SME0602 – Projeto Prático – Zeros de Funções de Uma Variável

Elias Salomão Helou Neto

Data de Entrega: 01/06/2020

Instruções

Não serão dadas notas para trabalhos não acompanhados de um relatório detalhando as implementações e os resultados. O relatório pode ser feito à mão, mas neste caso o aluno deverá digitalizar o mesmo pois todos os elementos do trabalho (relatório, implementações e programas que utilizarem essas implementações) devem ser enviados por todos os membros do grupo na página da disciplina no sistema eDisciplinas em um único arquivo compactado (preferencialmente no formato `.tar.gz`). O relatório deve ser entregue no formato PDF e deve conter instruções para a execução do código. Não será dada nota para implementações que sejam dependentes de software que não seja livre.

Para cada dia de atraso a nota será dividida por dois. O trabalho pode ser feito em grupos de até três alunos. Somente serão considerados como autores aqueles alunos cujos nomes constarem no cabeçalho do relatório no dia em que o trabalho for entregue. O horário de entrega será dado pelo momento da recepção do e-mail pelo servidor do eDisciplinas.

1 Introdução

1.1 Ordem de Convergência

Dizemos que uma sequência convergente $x_k \to x^*$ tem razão de convergência $p \geq 1$ quando temos o seguinte limite:

$$\lim \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

Se definirmos $\epsilon_k := \|x_k - x^*\|$ então temos, equivalentemente:

$$\lim \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k^p} = c.$$

Podemos encontrar uma estimativa para p da seguinte forma. Pelo limite acima, sabemos que as aproximações abaixo valem para k grande o suficiente:

$$\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k^p} \approx c \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k-1}^p} \approx c.$$

Ou seja

$$\epsilon_{k+1} \approx c\epsilon_k^p \quad \text{e} \quad \epsilon_k \approx c\epsilon_{k-1}^p.$$

Dividindo a primeira aproximação pela segunda teremos

$$\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} \approx \frac{\epsilon_k^p}{\epsilon_{k-1}^p} \Rightarrow \log\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} \approx p\log\frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k-1}}.$$

Finalmente, dividindo tudo por $\log(\epsilon_k/\epsilon_{k-1})$:

$$\frac{\log\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k}}{\log\frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k-1}}} \approx p. \tag{1}$$

1.2 Métodos de Ordem Elevada Para Raízes de Funções

O d-ésimo método de Householder é dado por:

$$x_{k+1} = x_k + d\frac{(1/f)^{(d-1)}(x_k)}{(1/f)^{(d)}(x_k)},$$

onde $g^{(d)}$ é a derivada de ordem d da função g. Isto é, $(1/f)^{(d)}$ é a d-ésima derivada de $1/f$. O d-ésimo método de Householder tem, sob condições favoráveis, ordem de convergência $p = d + 1$.

2 Questões

2.1 Método de Newton

Mostre que o método de Householder com $d = 1$ é o método de Newton.

2.2 Método de Halley

Mostre que o método de Householder com $d = 2$ é dado pela fórmula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)}.$$

Este método é conhecido como método de Halley em homenagem ao seu inventor, o descobridor do cometa que leva o seu nome. Note que se $f''(x^*) = 0$ as iterações do método se aproximam das iterações do método de Newton.

2.3 Implementações

Implemente os seguintes métodos para aproximação de raízes: bissecção, secante, Newton e Halley. Faça com que as suas funções retornem um vetor contendo todas as iterações calculadas pelo método, pois esses dados serão utilizados num próximo item.

Atenção! Implemente seus métodos de forma eficiente. Cálculos desnecessários causarão descontos.

2.4 Uso das Implementações

Teste suas implementações com as seguintes equações, utilizando uma tolerância absoluta $|x_k - x_{k-1}|$ da ordem de 10^{-16}:

1. $x - \cos(x) = 0$;
2. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$;
3. $e^x - \cos(x) = 0$ (maior raiz).

No relatório deve constar a aproximação inicial x_0 (no caso dos métodos da bissecção e secante mencione ambos os pontos inicais) e todos os pontos por onde o método passou com todas as 16 casas decimais do formato `double`. Utilize uma tabela onde cada coluna represente um método e cada linha uma iteração do mesmo. O cabeçalho da tabela deve explicitar o método em questão e a primeira linha deve conter as aproximações iniciais. Para o método da bissecção, exceto pela primeira linha, basta o centro de cada intervalo.

2.5 Estimativa da Ordem de Convergência

Utilize a fórmula (1) para estimar a ordem de convergência dos métodos. Novamente, represente os valores em uma tabela semelhante à da questão anterior. Para o valor de x^* utilize o resultado exato nos casos em que você pode dizer quais são. Para a primeira equação, utilize o resultado obtido pelo método de Halley como aproximação para x^*.

Explique o comportamento dos métodos para a equação 2. Dica: ao analisar o comportamento do método de Halley considere o comentário no final do enunciado da questão 2.2.