PRACTICA 8
Matemática 3

(2) Sea $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ cuando H_0 es verdadera

Quiero saber el nivel de significancia en cada una de los siguientes situaciones

a) $H_1: \mu > \mu_0$, región de rechazo $Z \geq \underbrace{1,88}_{z_\alpha} \to z_\alpha = 1,88 \to \alpha = 0,0301$

b) $H_1\ \mu < \mu_0$, región de rechazo $Z \leq \underbrace{-2.75}_{-z_\alpha} \to z_\alpha = 2,75 \to \alpha = 0.00298$

c) $H_1\ \mu \neq \mu_0$, región de rechazo $Z \geq 2,88$ ó $Z \leq -2.88 \to |z_{\frac{\alpha}{2}}| = |2,88| \to \alpha = (0.00199) \times 2 = 0,004$

(3) sea X = "peso de llenado de los cajas de cereal"

Datos . $\overline{X} = 340$ gr . p-valor $= 0,3$

Planteamos HIP $H_0\ \mu = 340$ contra $H_1\ \mu \neq 340$

a) ¿Se debe rechazar H_0?

Criterio del p-valor

$\begin{cases} \text{p-valor} > \alpha, & \text{acepta } H_0 \\ \text{p-valor} \leq \alpha, & \text{rechaza } H_0 \end{cases}$, con $\alpha = 0,05 \to$ como p-valor $= 0,3 < 0,05 = \alpha$ se acepta H_0

b) No puedo asegurar que μ sea 340 gr, que se acepte H_0 no significa que sea V, nomás significa que no hay suficiente evidencia para declararla F.

(4) sea X = "Diámetro (en centímetros de un cojinete"

Datos . $X \sim N(\mu, \sigma)$. $n = 25$. $\sigma = 0.04$ cm . $\overline{X} = 0,51$. $\alpha = 0.02$

Planteamos HIP $H_0: \mu = 0,5$ contra $H_1: \mu \neq 0.5$

* $H_0 \to$ HIP NULA
* $H_1 \to$ HIP ALTERNATIVA

El ESTADÍSTICO a utilizar será $|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right|$ que toma los valores

$$|z_0| = \left| \frac{0,51 - 0,5}{0,04/\sqrt{25}} \right| = 1,25$$

El CRITERIO DE DECISIÓN está dado por $\begin{cases} \text{acepta } H_0 \text{ si } |z_0| \leq z_{\alpha/2} \\ \text{rechaza } H_0 \text{ si } |z_0| > z_{\alpha/2} \end{cases}$

Si $\alpha = 0.02 \to \frac{\alpha}{2} = 0.01 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.01} \underset{\text{tabla}}{=} 2,325 \to$ VALOR CRÍTICO

Como $|z_0| = 1,25 < 2,325 = z_{\alpha/2}$, se acepta H_0, no hay suficiente evidencia para asegurar que los cojinetes son indeseables (con $\alpha = 0.02$)

(5) Sea X = "producción diaria de una planta química"

. $n = 60$ días . $\overline{X} = 715$ toneladas . $S = 24$ toneladas

. σ^2 desconocida y distribución desconocida, pero como $n \geq 30$, se puede decir que $X \simeq N(0,1)$ por TCL, cualquiera sea su distribución

Planteamos HIP $H_0: \mu \geq 740$ contra $H_1 < 740$

El ESTADÍSTICO a utilizar será $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ que toma los valores

$$z_0 = \frac{715 - 740}{24/\sqrt{60}} = -9{,}682$$

a) Quiero determinar el p-valor dado por

$$p\text{-valor} = P(Z < z_0) = \Phi(z_0) = \Phi(-9{,}682) \simeq 0$$

b) Criterio del p-valor $\begin{cases} p\text{-valor} > \alpha & \text{acepta } H_0 \\ p\text{-valor} < \alpha & \text{rechaza } H_0 \end{cases}$ ~~(con nivel de significancia α)~~

Usando $\alpha = 0.05$, como p-valor $\simeq 0 < \alpha$, se rechaza H_0

(6) Sea X = "Cantidad (en litros) del contenido de un envase"

