2.3.4. Транспортные задачи (ТЗ) [7, 8, 20, 28 – 30, 55]

2.3.4.1. Постановка ТЗ и общий принцип её решения методом потенциалов

Содержательная постановка транспортной задачи заключается в следующем [20].

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$, называемыми пунктами производства, в количествах $a_1, a_2, \dots, a_m$ имеется некоторый однородный продукт.

Указанный продукт потребляется в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, называемых пунктами потребления, в количествах $b_1, b_2, \dots, b_n$. Стоимость перевозки единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j составляет $c_{i,j}$, где $i = 1,m; j = 1,n$.

Решение задачи состоит в нахождении такого плана перевозок $\|x_{i,j}\|_{m,n} = X$, при котором:

- все запросы потребителя будут удовлетворены;
- весь произведённый товар или продукт будет вывезен из пунктов производства;
- стоимость ***всего объёма*** перевозок будет минимальна.

Условия задачи формулируют в одной из нижеследующих форм.

1. В виде совокупности массивов A, B и C, называемых, соответственно, вектором производства, вектором потребления и матрицей стоимостей.

2. В виде таблицы, комбинирующей указанные выше массивы.

	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	…	$c_{1,n}$	a_1
A_2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	…	$c_{i,j}$	a_2
…	...	...	$c_{i,j}$	...	…
A_m	$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	…	$c_{m,n}$	a_m
	b_1	b_2	…	b_n	

Обозначив через $x_{i,j}$ количество продукта, перевозимого из i-ого пункта в j-й, можем, руководствуясь благоприобретёнными знаниями, составить математическую модель в терминах линейного программирования

Найти минимум целевой функции

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j} , \tag{2.32}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ge b_j ,\ \ j = 1,\overline{n} \text{ и} \tag{2.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le a_i ,\ \ j = 1,\overline{m} . \tag{2.34}$$

Ограничение (2.23) говорит о полном удовлетоврряние спроса потребителей, а (2.34) – о непревышении объёма перевозок объёма произведенного продукта.

Матрица X называется матрицей перевозок, планом перевозок, а тако же планом коммуникаций или коммуникативным планом. Плану перевозок соответствует граф на плоскости, аналогичный представленному на рисунке 2.7 ниже.

Транспортная задача, как особая разновидность задачи линейного программирования, обладает рядом свойств:

- коэффициенты целевой функции неотрицательны (стоимости перевозок не могут быть отрицательными величинами);
- величины элементов вектора производственных запасов и вектора потребления неотрицательны;
- базисное решение закрытой модели транспортной задачи содержит $m+n-1$ базисных компонент;
- допустимое решение является планом, а базисное допустимое решение является опорным планом, оптимальное решение – оптимальным планом перевозок.

Дуга графа $[A_i, B_j]$ рисунка 2.7 называется коммуникацией, ей соответствует значение $x_{i,j} > 0$ – величина перевозки.

Решение задачи линейного программирования (2.32) – (2.34) известными методами весьма громоздко, причём объём вычислений растёт по мере увеличения n и m. Поэтому был предложен ряд специальных методов, рассчитанных непосредственно на решение транспортных задач.

Данные методы ориентированы на так называемую “замкнутую” или “закрытую” модель транспортной задачи.

Для такой модели и разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось ***условие баланса***:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{2.35}$$

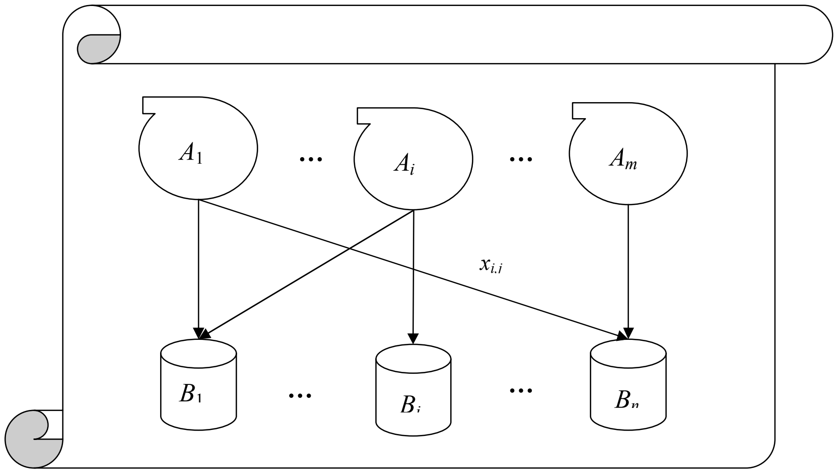

Рисунок 2.7 – Интерпретация плана перевозок

Для задачи с выполняющимся условием баланса в математической модели (2.33) и (2.34) приобретают вид равенства.

