2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Математическое программирование – дисциплина, которая занимается изучением экстремальных задач и поисками методов их решения.

Указанная область исследования операций весьма схематично и приближённо представлена на рисунке 2.1, позаимствованном из [57]. Наименование блоков, представленных нумерацией, суть следующее.

1. Классические методы математического анализа.
2. Динамическое программирование.
3. Принцип Максимума Понтрягина.
4. Дискретный принцип максимума.
5. Ограничения отсутствуют либо в форме равенства.
6. Много ограничений
7. непрерывный процесс (8 – 11 задачи математического программирования)
8. Критерий $K = F(x_1, x_2, \dots x_n)$ (минимизируется или максимизируется)
9. Ограничения
10. Число этапов
11. Тип процесса
12. Линейная функция
13. Нелинейная функция
14. В форме неравенств
15. Один
16. Много
17. Случайный
18. Выпуклая
19. Вогнутая
20. Требования целочисленности
21. Линейное программирование
22. Нелинейное программирование
23. Целочисленное программирование
24. Стохастическое программирование
25. Блочное программирование
26. Параметрическое программирование

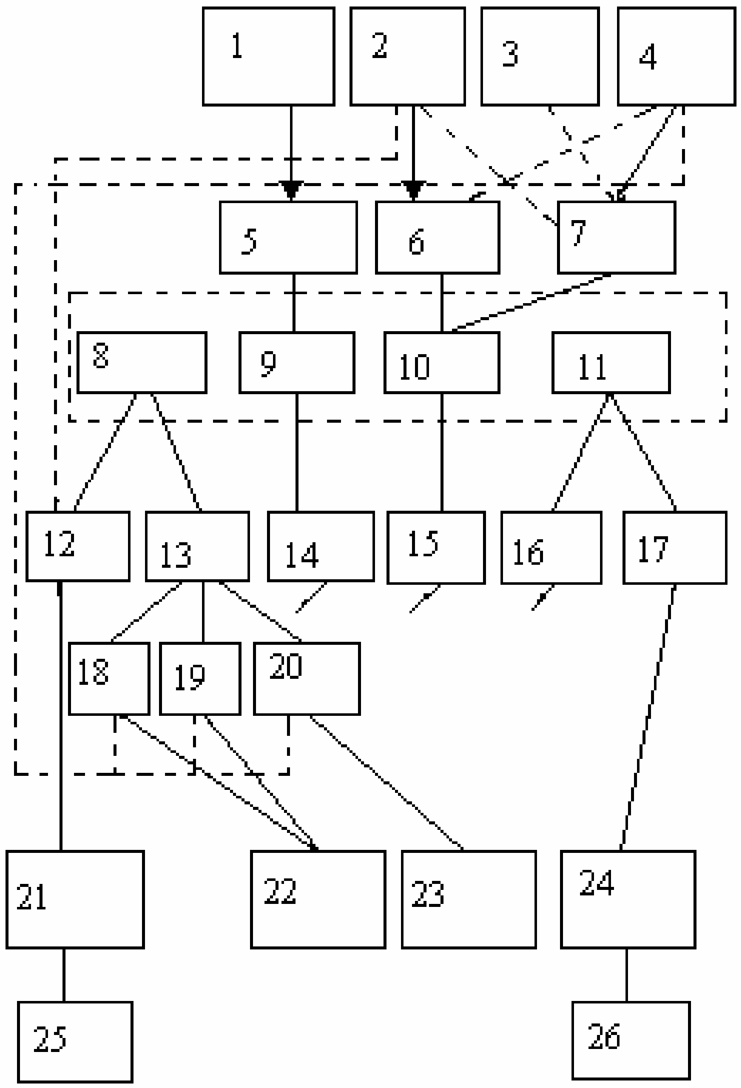

Рисунок 2.1 - Классификация задач математического программирования

2.1 Задачи математического программирования

Задачи математического программирования формируется следующим образом: [3, 15, 20, 23]

Пусть $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ – функция нескольких переменных, а функции $g_i(x_1, x_2, \dots x_n) * b_i$, $i = 1, 2, \dots n$, – ограничения, связанные с переменными, где b_i – некоторое действительное число, а символ * – одно из ограничений вида ≥, ≤ или =.

