

Wydział: Fizyki	Dzień: Poniedziałek 14-17 Data: 20.03.2017		Zespół: 8
Imiona i nazwiska: Marta Pogorzelska Paulina Marikin	Ocena z przygotowania:	Ocena ze sprawozdania:	Ocena końcowa:
Prowadzący:		Podpis:	

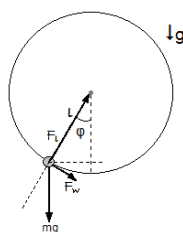
## Ćwiczenie 3: Wahadło matematyczne

### 1 Cel badań

Zbadanie zjawiska anharmoniczności drgań wahadła matematycznego, tj: zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia oraz wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła różnicowego.

### 2 Wstęp teoretyczny

Wahadłem matematycznym jest ciało o masie punktowej  $m$ , zawieszone na cienkiej, nieważkiej linie, poruszające się po okręgu w jednorodnym polu grawitacyjnym.



Rysunek 1: Wahadło matematyczne

Ciało porusza się po okręgu wychylając się z położenia równowagi o pewien kąt i zakreślając łuk o długości:

$$S = l\varphi \tag{1}$$

,gdzie  $l$  - odległość punktu materialnego od osi obrotu,  $\varphi$  - kąt wychylenia wahadła  
Równanie ruchu dla takiego ciała ma postać:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -mg \sin \varphi \tag{2}$$

Po podstawieniu wzoru (1) do równania (2) otrzymujemy i dodaniu stronami:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Rozwiązaniem tego równania dla ruchu oscylującego i jednocześnie wzorem na okres drgań wahadła jest:

$$T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4)$$

Jest to jednak równanie czyste teoretyczne i nie ma podejściu apraktycznego, gdyż liczba zliczeń dąży do nieskończoności. W przeprowadzonym doświadczeniu kąt wychylenia jest nieduży ( $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ). Dla dokładności 3 miejsc znaczących wystarczy brać pod uwagę jedynie sumy dla  $n=3$ . Po podstawieniu tych zależności do wzoru (2) otrzymujemy:

$$T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Dla wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego należy zmierzyć 3 wielkości: kąt wychylenia wahadła  $\varphi$ , okres jego drgań  $T$  oraz długość linki  $l$ . To ostatnie jest jednak trudne do wykonania w warunkach laboratoryjnych ze względu na trudność wyznaczenia środka masy soczewki wahadła. W tym celu wykorzystana zostanie metoda obliczeń dla wahadła różnicowego, gdzie dokonuje się pomiaru zmiany długości wahadła ( $l_i, l_j$  - dwie różne długości wahadła). Wzór (5) ma wtedy postać:

$$T_i(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l_i}{g}} f^2(\varphi) \quad T_j(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{l_j}{g}} f^2(\varphi) \quad (6)$$

,gdzie  $f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ ;  $T_i, T_j$  - okresy drgań wahadła zmierzone dla kolejnych długości nici  $l_i, l_j$ .

Po podniesieniu do kwadratu wzorów (6) i odjęciu stronami dostajemy:

$$T_i^2 - T_j^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_i - l_j) f^2(\varphi) \quad (7)$$

### 3 Opis układu i metody pomiarowej

Aparatura pomiarowa

- model wahadła matematycznego
  - statyw
  - metalowe ciało o regularnym kształcie
  - jedwabna nić
  - czujka do mierzenia okresu
- elektroniczny układ pomiarowy z automatycznym pomiarem okresu
- linijka

### 3.1 Badanie zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia

Najpierw wykonano pomiar długości linki przy użyciu linijki od środka masy kulki do punktu zaczepienia i włączono stoper, który nastawiono na pomiar 3 okresów.

$$T_{sr} = \frac{t}{n} \quad (8)$$

,gdzie  $T_{sr}$  - średni okres drgań wahadła,  $t$  - czas  $n$  wachnięć wahadła

Następnie odchyłono kulkę o kąt  $10^\circ$  od położenia równowagi i puszczono tak, by poruszała się równolegle do kątomierza na statywie. Na koniec złapano kulkę i spisano wynik z urządzenia oraz kąt odchylenia kulki po jej złapaniu. Czynność powtórzono pięciokrotnie, a pomiary wykonano dla kątów odchylenia  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  i  $40^\circ$ .

