откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0,5$. Матрица Гёссе для рассматриваемого случая есть

$$\nabla^2 H(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

угловые миноры суть (– 1, – 1, – 9), что говорит о том, что исследуемая точка является точкой перегиба, что характерно для седла функций.

Цена игры составит 0,125 × (2 + 1 + 1 + 2) = 0,75. Таким образом, отсутствие полной памяти стоит, в нашем случае, половины выигрыша.

4.8. Многошаговые игры

Действия сторон иногда принимают форму чередующихся циклов. В общем случае, ***схема цикла*** такова:

- выполняется ход I-й играющей стороной из конечного множества альтернатив;
- не зная выбора противника, выполняется ход II-й играющей стороной;
- следует случайное событие, после чего каждый игрок получает информацию о действиях, предпринятых другой стороной и об их результатах;
- после оценки результатов принимается решение на возобновление игрового цикла (продолжить игру) или прекращение игры.

Пример из боевых действий, преследование подводной лодки (ПЛ) морским (малым) охотником (МО): уклонение ПЛ, заход МО на бомбометание и сброс бомб. После этого оба игрока узнают о действиях друг друга и о результатах.

Таким образом, на каждом шаге игры разыгрывается игра с нулевой суммой, которая называется “***игрой компонентой***” (синонимы: ***игровой элемент***, ***игровая позиция***).

Число таких ***шагов*** может быть различным: конечным или бесконечным, фиксированным или нефиксированным заранее, но ***длительность партии*** обычно ***определяется реализацией*** некоторого ***случайного события***.

Если в партии повторяется ***одна*** и та же игра-компонента, то игра называется ***однокомпонентной***, в ***противном*** случае – ***многокомпонентной***.

Известны классы многошаговых игр:

- детерминированные;
- рекурсивные;
- стохастические.

4.8.1. Детерминированные игры

В данном классе игровых моделей задаётся, заранее, число шагов, не превышающее некоторое фиксированное значение, N и, как правило, одна игра-компонента.

Игра-компонента детерминированной игры задаётся $m \times n$ платёжной матрицей, элементы которой представляют собой либо обычные выигрыши, либо являются играми, разыгрываемыми при использовании игроками соответствующей пары стратегий.

Пусть, например, на первом шаге игры игра-компонента выглядит

$$\Gamma_N \sim \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & \Gamma_{N-1} \end{bmatrix},$$

где Γ_{N-1} — такой исход игры-компоненты Γ_N, при которым игроки должны разыграть игру-компоненту

$$\Gamma_{N-1} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \Gamma_{N-2} \end{bmatrix}$$

и так далее.

Если в такой игре пара чистых стратегий приводит к элементу Γ_{N-k-1} на шаге $N - k$, $(k = 0, 1, \ldots, N{-}2)$, то игра закончится через N шагов, в противном случае, на $N - k$-ом шаге, получаем обычный выигрыш. Поэтому результат игры зависит от действий игроков на каждом шаге, а не определяются случаем.

Одним из интересных представителей этого класса игр выступает игра на разорение.

В ***общем случае***, постановка задачи такова. Играют двое игроков, в распоряжении которых имеется r и R-r ресурсов соответственно, и конечное число стратегий. В результате розыгрыша, на каждом шаге игры-компоненты, ресурсы одного из игроков увеличиваются на 1-цу, а другого – на 1-цу уменьшаются. При этом общий объём ресурсов тако же изменяется в сторону увеличения или уменьшение. Выигрывает тот, кто первым достигнет заданного уровня, либо разорит своего противника.

В [феллер], показано, что если вероятности успеха и неуспеха в отдельном розыгрыше игроков равны p и q соответственно, то вероятность разорения определяется выражением

$$q_r = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^R - \left(\dfrac{q}{p}\right)^r}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^R - 1}, & p \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{R-r}{R}, & p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Пример. Пусть игроки обладают следующими объёмами ресурсов:

- ресурс "красного" r,
- ресурс "синего" $R - r$.