Требуется найти минимум или максимум функции f при заданных ограничениях g_i . Функция f называется ***функцией цели*** или ***целевой функцией.***

В зависимости от вида функций f и g_i задача математического программирования бывает следующих видов.

1. Задача линейного программирования (ЗЛП), если f и g_i линейны.

2. Задача нелинейного программирования (ЗНП или НП-задача, НПЗ), если хотя бы одна из функций нелинейная.

Задачи делятся на классы.

1. Задача целочисленного программирования (ЦП), когда вектор переменных $X^T = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ целочисленный.

2. Задача параметрического программирования, если функции f и g_i зависят от параметров.

3. Если f – дробно-линейная функция, а ограничения g_i – линейны, то имеем задачу дробно-линейного программирования.

4. Стохастическое программирование, если среди компонентов функций f или g_i присутствуют случайные величины.

5. Динамическое программирование – многоэтапный процесс нахождения решения, при этом функции f и g_i зависит от времени или состояния (номера шага или этапа).

2.2. Линейное программирование [3, 4, 7, 21, 24]

Линейное программирование – решение экстремальных задач математического программирования с линейной зависимостью между переменными

Важнейшие (основные) методы решения задач линейного программирования суть следующие.

1. Графический метод.

2. Прямой симплекс-метод (метод симплекс-таблиц).

3. Метод искусственного базиса.

4. Модифицированный симплекс-метод.

5. Двойственный симплекс-метод.

Далее нами будут подробно изложены указанные методы, их алгоритмические особенности, условия применения.

2.2.1. Построение математической модели

Пусть имеем следующее описание задачи (содержательную постановку), позаимствованную в [5].

Фирма выпускает продукцию из картофеля трех видов: картофельные кубики, картофельные дольки жареные, картофельные чипсы. По технологии картофель сортируют по размерам и качеству и направляют на различные поточные линии. Исходный продукт покупается у двух поставщиков. Производство продукции и относительная прибыль (итоговая) на единицу закупки от продажи изделий сведены в таблицу. Каждый продукт не должен превышать в изготовлении соответствующий объем, в противном случае фирма не будет успевать осуществлять его доставку и продажу.

	Поставщики		
Продукция	I	II	Объём производства
Кубики	0,2	0,3	1,8
Дольки	0,2	0,1	1,2
Чипсы	0,2	0,3	2,4
Прибыль	5	6	

Требуется определить, какие объемы картофеля следует закупать у того или иного поставщика.

Чтобы построить математическую модель в терминах исследования операций, необходимо выполнить следующие шаги.

1. Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.

2. Сформулировать цель решение и составить функцию.

3. Составить ограничения задачи.

Продемонстрируем данную последовательность действий на изложенном выше содержательном примере.

Пусть k_1 - объем картофеля, закупаемого у первого поставщика, а k_2 - у второго. Тогда целевая функция (функция цели, или, сокращённо, ЦФ) будет выглядеть так:

$$f = 5k_1+6k_2 \to \max.$$

Поскольку речь идёт о прибыли, и, чем больше прибыл, тем лучше, то функция цели максимизируется.

Ограничения определяются строками таблицы, вид знака в ограничениях определяется словосочетанием “не должен превышать”:

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Последние два ограничения называются ограничениями неотрицательности, они могут присутствовать в записи математической модели, а могут и опускаться, но всегда учитываются.

Важнейшими свойствами линейных моделей являются:

1) пропорциональность;

2) аддитивность.

То есть одна из эквивалентных моделей для данной задачи может иметь вид

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

По сравнению с исходной, каждое из ограничений задачи пропорционально увеличено в десять раз. Свойство аддитивности означает возможность добавлять новые ограничения, паче такие возникнут. В данном примере эта возможность не понадобилась.