Если задача не является сбалансированной (не выполняется условие баланса), то для приведения её к сбалансированному виду необходимо ввести фиктивные пункты производства или пункты потребления. Пункт вводится с таким расчётом, чтобы обеспечить выполнения равенства (2.35), соответствующий компонент вектора *A* или *B* равен положительной разнице левой и правой частей (2.35) при отсутствии баланса. Одновременно в матрицу стоимостей *C* добавляется строка либо столбец с нулевым содержимым.

Иными словами, в случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный n+1-й потребитель, потребности которого определяются как $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. А в случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный m+1-й поставщик, запасы которого есть $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Стоимость перевозки единицы груза как до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика полагают равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится, и, следовательно, не может оказывать влияние на целевую функцию.

Примечание. Математическая модель обладает свойством пропорциональности: как матрицу стоимостей, так и вектора, входящие в условие задачи, можно умножать на коэффициент, отличный от нуля, либо увеличивать (уменьшать) на некоторой число. Это свойство может оказаться полезным для избавления от дробных чисел в условии задачи. Тако же необходимо помнить, что при отрицательных элементах компонентов задача потеряет содержательный смысл.

Исторически первым был подход к решению транспортных задач методом потенциалов. Считается, что данный метод ориентируется на ручное решение задачи, и, в дальнейшем, мы поймём, почему.

Алгоритм метода потенциалов структурно состоит из предварительного и итерационного этапов [28 – 30].

Предварительный этап состоит в ***нахождении начального опорного плана*** и расчёта ***потенциалов***.

На итерации

- проверяется условие окончания;
- определяется коммуникация, вводимая в базис;
- определяется коммуникация, выводимая из базиса;
- синхронно пересчитываются план коммуникаций, значения потенциалов и текущее значение функции цели.

Для нахождения начального опорного плана известно несколько методов. Мы рассмотрим ниже ***метод северо-западного угла***, ***метод минимальной стоимости*** и ***метод штрафов***, который часто нахывают по имени автора – методом ***Фогеля***.

Опорный план обладает рядом ***свойств***.

- Он ***невырожден***. Это означает, что число положительных элементов невырожденного плана должно быть ***не менее***, чем ранг матрицы ограничений эквивалентной ЗЛП, то есть

$$r = n + m - 1, \qquad (2.36)$$

где m и n – числа поставщиков и потребителей в ***замкнутой*** модели транспортной задачи.

- Опорный план представляет более или менее удачное решение ТЗ, в котором весь товар вывезён из пунктов производства, а потребности пунктов потребления полностью удовлетворены.
- Из элементов опорного плана нельзя составить замкнутую цепочку.

Для примера будем использовать, в дальнейшем, следующее условие ТЗ

	B_1	B_2	B_3	B_n	
A_1	*7*	*8*	*1*	*2*	*160*
A_2	*4*	*5*	*9*	*8*	*140*
A_3	*9*	*2*	*3*	*6*	*170*
	120	*50*	*190*	*110,*	

на примере которого будем демонстрировать работу алгоритмов.

Проверим условие баланса (2.35):

$$120 + 50 + 190 + 110 = 160 + 140 + 170 = 470,$$

следовательно, мы имеем дело с закрытой математической моделью ТЗ и можем приступать её к решению.

2.3.4.2. Нахождение начального опорного плана ТЗ методом северо-западного угла [29, 30]

Метод получил своё название за "географический" подход к построению плана. По аналогии с топографической картой, левый верхний угол текущего прямоугольного участка плана является северо-западным.

1. Первоначально строится пустая матрица размерами $m \times n$, снизу записываются компоненты вектора производства, а слева – потребления.

2. Для текущего северо-западного угла с координатами $(i,\ j)$, первоначально (1, 1), выбирается минимальный элемент между i-ым значением вектора производства и j-ым значением вектора потребления

$$x_{i,j} = \min\{a_i, b_j\}, \tag{2.37}$$

который помещается в план коммуникаций.

3. Элементы векторов производства и потребления, соответствующие заполненной позиции плана, уменьшаются на величину $x_{i,j}$, то есть

$$a_i = a_i - x_{i,j},\ \ b_j = b_j - x_{i,j}. \tag{2.38}$$

4. Строка или столбец плана, для которых компоненты векторов производства или потребления обнулились, из рассмотрения исключаются.

