4.10.2. Кооперативные игры

Данные игровые модели отражают ситуацию, когда участники игры, преследуя разные цели, которые частично совпадают, могут прийти к взаимному соглашению. В этом случае между игроками допускается кооперирование:

- заключаются совместные соглашения, совместно выбирается смешанная стратегия;
- возможна передача части выигрыша одного игрока другому.

При этом соблюдается следующее:

- игроки могут передавать друг другу необходимую информацию;
- все соглашения являются обязательными для обеих сторон и включаются в правила игры;
- переговоры между игроками не изменяют оценок игры.

Рассмотрим, первоначально, кооперативную игру двух персон.

Смешанную стратегию, на которую согласны оба игрока называют ***совместной смешанной стратегией***, обозначают как Z, а множество смешанных стратегий – $\mathbf{Z}$.

Математическое ожидание выигрышей игроков составит

$$v_I(Z) = \sum_{i,j} a_{ij} z_{ij} \, ,$$
$$v_{II}(Z) = \sum_{i,j} b_{ij} z_{ij} \, .$$

где z_{ij} — вероятность, с которой выбирается пара чистых стратегий согласно смешанной стратегии Z.

Точки $[u = v_I(Z);\ v = v_{II}(Z)]$ образуют множество S, которое называется допустимым. Под допустимостью понимается, что для любой точки $(u, v) \in S$, игроки I и II могут получить выигрыши соответственно u и v.

Пусть для пары точек (u, v) и (u', v') выполняется условия $u' > u$ и $v' > v$, тогда точка (u, v) называется совместно подчинённой точке (u', v').

Очевидно, что совместно подчинённые точки рассматривать нецелесообразно, предпочтение следует отдавать совместно неподчинённым точкам. Указанные точки образуют граничную линию (a, b, c, d), показанную на рисунке 4.14 для абстрактной выпуклой области.

Эта линия удовлетворяет принципу оптимальности Парето, и образуют множество Парето. В основе оптимума по Парето лежит идея взаимной выгодности, постулат которой заключается в том, что ни один из выигрышей u или v не может быть увеличен без уменьшения другого. Формально множество Парето описывается следующим образом:

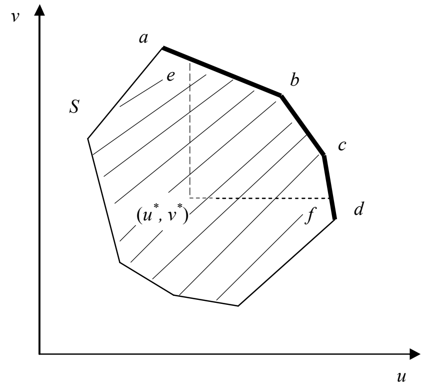

Рисунок 4.14 – Допустимое множество кооперативных стратегий

$$S^0 = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in S : \neg\exists (u, v) \geq (\tilde{u}, \tilde{v})\}.$$

В любой точке множества S^0 один из игроков получает тем больше, чем меньше получает другой.

Глядя на рисунок 4.14, легко предположить, что игрок I выберет точку d, а игрок II выберет точку a. При этом не обязательно, что эти чаяния могут осуществиться, ибо возникает резонный вопрос, а сколько позволит выиграть противнику в ущерб себе? Практически в ходе решения игры, эти пожелания нужно как-то совместить.

Житейски разумно предположить, что выигрыш в кооперативной игре должен быть не меньше, чем игрок мог бы получить индивидуально, не связываясь с кооперацией, то есть, руководствуясь своей максиминной стратегией на соответствующей матрице:

$$u^* = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} p_i q_j \, ,$$
$$v^* = \max_P \min_Q \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{i,j} p_i q_j \, .$$

Точка с координатами $(u^*,\ v^*)$ даёт каждому игроку гарантируемый выигрыш в индивидуальной (некооперативной) игре и образует (точнее, способствует образованию) так называемое ***переговорное множество*** (которое обозначается как $\overline{S}^0$) $ebcf$, которое представляет собой решение кооперативной биматричной игры [37].