2.2.2. Решение ЗЛП графическим методом[4, 7, 29, 30]

Областью применения данного метода будут задачи с числом переменных равным двум.

Для демонстрации метода обратимся к задаче, сформулированной выше.

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Каждому из неравенств соответствует некая полуплоскость в координатах (k_1, k_2), ограниченная прямой, построенной для случая, когда в ограничениях знак неравенства заменён знаком равенства.

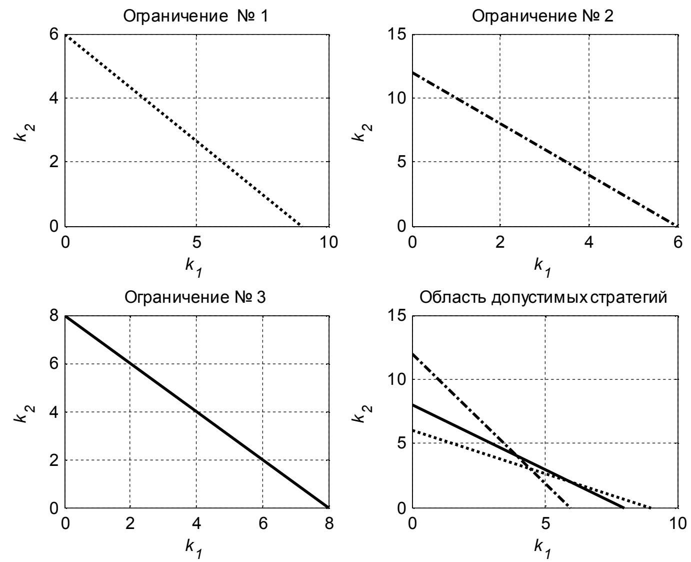

Рисунок 2.2 – Построение области ограничений

Для того, чтобы определить, по какую сторону от ограничивающей прямой находится область, необходимо подставить координаты точки начала (0, 0) в исходное ограничение и проследить, выполняется ли оно. Если неравенство выполняется, то точка (0, 0) принадлежит области. Следовательно, область распространяется, начиная от прямой, в направлении начала координат. Если неравенство не выполняется, начало координат (0, 0) не принадлежит области

Пересечение областей, соответствующих отдельным ограничениям, определяет область допустимых решений, называемой также областью допустимых стратегий. Ход построения областей иллюстрируется на рисунке 2.2.

Из приведённых рисунков видно, что неравенство № 3 не оказывает влияния на область допустимых стратегий закупок.

Рассмотрим целевую функцию $f(k_1, k_2)=5k_1+6k_2$. Выясним, существует ли экстремумы для данной функции?

Имеем $\dfrac{\partial f(k_1,k_2)}{\partial k_1}=c_1=5$ и $\dfrac{\partial f(k_1,k_2)}{\partial k_2}=c_2=6$.Это характеризует монотонно изменяющуюся функцию со скоростями изменения в указанных направлениях, определяемых этими частными производными.

Вектор, направленный от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2) представляет собой нормаль к плоскости, определяемой целевой функцией f.

Нормаль ***перпендикулярна линии пересечения*** плоскости целевой функции с координатной плоскостью, а также ***проекциям линий равного уровня*** целевой функции на координатную плоскость.

Кроме того вектор нормали ***указывает направление возрастания*** целевой функции, а антинормаль, вектор, противоположный нормали, направление, в котором функция цели убывает.

Поэтому мы должны двигать перпендикуляр (который изображает местоположение равных значений функции) вдоль нормали, пока он не пересечёт границу области допустимых стратегий.

Направление движение определяется видом оптимизации:

- при решении задачи минимизации – от точки с координатами (c_1, c_2) к началу координат;
- при решении задачи максимизации – от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2).

Обобщим наши рассуждения в виде алгоритма, приводимого в [4, 29, 30].

Алгоритм графического метода

1. Построить допустимое множество решений.
2. Построить нормаль к целевой функции и изобразить её проекцию на плоскости решений. Направление нормали указывают направление возрастания целевой функции.
3. Перемещать перпендикуляр к нормали до тех пор, пока он не достигнет крайней точки множества допустимых стратегий.

