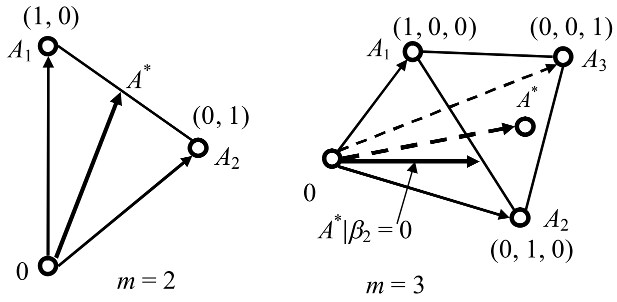

Рисунок 2.4 – Представление выпуклых комбинаций в в двумерном и трёхмерном пространствах

2.2.5 Решение ЗЛП прямым симплекс-методом

Прямой симплекс-метод называется еще табличным, хотя использование таблиц присуще всем методам этой группы. Позволяет найти решение за конечное, хотя иногда и значительное, число шагов. Значение целевой функции при этом немонотонно возрастают (при решении задач на максимум) или немонотонно убывают (при решении задач на минимум).

Метод применяется, когда все ограничения системы имеют в записи знаки "≤", то есть, математическая модель выглядит так.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to opt$$
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1}, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Алгоритм прямого симплекс-метода

Алгоритм, структурная схема которого приведена на рисунке 2.5, включает следующие шаги: [4, 23, 24, 59, 60].

1. Приведение математической модели задачи к каноническому виду (2.6) и представление её в векторной форме (2.5).

Операция состоит во введении так называемых дополнительных переменных, преобразующих неравенства в равенства. При ограничениях "≤" указанные переменные введутся со знаком плюс. В результате имеем каноническую форму системы ограничений, и расширенную модель.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \to opt,$$
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

Векторы, соответствующие дополнительным переменным канонической системы ограничений $A_{n+1}^T = [1 \ \dots \ 0]$, …, $A_{n+m}^T = [0 \ \dots \ 1]$ образуют начальный базис n-мерного пространства, с их помощью можно разложить любой из векторов, не вошедших в базис.

2. В качестве начального (опорного) решения выбирается крайняя точка, имеющая координаты: $X_0 = [0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m]$, что означает следующее: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2$, ..., $x_{n+m} = b_m$, то есть $E \times X_{ДОП} = A_0$.

3. Каноническая форма ЗЛП (2.6) совместно с координатами крайней точки помещается в так называемую симплекс-таблицу, общий вид которой представлен ниже.

		c_j	c_1	...	c_n	0	...	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	...	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m}
A_{n+1}	*0*	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	*1*	...	*0*
A_{n+2}	*0*	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	*0*	...	*0*
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	*0*	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	*0*	...	1
	δ	δ_0	δ_1	...	δ_n	δ_{n+1}	...	δ_{n+m}

В последнюю строчку таблицы записываются значения симплекс-разностей, пояснения к вычислениям которых даются в седеющем пункте.

Рисунок 2.5 – Алгоритм симплекс-метода решения задачи максимизации

4. Расчёт симплекс-разностей. Эти величины характеризуют “удачность” текущего базисного плана и рассчитываются по формулам:

- текущее значение целевой функции $\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}$;
- симплекс-разности $\delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j$.

Последовательность текущих значения целевой функции позволяет контролировать ход расчётов: значения увеличиваются в ходе решения задачи максимизации и уменьшаются при поиске минимума целевой функции.

5. Если все симплекс-разности больше либо равны нулю (при решении задачи на максимум) или неположительные (при решении задачи на минимум), то достигнуто оптимальное решение. Признаки достижения оптимума можно сформулировать так: $\max : \forall_j \delta_j \ge 0$ или $\min : \forall_j \delta_j \le 0$.

Почему это так, станет понятно при обосновании ввода и вывода базисных векторов ниже.

6. Если существуют столбцы с отрицательными симплекс-разностями, и в соответствующих столбцах ***все*** элементы неположительные то при решении задачи на максимум мы имеем дело с ***неограниченной системой неравенств***. Аналогичная ситуация при решении задачи на минимум, когда существуют столбцы с положительными симплекс-разностями, а в соответствующих столбцах все элементы неположительные. Формально условие выглядит так

$$\max : \exists_k \delta_k < 0 \,\&\, \forall a_{i,k} \le 0,$$

$$\min : \exists_k \delta_k > 0 \,\&\, \forall a_{i,k} \le 0.$$

Более точно будет сказать, что область ограничений ***не замкнута в направлении оптимизации***.