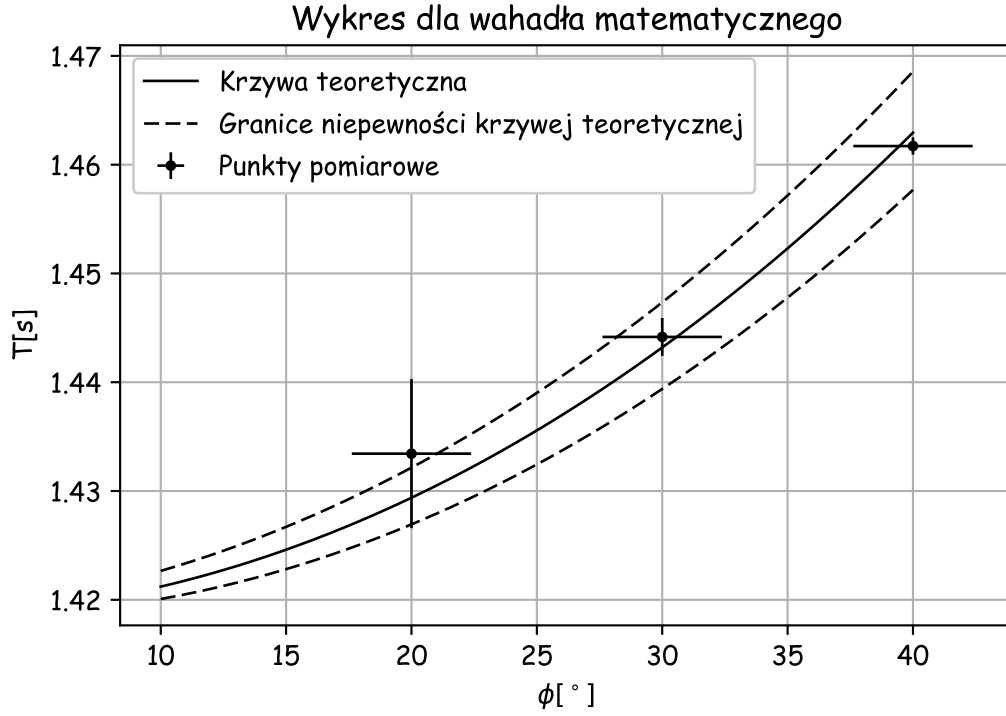
### 3.2 Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego

W tej części doświadczenia wykonane zostały pomiary okresów dla stałego kąta wychylenia, ale dla różnych długości linki wahadła. Przyjęto stały, mały kąt  $15^\circ$  i wykonano ćwiczenie analogicznie do poprzedniego. Długość odczytano z linijki na statywie, ponieważ do obliczeń potrzebna jest jedynie zmiana w długości wahadła, a nie odległość względem pewnego punktu odniesienia. Pomiary wykonano dla odczytów 50cm, 40cm, 30cm, 20cm, 10cm i 1,5cm. Do obliczeń korzystano ze wzoru (7).

## 4 Wyniki i analiza pomiarów

### 4.1 Wahadło matematyczne $l = 50(0.5)cm$

$\varphi[^\circ]$	10.0(1.2)	20.0(1.2)	30.0(1.2)	40.0(1.2)
4 okresy [s]	4.9223(0.0001)	5.7827(0.0001)	5.7889(0.0001)	5.8451(0.0001)
	5.6868(0.0001)	5.7221(0.0001)	5.7733(0.0001)	5.8451(0.0001)
	4.9163(0.0001)	5.7227(0.0001)	5.7745(0.0001)	5.8525(0.0001)
	5.6908(0.0001)	5.7202(0.0001)	5.7716(0.0001)	5.8456(0.0001)
	4.9222(0.0001)	5.7210(0.0001)	5.7750(0.0001)	5.8459(0.0001)
średnia(std)[s]	5.22(0.42)	5.733(0.027)	5.7766(0.0069)	5.8468(0.0031)
1 okres[s]	1.30(0.42)	1.433(0.027)	1.4441(0.0069)	1.4617(0.0031)
teoretyczny okres[s]	1.421(0.012)	1.4293(0.0094)	1.443(0.012)	1.462(0.015)

