PRÁCTICA 7
Matemática 3

① X_i = "salida de cadenas de carbono de longitud 3 en la en la i-nésima muestra", $i = 1, 2, \dots, 9$

Datos: • $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ • $n = 9 < 30$ • σ^2 desconocida

• $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{12,01}{9} = 1,334$

• $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{3,6386}{8}} = 0,674$

El estadístico a utilizar será

$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, $T \simeq N(0,1)$ por TCL

a) qué puede afirmarse con 95% de confianza acerca del error máximo si se usa la media muestral?

El error máximo está dado por

$E = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$. $95\% \to 1-\alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \to \alpha/2 = 0,025$

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,025, 8} \underset{\text{tabla}}{=} 2,306$

$= 2,306 \cdot \frac{0,674}{\sqrt{9}} = 0,518$

∴ El error máximo al estimar el rendimiento es de 0,518

b) Queremos obtener un intervalo de confianza del 95%, con los datos dados lo calculamos usando

$IC_{(0,95)}(\mu) = \left[\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = [1,334 \pm 0,518] = [0,816, 1,852]$

② Tengo 3 IC construidos sobre la misma muestra, con niveles de confianza distintos

Sabemos que A MAYOR NIVEL DE CONFIANZA, MAYOR PRECISIÓN DEL ESTIMADOR, INTERVALO MÁS ANCHO.

→ long 99% > long 95% > long 90%

Calculamos longitud de cada intervalo

$IC_1 = [4.01, 6.02] \to \text{long } IC_1 = 2.01 \to 95\%$

$IC_2 = [4.20, 5.83] \to \text{long } IC_2 = 1.63 \to 90\%$

$IC_3 = [3.57, 6.46] \to \text{long } IC_3 = 2.89 \to 99\%$

(3) Sea X_i = "Tiempo de vida de la i-ésima batería producida", $i = 1, 2, \dots, 100$

Datos
- $n = 100 \geq 30$
- $\bar{X} = 150$ horas
- $s = 25$ horas
- σ^2 desconocida
- distribución desconocida

* El enunciado no nos da la desviación estándar poblacional, sólo nos da la DESVIACIÓN MUESTRAL $s = 25$ horas, porque es la desviación observada para esa muestra

* Además, aunque la distribución es desconocida, como $n \geq 30$, se cumple $\bar{X} \simeq N(0,1)$, por TCL

a) Con los datos que tenemos, calculamos el IC de 95% con

$$IC_{(\simeq 0{,}95)}(\mu) = \left[\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

- $95\% \to 1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$z_{0.025} \underset{\text{tabla}}{=} 1{,}96$

$$= \left[150 \pm 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= [141{,}1 \, , \, 154{,}9]$$

b) Se afirma que el tiempo de vida está entre $IC = [147, 153]$

$$\to \quad \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 150 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 147 \to z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 3$$

$$\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 150 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 153$$

Luego $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 3 \to z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{25}{\sqrt{100}} = 3 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \cdot 10}{25} = 1{,}2$

Si $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}2 \underset{\text{tabla}}{\to} \frac{\alpha}{2} = 0.1151 \to \alpha = 0{,}23$

- $1 - \alpha = 1 - 0.23 = 0{,}77 \to$ IC del 77%

(4) Sea X_i = "tiempo de secado, en horas, para la i-ésima muestra de pintura latex". $i = 1, 2, \dots, 15$

Datos
- $n = 15 < 30$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- σ^2 desconocida

Calculamos

- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{56.8}{15} = 3.79$
- $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \underset{\circledast}{=} \sqrt{\frac{13.1975}{14}} = 0{,}97$

$\circledast$ $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = (3.4 - 3.79)^2 + (2.5 - 3.79)^2 + (4.8 - 3.79)^2 + (2.9 - 3.79)^2 + (3.6 - 3.79)^2$

$+ (2.8 - 3.79)^2 + (3.3 - 3.79)^2 + (5.6 - 3.79)^2 + (3.7 - 3.79)^2 + (2.8 - 3.79)^2 + (4.4 - 3.79)^2$

$+ (4 - 3.79)^2 + (5.2 - 3.79)^2 + (3 - 3.79)^2 + (4.8 - 3.79)^2 = 13{,}1975$

El estadístico a utilizar será $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, $T \sim N(0,1)$ por TCL

Queremos un IC al 99 %

$1-\alpha = 0,99 \to \alpha = 0.01 \to \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.005, 14} = 2,977$

Luego

$IC_{(0,99)}(\mu) = \left[\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \left[3,79 \pm 2,977 \cdot \frac{0,97}{\sqrt{15}}\right] = [3.04, 4.53]$

5) Sea X_{1_i} = "Octanaje de la i-ésima muestra para la fórmula 1"

X_{2_i} = "Octanaje de la i-ésima muestra para la fórmula 2"

Datos supongo $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $\sigma_1^2 = 1,5$ • $n_1 = 15$ • $\bar{X}_1 = 89.6$
- $\sigma_2^2 = 1,2$ • $n_2 = 20$ • $\bar{X}_2 = 92.5$