Таким образом, возникают координаты нового северо-западного угла: $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ или $(i+1, j+1)$.

5. Шаги настоящего алгоритма 2 – 4 продолжаются до тех пор, пока компоненты векторов производства и потребления не окажутся обнулены. Очевидно, что при закрытой модели ТЗ указанное событие будет иметь место.

6. Все элементы плана X, не заполненные по завершению работы алгоритма, полагаются равными нулю.

7. Подсчитав число ненулевых элементов, сравниваем его с оценкой (2.36), определяем невырожденность или вырожденность плана.

8. Вычисляем значение целевой функции по формуле (2.28)

$X_0 =$

120[1)]	*40[2)]*			*160*	*40*	*0*
	10[3)]	*130[4)]*		*140*	*130*	*0*
		60[5)]	*110[6)]*	*170*	*110*	*0*
120	*50*	*190*	*110*			
0	*10*	*60*	*0*			
	0	*0*				

Цифрами со скобками обозначен порядок заполнения плана. Слева и снизу от таблицы показана динамика изменения компонентов a_i и b_j по ходу построения X_0.

Исследуем полученный план на невырожденность: $r = 3 + 4 - 1 = 6$. Число ненулевых элементов плана тако же равно 6-ти. Следовательно, план не вырожден.

Рассчитаем значение целевой функции (2.32) для данного плана:

$$L = 7 \times 120 + 8 \times 40 + 5 \times 10 + 9 \times 130 + 3 \times 60 + 6 \times 110 = 3220.$$

Так как расчёты проводились вручную, то формуле (2.32) следовали не буквально, а опуская умножение на ноль.

***Замечания*.**

- Построение опорного плана по методу северо-западного угла осуществляется алгоритмически однозначно.
- Встречается и чисто математическая формулировка алгоритма построения элементов плана

$$\begin{cases} a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda,j}, \\ b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i,\mu}, \\ x_{\lambda,\mu} = \min\left\{a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)}\right\}, \end{cases}$$

где литерами *(k)* обозначен номер итерация.

- Очевидно, что данный способ построения – один из наихудших, ибо ориентируется лишь на координаты заполняемой ячейки плана.

Последнее замечание стимулировало развитие методов, направленных на “удачное” составление начального плана, которые учитывают значения элементов матрицы стоимостей *C*.

2.3.4.3. Нахождение начального опорного плана ТЗ методом минимальной стоимости [29, 30]

Алгоритм метода опирается на очевидное житейское соображение о целесообразности дешёвой перевозки бОльшего количества товаров. Поэтому построение опорного плана начинается с минимальных элементов по мере возрастания.

1. Так же, как и в предыдущем методе, строится пустая матрица размерами $m \times n$, снизу записываются компоненты вектора производства, а слева – потребления.
2. Элементы матрицы *C* индексируются в порядке их немонотонного возрастания. Из-за того, что несколько элементов могут иметь одинаковые значения и, как следствие, порядок индексации, очередность заполнения плана, в этом случае, может разниться.
3. Заполнение плана X_0 выполняется в порядке проставленной нумерации, при этом руководствуются выражениями (2.36) и (2.37) для выбора величины перевозки и коррекции векторов *A* и *B*.
4. Строка или столбец матрицы стоимостей, для которых компоненты векторов производства или потребления обнулились, из рассмотрения исключаются. Следующая позиция плана определяется минимальным индексом из не исключённой для рассмотрения элементов матрицы *C*.
5. Шаги алгоритма выполняются до обнуления компонентов векторов *A* и *B*. Последнее для замкнутой модели ТЗ неизбежно. Не заполненные элементы плана *X* полагаются равными нулю. Рассчитывается значение целевой функции и проверяется невырожденность плана.

Замечания.

- Построение опорного плана по методу минимальной стоимости осуществляется алгоритмически неоднозначно. При наличии одинаковых элементов матрицы *C*, они могут получить разные индексы, в соответствии с волей индексирующего. Как следствие, для одних и тех же условий задачи теоретически могут быть получены различные начальные опорные планы.

- При очевидной целесообразности алгоритма, в процессе работы не учитывается топология распределения минимальных элементов в матрице стоимостей.

Распределения минимальных элементов в матрице *C* позволяет учесть алгоритм метода штрафов, изложение которого ниже.

При ручной реализации алгоритма часто используют таблицу, которая совмещает индексацию, начальный опорный план и матрицу стоимостей “в одном лице”. Пример работы алгоритма представим с использованием совмещённой таблицы.

