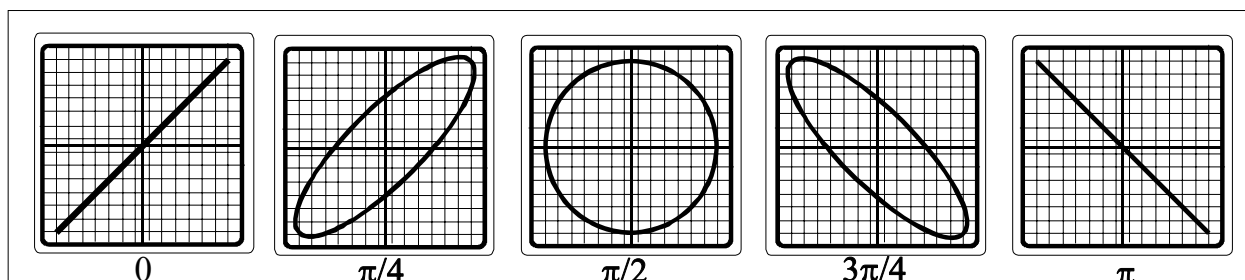
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{kT} \quad (14)$$

Wstawiając tak przekształcone równanie do równania (6) oraz uwzględniając równanie (12) otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\lambda^2 f^2 M}{kT} \quad (15)$$

#### 4. Wykonanie ćwiczenia

- Sygnal z głośnika (generatora) doprowadzamy do wejścia kanału pierwszego (CH1-X) oscyloskopu, natomiast sygnał z mikrofonu doprowadzamy do wejścia kanału drugiego (CH2-Y) oscyloskopu (oscyloskop GOS-620 FG)
- Przełącznik podstawy czasu (TIME/DIV) ustawiamy w pozycji X-Y
- Włączamy przesuw mikrofonu (ikona „SK” silnik krokowy)
- Obserwujemy obraz na ekranie oscyloskopu – rejestrując zmiany położenia co  $\frac{1}{2} \lambda$
- Porównać obserwowany obraz, w dwu-kanałowym i X-Y trybie pracy oscyloskopu.



Rys.4 Obraz na ekranie oscyloskopu w funkcji przesunięcia fazowego

#### 5. Wyniki pomiarów.

- Wyznaczyć długość fali  $\lambda$  dla kilku wartości częstotliwości. w przedziale 4 do 8 kHz co 500 Hz (wartości poda Asystent)
- Odczytać temperaturę powietrza w trakcie pomiarów
- Wyniki pomiarów zapisać w tabeli

Lp.	k	M	T	f	$\Delta f$	$\lambda$	$\kappa$	Uwagi
	J/K $10^{-23}$	Kg $10^{-26}$	$^0\text{K}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	m	-	-
1	1,3806	4,81						
2								
3								

- Dla wybranych częstotliwości wykonać wykres napięcia w funkcji przesunięcia mikrofonu. Porównać otrzymane wyniki z obserwacjami oscyloskopu.
- Oszacować dokładność pomiarów i obliczyć błąd średni kwadratowy, średniej arytmetycznej  $\kappa$  wg wzoru

$$\Delta \kappa = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa - \kappa_i)^2}{n(n-1)}}$$