4. Определить значения координат крайней точки допустимого множества либо непосредственно по графику, либо по уравнениям ограничивающих прямых, пересекающихся в крайней точке.
5. Вычислить значение целевой функции, соответствующее оптимуму.

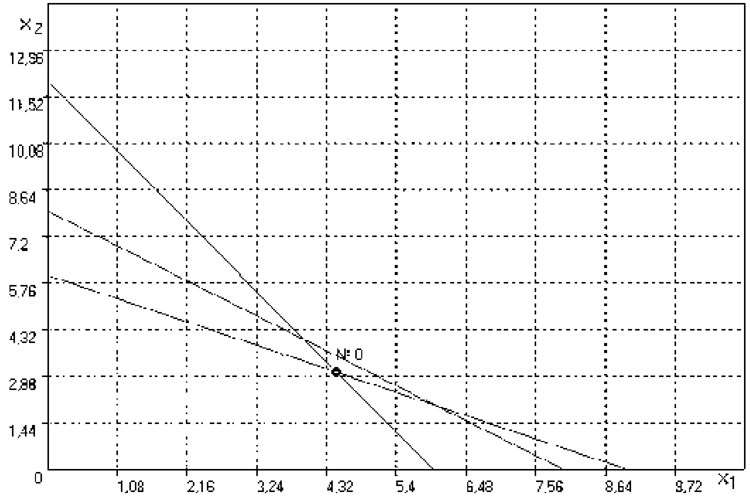

Рисунок 2.3 – Оптимум, найденный графическим методом

В ходе решения на различных наборах исходных данных иногда возникают ***частные случаи*** [30].

1. Линия, ограничивающая область в направлении оптимизации, перпендикулярна нормали.
2. Область незамкнута в направлении оптимизации.
3. Несовместная система условий.
4. Невыпуклость области.

Алгоритм вполне распространим и на многомерный случай. В этом случае имеем:

- гиперплоскости;
- полупространства;
- выпуклое полиэдральное множество;
- выпуклый полиэдральный конус.

Проблемы заключаются в визуализации всего этого великолепия. Поэтому, как замечено выше, областью применения данного метода будут задачи с числом переменных равным двум.

Из решения, приведённого на рисунке 2.3, следует, что решение находится в крайней точке, определяемой пересечением прямых линий, соответствующих неравенствам 1 и 2. Поэтому для точного отыскания точки оптимума, достаточно решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 = 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 = 1{,}2. \end{cases}$$

Вычислим главный и вспомогательные определители этой системы:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} = -0{,}04\,,\ \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}3 \\ 1{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} = -0{,}18\,,\ \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1{,}8 \\ 0{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} = -0{,}12\,,$$

откуда k_1 = 4,5, k_2 = 3, а значение функции цели после подстановки составляет f_{opt} = 40,5.

2.2.3. Расширенная (каноническая) форма записи ЗЛП [7, 8, 15, 16]

В общем виде ЗЛП, как мы знаем из предыдущего материала, формулируется следующим образом.

Найти максимум (минимум) целевой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

при заданных условиях (ограничениях)

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1} \end{aligned}\right\} \text{ и} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0\,. \tag{2.3}$$

Ограничения (2.3) называются ограничениями ***неотрицательности***, а запись (2.1) – (2.3) называется ***развёрнутой***. Когда в ограничениях (3.2) присутствуют наряду с неравенствами равенства, говорят о ***смешанной форме записи***, а когда только равенства, то такая форма называется ***канонической***.

Задачу записывают еще в матричной форме

$$\begin{aligned} &Z = C^T X \to \max, \\ &AX \le B = A_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

где обозначено:

- A – матрица ограничений размерностью $[m \times n]$;
- X – вектор переменных (неизвестных), которые называются основными, размерностью $[n \times 1]$;
- B – вектор свободных членов $[m \times 1]$;
- C – вектор коэффициентов линейной формы $[n \times 1]$.