Выбор точки переговорного множества зависит от индивидуальных различий и психологических свойств игроков, проявляющихся на переговорах. В плане формальных методов известен подход [33, 45], называемый “схемами арбитража” или “задачей о сделках”, базирующийся на ***теории полезности***.

Изложение теории полезности не входит в задачи дисциплины, однако, некоторые, необходимые для дальнейшего изложения сведения, мы всё же рассмотрим.

Пусть $A, B, C \ldots Z$ – события или явления, одни из которых, для принимающего решение, предпочтителнее, чем другие, либо безразличны.

Между событиями существуют отношение предпочтения $\succ$ и отношение равноценности ~, то есть

- $A \succ B$ – A предпочтительнее B;
- $B \succ A$ – B предпочтительнее A;
- $A \sim B$ – A и B равноценны, то есть ни $A \succ B$, ни $B \succ A$.

Отношения предпочтения обладают свойством транзитивности (переносимости).

Полезность – порядковая или количественная величина, выражающая отношение предпочтения и являющаяся вторичным понятием по сравнению с ним.

То есть, $A \succ B$ не потому, что а имеет б***о***льшую полезность, а наоборот, из-за того, что $A \succ B$, событию A приписывается б***о***льшая полезность.

Пусть, например, $A \succ B \succ C$, где B – достоверное событие, а A и C события, возникающие в лотерее (случайном испытании) с вероятностями p и $(1 - p)$. Очевидно, что наш выбор будет определяться распределением этих вероятностей.

При значении p, близком к 1, предпочтительнее лотерея, а при p около 0, следует выбрать достоверное событие B, и, таким образом происходит переход от выбора случайного испытания до выбора достоверного.

Аналогичная лотерея может быть распространена и на m событий. Главное при этом есть следующее:

- лотерея представляет собой испытание, которое проводится только 1 раз (единичное испытание);
- лотерея может сама по себе является событием;
- возможна лотерея, одним из исходов которой является другая лотерея, и, таким образом, возможна последовательность лотерей.

Лотереи организуются следующим образом:

1. важны лишь окончательные вероятности возможных исходов, а порядок, в котором разыгрывается последовательность лотерей, роли не играет;
2. лотереи, содержащие равноценные события являются равноценными;
3. когда одно из событий предпочтительнее другого, то лотерея, содержащее первое событие, предпочтительнее лотереи, содержащей второе событие;
4. если $A \succ C$, а $C \succ B$, то существует лотерея, включающая A и B с соответствующими вероятностями, которая является равноценной C.

С учётом допущений, изложенных выше, представляется возможным построить функцию полезности u, которая для любых двух событий $A \succ B$

$$u(A) > u(B),\ u[pA + (1 - p)B] = p \cdot u(A) + (1 - p) \cdot u(B)$$

В частности, когда $A_1 \succ\sim A_2 \succ\sim \ldots \succ\sim A_m$ можно построить функцию полезности со следующими параметрами:

$$u(A_1) = 1;$$
$$u(A_i) = u_i, \text{ для } 1 < i < m;$$
$$u(A_m) = 0;$$
$$u(p_1 \cdot A_1, \ldots, p_m \cdot A_m) = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 + \ldots + p_m \cdot A_m.$$

Важнейшее свойство функции полезности – линейность относительно лотереи. Это означает, что средняя полезность исходов, входящих в лотерею, равна полезности лотереи.

Пусть на выпуклом допустимом множестве S игроки выбирают точки $T_1(u_1, v_1)$, $T_2(u_1, v_1)$ и т.д, а точка $T^*(u^*, v^*)$ означает случай когда выбора не происходит, а её координаты (u^*, v^*) – её полезности для игрков.

Каждый отрезок, соединяющий точки, даёт пару полезностей, которые получат игроки при розыгрыше лотереи вида $p \cdot T_r + (1 - p) \cdot T_k$, где p – вероятность выбора T_r, а T_r и T_k – крайние точки отрезка.

Как видно из рисунка 4.14, игрок II будет стремиться выбирать точки выше точки $T^*(u^*, v^*)$, а игрок I – правее. Поскольку эти чаяния не совместимы, в качестве компромисса выступает арбитражная схема.

