Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University

«Применение нечеткой кластеризации к дендритным шипикам»

Исполнитель: Лахнева М. Ю.

01.04.23



Введем следующие обозначения:

```
d \in \mathbb{N} — размерность пространства векторов данных;
l \in \mathbb{N}: 1 \le l \le d — номер координаты вектора;
n \in \mathbb{N} — мощность обучающей выборки;
X \subset \mathbb{R}^d — обучающая выборка векторов данных;
i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n — номер вектора обучающей выборки;
x_i \in X - i-й вектор выборки;
k \in \mathbb{N} — количество кластеров;
j \in \mathbb{N}: 1 \le j \le k — номер кластера;
\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{k \times d} — матрица, которая содержит центры кластеров;
c_i \in \mathbb{R}^d — центр кластера j, вектор размерности d;
x_{il}, c_{il} \in \mathbb{R} - l-е координаты векторов x_i и c_iсоответственно;
U \subset \mathbb{R}^{n \times k} — матрица степеней принадлежности, где u_{il} \in \mathbb{R}:
0 \le u_{ij} \le 1 — степень принадлежности вектора x_i кластеру j;
\rho(x_i, c_i) — функция расстояния, определяющая степень принадлежности вектора x_i кластеру j;
m \in \mathbb{R}: m > 1 — степень нечеткости целевой функции;
J_{FCM}\, — целевая функция алгоритма FCM.
```

Алгоритм основан на минимизации целевой функции J_{FCM} :

$$J_{FCM}(X, k, m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} u_{ij}^{m} \rho^{2}(x_{i}, c_{j})$$
(1)
$$u_{ij} = \sum_{t=1}^{k} \left(\frac{\rho(x_{i}, c_{j})}{\rho(x_{i}, c_{t})} \right)^{\frac{2}{1-m}}$$
(2)
$$\forall j, l \quad c_{jl} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{ij}^{m} x_{il}}{\sum_{i=1}^{n} u_{ij}^{m}}$$
(3)

Условие завершения алгоритма:

$$\max_{ij} \left\{ \left| u_{ij}^{(s+1)} - u_{ij}^{(s)} \right| \right\} < \varepsilon (4)$$

s – номер итерации

 $\varepsilon \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ – критерий останова

Bxod: X, m, ε, k .

Bыход: U.

Шаг 1. s := 0.

Шаг 2. $U^{(0)} := (u_{ij}).$

Шаг 3. (вычисление новых координат центроидов)

Вычислить $C^{(s)} := (c_j)$, используя формулу (3), где $u_{ij} \in U^{(s)}$.

Шаг 4. (обновление значений матриц)

Вычислить $U^{(s)}$ и $U^{(s+1)}$ по формуле (2).

Шаг 5. s := s + 1.

Шаг 6. Если условие (4) не выполняется, то перейти на шаг 3.

Шаг 7. Стоп.

Пример:

Дано: $\{(1;3),(2;5),(4;8),(7;9)\}$

- Шаг 1: *s*=0;
- Шаг 2: Инициализируем таблицу принадлежности случайными значениями.

Cluster	(1; 3)	(2;5)	(4; 8)	(7; 9)
1	0.8	0.7	0.2	0.1
2	0.2	0.3	8.0	0.9

• Шаг 3: вычисление координат центроидов:
$$c_{jl} = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m x_{il}}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m}$$

$$c_{11} = \frac{(0.8^2 * 1 + 0.7^2 * 2 + 0.2^2 * 4 + 0.1^2 * 7)}{(0.8^2 + 0.7^2 + 0.2^2 + 0.1^2)} = 1.568 \dots$$

• Шаг 3: вычисление координат центроидов:

$$c_{11}$$
= 1.568
 c_{12} = 4.051
(1.568; 4.051)
 c_{21} = 5.35
 c_{22} = 8.215
(5.35; 8.215)

Шаг 4: обновление матриц принадлежности:

Рассчитаем расстояние между точками и центром тяжести с помощью метрики – евклидово расстояние:

$$\{(1;3),(2;5),(4;8),(7;9)\}$$

$$\rho(x_1, c_1) = \sqrt{(1 - 1.568)^2 + (3 - 4.051)^2} = 1.2; \qquad \rho(x_3, c_1) = 4.63$$

$$\rho(x_1, c_2) = 6.79; \qquad \qquad \rho(x_3, c_2) = 1.36$$

$$\rho(x_2, c_1) = 1.04; \qquad \qquad \rho(x_4, c_1) = 7.34$$

$$\rho(x_2, c_2) = 4.64; \qquad \qquad \rho(x_4, c_2) = 1.82$$

Координат центроидов:

первый - (1.568; 4.051) второй - (5.35; 8.215)

Расстояния между точками и центром тяжести:

$$\rho(x_1, c_1) = 1.2;$$
 $\rho(x_2, c_1) = 1.04;$ $\rho(x_3, c_1) = 4.63;$ $\rho(x_4, c_1) = 7.34$ $\rho(x_1, c_2) = 6.79;$ $\rho(x_2, c_2) = 4.64;$ $\rho(x_3, c_2) = 1.36;$ $\rho(x_4, c_2) = 1.82$

Cluster	(1; 3)	(2; 5)	(4; 8)	(7; 9)
1	0.8	0.7	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.8	0.9
центроид	первый	первый	второй	второй

Обновляем матрицу принадлежности:

$$u_{ij} = \sum_{t=1}^{k} \left(\frac{\rho(x_i, c_j)^2}{\rho(x_i, c_t)^2} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

$$u_{11} = \left(\frac{1.2^2}{1.2^2} + \frac{1.2^2}{6.79^2}\right)^{\left(\frac{1}{1-2}\right)} = 0.97;$$
 $u_{31} = 0.08$ $u_{12} = 0.03;$ $u_{32} = 0.92$ $u_{21} = 0.95;$ $u_{41} = 0.06$ $u_{22} = 0.05;$ $u_{42} = 0.94$

	Cluster	(1; 3)	(2; 5)	(4; 8)	(7; 9)
s=0	1	0.8	0.7	0.2	0.1
	2	0.2	0.3	0.8	0.9
s=1	1	0.97	0.95	0.08	0.06
	2	0.03	0.05	0.92	0.94

- Шаг 5: *s*=1;
- Шаг 6: проверяем условие:

$$\max_{ij} \left\{ \left| u_{ij}^{(s+1)} - u_{ij}^{(s)} \right| \right\} < \varepsilon$$

FCM