Данная задача может быть записана и в векторной форме

$$\left.\begin{aligned} &A_1x_1 + A_2x_2 + ...A_nx_n \le B,\ \ где \\ &A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix}, ..., A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}, A_0 \equiv B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

Для решения задачи необходимо привести ограничения задачи от ограничений типа “неравенство” к ограничениям типа “равенство”. С этой целью необходимо ввести ***дополнительные*** переменные (в отличие от основных, входящих изначально в условие) $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$,…, $x_{n+m} \ge 0$, которые превращают неравенства (2.2) в равенства. Эта форма записи, по отношению к исходной математической модели называется ***расширенной***.

Целевая функция при этом примет вид

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m},$$

а система ограничений, путём введения дополнительных переменных в каждое ограничение, придёт в каноническую форму:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом:

$$AX + EX_{ДОП} = B.$$

Решения расширенной и исходной задачи, в области основных переменных, совпадают, как это видно из нижерасположенного рисунка 2.4, приведённого в [29].

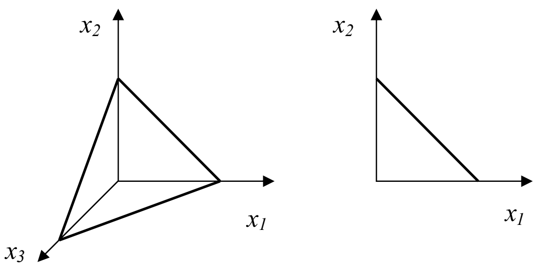

Рисунок 2.4 – Оптимальное решение в трёхмерном и двумерном пространствах

Поэтому, после получения оптимального решения дополнительные переменные можно отбросить. Содержательный смысл значения дополнительной переменной, входящей в оптимальное решение задачи, заключается в том, что это та величина, на которую отличаются левая и правая части соответствующего неравенства.

2.2.4. Определения и теоремы линейного программирования [29]

Допустимые решения – это совокупность чисел $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ удовлетворяющих ограничениям ***исходной задачи***.

Оптимальное решение – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции.

Опорный (базисный) план – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов A_j, соответствующих переменным x_j.

В качестве напоминания [16] вектора $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ линейно независимы, если существуют такие α, β, …, γ, что $\alpha y_1 + \beta y_2 + \dots + \gamma y_n = 0$ при $\alpha \neq \beta \neq \dots \neq \gamma \neq 0$.

Каждый вектор содержит m компонент, а ЗЛП не более чем m решений.

Невырожденный опорный план содержит ровно m положительных компонент.

Теорема 1[29]. Если целевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение в некоторой точке допустимого множества решений $\boldsymbol{R_1}$, то она принимает это значение в крайней точке $\boldsymbol{R_1}$. Если целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Теорема 2[29]. Если существует такое независимое множество m-мерных векторов $A_1, A_2, \dots, A_k, k \le m$, что $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0$, то n-мерный вектор

$$X^T = [x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\leftarrow n-k \rightarrow}]$$

есть крайняя точка допустимого множества $\boldsymbol{R_1}$.

Теорема 3[29]. Если X_0^T – крайняя точка допустимых решений множества $\boldsymbol{R_1}$, то решение X_0^T – ***допустимое базисное решение*** (ДБР) системы ограничений.

Следствия:

1. При отыскании оптимума достаточно рассмотреть только крайние точки допустимого множества решений.
2. Для отыскания оптимума достаточно перебрать допустимые базисные решения.

На указанные следствия базируются практически все методы решения ЗЛП.

В качестве напоминания [7, 16].

Линейной комбинацией множества векторов $A_1, A_2, \dots, A_m$ называется вектор A^*, определяемый выражениями

$$A^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot A_i;\ \beta_i \ge 0,\ i = \overline{1, m};\ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$$

В частности, для $m = 2$ линейная комбинация такова: $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 \Rightarrow \quad \Rightarrow \beta_1 A_1 + (1 - \beta_1) A_2$, а для случая $m = 3$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$. Ниже представлена графическая интерпретация этих двух случаев.