Математически арбитражная схема определяется как

$$\varphi(S, u^*, v^*) = (\tilde{u}, \tilde{v}), \tag{4.39}$$

функция, которая по заданной тройке (S, u^*, v^*) даёт единственную точку $(\tilde{u}, \tilde{v})$, которая называется арбитражным решением игры.

Дж. Нэшем доказано [45], что “справедливое” арбитражное решение игры состоит в том, что точка $(\tilde{u}, \tilde{v})$ есть решение задачи максимизации вида

$$g(u, v) = (u - u^*)(v - v^*), \tag{4.40}$$

при условиях $(u,v) \in S,\ u > u^*,\ v > v^*$.

Схема Нэша означает, что дополнительная полезность должна делиться между игроками в таком же отношении, в котором она может передаваться.

В частности, в случае линейной зависимости, один игрок может передавать другому игроку 1-цу полезности, сам при этом лишаясь только одной единицы полезности, то есть, когда точки арбитражного множества лежат вдоль прямой $u + v = k$, то решением будет точка $(\tilde{u},\tilde{v})$ рассчитываемая по выражениям

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2}\left(u^* - v^* + k\right), \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2}\left(v^* - u^* + k\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

где k – максимально возможная полезность, которую игроки могут получить совместно.

Пример [53]. Игроки, действуя совместно, добиваются передачи одной из сторон объекта номинальной стоимостью 100 хохлобаксов. Сторона, получившая объект, выпланчивает партнёру часть его стоимости. Пусть сторона I получает объект и выплачивает компенсацию, а сторона II – получает компенсацию.

Даже не прибегая к мудрёным построениям, понятно, что приемлемое решение представляется парой (0,5; 0,5), что математически подтверждается значениями функций

$$u = 1 - \frac{x}{100},\ \text{и}\ v = \frac{x}{100},\ 0 \le x \le 100,$$

в предположении, что если игрок I не выплачивает компенсации, то его полезность единица, а если отдаёт полную стоимость объекта – то нуль.

Пусть функции полезности у игроков различны, например

$$u = 1 - \frac{x}{100},\ \text{а}\ v = \frac{\sqrt{x}}{100},\ 0 \le x \le 100.$$

Выразим функцию u через v как $u = 1 - 100 \cdot v^2$ (Рисунок 4.15).

Выполним максимизацию функции по (4.40)

$$g(u, v) = u \cdot v = (1 - 100 \cdot v^2) \cdot v$$

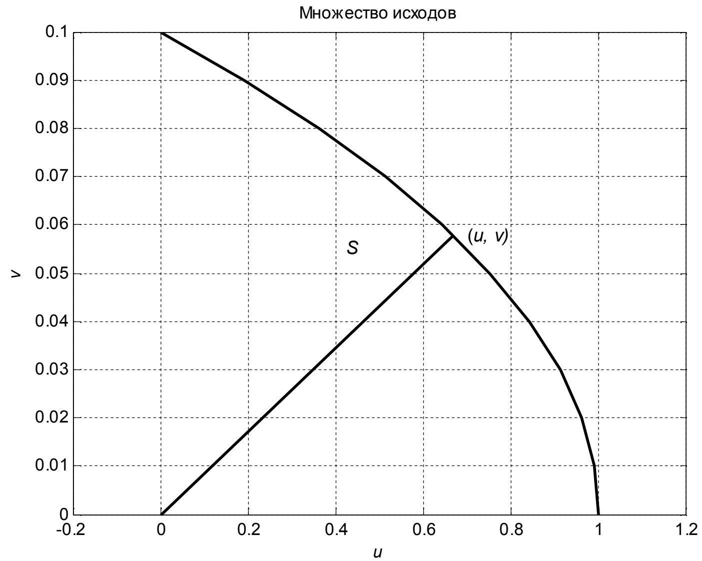

Рисунок 4.15 – Множество S для арбитражного решения

Выполним максимизацию функции по (4.40)

$$g(u, v) = u \cdot v = (1 - 100 \cdot v^2) \cdot v$$

на отрезке [0,0; 0,1]. Используя аппарат математического анализа, после дифференцирования и приравнивания к нулю производной, получим

$$\tilde{v} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{3}};\tilde{u} = \frac{2}{3},\ \text{откуда}\ x = \frac{100}{3}.$$

В данном случае, фактическая полезность у игрока II убывает быстрее, чем у I, поэтому он вынужден уступать.

