Materia	Matemática Aplicada
Comisión	Ecología
Módulo	Modelos continuos [Ecuaciones diferenciales ordinarias]
Práctico	EDOs de primer orden y sus aplicaciones

AREA de ECOLOGIA
Instituto del Conurbano

1. Resuelva las ecuaciones diferenciales dadas

   a) $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x}$
   b) $\frac{dx}{dt} + x^2 \sin t = 0$
   c) $\frac{dx}{dt} = \cos^2(t)\cos^2(2x)$
   d) $t\frac{dx}{dt} = (1-x^2)^{1/2}$
   e) $\frac{dx}{dt} = \frac{t-e^{-t}}{x+e^x}$
   f) $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{1+x^2}$
   g) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$
   h) $\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{y}$

2. Halle la solución de los siguientes problemas con valor inicial

   a) $\frac{dx}{dt} = (1-2t)x^2$, $x(0) = -1/6$
   b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1-2t}{x}$, $x(1) = -2$
   c) $tdt + xe^{-t}dx = 0$, $x(0) = 1$
   d) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t}$, $x(1) = 2$
   e) $\frac{dx}{dt} = tx^3(1+t^2)^{-1/2}$, $x(0) = 1$
   f) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{(1+2y)}$, $y(2) = 0$
   g) $\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2-e^t}{2x-5}$, $x(0) = 1$
   h) $\sin(2t)dt + \cos(3x)dx = 0$, $x(\pi/2) = \pi/3$

Nota: Factor integrante

La ecuación diferencial lineal de primer orden general es

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{1}$$

donde $p(t)$ y $g(t)$ son funciones dadas. Para determinar un factor integrante apropiado, multiplicamos la ecuación 1 por una función aún no determinada $\mu(t)$, obteniendo

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t), \tag{2}$$

Vemos que el lado izquierdo de la ecuación 2 es la derivada del producto $\mu(t)y$, siempre que $\mu(t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \tag{3}$$

Si asumimos temporalmente que $\mu(t)$ es positivo, entonces tenemos

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t), \tag{4}$$

y consecuentemente

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k. \tag{5}$$

Al elegir que la constante arbitraria k sea cero, obtenemos la función más simple posible para μ, es decir,

$$\mu(t) = \exp\int p(t)dt. \tag{6}$$

Tenga en cuenta que $\mu(t)$ es positivo para todo t, como suponemos. Volviendo a la ecuación 2, tenemos

$$\frac{d\mu(t)y}{dt} = \mu(t)g(t), \tag{7}$$

Por lo tanto

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c, \tag{8}$$

donde c es una constante.Entonces la solución general de la ecuación 1 es

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c. \tag{9}$$

$\square$

3. Halle el factor integrante y resuelva la ecuación diferencial dada

   a) $\frac{dy}{dt} + 3y = t + e^{-2t}$
   b) $\frac{dy}{dt} - 2y = t^2 e^{2t}$
   c) $\frac{dy}{dt} + y = te^{-t} + 1$
   d) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3\cos(2t), \quad t > 0$
   e) $\frac{dy}{dt} - 2y = 3e^t$
   f) $t\frac{dy}{dt} - y = t^2 e^{-t}, \quad t > 0$
   g) $\frac{dy}{dt} + y = 5\sin(2t)$
   h) $2\frac{dy}{dt} + y = 3t^2$
   i) $\frac{dy}{dt} - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$
   j) $\frac{dy}{dt} + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$
   k) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$
   l) $t\frac{dy}{dt} + (t+1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

PROBLEMAS
Ecuación de conservación

5. Considere un tanque usado en ciertos experimentos hidrodinámicos. Después de un experimento, el tanque contiene 200 L de una solución con una concentración de 1 g/L de soluto. Para prepararse para el siguiente experimento, el tanque se enjuaga con agua fresca que fluye con un caudal de 2 L/min, y la solución bien agitada sale con la mismo caudal. Encuentre el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de soluto en el tanque alcance el 1 % de su valor original.

6. El río Páramo de los Guanacos desemboca en un embalse, conocido por los lugareños como Pozo de Bartolas. La cantidad de agua transportada por el río, medida en millones de litros, depende de la temporada. Como una función de tiempo, es

$$g(t) = 2 + \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right)$$

   Medimos el tiempo en días, y $t = 0$ corresponde a Año Nuevo. Las unidades de $g(t)$ son millones de litro de agua por día. El agua se libera de Pozo de Bartolas a una tasa constante de 2 millones de litros por día. A principios de año, hay 200 millones de litros de agua en el embalse.

   a) ¿Cuántos litros de agua habrá en Pozo de Bartolas a fines de abril? (Suponemos que el año tiene 360 días y cada mes tiene 30 días)
   b) Encuentre una función $F(t)$ que indique la cantidad de agua que hay en el depósito en cualquier día del año.

c) ¿A qué velocidad cambia la cantidad de agua en el depósito a principios de septiembre?

d) ¿En qué días habrá 250 millones de litros de agua en Pozo de Bartolas?

e) ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que tendrá el embalse?