. $n = 10$. $\alpha = 0{,}01$. σ^2 desconocida . $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Calculamos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 10{,}06$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\left[(10{,}2 - 10{,}06)^2 + (9{,}7 - 10{,}06)^2 + (10{,}1 - 10{,}06)^2 + (10{,}3 - 10{,}06)^2 + \right.}$$

$$+ (10{,}1 - 10{,}06)^2 + (9{,}8 - 10{,}06)^2 + (9{,}9 - 10{,}06)^2 + (10{,}4 - 10{,}06)^2 + (10{,}3 - 10{,}06)^2 +$$

$$\left. + (9{,}8 - 10{,}06)^2\right] = \underset{S}{0{,}2458}$$

Planteamos HIP $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu \neq 10$

El ESTADÍSTICO a utilizar en este caso es $|T| = \left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$ que toma los valores

$$|t_0| = \left|\frac{10{,}6 - 10}{0{,}2458/\sqrt{10}}\right| = 0{,}7719$$

El CRITERIO DE DECISIÓN está dado por $\begin{cases} \text{se acepta } H_0 \text{ si } |t_0| \leq t_{\alpha/2, n-1} \\ \text{se rechaza } H_0 \text{ si } |t_0| > t_{\alpha/2, n-1} \end{cases}$

$\alpha = 0{,}01 \to \alpha/2 = 0{,}005 \to t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0{,}005, 9} \underset{\text{tabla}}{=} 1{,}833$

Como $|t_0| = 0{,}7719 < 1{,}833 = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, se acepta H_0 con nivel de signif. α.

7) Sea X_1 = "Eficiencia (en millas/galón) de automóvil combustible regular"
X_2 = "Eficiencia (en millas/galón) de automóvil combustible premium"

Datos: $n_1 = n_2 = n = 40 > 30$ (muestras grandes)

$\overline{X}_1 = 27,2$. $S_1 = 1,2$. σ_1^2 y σ_2^2 desconocidos

$\overline{X}_2 = 28,1$. $S_2 = 2$. Distribuciones desconocidas, pero como n_1 y n_2 son > 30, se cumple que $X_1 \approx N(0,1)$ y $X_2 \approx (0,1)$ por TCL.

Planteamos HIP $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

. El ESTADÍSTICO a utilizar en este caso es $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ que toma el valor

$$z_0 = \frac{(27,2 - 28,1) - 0}{\sqrt{\frac{(1,2)^2 + 2^2}{40}}} = \frac{-0,9}{0,369} = -2,44$$

Decidimos por el p-valor, en este caso

p-valor $= P(Z < z_0) = \phi(z_0) = \phi(-2,44) \underset{\text{tabla}}{=} 0,0073$

. El CRITERIO DE DECISIÓN del p-valor es

$\begin{cases} \text{acepta } H_0 \text{ si p-valor} \geq \alpha, \text{ con nivel de significancia } \alpha \\ \text{rechaza } H_0 \text{ si p-valor} < \alpha, \text{ con nivel de significancia } \alpha \end{cases}$

Como p-valor $= 0,0073 < 0,05 = \alpha$, rechazamos H_0 (hay evidencia suficiente para decir que el auto con premium tiene mejor eficiencia)

8) a) Sea X_1 = "velocidad (en MHz) de los chips viejos"
X_2 = "velocidad (en MHz) de los chips nuevos"

. $n_1 = n_2 = n = 50 < 30$. $\overline{X}_1 = 481,2$ $S_1 = 14,3$

. $\overline{X}_2 = 495,6$ $S_2 = 19,4$

. σ_1^2 y σ_2^2 desconocidos

. Distribución desconocida, pero como $n > 30$, puedo decir que $X_1 \approx N(0,1)$ y $X_2 \approx N(0,1)$ por TCL

Planteamos HIP $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

El ESTADÍSTICO DE PRUEBA a utilizar en estos casos es $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

que toma el valor $z_0 = \frac{(481,2 - 495,6) - 0}{\sqrt{\frac{(14,3)^2 + (19,4)^2}{50}}} = -4,225$

Buscamos el P-VALOR dado por

p-valor $= \phi(z_0) = \phi(-4,225) \approx 0$

CRITERIO DE DECISIÓN DEL P-VALOR $\begin{cases} \text{acepta } H_0 \text{ si p-valor} \geq \alpha \\ \text{rechaza } H_0 \text{ si p-valor} < \alpha \end{cases}$ (con nivel de significancia α)

Como p-valor $\simeq 0 < \alpha = 0{,}05$, se rechaza H_0 (no hay evidencia para asegurar que la velocidad de los nuevos sea mayor a la de los viejos)

b) Sea X_3 = "Velocidad (en MHz) de un chip aun más viejo"

$n_3 = 60$ $\quad \bar{X}_3 = 391{,}2$ $\quad S_3 = 17{,}2$ $\quad \sigma_3^2$ desconocida y distribución desconocida, pero por $n_3 \geq 30$, se cumple $X_3 \approx N(0,1)$, por TCL