4.10.2.1 Кооперативные игры n лиц

Если в конфликт вовлечено более двух персон, то, по сравнению с игрой двух участников, возникают следующие особенности:

- появляется возможность сотрудничества с несколькими участниками;

- число возможных коалиций возрастает.

При этом различаю бескоалиционную и коалиционную игры.

Бескоалиционные игры представляют собой род некооперативной игры, распространённой на n участников [34]. В правилах таких игр особо оговорен запрет на кооперацию.

Коалиционные игры призваны моделировать ситуацию, в которых участников с разными, но не противоречивыми интересами, более двух, и они способны кооперироваться или вступать в коалицию.

Обычно обозначают $N = 1, 2, \dots, n$ – множество игроков, вовлечённых в конфликт.

Определение. Любое непустое подмножество N, включая само N и все его одноэлементные подмножества, называется коалицией.

Для простоты считается, что интересы игроков внутри коалиции совпадают, а межкоалиционные – не пересекаются. Например, в игре могут образоваться две коалиции $\{1, 2, \dots, n\text{-}1\}$ и $\{n\}$, в этом случае n-1 игроков объединяют усилия в одной игре против одного из игроков.

Вместо термина "**выигрыш**" в кооперативной игре применяют термин "**платёж**", под которым понимается передача своего выигрыша или части его.

По правилам игры, для каждого игрока устанавливается платёж, обусловленный правилами игры, а иногда и побочный платёж, который он может заплатить или получить за сотрудничество с другими игроками.

Механизм платежей позволяет образовывать коалиции и определяет их устойчивость, позволяя избежать операций комбинаторики при решении игры.

Пример [53]. Пусть любые два игрока из трёх вступают в коалицию с целью взять с игрока, не вошедшего в коалицию, "дань" в размере 2-х единиц каждому коалиционеру. В данном случае возможны коалиции {1, 2}, {1, 3} и {2, 3}, в которых будут платежи игрокам, соответственно: (2, 2, – 4), (2, – 4, 2) и (– 4, 2, 2). Указанные платежи указывают, что все коалиции равноценны, поэтому любая из них может возникнуть.

Поэтому указанные платежи можно принять за результат игры и считать её решением.

Если правила игры скорректировать, как указано ниже

	Коалиция	Платежи
1	{1, 2}	(2,2; 1,8; – 4)
2	{1, 3}	(2, – 4, 2)
3	{2, 3}	(– 4, 2, 2)

то существование первой коалиции проблематично, игроки 2 и 3 могут получить большее, образовав коалицию {2, 3}, игроки 1 и 3, образовав

коалицию {1, 3}, так же получат по две единицы. Неустойчивость 1-й коалиции делает неясным результат игры, который можно бы было принять за решение.

Если игрок 1 будет согласен заплатить игроку 2, за сотрудничество с ним 0,2 единицы, то игра свелась к предыдущей.

Любую коалицию S можно рассматривать как игрока антагонистической игры, вторым игроком которой является коалиция $N \setminus S$.

Значение такой игры $v(S)$ называется характеристической функцией игры n лиц и определяется на всех подмножествах множества $N = 1, 2, \dots, n$.

По смыслу характеристическая функция есть полезность, которую коалиция S может извлечь из игры, не зависимо от действий прочих игроков. Характеристическая функция обладает следующими свойствами

$$\begin{cases} v(\varnothing) = 0, \\ v(S \cup T) \ge v(S) + v(T), \end{cases}$$

где S и T – непересекающиеся коалиции.

После розыгрыша игры каждый из игроков получит некоторый размер прямого платежа, обусловленного правилами игры, и "побочного", определяемого соглашениями, заключаемыми при заключении коалиции.

Пусть суммарный платёж игрока i составит x_i. Тогда вся совокупность игроков получит вектор платежей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементы этого вектора (платёж конкретному игроку) удовлетворяют нижеследующим условиям.