Правила игры на разорение таковы:

- если игроки одновременно выбирают i-ю чистую стратегию, то на единицу уменьшаются ресурсы II-го игрока;
- если игроки выбирают разные чистые стратегии, то на единицу уменьшаются ресурсы I-го игрока;
- игра завершается, когда будут исчерпаны ресурсы одного из играющих;
- выигрыш красного игрока, по завершению партии, составит + 1, если он разорит противника, и – 1, если разорится сам.

Общий подход к решению многошаговых игр состоит в том, что они решаются "задом наперёд", от заключительного шага игры к начальному. В ходе рассмотрения этих шагов крайне желательно вывести (найти) рекуррентное выражение. Если рекуррентное выражение построить не удаётся, то оптимальные стратегии и цену игры приходится определять, перерешав все игровые ситуации. Последнее легко осуществимо лишь для игр с небольшой размерностью. Очевидно, что с ростом размерности игровых матриц и числа шагов, будут расти вычислительные расходы.

Обозначим как $\Gamma_{k,l}$, $1 \le k \le r$, $1 \le l \le R - r$ игру-компоненту, которой I-й игрок имеет k единиц ресурсов, а II-й игрок — l единиц ресурсов. Матрица такой игры есть

$$\Gamma_{k,l} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{k,l-1} & \Gamma_{k-1,l} \\ \Gamma_{k-1,l} & \Gamma_{k,l-1} \end{bmatrix},$$

причём $\Gamma_{k,0} \sim 1$, $\Gamma_{0,l} \sim -1$.

За шаг до окончания партии (в случае её максимальной продолжительности), будем иметь такую игру-компоненту

$$\Gamma_{11} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Её значение, то есть цена игры-компоненты, есть $val\,\Gamma_{11} = v_{11} = 0$.

За два шага до окончания игры получим одну из игр

$$\Gamma_{12} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & -1 \\ -1 & \Gamma_{11} \end{bmatrix} \text{ или } \Gamma_{2,1} \sim \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{11} \\ \Gamma_{11} & 1 \end{bmatrix},$$

где Γ_{11} — такая ситуация (исход) игр Γ_{12} и Γ_{21}, при которой разыгрывается игра-компонента Γ_{11}.

Для определения цены игры возможна замена вида

$$\Gamma_{12}(v_{11}) \sim \begin{bmatrix} v_{11} & -1 \\ -1 & v_{11} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{21}(v_{11}) \sim \begin{bmatrix} 1 & v_{11} \\ v_{11} & 1 \end{bmatrix}.$$

И, таким образом, игра-компонента заменяется матричной игрой, для которой находятся

$$v_{12} = val\,\Gamma_{12}(v_{11}) \text{ и } v_{21} = val\,\Gamma_{21}(v_{11}).$$

На третьем шаге от конца игры, когда у игроков, в общей сложности, 4 единицы ресурсов, будет разыгрываться одна из следующих компонент

$$\Gamma_{13} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{12} & -1 \\ -1 & \Gamma_{12} \end{bmatrix}, \Gamma_{22} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{21} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{21} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{31} \sim \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

В этих играх также производится приведение их к матричным играм

$$\Gamma_{13}(v_{12}) \sim \begin{bmatrix} v_{12} & -1 \\ -1 & v_{12} \end{bmatrix}, \Gamma_{22}(v_{12}, v_{21}) \sim \begin{bmatrix} v_{21} & v_{12} \\ v_{12} & v_{21} \end{bmatrix} \text{ и } \Gamma_{31}(v_{21}) \sim \begin{bmatrix} 1 & v_{21} \\ v_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

После чего находятся

$v_{13} = val\,\Gamma_{13}(v_{12})$, $v_{22} = val\,\Gamma_{22}(v_{12}, v_{21})$ и $v_{31} = val\,\Gamma_{31}(v_{21})$.

