Resoluções Detalhadas de Cálculo Vetorial

Para Nexo

Novembro de 2025

Questão 8: Integral de Linha pelo Potencial

8b) $F(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$

1. Função Potencial f:

- $f_x = yz \implies f = xyz + g(y, z)$
- $f_y = xz + g_y = xz \implies g_y = 0 \implies g = h(z)$
- $f_z = xy + h'(z) = xy + 2z \implies h'(z) = 2z \implies h(z) = z^2$

$$f(x, y, z) = xyz + z^2$$

2. Cálculo (T.F.I.L.): $A(1, 0, -2)$ e $B(4, 6, 3)$.

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= f(4, 6, 3) - f(1, 0, -2) \\
&= ((4)(6)(3) + 3^2) - ((1)(0)(-2) + (-2)^2) \\
&= (72 + 9) - (0 + 4) = 81 - 4 \\
&= 77
\end{aligned}$$

8c) $F = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \sin z\,\mathbf{k}$

1. Função Potencial f:

- $f_x = y^2 \cos z \implies f = xy^2 \cos z + g(y, z)$
- $f_y = 2xy \cos z + g_y = 2xy \cos z \implies g_y = 0 \implies g = h(z)$
- $f_z = -xy^2 \sin z + h'(z) = -xy^2 \sin z \implies h'(z) = 0 \implies h(z) = K$

$$f(x, y, z) = xy^2 \cos z$$

2. Cálculo (T.F.I.L.): $A(0, 0, 0)$ e $B(\pi^2, 0, \pi)$.

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= f(\pi^2, 0, \pi) - f(0, 0, 0) \\
&= (\pi^2 \cdot 0^2 \cdot \cos \pi) - (0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Questão 9: Independência de Caminho

$\int_C 2x \sin y\, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$ de $A(-1, 0)$ a $B(5, 1)$.

1. Verificação (Conservativo):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x \sin y) = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y - 3y^2) = 2x \cos y$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, a integral independe do caminho.

2. Função Potencial e Cálculo:

$$f(x, y) = x^2 \sin y - y^3$$

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= f(5, 1) - f(-1, 0) \\ &= (5^2 \sin(1) - 1^3) - ((-1)^2 \sin(0) - 0^3) \\ &= 25 \sin(1) - 1\end{aligned}$$

Questão 10: Teorema de Green

10b) $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$. Triângulo D.

1. Densidade de Green: $Q_x - P_y = 2xy^3 - x$. **2. Integral Dupla:** Região D $(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x)$.

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dr &= \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2xy^4}{4} - xy\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \left(8x^5 - 2x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{8x^6}{6} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Questão 11: Teorema de Green

11b) $\oint_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$

1. Densidade de Green: $Q_x - P_y = 2 - 1 = 1$. **2. Integral Dupla (Área):** Região D entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D 1\,dA = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

11c) $\oint_C y^3dx - x^3dy$. Círculo $x^2 + y^2 = 4$.

1. Densidade de Green: $Q_x - P_y = -3x^2 - 3y^2 = -3(x^2 + y^2)$. **2. Integral em Polares:** $r \in [0, 2]$.

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -3r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \\ &= -3(2\pi) \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -6\pi\,(4) = -24\pi\end{aligned}$$

Questão 12: Teorema de Green (Orientação)

12a) $F = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$. Curva Horária.

1. Densidade de Green: $Q_x - P_y = 2x - 3y^2$. **2. Integral Anti-Horária:**

$$\begin{aligned}I_{\text{AH}} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} (2x - 3y^2)dydx = \int_0^{\pi} (2x \sin x - \sin^3 x)dx \\ &= (2\pi) - \left(\frac{4}{3}\right) = 2\pi - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

3. Ajuste de Orientação: $\int_C F \cdot dr = -I_{\mathrm{AH}}$.

$$\int_C F \cdot dr = -(2\pi - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - 2\pi$$

Questão 13: Área da Cicloide

Arco $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$. Área sob o arco ($t \in [0, 2\pi]$).

1. Integral da Área ($\int y dx$): $dx = (1 - \cos t)dt$.

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}(2\pi) - 0 + 0 \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Questão 14: Rotacional e Divergente

14c) $F = \frac{\mathbf{r}}{r}$

$$\begin{aligned}
\text{rot } F &= \mathbf{0} \\
\text{div } F &= \frac{2}{r} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{aligned}$$

14d) $F = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$

$$\begin{aligned}
\text{rot } F &= \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \right\rangle \\
\text{div } F &= P_x + Q_y + R_z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Questão 15: Conservativo

15a) $F = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

$$\text{rot } F = \mathbf{0} \implies \textbf{É Conservativo}$$
$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$$

15c) $F = ye^{-x}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

$$P_y = e^{-x}, \quad Q_x = -e^{-x} \implies P_y \neq Q_x$$

Não é Conservativo

Questão 16: Existência de Campo Vetorial

$V = \text{rot } G = \langle x\sin y, \cos y, z - xy \rangle$.

Verificação: div(rot G) $= 0$ deve ser satisfeita.

$$\text{div } V = \frac{\partial}{\partial x}(x\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z - xy) = \sin y - \sin y + 1 = 1$$

Como div $V = 1 \neq 0$, o campo V não pode ser o rotacional de nenhum outro campo.

Não existe tal campo G