В противном случае, имеются отрицательные симплекс-разности, и в столбцах им соответствующих, есть положительные элементы (для решения задачи максимизации) или положительные симплекс-разности и положительные элементы в столбцах (в случае минимизации). В этой ситуации, может быть получено новое решение, лучшее, нежели текущее.

Новое допустимое базисное решение буде связано с новым базисом.

7. При решении задачи максимизации выбирается столбец с минимальной симплекс-разностью (минимальной оценкой), который называется ***направляющим***, указывается в таблице вертикальной стрелкой “↑”, а в формулах он и его компоненты обозначаются символом “*”.

Если задача решается на поиск минимума, то в этом случае выбирается максимальная оценка.

Формально условие выбора записывается так:

$$\text{для задачи на} \max : \arg\min_j \delta_j < 0 \to j^*,$$

$$\text{для задачи на } \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \to j^*.$$

Найденный вектор помещается на место вектора, выводимого из базиса. Соответствующая ему переменная включается в состав базисных переменных, эти изменения отображаются в содержимом столбца “Базис”.

8. Вектор, выводимый из базиса, определяется путём нахождения ***направляющей*** строки. Не зависимо от направления проводимой оптимизации (минимизация или максимизация функции цели), направляющая строка определяется по правилу

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \to i^*$$

и обозначается символами "←" (в таблице) и "*" (в формулах).

9. После смены векторов строится новая симплекс-таблица, которая получаются модификацией текущей таблицы путем применения исключений Жордана-Гаусса [11, 29].

- Модифицируется направляющая строка путем деления на направляющий элемент a_{i^*,j^*}, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, а результат записывается на соответствующее место новой таблицы;
- Из всех остальных строк исходной таблицы вычитается поэлементно модифицированная направляющая строка, умноженная на элемент a_{i,j^*}, стоящий на пересечении "уменьшаемой" строки и направляющего столбца, результаты вычитаний записываются на соответствующие места в новой таблице.

10. Работа алгоритма повторяется циклически, начиная с пункта №4.

Замечание. Решать задачу минимизации можно точно так же, как и задачу максимизации, положив $F_{\max} = -1 \times F_{\min}$.

Математическое обоснование этапов ввода и вывода векторов в базис и из базиса

Как известно из теорем линейного программирования, если векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ являются базисом m-мерного пространства, то

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = A_0, \tag{2.7}$$

и любой вектор, входящий в каноническую систему ограничений, может быть разложен по векторам этого базиса

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_j x_{i,j}, \quad j = 1,2,\ldots,n+m \tag{2.8}$$

или, в развёрнутом виде

$$A_1 x_{1,j} + A_2 x_{2,j} + \ldots + A_m x_{m,j} = A_j. \tag{2.9}$$

Введём в рассмотрение некоторую величину $\theta > 0$, на которую умножим (2.9) –

$$A_1 \theta x_{1,j} + A_2 \theta x_{2,j} + \ldots + A_m \theta x_{m,j} = A_j \theta,$$

а результат умножения вычтем из (2.7). После приведения подобных членов выражения получим:

$$A_1(x_1 - \theta x_{1,j}) + A_2(x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + A_m(x_m - \theta x_{m,j}) + A_j \theta = A_0. \tag{2.10}$$

Вектор X с координатами

$$X^{\mathrm{T}} = \{\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{x_1 - \theta x_{1,j},\; x_2 - \theta x_{2,j},\; \ldots,\; x_m - \theta x_{m,j}}_{m},\; \theta}_{m+1},\; 0, \ldots 0}_{m+n} \;\}$$

будет допустимым решением ***при условии неотрицательности своих компонент***. Это будет выполняться когда

$$0 < \theta \leq \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{i,j}} \right\},$$

а чтобы план оставался опорным, он не должен содержать больше чем m компонент, поэтому одна из существующих компонент плана должна обратиться в нуль.

Симплекс-метод обусловливает направленный перебор опорных планов, переходя от одного опорного плана к другому, не худшему, нежели предыдущий.