Planteamos HIP $H_0: \mu_2 - \mu_3 = 100$ contra $H_1: \mu_2 - \mu_3 > 100$

El ESTADÍSTICO DE PRUEBA será el usado anteriormente, que toma el valor

$$z_1 = \frac{(495{,}6 - 391{,}2) - 100}{\sqrt{\frac{(19{,}4)^2}{50} + \frac{(17{,}2)^2}{60}}} = 1{,}2466$$

Determinamos el P-VALOR

$$\text{p-valor} = 1 - \Phi(1{,}2466) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

Como p-valor $= 0{,}1056 > \alpha = 0{,}05$, se acepta H_0

9) Sea X_{i_1} = "tiempo de secado (en horas) de la i-ésima pintura marca A"

X_{i_2} = "tiempo de secado (en horas) de la i-ésima pintura marca B"

Datos . $n_1 = n_2 = n = 15$. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidos

- $\bar{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i_1} = 3{,}82$ $\quad$ • $\bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i_2} = 4{,}94$

- $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i_1} - \bar{X}_1)^2 = 0{,}607$

- $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i_2} - \bar{X}_2) = 0{,}536$

b) Planteamos HIP

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

El ESTADÍSTICO DE PRUEBA a usar en estos casos será $T = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

a) El INTERVALO DE CONFIANZA para $\mu_1 - \mu_2$ del 95% será

$$IC_{(0,95)}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, 2n-2}\, S_p\sqrt{\frac{2}{n}}\right] \quad (1)$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (n-2)S_2^2}{2n-2}}$$

$\rightarrow$ Sigo atrás $\quad S_p = 0{,}7559$

Si 95% $\to$ $1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \alpha/2 = 0{,}025$ $\qquad t_{0{,}025,28} \underset{\text{tabla}}{=} 2{,}048$

Nos queda ①

$$\left[(3{,}82 - 4{,}94) \pm t_{0{,}025,28} \cdot 0{,}7559 \sqrt{\frac{2}{15}}\right] = -1{,}12 \pm 2{,}048 \cdot 0{,}276$$

$$= [-1{,}685, -0{,}555]$$

b) HIP $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Utilizamos el intervalo calculado en a). La regla de decisión sería

$$\begin{cases} \text{se acepta } H_0 \text{ si } \mu_0 = 0 \in IC_{(0{,}95)}(\mu_1 - \mu_2) \\ \text{se rechaza } H_0 \text{ si } \mu_0 = 0 \notin IC_{(0{,}95)}(\mu_1 - \mu_2) \end{cases}$$

Como $\mu_0 = 0 \notin [-1{,}685, -0{,}555]$, se rechaza H_0

10) Sea X_{1i} = "cantidad de automóviles que se aprox a intersección 1 en i-ésimo día"
X_{2i} = "cantidad de automóviles que se aprox a intersección 2 en i-ésimo día"

Datos $\quad X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $X_2 \sim (\mu, \sigma^2)$ independientes, σ_1^2 y σ_2^2 desconocidos

$n_1 = 21$ días $\qquad \bar{X}_1 = 247{,}3 \qquad S_1 = 15{,}2$

$n_2 = 11$ días $\qquad \bar{X}_2 = 254{,}1 \qquad S_2 = 18{,}7$

Planteamos HIP $H_0\ \mu_1 - \mu_2 = 0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de sign. $\alpha = 0{,}01$.

El ESTADÍSTICO DE PRUEBA a utilizar en estos casos sería

$$|T^*| = \left|\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}\right| \quad \text{que toma el valor} \quad |t_0^*| = \left|\frac{(247{,}3 - 254{,}1)}{\sqrt{\frac{(15{,}2)^2}{21} + \frac{(18{,}7)^2}{11}}}\right| = |-1{,}04| = 1{,}04$$

CRITERIO DE DECISIÓN $\begin{cases} \text{se acepta } H_0 \text{ si } |t_0^*| \leq t_{\alpha/2, \nu} \text{ con nivel de sign. } \alpha = 0{,}01 \\ \text{se rechaza } H_0 \text{ si } |t_0^*| > t_{\alpha/2, \nu} \text{ con nivel de sign } \alpha = 0{,}01 \end{cases}$

$\alpha = 0{,}01 \to \alpha/2 = 0{,}005$ y $\nu = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = 18{,}71 \simeq 19$

Luego $t_{0{,}005,19} \underset{\text{tabla}}{=} 2{,}861$

Como $|t_0^*| = 1{,}04 < 2{,}861 = t_{\frac{\alpha}{2},\nu}$, se acepta H_0 con nivel de sign $\alpha = 0{,}01$