1. Окончательный платёж не может быть меньше, чем тот, который бы он мог получить, действуя одиночно, сыграв один против всех

$$x_i \ge v(\{i\}), \quad \forall i \in N. \tag{4.42}$$

2. Какие бы коалиции не образовывались, суммарный платёж не превышает характеристической функции всего множества игроков

$$\sum_{i \in N} x_i \ge v(N). \tag{4.43}$$

Если допустить, что (4.43) нарушается, то каждый игрок был бы в состоянии увеличить свой выигрыш на величину

$$\frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{i \in N} x_i\right).$$

Так как $v(N)$ – наибольший доход, который игроки могут получить, образовав коалицию $N \setminus N = \varnothing$ против коалиции N, поэтому (4.43) равносильно равенству.

Вектор x, удовлетворяющий условиям (4.42) и (4.43), называется ***дележом***.

Множество всех дележей игры v обозначается как $\mathrm{E}(v)$ и включает более одного вектора x. Таким образом, на множестве всех дележей необходимо найти такой делёж, который является “решением”.

Считается, что для решения кооперативной игры необходимо постоить множество дележей и характеристическую функцию.

В самом общем виде решение трактовать как набор дележей, любые из которых могут быть реализованы, если игроки выберут стратегии и составят соглашение наилучшим образом.

Для поиска решения вводится понятие C-ядра, обозначаемое как $C(v)$, определяемое множеством дележей, которые удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ \forall S \subset N, \\ &\sum_{i\in N} x_i = v(N). \end{aligned}\right\} \qquad (4.44)$$

Любой делёж из ядра считается устойчивым, потому, что ни одна из коалиций не может обеспечить большего выигрыша.

Если ядро отсутствует, то принимается концепция фон Неймана и Моргенштерна, называемая НМ-концепцией.

Для игры, изложенной выше, характеристическая функция запишется так

$$v(S) = \begin{cases} -4, & \text{когда множество } S \text{ состоит из одного игрока,} \\ 4, & \text{когда множество } S \text{ состоит из двух игроков,} \\ 0, & \text{когда множество } S \text{ состоит из трёх игроков.} \end{cases}$$

Исходом игры будет следующее множество $V = \{(2, 2, -4), (2, -4, 2), (-4, 2, 2)\}$. Оно характеризуется тем, что ни один из его дележей ни для какой коалиции не хуже другого, а любой делёж из $\mathrm{E}(v)$, не входящий в V, для какой-нибудь коалицци хуже, чем некоторый делёж V.

То есть, множество V обладает внутренней устойчивостью (ни один делёж из V не хуже другого) и внешней устойчивостью (любой делёж, не входящий в V хуже, чем некоторый делёж из V).

К, сожалению, НМ-решений много и отсутствуют формальные методы и процедуры, поэтому на практике применяется подход Шепли.

Подход, предложенный Шепли, базируется на аксиомах, носящих его имя, и векторе значений игры (вектор Шепли, значение по Шепли)

Указанный вектор, в отличие от НМ-решений, представляющихся уравновешенными платежами, даёт набор априорных оценок всей игры каждым из участником

$$\varphi[v] = \{\varphi_1[v], \varphi_2[v], \ldots, \varphi_n[v]\}$$

где i-ая компонента указывает величину, получаемую i-м игроком. Этот вектор удовлетворяет ряду аксиом.

Аксиома 1. Сумма выигрышей всех игроков равна выигрышу коалиции, состоящей из всех игроков:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i[v] = v(N).$$

Смысл аксиомы в том, что если игроки вносят в коалиции лишь ту величину, которую могли бы получить самостоятельно, то они её и получают.

Аксиома 2. Если для игрока i и любой коалиции S, в которую i не входит, выполняется равенство

$$v[S \cup i] = v(S) + v(i),$$

то

$$\varphi_i[v] = v(i).$$

Аксиома утверждает, что между игроками будет распределён выигрыш, который эти игроки могут получить вследствие объединения.

Аксиома 3. (Аксиома симметрии). Для любой перестановке игроков π и любого i выполняется равенство

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[\pi],$$

где $\pi(i)$ – игрок, соответствующий перестановке π, а $\pi v(S)$ – такая характеристическая функция, что

$$\pi v(S) = v(\pi^{-1} S),$$

где π^{-1} – обратная перестановка игроков.