Далее, можно решать игры-компоненты с объёмом ресурсов 5, 6, …, *N*. При этом будет возникать игра-компонента вида

$$\Gamma_{r,R-r} \sim \begin{bmatrix} \Gamma_{r,R-r-1} & \Gamma_{r-1,R-r} \\ \Gamma_{r-1,R-r} & \Gamma_{r,R-r-1} \end{bmatrix},,$$

которая, в общем случае, заменяется матричной игрой

$$\Gamma_{r,R-r}(v_{r-1,R-r}, v_{r,R-r-1}) \sim \begin{bmatrix} v_{r,R-r-1} & v_{r-1,R-r} \\ v_{r-1,R-r} & v_{r,R-r-1} \end{bmatrix}, \text{где}$$

$v_{r-1,R-r} = val\,\Gamma_{r-1,R-r}(v_{r-1,R-r-1}, v_{r-2,R-r})$, $v_{r,R-r-1} = val\,\Gamma_{r,R-r-1}(v_{r,R-r-2}, v_{r,R-r-1})$, и так далее.

Ещё раз обратим внимание на необходимость вывода рекуррентного соотношения для расчёта, дабы не погрязнуть в рассмотрение многочисленных игр-компонент, число которых может быть весьма велико.

Пример, опять же навеянный детским триллером “Золотой Ключик”.

Буратино доложен отпереть дверь золотым ключиком. Манипуляции с холстом скважиной и ключом занимают время ΔT. Патрульный Дуремар, за время, равное *T*, обходит город в случайном порядке, так как не знает, где появится Буратино. Внезапно появившись во время манипуляций возле двери, он помешает открыть проход в кукольную страну и поймает Буратино.

Задача Буратино – открыть портал в кукольную страну, а Дуремара – изловить строптивца и возмутителя спокойствия кукольного мира.

Пусть отношение $\dfrac{T}{\Delta T} = N$ — целочисленно, и Буратино может отпереть дверь в моменты времени $t = \Delta T, 2\Delta T, ..., k\Delta T, ..., N\Delta T$. Стратегии игроков в игре-компоненте, разыгрываемой в текущий момент времени, суть следующие: для Буратино – отпирать (1) или не отпирать (2), а для Дуремара – появиться (1) или не появиться (2) в районе каморки папы Карло.

Если оба действуют, то Дуремар поймает Буратино

На первом от конца шаге (за шаг до окончания) игры имеем для красного игрока Буратино:

$$\Gamma_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем седловую точку в платёжной матрице с координатами (2, 1). То есть, Буратино доложен выжидать, а Дуремар – действовать. В этом случае, Буратино не решит своей задачи, но останется на свободе и может попытать счастье в следующей игре. Цена игры-компоненты составит $val\,\Gamma_1 = v_1 = 0$.

Для игры-компоненты за два шага до окончания имеем

$$\Gamma_2(v_1) \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

То есть, действующий, в отсутствие Дуремара, Буратино победит, победу обеспечит и его бездействие при наличии Дуремара: дождавшись, когда Дуремар уйдёт, Буратино беспрепятственно откроет дверцу. Цена игры составит $v_2 = val\,\Gamma_2(v_1) = \dfrac{1}{3}$, можно определить и оптимальные стратегии.

В общем случае, игра-компонента будет иметь вид

$$\Gamma_N \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Для платёжной матрицы вида

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

при $a < 1$, седловой точки в платёжной матрице не имеется, $v(a) < 1$ и составит величину $v(a) = \dfrac{1+a}{3-a}$, откуда непосредственно последует рекуррентное соотношение $v_N = \dfrac{v_{N-1}+1}{3-v_{N-1}}$.

В [45], для игр такого типа показано $v_N = \dfrac{N-1}{N+1}$.

То есть, для второго шага игры цена составит

$$v_{N-1} = \frac{N-2}{N}.$$

Применение последней формулы для начального шага игры даёт

$$\Gamma_N(v_{N-1}) \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{N-2}{N} \end{bmatrix},$$

откуда легко находятся оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$P_N^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right), \qquad Q_N^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right), \text{ при } N \geq 2.$$

Пусть $T = 1$ час, $\Delta T = 12$ мин, тогда $N = 5$.

