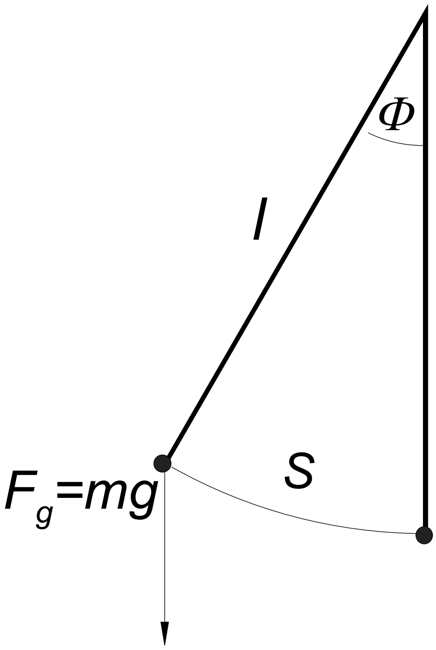
RYSZARD M. SIEGOCZYŃSKI

BADANIE ANHARMONICZNOŚCI DRGAŃ WAHADŁA MATEMATYCZNEGO
WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA RÓŻNICOWEGO

- **1. PODSTAWY FIZYCZNE**

Wahadło matematyczne

"Wahadłem matematycznym płaskim nazywamy punkt materialny poruszający się po okręgu koła w polu grawitacyjnym" [1]. W praktyce najczęstszą realizacją takiego wahadła jest metalowa kulka o bardzo małych rozmiarach zawieszona na sprężystej nici. Rozpatrzmy przypadek oscylacyjnego ruchu wahadła w płaszczyźnie pionowej (rys.1).



Rys. 1. Wahadło matematyczne

Długość łuku S zakreślanego przez wahadło wyraża się wzorem

$$S = l \cdot \phi \tag{1}$$

gdzie l -odległość punktu materialnego od osi obrotu, ϕ - kąt wychylenia wahadła (wychylenie).

Równanie ruchu takiego wahadła ma postać:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin\phi \qquad (2)$$

lub na podstawie (1)

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\phi \qquad (3)$$

Rozwiązanie tego równania w przypadku ruchu oscylacyjnego $|\phi| \le \phi_0$ prowadzi do następującej zależności okresu drgań wahadła T od maksymalnego kąta wychylenia ϕ_m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^{@}}\right]^2 \sin^{2n}\left(\frac{\phi_m}{2}\right) \qquad (4)$$

Z analizy tego wzoru wynika, że okres drgań wahadła matematycznego rośnie wraz ze wzrostem maksymalnego wychylenia ϕ_m

W celu uproszczenia dalszych rozważań przepiszemy wzór (4) w postaci:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\phi_m) \qquad (5)$$

$$f(\phi_m) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\right]^2 \sin^{2n}\left(\frac{\phi_m}{2}\right) \qquad (6)$$

Dla kątów $\phi_m < \frac{\pi}{2}$ wystarczy wziąć pierwsze cztery wyrazy sumy z (4), aby zapewnić dokładność przynajmniej do trzech cyfr znaczących - patrz tabela poprawek 1. Wtedy (4) można zapisać w prostszej formie.

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_m}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_m}{2} + \frac{225}{2304}\sin^6\frac{\phi_m}{2}\right] \qquad (7)$$

W przypadku zmniejszenia wartości kąta ϕ_m możemy kolejno rezygnować z poprawek wyższych rzędów utrzymując nadal tę samą dokładność, by w końcu otrzymać:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\phi_m \Rightarrow 0 \tag{8}$$

Ostatnie przybliżenie (formalnie dla $\phi_m = 0$) prowadzi do niezależności okresu wahań od amplitudy ϕ_m - jest to tzw. izochronizm wahań (przypadek drgań harmonicznych). W praktyce występowanie zjawiska izochronizmu dla wahadła matematycznego w skończonym przedziale wartości ϕ_m związane jest z oczywistą niedoskonałością przyrządów pomiarowych. Im większa niedokładność przyrządów pomiarowych, tym większy przedział wartości ϕ_m, w którym występuje "niezależność" okresu T od wychylenia ϕ_m.