То есть, если игроки симметричны относительно характеристической функции, то они получат поровну.

Аксиома 4. Если u и v — две любые игры, то $\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v]$.

Эта аксиома утверждает, что при сложении характеристических функций, выигрыши игроков складываются.

Шепли показал [45], что существует лишь один вектор, который удовлетворяет этим аксиомам, и который определяется выражением:

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)[v(T) - v(T\setminus\{i\})], \tag{4.45}$$

где $\gamma_i = \frac{1}{n!}(t-1)!(n-t)!$, t – число элементов в T, а само выражение (4.44) есть суммы выигрышей по всем коалициям от $T = \{i\}$ до $T = \{1, \ldots, N\}$.

Коэффициент γ_i есть вероятность случайного образования коалиции T при последовательном объединении игроков, при условии, что игрок i присоединяется на шаге t.

Величина под знаком суммы […] теряется коалицией при выходе из неё игрока i.

Вектор (4.45) называется векторм Шепли.

10.4.3. Содержательные примеры биматричных игр

Пример 1.

Противолодочная подводная лодка USA (игрок II) осуществляет поиск противолодочной лодки RU (игрок I), которая, в свою очередь, пытается обнаружить атомный ракетный подводный крейсер USA. В распоряжении сторон имеется пара стратегий поиска: работа ГАС в активном (№ 1) и пассивном (№ 2) режимах [53].

Цели игроков разные, но не прямо противоположные. Пусть a_{ij} – вероятность обнаружения подводной лодки USA, а b_{ij} – вероятность обнаружения нашей подводной лодки. Имеем классическую биматричную игру. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}20 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}20 \\ 0{,}17 & 0{,}30 \end{pmatrix}.$$

В игре существует точка Нэша $[P^* = (1, 0); Q^* = (0, 1)]$ с парой стратегий, которые является совместно допустимыми. Следовательно, игра разрешима в строгом смысле. При заданных значениях вероятностей целесообразно использовать активный режим ГАС.

Пример 2.

Некое КБ разработало устройство, которое можно внедрить на одном из двух объектов, при условии согласия всех трёх сторон [33]. Само КБ (игрок № 1) оценивает разработку в a единиц, в бухгалтерии первого предприятия (игрок № 2) считают возможным внедрить разработку за b единиц, а во втором (игрок № 3) за c единиц.

Очевидно, $a < b \le c$ что , так как в противном случае внедрение не состоится (оценки предприятий ниже, чем просит КБ). Фактическая стоимость внедрения x необходимо согласовать с бухгалтерией места внедрения. Понятно, что КБ будет максимизировать стоимость работ в одном из интервалов $[a, b]$ или $[a, c]$, а предприятия – в этих же интервалах минимизировать.

Каждая из сторон стремится к внедрению объекта, но даёт разные оценки стоимости внедрения, цели разные, но не прямо противоположные, поэтому данная игра будет игрой коопреративной.

Определим характеристическую функцию для коалиций $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{для коалиций } \{2\}, \{3\}, \{2,3\}; \\ a, & \text{для коалиций } \{1\}; \\ b, & \text{для коалиций } \{1,2\}; \\ c, & \text{для коалиций } \{1,3\}, \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Согласно (4.44), дележом будет являться любая тройка (x_1, x_2, x_3) при условии

$$\sum_{i\in N} x_i = c,\ x_1 \ge a,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

а множество

$$C(v) = \{(b \le x_1 \le c), 0, (c - x_1)\}$$

– ядром.

То есть, внедрение состоится на втором предприятии, а его с тоимость будет между b и c.

Полученное “решение” согласуется с экономическим смыслом, поскольку на предприятии № 1 готовы заплатить не больше, чем b, а предприятие № 2 может больше.

Поэтому коалиций $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ при разумных действиях образоваться не должна, поэтому целесообразна коалиция $\{2, 3\}$, которая не позволит предприятию № 1 “остаться с носом”, а предприятию № 2 – переплатить КБ.

Обозначим прибыль коалиции $\{2, 3\}$ как k и найдём максиминные бескоалиционные значения (u^*, v^*):