В левом верхнем углу ячейки таблицы помещается индекс, а в правом верхнем – значение целевой функции, внизу, по центру, помещаются значение величины перевозки.

9) 7	9) 8	1) 1 $160^{1)}$	2) 2	160	0		
5) 4 $120^{4)}$	6) 5	11) 9	10) 8 $20^{6)}$	140	20	0	
12) 9	3) 2 $50^{2)}$	4) 3 $30^{3)}$	7) 6 $90^{5)}$	170	120	90	0
120	50	190	110				
0	0	30	20				
		0					

Обратите внимание, что «2» и «8», встреченные в матрице *C*, могли бы иметь и отличную от полученной индексацию.

Мы видим, что сей план не вырожден, а его целевая функция равна

$$L = 160 \times 1 + 120 \times 4 + 20 \times 8 + 50 \times 2 + 30 \times 3 + 90 \times 6 = 1530,$$

что представляет результат, намного лучший, нежели тот, что получен по методу северо-западного угла.

2.3.4.3. Нахождение начального опорного плана ТЗ методом Фогеля [17, 13]

Метод ***Фогеля*** он же ***метод штрафов*** учитывает не только величины элементов матрицы *C*, но и их взаимоположение с другими элементами в столбце либо в строке.

Штрафом вектора, соответствующего строке либо столбцу матрицы C, называется неотрицательная разность между минимальным элементом вектора и следующим за ним ***по величине*** элементом этого же вектора.

Алгоритм метода Фогеля

1. Так же, как и в предыдущих алгоритмах, первоначально строится пустая матрица X_0 размерами $m \times n$, снизу записываются компоненты вектора производства, а слева – потребления.
2. Выполняется расчёт штрафов для столбцов и строк текущей подматрицы матрицы C.
3. Выбирается строка либо столбец с ***максимальным*** штрафом, при этом минимальный компонент для выбранного вектора определит позицию плана, подлежащую заполнению.
4. Заполнение позиции плана X_0 осуществляется согласно выражениям (2.33) и (2.34) для выбора величины перевозки и коррекции векторов A и B.
5. Строки и столбцы матрицы C, соответствующие обнулённым элементам векторов производства и потребления, при определении штрафов ***не рассматриваются***, формируя тем самым новую подматрицу матрицы C, используемую для дальнейших расчётов.
6. Функционирование алгоритма с п. 2 продолжается до тех пор, пока размеры подматрицы матрицы C не сократятся до строки (подстроки) или столбца (подстолбца).
7. Часть плана X_0, соответствующая незаполненной подматрице матрицы C заполняется по правилу минимальной стоимости, в порядке возрастания элементов.
8. Оставшиеся компоненты плана X_0 полагаются равными нулю, рассчитывается целевая функция, план проверяется на невырожденность.

Замечания.

- При равенстве штрафов отсутствует правило выбора для осуществления заполнения, поэтому построение опорного плана осуществляется однозначно.
- Метод Фогеля очень часто (подтверждено опытом) даёт решение ТЗ, совпадающее с оптимальным.

Используем известный численный пример для демонстрации хода выполнения алгоритма:

- литеры $Ш_i$ обозначают штрафы столбцов и строк на i–й итерации;
- серым цветом выделены значение штрафа, используемое на i–й итерации, и заполняемая ячейка плана;

- цифра со скобкой определяет порядок заполнения, который тождествен номеру итерации;
- ячейки (2, 2) и (2, 3) заполняются после четвёртого шага по методу минимальной стоимости.

					$Ш_1$		$Ш_2$		$Ш_3$		$Ш_4$		
7	8	1	2		1		**6**		–		–		
		$50^{2)}$	$110^{1)}$	160		50		0					
4	5	9	8		1		1		1		1		
$120^{4)}$	$20^{6)}$			140								20	0
9	2	3	6		1		1		1		1		
	$30^{5)}$	$140^{3)}$		170				0		30		0	
120	50	190	110										
3	3	2	**4**	$Ш_1$									
			0										
3	3	3	–	$Ш_2$									
		140											
5	3	**6**	–	$Ш_3$									
		0											
5	3	–	–	$Ш_4$									
0													
–		–	–										
	20												
	30												
	0												

Полученный план является невырожденным. Функция цели есть

$$L = 50 \times 1 + 110 \times 2 + 120 \times 4 + 20 \times 5 + 30 \times 2 + 140 \times 3 = 1330.$$

Этот план обладает самым минимальным значением целевой функции из всех ранее полученных опорных планов.