W ćwiczeniu można wyodrębnić dwa, po części niezależne, cele: jeden związany jest z badaniem zjawiska anharmoniczności drgań wahadła, tzn. z badaniem zależności okresu wahadła T od kąta maksymalnego wychylenia ϕ_m; drugi cel, bardziej utylitarny - dotyczy wahadła różnicowego i poświęcony jest jak najdokładniejszemu, w danych warunkach, wyznaczeniu wartości przyśpieszenia ziemskiego g.

Wahadło różnicowe

Wzór (4) daje możliwość określenia przyśpieszenia ziemskiego z pomiaru okresu drgań T, długości wahadła l i wychylenie ϕ_m. Pomiar długości wahadła matematycznego l jest niewygodny (trudność w ustaleniu położenia środka masy soczewki wahadła) i zazwyczaj obarczony dość dużym błędem. W przypadku wahadła różnicowego pozbywamy się tej trudności dokonując, po prostu, pomiaru zmiany długości wahadła d_i - stąd nazwa wahadła - ($d_i = l_0 - l_i$; l_0 - początkowa długość wahadła różnicowego, l_i - długość wahadła różnicowego w przypadku i - tej zmiany jego długości), który może być, w warunkach przeprowadzanego eksperymentu, znacznie bardziej dokładny.

W tej sytuacji korzystając z (5) dla wahadła różnicowego można napisać:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} \cdot f(\phi_m)$$

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{l_i}{g}} \cdot f(\phi_m) \quad \text{(i = 1,2,... itd)} \tag{9}$$

przy czym T_0 *i* T_i - mierzone okresy drgań wahadła o długościach odpowiednio l_0 *i* l_i.

Podnosząc (8) i (9) do kwadratu i odejmując stronami otrzymujemy ostatecznie

$$T_0^2 - T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g}(l_0 - l_i)f(\phi_m) = \frac{4\pi^2}{g}d_i f(\phi_m) \tag{10}$$

Właśnie badanie zależności (10) przy warunkach $i >> 1$ jest punktem wyjścia do wyznaczenia przyśpieszenia ziemskiego g metodą wahadła różnicowego.

2. OPIS ĆWICZENIA

Zestaw przyrządów

Statyw z wahadłem (metalowa "soczewka" lub kulka z długą jedwabną nicią) o regulowanym górnym punkcie zamocowania wahadła, miernik czasu: stoper lub specjalny, elektroniczny układ pomiarowy z automatycznym pomiarem okresu (instrukcja dotycząca sposobu pomiaru czasu powinna być dołączona do zestawu przyrządów).

- **3.WYKONANIE ĆWICZENIA**

Badanie zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia

a. Odchylamy soczewkę wahadła o pewien kąt ϕ_m od położenia równowagi i staramy się puścić ją tak, aby wahadło poruszało się w "jednej płaszczyźnie".

b. Mierzymy czas n okresów wahań w przypadku użycia stopera lub czas jednego półokresu w przypadku dysponowania elektronicznym układem pomiarowym. W pierwszym przypadku odczytujemy amplitudę kątową ϕ_{mp} pierwszego i ϕ_{mk} ostatniego wychylenia oraz wyznaczamy średni okres wahań $<T>$ i średnią amplitudę $<\phi_m>$ ze wzorów

$$<T>=\frac{t}{n};<\phi_m>=\frac{\phi_{mp}-\phi_{mk}}{2} \tag{11}$$

gdzie t oznacza czas n wahnięć. W drugim przypadku wielokrotnie powtarzany pomiary półokresu dla danego ϕ_m i też obliczamy średni okres wahań $<T>$ z jednoczesnym oszacowaniem błędów pomiarowych (patrz np. [2]). Pomiary takie wykonujemy dla wzrastających wychyleń ϕ_m (w sprzyjających okolicznościach - dobrze wykonany statyw, sztywny uchwyt nici wahadła, wysokiej jakości jedwabna nić - nawet do $\frac{\pi}{2}$).