Tenemos n_1 y $n_2 < 30$

a) Queremos construir un intervalo de confianza del 95 % para $\mu_1 - \mu_2$

$95\% \to 1-\alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \to \frac{\alpha}{2} = 0,025 \to Z_{\frac{\alpha}{2}} \underset{\text{tabla}}{=} 1.96$

$IC_{(0,95)}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$

$= \left[(89,6 - 92,5) \pm 1.96 \sqrt{\frac{1.5}{15} + \frac{1.2}{20}}\right]$

$= [-3.684, -2.116]$

b) La longitud del intervalo calculado en a) es de $L = 2 \underbrace{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}_{E} = 1.568$

Queremos que el nuevo intervalo tenga una longitud $L_B = 0.784$

Planteamos $L_B = 2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} \leq 0.784 \to \left(2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{0.784}\right)^2 \leq n$

$\to \left(2 \cdot 1.96 \frac{\sqrt{1.5 + 1.2}}{0.784}\right)^2 \leq n$

$\to 67,5 \leq n = 68$

∴ Se necesita una muestra de $n = 68$ o más.

Escaneado con CamScanner

(6) sea X_{1_i} = "Resistencia a la Tensión del i-nesimo hilo de la marca A"

X_{2_i} = "Resistencia a la Tensión del i-nesimo hilo de la marca B"

- $\overline{X}_1 = 78{,}3$. $S_1 = 5.6$. $m_1 = m_2 = m = 50 \geq 30$
- $\overline{X}_2 = 87{,}2$. $S_2 = 6{,}3$
- $\sigma_{1,2}^2$ desconocidos, distribuciones desconocidos pero como

$m = 50 \geq 30$, el estadístico a utilizar en estos casos sera

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m_1} + \frac{S_2^2}{m_2}}} , \quad Z \simeq N(0,1) \text{ por TCL}$$

Queremos un IC del 95 % $\rightarrow 1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$

$$IC_{(0,95)}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{m}} \right] \qquad \cdot\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$= \left[(78.3 - 87.2) \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{(5.6)^2 + (6.3)^2}{50}} \right]$$

$$= \boxed{[-11.236 ; -6.563]}$$

(7) Sea X_{1_i} = "Cantidad de hojas impresas por el i-nesimo cartucho de toner de prov 1"

X_{2_i} = "Cantidad de hojas impresas por el i-nesimo cartucho de toner de prov 2"

- $\overline{X}_1 = 5459$. $S_1^2 = 33703$ $m_1 = m_2 = m = 12 < 30$
- $\overline{X}_2 = 5162$. $S_2^2 = 199928$
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidos, $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$

Con estos datos, el estadístico a utilizar es

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta_0}{S_p \sqrt{2/m}} , \quad T \simeq N(0,1) \text{ por TCL}$$

Queremos construir un IC de 95% para $\mu_1 - \mu_2$

95% $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$ $\cdot\ t_{\frac{\alpha}{2}, m_1 + m_2 - 2} = t_{0{,}025, 22} \underset{\text{tabla}}{=} 2{,}074$

Calculamos

$$IC_{(0{,}95)}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, 2m-2}\, S_p \sqrt{\frac{2}{m}} \right] \qquad \cdot\ S_p = \sqrt{\frac{(m_1 - 1) S_1^2 + (m_2 - 1) S_2^2}{m_1 + m_2 - 2}}$$

$$= \left[297 \pm 2{,}074 \cdot 341{,}78 \cdot \sqrt{1/6} \right] \qquad = \sqrt{\frac{11 \cdot 33703 + 11 \cdot 199928}{22}}$$

$$= \boxed{[7.61 , 586.38]} \qquad = 341{,}78$$

⑧ Sea X_{1_i} = "Tiempo (en minutos) de la visita del i-ésimo cliente a la pag 1"
X_{2_i} = "Tiempo (en minutos) de la visita del i-ésimo cliente a la pag 2"

- $m_1 = m_2 = m = 8 < 30$. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$
- σ_1^2 y σ_2^2 desconocidos

Calculemos

- $\bar{X}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{1_i} = 3.325$ • $S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_{1_i} - \bar{X}_1)^2 = 1.6278$
- $\bar{X}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{2_i} = 3.6375$ • $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_{2_i} - \bar{X}_2)^2 = 2.497$

El estadístico a utilizar en estos casos es

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{m}}}, \quad T \sim N(0,1) \text{ por TCL}$$

queremos construir un intervalo de confianza al 99% para $\mu_1 - \mu_2$

$99\% \to 1-\alpha = 0{,}99 \to \alpha = 0{,}01 \to \alpha/2 = 0{,}005$

- $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = -0{,}3125$ • $v = \frac{\left(\frac{S_1^2 + S_2^2}{m}\right)^2}{\frac{(S_1^2/m)^2 + (S_2^2/m)^2}{m-1}} = \frac{0.2658}{0.0198} = 13{,}40$

Luego

$$IC_{(0{,}99)}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, v}\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{m}}\right]$$

$$= \left[-0{,}3125 \pm 3{,}012\sqrt{\frac{4{,}1248}{8}}\right]$$

$$= \boxed{[-2.475, 1.85]}$$