Пусть ЗЛП обладает множеством опорных планов, которые являются невырожденными. Значение функции цели некого текущего плана составляет

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i.$$

В результате разложения любого A_j канонической формы представления ЗЛП в виде (2.8) и использования в качестве нового базисного (опорного) решения (2.10), значение целевой функции составит

$$F(A_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i,j} = c_1(x_1 - \theta x_{1,j}) + c_2(x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + c_j\theta =$$
$$= F(X) - \theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \ldots - c_j).$$

Таким образом, изменение функции цели при переходе к новому базису есть

$$F(A_j) - F(X) = -\theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \ldots - c_j) = -\theta \cdot \delta_j. \quad (2.11)$$

Причём, величина θ всегда, по определению, положительна, δ_j – есть симплекс-разность базисного вектора A_j. Из (2.11) следует, что при поиске максимума значение δ_j должно быть самое отрицательное (новое значение больше старого), а неотрицательность (2.11) для всех векторов означает достижение оптимума и вызывает, как было отмечено выше, остановку алгоритма.

При решении задачи минимизации новое значение целевой функции должно быть меньше предыдущего, поэтому наблюдаем "зеркальную" ситуацию: δ_j должно быть максимально положительно, а отсутствие положительных симплекс-разностей означает достижения минимума функции цели при заданных ограничениях.

Продемонстрируем работу алгоритма на ранее рассмотренной модели.

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0;\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Расширенная или каноническая форма для этого случая есть

$$f = 5k_1 + 6k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 + 1k_3 + 0k_4 + 0k_5 = 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 + 0k_3 + 1k_4 + 0k_5 = 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 1k_5 = 2{,}4; \\ k_1 \ge 0;\ k_2 \ge 0;\ k_3 \ge 0;\ k_4 \ge 0;\ k_5 \ge 0. \end{cases}$$

Построим таблицу

			c_j	5	6	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
←	A_3	0	1,8	0,2	0,3	1	0	0
	A_4	0	1,2	0,2	0,1	0	1	0
	A_5	0	2,4	0,3	0,3	0	0	1
		δ_j	0	-5	-6	0	0	0
					↑			

Точка текущего решения (0; 0; 1,8; 1,2; 2,4). Расчёт симплекс-разностей показан ниже.

$$\delta_0 = 0 \cdot 1{,}8 + 0 \cdot 1{,}2 + 0 \cdot 2{,}4 = 0 \quad \text{– \textit{значения целевой функции}};$$
$$\delta_1 = 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 - 5 = -5;$$
$$\delta_2 = 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 - 6 = -6;$$
$$\delta_3 = 0;\ \delta_4 = 0;\ \delta_5 = 0.$$

Значения симплекс-разностей свидетельствуют о том, что текущий план необходимо улучшать.

1-я итерация.

Направляющий столбец – 2-й, т.к. самое отрицательное $\delta_2 = -6$, поэтому в базис вводится вектор A_2, а в решение – переменная k_2. направляющую строку определит минимальное из отношений

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \ge 0}{a_{i,j^*} \ge 0} : \frac{1{,}8}{0{,}3} = 6; \frac{1{,}2}{0{,}1} = 12; \frac{2{,}4}{0{,}3} = 8 \right\} \to i^* = 1.$$

Поэтому из базиса выводится вектор A_3 и, соответствующая ему, переменная k_3 из решения, направляющая строка – 1-я. K=(0, k_2, 0, k_4, k_5).

Выполним исключения Жордана-Гаусса, модифицируя таблицу. Первая строка, согласно алгоритму, делится на направляющий элемент $a_{i^*,j^*} = 0{,}3$ (он выделен серым в таблице), получаем

$$\frac{1{,}8}{0{,}3} = 6,\ \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3},\ \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1,\ \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3},\ 0,\ 0.$$

Во второй строке, в месте пересечения с направляющим столбцом $a_{2,j^*} = a_{2,2} = \dfrac{1}{10}$.

$$a_{20} = \frac{12}{10} - 6 \times \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};\quad a_{21} = \frac{2}{10} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{15};$$
$$a_{22} = \frac{1}{10} - 1 \times \frac{1}{10} = 0;\qquad a_{23} = 0 - \frac{10}{3} \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{3};$$

$a_{24} = 1 - 0\times\frac{1}{10} = 1$; $a_{25} = 0 - 0\times\frac{1}{10} = 0$.