В начале 1-го кванта времени, в момент ΔT:

$$N{=}5;\ P_5^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), Q_5^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), v_5 = \frac{2}{3}.$$

В последующий, 2-й квант, в момент $2\Delta T$:

$$N{=}4;\ P_4^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), Q_4^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), v_4 = \frac{3}{4}.$$

И так далее…

$$N{=}2;\ P_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), Q_2^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), v_4 = \frac{1}{3}.$$

В самом конце интервала: $N{=}1;\ P_1^* = (0,1), Q_5^* = (1,0), v_1 = 0.$

Мы видим, что в самом начале игры Буратино должен пережидать, надеясь, что Дуремар покинет район каморки, и можно будет без помех отпереть дверь.

4.8.2. Стохастические игры

Стохастическая игра является ***многокомпонентной многошаговой*** игрой. В отличие от детерминированных игр, на каждом шаге стохастической игры разыгрывается игра компонента, которая будет использоваться на следующем шаге и определяются выигрыши игроков.

Принципиально, стохастическая игра может возвращаться в предыдущую позицию, и, теоретически, партия будет тянуться до бесконечности. Но, так как заданные априори ***вероятности*** окончания игры ***не равны*** нулю (***положительны***), и ***число позиций*** игры ***конечно***, то вероятность бесконечной продолжительности партии равна нулю. Таким образом, стохастическая игра завершится после неопределенного (стохастического, случайного) числа шагов.

Формально, стохастическая игра есть набор из P позиций, каждая игровая позиция Γ_k задаётся матрицей $m_k \times n_k$, $k = 1, P$ элементы которой имеют вид

$$h_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu}\, \Gamma_\mu + q_{ij}^{ko}\, \Gamma_o, i = 1, \overline{m_k}, j = 1, \overline{n_k}, \tag{4.23}$$

где a_{ij}^k — выигрыш игрока I, если он выберет стратегию i, а II-й игрок – стратегию j; $q_{ij}^{k\mu} \geq 0$ — вероятность перехода из позиции k в игровую позицию μ при выборе игроками стратегий i и j соответственно; $q_{ij}^{ko} = 1 - \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} > 0$ — вероятность окончания партии в k-й игровой позиции. Иногда, запись компоненты $q_{ij}^{k_o}\, \Gamma_o$ в элементах платёжной матрицы опускают из очевидных соображений.

Пример описания двухкомпонентной стохастической игры приводится ниже. Партия между этими игроками закончится, когда испытание даст исход Γ_o.

Игра-компонента Γ_1.

	1	2
1	$6 + (0{,}3\ \Gamma_0 + 0{,}5\ \Gamma_1 + 0{,}2\ \Gamma_2)$	$0 + (0{,}1\ \Gamma_0 + 0{,}2\ \Gamma_1 + 0{,}7\ \Gamma_2)$
2	$-3 + (0{,}2\ \Gamma_0 + 0{,}3\ \Gamma_1 + 0{,}5\ \Gamma_2)$	$3 + (0{,}4\ \Gamma_0 + 0{,}4\ \Gamma_1 + 0{,}2\ \Gamma_2)$

Игра-компонента Γ_2.

	1	2
1	$2 + (0,1\ \Gamma_0 + 0,4\ \Gamma_1 + 0,5\ \Gamma_2)$	$0 + (0,5\ \Gamma_0 + 0,3\ \Gamma_1 + 0,2\ \Gamma_2)$
2	$0 + (0,8\ \Gamma_0 + 0,1\ \Gamma_1 + 0,1\ \Gamma_2)$	$3 + (0,3\ \Gamma_0 + 0,4\ \Gamma_1 + 0,3\ \Gamma_2)$

Таким образом, партия стохастической игры будет переходить от одной позиции к другой, согласно вероятностям перехода. При этом выбор стратегии оказывает влияние не только на выигрыш при текущем шаге, но и на выигрыши всех последующих шагов.

