а ожидаемый выигрыш первого игрока составит

$$E(F,y) = 0{,}5y^2 + 0{,}5(1-y)^2 \geq 0{,}25.$$

Это показано на рисунке 4.13, б.

Таким образом, согласно оптимальным стратегиям, атакующий выбирает точку прицеливания посередине от возможного нахождения корабля от неподвижного до максимально уходящего. При этом обеспечивается вероятность уклонения не менее 0,25.

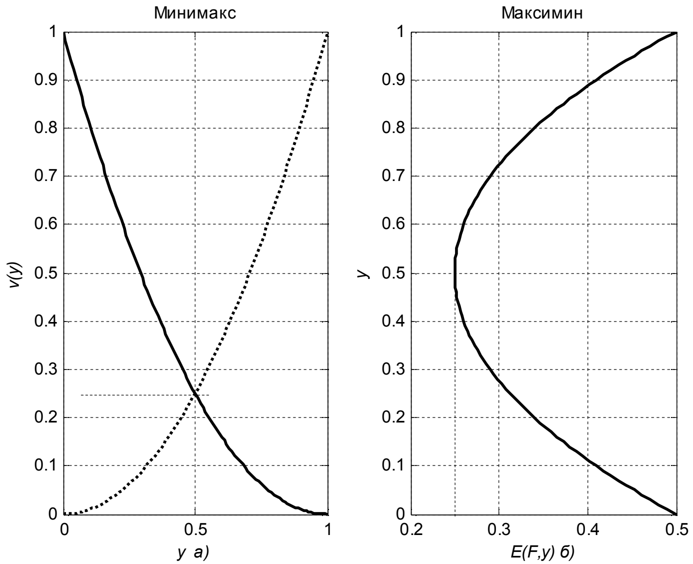

Рисунок 4.13 – Пояснения к исследованию функции ядра

Значения вероятности, равное 0,25, ни какая из противоборствующих сторон односторонними действиями изменить не может: для красного игрока это иллюстрируется рисунком 4.13, б. Если же синий игрок выбирает оптимальную стратегию $y^* = 0{,}5$, то, что бы ни делал красный, его выигрыш не превысит 0,25. Это следует из неравенства

$$(x - 0{,}5)^2 = x \cdot (x - 1) + 0{,}25 \leq 0{,}25.$$

4.9.2. Игры с выбором момента времени действия в условиях полной информации (шумные дуэли)

Существуют ситуации, столкновения интересов, в которых определяется стремление каждой из сторон, участвующих в конфликте, выбрать момент действия, обеспечивающий максимальную вероятность решения своей задачи, при условии упреждения противника.

Областью деятельности, описываемой подобными игровыми моделями, являются: военное дело, маркетинг, навигация, задачи управления в реальном масштабе времени быстропротекающими процессами и тому подобное.

По очевидному сходству с реальными поединками чести, данные игры называются дуэльными ситуациями или просто – дуэлями.

Характерной особенностью дуэлей является то, что противник стремится, по возможности, задержать свой выстрел (момент действия), так как с течением времени увеличивается вероятность поражения визави. Однако, задержка с применением своего оружия имеет разумные пределы, так как противник может выстрелить первым.

Дуэльная ситуация адекватно моделируется игрой на квадрате, если считать, то стратегии игроков являются числами x и $y \in [0,\ 1]$, интерпретируемыми как нормированные моменты времени применения оружия каждым игроком.

Функция выигрыша в такой игре есть

$$K(x,y) = \begin{cases} L(x,y), & x < y, \\ \Phi(x,y), & x = y,, \\ N(x,y), & x > y, \end{cases} \qquad (4.33)$$

где

- *L(x, y)* – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, если I-й игрок произвёл выстрел первым;
- *Φ(x)* – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, при условии одновременного применения оружия;
- *N(x, y)* – вероятность поражения I-м игроком II-го игрока, если II-й игрок произвёл выстрел первым.

Важно (!): При заданной функции выигрыша считается, что если II-й игрок предполагает применить оружие в момент времени *y*, то I-й игрок увеличивает свой выигрыш, ожидая сколь возможно, но ***действуя раньше*** II-го (читай красочное описание дуэли в романе в стихах А.С. Пушкина

“Евгений Онегин”). То есть, $L(x, y)$ монотонно возрастает по x для каждого y.

При $x = y$ ядро $K(x, y)$ претерпевает разрыв.

Далее, в случае промаха игрока II, шансы на успех I-го игрока возрастают, таким образом, $N(x, y)$ монотонно возрастает по x для каждого y.

Рассуждая аналогичным образом, относительно II-го игрока, придём к выводу что $L(x, y)$ и $N(x, y)$ монотонно убывают по для каждого , а при $x = y$ ядро имеет разрыв.

Выигрыши по обе стороны разрыва могут существенно отличаться. При игре с полной информацией противник знает о применении другим противником оружия (шум выстрела), откуда следует, что $L(x, y) = l(x)$, а $N(x, y) = n(y)$. Поэтому ядро (4.33) трансформируется и выглядит так

$$K(x,y)=\begin{cases} l(x), & x<y, \\ \varphi(x), & x=y, \\ n(y), & x>y. \end{cases} \qquad (4.34)$$

Если предположить, что в ядре вида (4.34), функции $l(x)$ и $n(y)$ имеют непрерывные производные второго порядка, $\varphi(x)$ произвольная ограниченная функция, а $l(1) > n(1)$ и $l(0) < n(0)$, существует теорема [28].