Badanie zależności okresu drgań wahadła od zmian długości

Wykonujemy pomiary okresów T_0 *i* T_i dla kilku (kilkunastu) różnych długości wahadła l_i, dla takiego samego wychylenia początkowego ϕ_{mp}. Zwróćmy uwagę na to, że aby sprowadzić do minimum błąd systematyczny związany z traktowaniem używanego przez nas wahadła jako wahadło matematyczne, należy w trakcie wykonywania pomiarów dbać o to, by długość wahadła l_i była dostatecznie duża. Natomiast, aby sprowadzić do minimum wpływ innych źródeł błędu takich jak np. drgania uchwytu nici i statywu, zmiana płaszczyzny wahań, zmiana długości nici itd., należy dbać o to, by wychylenie ϕ_{mp} było dostatecznie małe.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Anharmoniczność drgań wahadła

W oparciu o otrzymane wyniki pomiarów $T(\phi_m)$ i przekształcony wzór (4) do postaci (5) sporządzamy wykres zależności zmierzonego okresu drgań T od funkcji $f(\phi_m)$ obliczonej dla różnych wartości wychylenia początkowego wahadła ϕ_m i zaznaczamy na nim oszacowane błędy. Na ten sam wykres nanosimy teoretyczną zależność okresu T od wychylenia ϕ_m stosując kolejne przybliżenia we wzorze (4) wraz ze wzrostem wartości kąta wychylenia ϕ_m, biorąc pod uwagę dokładność przeprowadzonych pomiarów. Możemy skorzystać z orientacyjnej tabeli I, w której podano kolejne poprawki w rozwinięciu sumy we wzorze (4), zachowując dokładność obliczeń czasu okresu przynajmniej do trzech cyfr znaczących.

Tabela 1 (poprawki).

$\frac{1}{2}\phi_m$	$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_m}{2}$	$\frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_m}{2}$	$\frac{225}{2304}\sin^6\frac{\phi_m}{2}$
$2{,}5^0$			
5^0	0,002		
10^0	0,007		
15^0	0,017		
20^0	0,029	0,002	
25^0	0,045	0,004	
30^0	0,062	0,009	
35^0	0,088	0,015	0,003
40^0	0,103	0,024	0,007
45^0	0,125	0,035	0,014

Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła różnicowego

Korzystając ze wzoru (10) przedstawiamy uzyskane wyniki pomiarów na wykresie zależności różnicy kwadratów okresów $T_0^2 - T_i^2$ od iloczynu zmiany długości wahadła d_i funkcji kątowej

$f(\phi_m)$. Zwartości współczynnika kierunkowego otrzymanej prostej wyznaczamy przyśpieszenie ziemskie g.

5. ZAMIAST PYTAŃ KONTROLNYCH

1. Zaznaczyć na rys.1 pozostałe siły działające na kulkę, znaleźć ich wypadkową i przedyskutować równanie ruchu.
2. Przed przystąpieniem do wykonania pomiarów oszacować, jaką minimalną długość l_0 powinno mieć wahadło różnicowe, aby można było traktować je jako matematyczne zakładając, że chcemy wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie g z dokładnością np. do trzech miejsc znaczących. W przypadku, gdy nić wahadła jest krótsza od oszacowanej należy skorzystać z pojęcia zredukowanej długości wahadła (okres wahań wahadła matematycznego o długości zredukowanej jest równy okresowi wahań badanego wahadła) lub potraktuj cały układ jako wahadło fizyczne.

6. LITERATURA

1. W. Rubowicz, W. Królikowski "Mechanika Teoretyczna" PWN, Warszawa 1967.
2. J. Gałązka-Friedman i I. Śledzińska "Metody opracowania i analizy wyników pomiarów"; Laboratorium Fizyki, Instytut Fizyki PW;

Dodatek

Licznik okresów wahadła różnicowego (matematycznego)