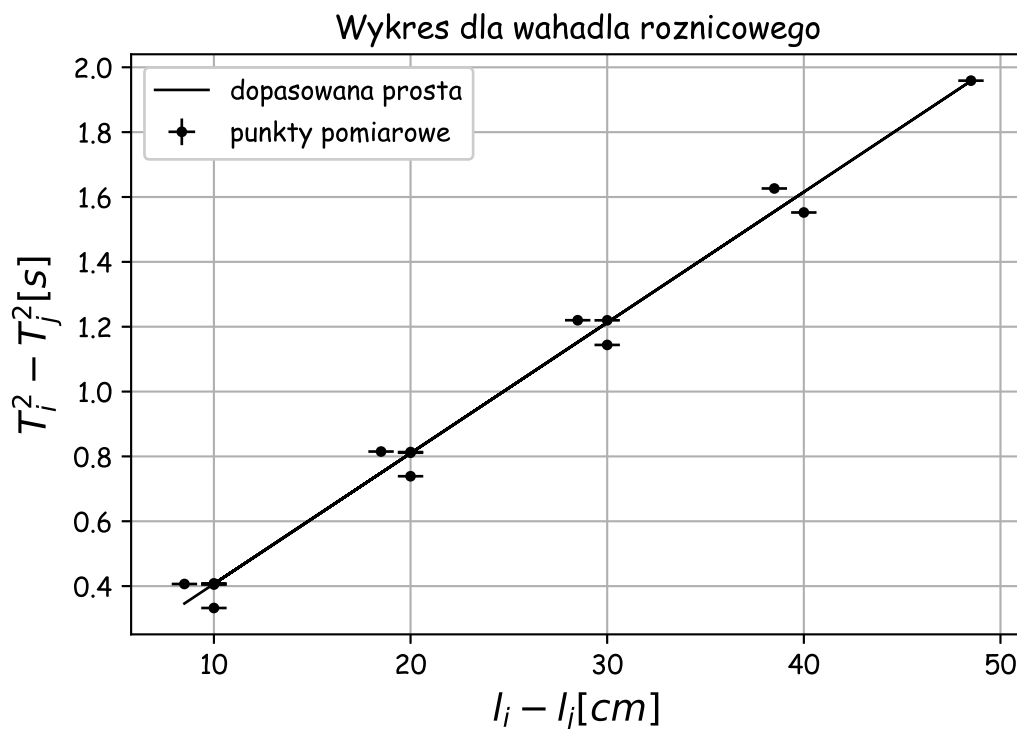


Rysunek 2

Z pomiarów czasu dla wszystkich serii dla obu wahadeł wyciągnięto średnią. Pomiary dla wahadła matematycznego zostały podzielone na cztery w celu uzyskania pojedynczego okresu. Krzywą teoretyczną wyliczono ze wzoru (3). Pomiar dla  $10^\circ$  został wyzucony jako błąd gruby, ze względu na dużą (ponad 15 razy większą niż pozostałe) niepewność. Pomiary dla pozostałych trzech rozważanych kątów leżą na krzywej teoretycznej w granicach swoich niepewności.

## 4.2 Wahadło różnicowe $\varphi = 15^\circ$

$l[\text{cm}]$	50	40	30	20	10	1.5
$t[\text{s}]$	1.2158(0.0001)	1.3703(0.0001)	1.5107(0.0001)	1.6406(0.0001)	1.7587(0.0001)	1.8516(0.0001)
	1.2122(0.0001)	1.3690(0.0001)	1.5121(0.0001)	1.6403(0.0001)	1.7599(0.0001)	1.8525(0.0001)
	1.2103(0.0001)	1.3705(0.0001)	1.5118(0.0001)	1.6403(0.0001)	1.7605(0.0001)	1.8518(0.0001)
	1.2121(0.0001)	1.3703(0.0001)	1.5124(0.0001)	1.6402(0.0001)	1.7597(0.0001)	1.8516(0.0001)
	1.2126(0.0001)	1.3706(0.0001)	1.5124(0.0001)	1.6408(0.0001)	1.7599(0.0001)	1.8518(0.0001)
	1.2136(0.0001)	1.3704(0.0001)	1.5120(0.0001)	1.6400(0.0001)	1.7605(0.0001)	1.8523(0.0001)
$T[\text{s}]$	1.2127(0.0019)	1.37018(0.00082)	1.51190(0.00085)	1.64036(0.00064)	1.75986(0.00087)	1.85193(0.00068)
$T^2[\text{s}^2]$	1.4708(0.0046)	1.8774(0.0022)	2.2858(0.0025)	2.6908(0.0021)	3.0971(0.0030)	3.4296(0.0025)