7. Suponga que una planta química se encuentra situada en la orilla de un lago de 200 hm^3. Durante un accidente en la planta se derrama arsénico en el lago, originalmente libre de dicho químico. Tras este evento, las mediciones del contaminante arrojan una concentración de 1 kg/hm^3 de arsénico en el agua. Se sabe que el caudal de agua fresca que alimenta dicho lago es, en promedio, de 20 hm^3/dia. Se ha medido además que el agua sale del lago con el mismo caudal. Si suponemos que el agua se mezcla uniformemente dentro del lago

   a) Encuentre el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de arsénico alcance el 1 % de su valor original.

   b) Suponga ahora que el arsénico que alimenta el lago trae consigo una concentración de arsénico de $5 \times 10^{-3} kg/hm^3$. ¿Cuánto tardará la concentración del río en alcanzar el umbral anterior?

8. Considere un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuida uniformemente por todo el lago con una concentración $c(t)$, donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que el agua que contiene una concentración k de contaminante ingresa al lago a una taza r, y esa agua sale del lago a la misma taza. Supongamos que los contaminantes también se agregan directamente al lago a una tasa constante de P.

   Tenga en cuenta que los supuestos dados no consideran una serie de factores que pueden ser importantes en algunos casos, por ejemplo, el agua agregada o perdida por precipitación, absorción y evaporación; el efecto estratificador de las diferencias de temperatura en un lago profundo; la tendencia de las irregularidades en el litoral a producir bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes se depositan de manera desigual en todo el lago. Los resultados a continuación deben interpretarse a la luz de la negligencia de factores como estos.

   a) Si en el momento $t = 0$ la concentración de contaminante es $c0$, encuentre una expresión para la concentración $c(t)$ en cualquier momento. ¿Cuál es la concentración límite como $t \to \infty$?

   b) Si se termina la adición de contaminantes al lago ($k = 0$ y $P = 0$ para $t > 0$), determine el intervalo de tiempo T que debe transcurrir antes de que la concentración de contaminantes se reduzca al 50 % de su valor original; Al 10 % de su valor original.

   c) La tabla 1 contiene datos6 para varios de los Grandes Lagos. Usando estos datos, determine a partir de la parte b el tiempo T que se necesita para reducir la contaminación de cada uno de estos lagos al 10 % del valor original.

Lago	$10^3 \times V(km^3)$	r $(km^3/\text{año})$
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

Tabla 1: Volumen y datos de caudal para los Grandes Lagos.

Modelos poblacionales

9. Supongamos que una población, cuyo tamaño en el tiempo t se denota por $N(t)$, crece de acuerdo con

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.3N(t) \text{ con } N(0) = 20$$

Encuentre $N(t)$ y utilice algún software (Excel, Mathematica, etc.) para graficar dicha función.

10. La tasa de cambio de la población de una ciudad es proporcional a la población en cualquier momento. En 1998, la población era de 400000 habitantes y la constante de proporcionalidad era de 0.015. Estime la población de la ciudad en el año 2005.

11. Suponga que sigue el tamaño de una población a lo largo del tiempo. Cuando traza el tamaño de la población en función del tiempo en un gráfico semilogarítmico (es decir, el eje horizontal, que representa el tiempo, está en una escala lineal, mientras que el eje vertical, que representa el tamaño de la población, está en una escala logarítmica), encuentra que sus datos se ajustan a una línea recta que intercepta el eje vertical en 1 (en la escala logarítmica) y tiene pendiente -0.43. Encuentre una ecuación diferencial que relacione la tasa de crecimiento de la población en el tiempo t con el tamaño de la población en el tiempo t.

12. Supongamos que una población, cuyo tamaño en el momento t está dado por N (t), crece de acuerdo con

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{1}{100}N^2 \text{ con } N(0) = 10$$

a) Encuentre $N(t)$

b) Grafique $N(t)$ como una función de t para $0 \leq t < 10$. ¿Qué sucede cuando $t \to 10$? Explica en palabras lo que esto significa.

13. Supongamos que $L(t)$ es la longitud de un cierto pez en el tiempo t, y asumamos que este pez crece de acuerdo con la ecuación

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \quad \text{con} \quad L(0) = 1$$

donde k y L_∞ son constantes positivas. Un estudio demostró que la longitud asintótica es igual a 123 pulgadas y que este pez tarda 27 meses en alcanzar la mitad de su longitud asintótica.

a) Utilice esta información para determinar las constantes k y L_∞.

b) Determine la longitud del pez después de 10 meses.

c) ¿Cuánto tiempo tomará hasta que el pez alcance el 90 % de su longitud asintótica?

14. La ecuación logística describe el cambio en el tamaño de una población para la cual el crecimiento per cápita depende de la densidad. Si denotamos el tamaño de la población en el tiempo t por $N(t)$, entonces el cambio en el crecimiento viene dado por el problema del valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{con} \quad N(0) = N_0 \tag{10}$$

donde r y K son constantes positivas.