В стохастической игре стратегию игрока I ***определяют для каждого игрового элемента*** (игры-компоненты) k= 1, 2, … , P и ***для всех шагов*** t как набор m_k-мерных векторов $X^k(t)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^k(t) = 1.$$

Стратегии же игрока II определяются аналогичным набором векторов $Y^k(t)$ размерностью n_k.

Для простоты предполагается, что используется одна и та же схема рандомизации при разыгрывании одного и того же элемента. Это означает, что для каждой игры-компоненты Γ_k используется один и тот же набор вероятностей применения чистых стратегий, сколько бы раз этот элемент не разыгрывался.

Такая стратегия называется ***стационарной***.

Если стохастическая игра начинается с компоненты Γ_k, то пара стратегий игроков определяется как в обычной матричной игре математическим ожиданием выигрыша I-го игрока v_k. Так как стохастическая игра может начаться с любой игры-компоненты, то имеем вектор оценок выигрышей по играм $V = \{v_1, v_2, \dots , v_P\}$.

Таким образом, стохастическая игра ***должна решаться для каждого*** начального условия (т.е. для каждого ***игрового элемента, с которого начнётся игра***).

Метод решения основан на “усечении” игры. Предполагается, что игра продолжается ровно r шагов, а затем заканчивается.

Это допущение равносильно замене разыгрывания на r+1-м шаге игр-компонент $\{\Gamma_\mu^{r+1}\}$ их значениями $\{v_\mu^O\}$, что называется усечением игры на r-м шаге посредством выигрышей $\{v_\mu^O\}$. Когда r достаточно велико, то игра не отличается от первоначальной, а величины $\{v_\mu^O\}$ не должны оказывать сильное влияние на значение усечённой игры.

При этом последовательность $\{v_\mu^O\}$, $\{v_\mu^1\}$, …, $\{v_\mu^r\}$ сойдётся к пределу $V = \{v_1, v_2, \dots , v_P\}$.

В общем случае, применяется следующий алгоритм пересчёта стохастической игры в матричную игру

$$\begin{cases} v_0 = (0,0,...,0); & (4.24) \\ b_{ij}^{kr} = a_{ij}^k + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} v_\mu^r, r = 0,1,...,i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k}; & (4.25) \\ v_k^{r+1} = \mathrm{val}\, B_k^r = \mathrm{val}\left\| b_{ij}^{kr} \right\|, i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k}. & (4.26) \end{cases}$$

Оптимальными стационарными стратегиями игроков в стохастической игре являются стратегии серии матричных игр $\{B_k(v)\}$, в которых элементы матриц $m_k \times n_k$ игр-компонент определяются формулой

$$b_{ij}^k = a_{ij} + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} v_\mu, i = 1,\overline{m_k}, j = 1,\overline{n_k},$$

как это следует из (4.25). Г. Оуэн показал [45], что вероятность продолжения игры, более чем r шагов, не превосходит величины S^r, какие бы стратегии игроками не применялись, где

$$S = \max_{\{i,j,k\}} \left\{ \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu} \right\}. \qquad (4.27)$$

Руководствуясь этой оценкой можно определить компромиссное значение r, при котором усечённая игра сходится, в процессе решения, к оптимальным стратегиям и цене стохастической игры. Выражение (4.27) означает выбор максимальной возможной вероятности продолжения игры по всем играм-компонентам.

Пример [53]. Пусть стохастическая игра задана своими играми-компонентами вида

$$\Gamma_1 \sim \begin{bmatrix} 2 + 0,5\Gamma_3 & -1 \\ -1 & 2 + 0,5\Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 + 0,5\Gamma_1 \\ -1 + 0,5\Gamma_1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\Gamma_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 + 0,5\Gamma_2 \\ -1 + 0,5\Gamma_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

В ходе анализа игр компонент выяснено, что S = 0,5. Пусть r = 5, тогда

$$S^r = \frac{1}{32} = 0{,}03125,$$

то есть, порядка трёх процентов, так называемой статистической погрешности. Поэтому мы вполне можем воспользоваться усечённой до 5-и шагов игрой.