- Obliczyć

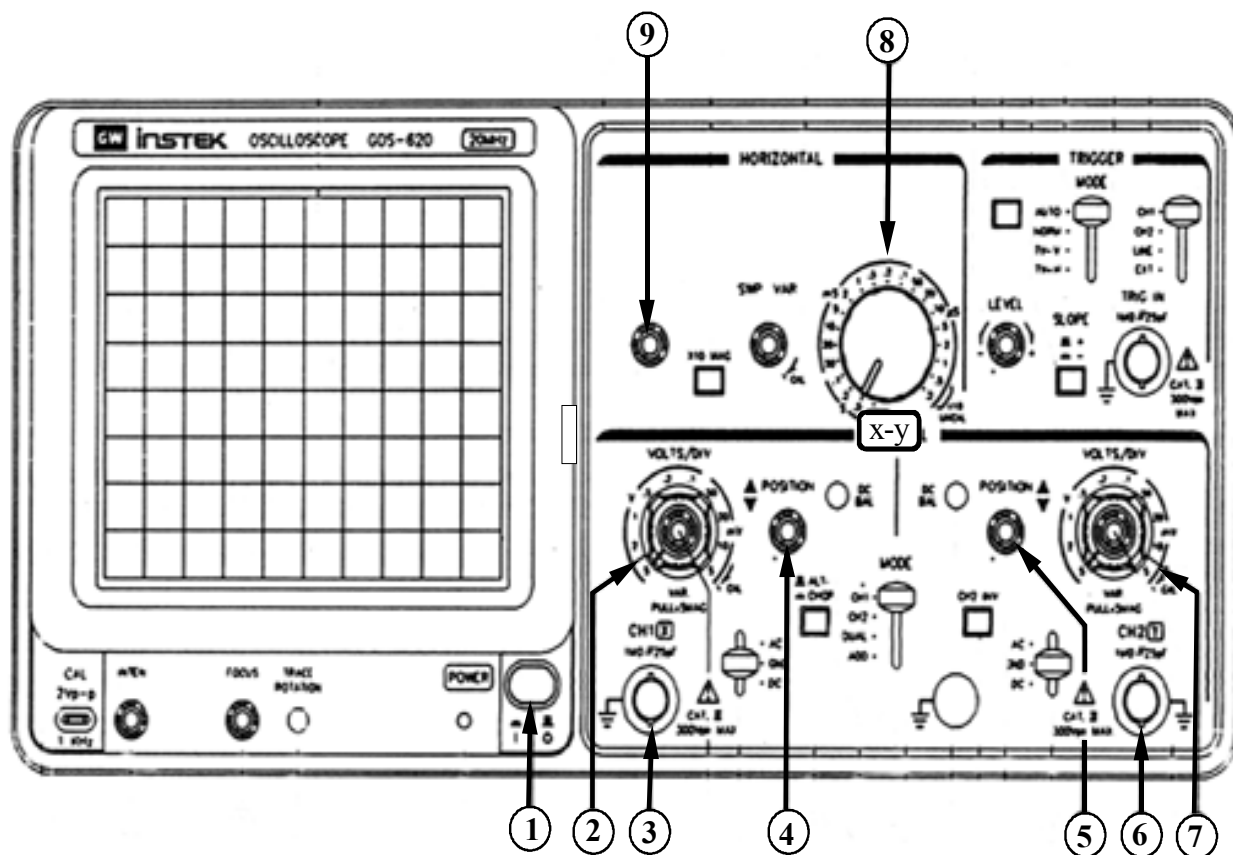
$$\kappa = \kappa_0 \pm \Delta \kappa$$

## 6) Literatura

- |                            |                            |         |
|----------------------------|----------------------------|---------|
| 1) Bobrowski Czesław –     | Fizyka – krótki kurs       | wyd.PWN |
| 2) Szczeniowski Szczepan – | Fizyka doświadczalna cz. 1 | wyd.PWN |



# OSCYLOSKOP GOS-620FG



- 1) Włącznik sieciowy oscylskopu
- 2) Pokrętko wzmocnienia kanału 1 (CH1-X)
- 3) Wejście kanału 1 (CH1-X)
- 4) Ustawienie w pionie przebiegu kanału 1
- 5) Ustawienie w pionie przebiegu kanału 2
- 6) Wejście kanału 2 (CH2-Y)
- 7) Pokrętko wzmocnienia kanału 2 (CH2-Y)
- 8) Pokrętko podstawy czasu (TIME/DIV)-zaznaczono tryb pracy X-Y
- 9) Ustawienie w poziomie przebiegu kanału 1 i 2