Rysunek 3

Pomiary zostały opracowane zgodnie ze wzorem (7), od każdego pomiaru długości (i kwadratu odpowiadającego mu pomiaru okresu) odjęto wszystkie pomiary odeń mniejsze. Otrzymane różnice przedstawiono na wykresie wraz z dopasowaną do nich prostą. Prosta została dopasowana funkcją *polyfit* pakietu *numpy* w Pythonie.

$$a = 0.0402878(0.0000015)$$

Parametr kierunkowy dopasowanej prostej został przyrównany do pozostałej części zależności (7):

$$a = \frac{4\pi^2}{g} f^2(\varphi) \quad (9)$$

gdzie  $a$  - parametr kierunkowy. Przekształcenie powyższej równości daje:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} f^2(\varphi) \quad (10)$$

Pozwala to na wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego, którego wyliczona wartość wraz z niepewnością wynosi:

$$g = 9.841(0.299) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

## 5 Analiza niepewności

Niepewność pomiarów to:

- długość  $\Delta l = 0.5cm$
- czas  $\Delta T = 0.001s$
- kąt  $\Delta \varphi = 2^\circ$

Dla wszystkich okresów przy wyliczaniu niepewności użyto metody propagacji niepewności:

$$\mu(T) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\sqrt{gl}}f(\varphi)\Delta l\right)^2 + \left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\Delta\varphi\right)^2}$$

Zarówno dla długości jak i dla kąta do niepewności doliczono niepewność eksperymentatora równa połowie niepewności pomiaru

$$\mu(x) = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{3} + \frac{(\frac{\Delta x}{2})^2}{3}}$$

Niepewność dopasowanej prostej stanowi pierwiastek kowariancji zwracanej przez funkcję *polyfit* pakietu *numpy* w Pythonie. Dla  $g$  niepewność wyliczono metodą propagacji niepewności:

$$\mu(g) = \sqrt{\left(\Delta a \frac{4\pi^2 f^2(\varphi)}{a^2}\right)^2 + \left(\Delta\varphi f'(\varphi)f(\varphi)\frac{8\pi^2 f(\varphi)}{a}\right)^2}$$

## 6 Wnioski

Wykonane doświadczenie skłania ku potwierdzeniu tezy o zależności okresu drgań wahadła matematycznego od kąta jego wychylenia. Wysoka (w zakresie jednego przedziału niepewności) zgodność większości punktów pomiarowych do krzywej teoretycznej daje podstawy do stwierdzenia, iż badana teoria poprawnie opisuje daną zależność. Pomiar dla  $10^\circ$  wydaje się być niepoprawny ze względu na dużą, w porównaniu z innymi, niepewność, tak więc jego odchylenie od krzywej może, ale nie musi wskazywać na niepoprawność tezy. Ilość punktów pomiarowych w tej części ćwiczenia była jednak nieduża i w celu dalszych rozważań oraz bardziej dokładnego sprawdzenia poprawności tezy należałoby wykonać pomiary dla większej ilości kątów wychyleń.

Na podstawie wykonanych pomiarów w części drugiej oraz przeanalizowania niepewności uzyskanych w trakcie opracowywania danych wykreślona ich podstawie zależność przedstawioną na wykresie (2) dla wahadła różnicowego. Badana zależność wyraźnie wykazuje charakter liniowy, a wszystkie punkty pomiarowe mieszczą się w granicach swych niepewności w obszarze prostej teoretycznej. Wyznaczone na tej podstawie przyspieszenie ziemskie wynosi  $9,841(0,299) [\frac{m}{s^2}]$  i jest zbliżone do tablicowego, które wynosi  $9,80665 [\frac{m}{s^2}]$ . Na tej podstawie można się skłaniać ku potwierdzeniu słuszności użycia metody wahadła różnicowego do obliczenia wartości przyspieszenia ziemskiego.