В третьей строке, на пересечении с направляющим столбцом $a_{3,j^*} = a_{3,2} = \frac{3}{10}$.

$$a_{30} = \frac{24}{10} - 6\times\frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};\quad a_{31} = \frac{3}{10} - \frac{2}{3}\times\frac{3}{10} = \frac{1}{10};$$

$$a_{32} = \frac{3}{10} - 1\times\frac{3}{10} = 0;\qquad a_{33} = 0 - \frac{10}{3}\times\frac{3}{10} = -1;$$

$$a_{34} = 0 - 0\times\frac{3}{10} = 0;\qquad a_{35} = 1 - 0\times\frac{3}{10} = 1.$$

Подставляем результаты расчётов в новую симплекс-таблицу и рассчитываем симплекс-разности.

			c_j	5	6	0	0	0
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	A_2	6	6	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	0	0
←	A_4	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0
	A_5	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	-1	0	1
		δ_j	36	-1	0	20	0	0
				↑				

$\delta_0 = 6\cdot 6 + 0\cdot 0{,}6 + 0\cdot 0{,}6 = 36,$ - целевая функция возрастает,

$$\delta_1 = \frac{2}{3}\cdot 6 + \frac{4}{30}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{10} - 5 = -1,$$

$$\delta_2 = 6\cdot 1 + 0 + 0 - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 6\cdot\frac{10}{3} = 20,\ \delta_4 = \delta_5 = 0.$$

Значения симплекс-разностей показывают, что оптимум не достигнут.

Текущее решение имеет координаты $K^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

2-я итерация.

Направляющий столбец – 1-й, ибо $\delta_2 = -1$, поэтому в базис вводится вектор A_1, в решение – переменную k_1. Определим направляющую строку

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \ge 0}{a_{i,j^*} \ge 0} : \frac{\frac{6}{1}}{\frac{2}{3}} = 9;\ \frac{\frac{6}{10}}{\frac{2}{15}} = \frac{9}{2} = 4{,}5;\ \frac{\frac{6}{10}}{\frac{1}{10}} = 6 \right\} \to i^* = 2..$$

Из базиса уходит вектор A_4, вводится A_1. Решение будет иметь структуру: $K=(k_1, k_2, 0, 0, k_5)$.

Выполняем преобразование Жордана-Гаусса. Делим направляющую строку на элемент $a_{i^*,j^*} = a_{2,1} = \frac{2}{15}$.

$$a_{20} = \frac{3}{5} : \frac{2}{15} = \frac{9}{2} = 4{,}5;\quad a_{21} = \frac{2}{15} : \frac{2}{15} = 1;$$

$$a_{22} = 0 : \frac{2}{15} = 0;\qquad a_{23} = -\frac{1}{3} : \frac{2}{15} = -\frac{5}{2} = -2{,}5;$$

$$a_{24} = 1 : \frac{2}{15} = \frac{15}{2} = 7{,}5;\quad a_{25} = 0.$$

Преобразуем первую строку таблицы с элементом $a_{1,j^*} = a_{1,1} = \frac{2}{3}$.

$$a_{10} = 6 - \frac{9}{2}\times\frac{2}{3} = 3;\qquad a_{11} = \frac{2}{3} - 1\times\frac{2}{3} = 0;$$

$$a_{12} = -1;\qquad a_{13} = \frac{10}{3} + \frac{25}{10}\times\frac{2}{3} = 5;$$

$$a_{14} = 0 - \frac{75}{10}\times\frac{2}{3} = -5;\qquad a_{15} = 0.$$

Для третьей строки множитель будет $a_{3,j^*} = a_{3,1} = \frac{1}{10}$.

$a_{30} = 0{,}6 - 4{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}15$; $a_{31} = 0{,}1 - 1 \times 0{,}1 = 0$;
$a_{32} = 0 - 0 \times 0{,}1 = 0$; $a_{33} = -1 + 2{,}5 \times 0{,}1 = -0{,}75$;
$a_{34} = 0 - 7{,}5 \times 0{,}1 = -0{,}75$; $a_{35} = -1$.

Строим новую таблицу и рассчитываем значения симплекс-разностей.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	5	–5	0
A_1	5	4,5	1	0	–2,5	7,5	0
A_5	0	0,15	0	0	–0,75	–0,75	1
	δ_j	40,5	0	0	17,5	7,5	0

$\delta_0 = 6\times 3 + 5\times 4{,}5 + 0\times 0{,}15 = 40{,}5$; $\delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = 0$;

$\delta_3 = 6\times 5 - 5\times 2{,}5 = 17{,}5$; $\delta_4 = -6\times 5 + 5\times 7{,}5 = 7{,}5$.