Согласно (4.24), $v = (0, 0, 0)$, а согласно (4.25) получаем игры

$$B_1^0 \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ B_2^0 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_3^0 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.26), определяем цены игр:

$$v_1^1 = \operatorname{val} B_1^0 = \frac{1}{5},\ v_2^1 = \operatorname{val} B_2^0 = 0 \text{ и } v_3^1 = \operatorname{val} B_3^0 = 0.$$

Следовательно, для данного шага усечения имеем $v^1 = (0{,}2;\ 0;\ 0)$.

Затем, используя компоненты вектора v^1, находим v^2 и так далее…

Имеем последовательность векторов

$$\begin{cases} v^1 = (0{,}2 \quad 0 \quad 0), \\ v^2 = (0{,}2 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^3 = (0{,}21 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^4 = (0.21 \quad 0{,}05 \quad 0), \\ v^5 = (0{,}21 \quad 0{,}05 \quad 0). \end{cases}$$

Полагая последний вектор v^5 за вектор значения неусечённой стохастической игры, имеем

$$B_1^5 \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1{,}25 \end{bmatrix},\ B_2^5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -0{,}88 \\ -0{,}88 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B_3^5 \sim \begin{bmatrix} 1 & -0{,}975 \\ -0{,}975 & 1 \end{bmatrix}.$$

По последним полученным игровым матрицам рассчитываем оптимальные стационарные стратегии игроков по каждой из игр-компонент:

$x_1 = (0{,}43;\ 0{,}57)$; $y_1 = (0{,}43;\ 0{,}57)$;
$x_2 = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $y_2 = (0{,}5;\ 0{,}5)$;
$x_3 = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $y_3 = (0{,}5;\ 0{,}5)$.

4.8.3. Рекурсивные игры

Рекурсивная игра отличается от стохастической тем, что вероятность её бесконечного продолжения отлична от нуля, следовательно, партия такой игры может продолжаться бесконечно долго.

В этом случае выигрыш обозначается как h_∞ и полагается равным нулю.

Формально, рекурсивная игра есть набор из P позиций, каждая игровая позиция Γ_k задаётся матрицей $m_k \times n_k$, элементы которой записываются так

$$h_{ij}^k = a_{ij}^{ko} \cdot q_{ij}^{ko} + \sum_{\mu=1}^{P} q_{ij}^{k\mu}\,\Gamma_\mu,\ i = \overline{1, m_k},\ j = \overline{1, n_k}, \qquad (4.28)$$

где $\sum_{\mu=0}^{P} q_{ij}^{k\mu} = 1, q_{ij}^{k\mu} \ge 0, \mu = \overline{0, P}$. В отличие от детерминированной игры, здесь допускаются ситуации, в которых $\exists (i, j, k) q_{ij}^{ko} = 0$, то есть игра завершиться не может и продолжается. Элемент h_{ij}^k означает, что при выборе пары чистых стратегий (i, j) в игровой позиции k вероятность окончания игры составит q_{ij}^{ko}, при этом игрок I получит выигрыш a_{ij}^{ko}, а вероятность того, что в следующей позиции будет разыграна игра-компонента Γ_μ, равна $q_{ij}^{ko} \ge 0$.

Пример рекурсивной однокомпонентной игры.

$\Gamma \sim$

	1	2
1	0,7 Γ + 3 · 0,3	2
2	3	Γ

Так как игра протекает теоретически бесконечно, то применение алгоритма, соответствующего формулам (4.24) – (4.26) не возможно, ибо не существует такого числа партий r, начиная с которого было бы проделано корректное усечение игры. В рекурсивных играх последовательность оценок v^r не обязательно сходится к истинному значению вектора цен игр-компонент v.

Проиллюстрируем последнее суждение примером. Дана однокомпонентная рекурсивная игра

$$\Gamma \sim \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$