Podemos interpretar el parámetro r de la siguiente manera: la tasa de crecimiento per cápita es igual a r cuando $N = 0$. Por lo tanto, una forma de estimar r es hacer crecer el organismo a una densidad muy baja (es decir, cuando N es mucho menor que K), por lo que la tasa de crecimiento per cápita es cercana a r.

La cantidad K se llama la capacidad de carga. Vemos que la tasa de crecimiento per cápita es 0 cuando el tamaño de la población está en la capacidad de carga. Dado que la tasa de crecimiento per cápita es positiva por debajo de K y negativa por encima de K, el tamaño de la población aumentará por debajo de K y disminuirá por encima de K. El número K determina el tamaño de la población que puede soportar el medio ambiente.

Resuelva el problema con condiciones iniciales asociado con el crecimiento logístico de una población.

Solucion:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{dN}{N\left(K - N\right)} = \frac{r}{K}dt$$

$$\int \frac{dN}{N\left(K - N\right)} = \int \frac{r}{K}dt$$

Resolvamos la integral del miembro izquierdo. para eso, utilizaremos el metodo de fracciones parciales, que consiste en identificar el integrando con la suma de dos o más fracciones. En nuestro caso, definimos dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{N\left(K - N\right)} &= \frac{a}{N} + \frac{b}{K - N}\\ &= \frac{aK + (b - a)N}{N(K - N)}\end{aligned}$$

de aquí $a = b = \frac{1}{K}$.

Entonces tenemos

$$\int \frac{dN}{N\left(K - N\right)} = \int \frac{dN}{KN} + \int \frac{dN}{K\left(K - N\right)}.$$

Resolviendo esto (con un cambio de variables de por medio y haciendo uso de propiedades de logaritmos) llegamos a

$$\int \frac{dN}{N\left(K - N\right)} = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{N}{K - N}\right) + C.$$

La ecuación 10 queda

$$\frac{1}{K}\ln\left(\frac{N}{K - N}\right) = \frac{r}{K}t + C.$$

Realizando unos pases algebraicos obtenemos

$$N = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}.$$

Evaluando la condición inicial obtenemos

$$\boxed{N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}}$$

15. Supongamos que el tamaño de una población en el tiempo t se denota por $N(t)$ y que $N(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.34N\left(1 - \frac{N}{200}\right) \text{ con } N(0) = 50$$

Resuelva esta ecuación diferencial y determine el tamaño de la población a largo plazo; es decir, encontrar $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

16. En cualquier momento t, la tasa de crecimiento de la población $N(t)$ de ciervos en un parque estatal es proporcional al producto de N y $(L - N)$ donde $L = 500$ es la cantidad máxima de ciervos que el parque puede mantener. Cuando $t = 0$, $N = 100$, y cuando $t = 4$, $N = 200$. Escriba N en función de t.

17. Suponga que el tamaño de una población, denotado por $N(t)$, evoluciona de acuerdo con la ecuación logística. Encuentre la tasa de crecimiento intrínseca si la capacidad de carga es 100, $N(0) = 10$ y $N(1) = 20$.

18. Supongamos que $N(t)$ denota la densidad de una especie de insecto en el tiempo t y $P(t)$ denota la densidad de su depredador en el tiempo t. La especie de insecto es una plaga agrícola, y su depredador se utiliza como un agente de control biológico. Su dinámica está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 5N - 3PN \\ \frac{dP(t)}{dt} &= 2PN - P \end{aligned}$$

a) Explique por qué

$$\frac{dN(t)}{dt} = 5N$$

describe la dinámica del insecto en ausencia del depredador. Resuelva esta ecuación diferencial. Describa lo que le sucede a la población de insectos en ausencia del depredador.

b) Explique por qué la introducción del depredador de insectos en el sistema puede ayudar a controlar la densidad del insecto.

c) Suponga que al comienzo de la temporada de crecimiento la densidad de insectos es 0.5 y la densidad de depredadores es 2. Usted decide controlar los insectos usando un insecticida además del depredador. Es cuidadoso y elige un insecticida que no daña al depredador. Después de rociar, la densidad de insectos cae a 0.01 y la densidad del depredador permanece en 2. Use algún software graficador para investigar las implicaciones a largo plazo de su decisión de rociar el campo. En particular, investigue qué le habría pasado a las densidad de insectos si hubiera decidido no pulverizar el campo, y compare sus resultados con la densidad de insectos a lo largo del tiempo que resulta de la aplicación del insecticida.

19. Supongamos que $N(t)$ denota la densidad de presas en el tiempo t y $P(t)$ denota la densidad de depredadores en el tiempo t. Su dinámica está dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= 4N - 2PN \\ \frac{dP(t)}{dt} &= PN - 3P \end{aligned}$$

Supongamos que inicialmente $N(0) = 3$ y $P(0) = 2$.

a) Si siguiera a esta comunidad depredador-presa con el tiempo, ¿qué observaría?

b) Supongamos que el mal tiempo mata al 90 % de la población de presas y al 67 % de la población de depredadores. Si continúa observando a esta comunidad de depredadores y presas, ¿qué esperaría ver?