Теорема. Игра с ядром (4.34) имеет значение $v = l(a_0) = n(a_0)$, а оптимальные стратегии x^* и y^* описываются следующим образом. Если $\varphi(a_0) > v$, то $x^* = x_{a_0}$, а игрок II не имеет достижимой оптимальной стратегии; ε-оптимальная стратегия для игрока II имеет плотность в достаточно малом интервале справа от a_0. Если $\varphi(a_0) = v$, то $x^* = y^* = I_{a_0}$ – вырожденное распределение, сконцентрированное в точке a_0. Если $\varphi(a_0) = v$, то $y^* = y_{a_0}$, а игрок I не имеет достижимой оптимальной стратегии; ε-оптимальная стратегия для игрока I имеет плотность в достаточно малом интервале справа от a_0.

Стратегии x_0 и y_0 будут являться ε-оптимальными в случае выполнения условий

$$\begin{cases} K(x_0,y)\ge v-\varepsilon, & \forall y\in Y, \\ K(x,y_0)\le v+\varepsilon, & \forall x\in X, \end{cases}$$

v – значение игры.

ε-оптимальность означает, что игрок II применяя ε-оптимальную стратегию, может помешать игроку I получить выигрыш больше чем $v + \varepsilon$.

Аналогично игрок I, применяя ε-оптимальную стратегию, может гарантировать себе, по крайней мере $v - \varepsilon$ независимо от стратегии игрока II для любого $\varepsilon > 0$.

Пример. [53] Пусть $P_1(x)$ – вероятность поражения игрока II игроком I является непрерывной функцией, причём $P_1(0) =0$ и $P_1(1) = 1$. А $P_2(y)$ – вероятность поражения игрока I игроком II возрастает по y и $P_1(0) =0$ и $P_1(1) = 1$.

Пусть, если I поражает II, то его выигрыш составляет + 1, а если наоборот, то красный выигрывает – 1, если оба игрока промахнулись или уничтожены, то выигрыш I составил 0.

Если попадание гарантируется (самонаводящиеся торпеды, ракеты либо снаряды), то имеем матричную игру в нормальной форме:

		II	
		Пли	Дробь
I	Пли	0	1
	Дробь	– 1	0

Для этой игры мы уверенно можем отыскивать оптимальные смешанные стратегии (стрелять или не стрелять).

Определим ядро данной игры. Функция цены игры будет иметь вид

$$v = (-1) \times [1 - P_1(x)].$$

Поэтому, когда I-й игрок действует, а II-й – выжидает, то

$$l(x) = P_1(x) - [1 - P_1(x)] = 2\,P_1(x) - 1.$$

По аналогии, если как I-й так и II-й игрок ведут огонь, то

$$\varphi(x) = P_1(x)\,[1 - P_2(x)] - P_2(x)\,[1 - P_1(x)] = P_1(x) - P_2(x)].$$

И, наконец, если II-й игрок действует, а I-й выжидает, имеем

$$n(y) = - P_2(y) + [1 - P_2(y)] = 1 - 2\,P_2(y).$$

Таким образом, ядро игры есть

$$K(x,y)=\begin{cases} 2P_1(x)-1, & x<y, \\ P_1(x)-P_2(x), & x=y, \\ 1-2P_2(y), & x>y. \end{cases} \qquad (4.35)$$

Для данного ядра справедливо утверждение теоремы, поэтому могут быть найдены оптимальные чистые стратегии. Параметр a_0 может быть найдено при решении уравнения

$$2P_1(x)-1=1-2P_2(x)=v,$$

а сама цена

$$v=2P_1(a_0)-1=1-2P_2(a_0)\Rightarrow 2P_1(a_0)-1\cdot[P_1(a_0)+P_2(a_0)]=P_1(a_0)-P_2(a_0).$$

Оптимальная стратегия первого игрока определяется решением

$$P_1(x^*)+P_2(x^*)=1.$$

Оптимальная стратегия второго игрока определяется решением

$$P_1(y^*)+P_2(y^*)=1$$

Заметим, что равенство

$$P_1(y^*)-P_2(y^*)=P_1(x^*)-P_2(x^*)$$

есть отражение равновесия для пары (x^*, y^*) между желанием задержать выстрел и опасностью промедления.

Ядро (4.35) справедливо для одинаковой результативности выстрелов обоих противников (враг убит или остался в живых). Если же, при завершении игры, результат будет отличен от единичного, то, полагая вероятности поражения равными $P_1(x)$ и $P_2(y)$, а система выигрышей красного игрока такова, что:

α – если поражён синий игрок;

β – если поражён красный игрок;

γ – поражены оба игрока;

0 – если оба игрока не поражены, промахнулись.

Если определить стратегию x игрока I, а стратегию y игрока II как моменты упреждающего выстрела или выстрела после промаха противника, при котором вероятность поражения будет равна единице, можно отыскать математическое ожидание выигрыша игрока I.

$$K(x,y)=\begin{cases}(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta, & x<y,\\ \alpha P_1(x)+\beta P_2(x)+(\gamma-\alpha-\beta)\cdot P_1(x)\cdot P_2(x), & x=y,\\ \alpha-(\alpha-\beta)\cdot P_2(y), & x>y.\end{cases}$$

При $\alpha > \beta$ определятся значение a_0

$$(\alpha-\beta)\cdot P_1(x)+\beta=\alpha-(\alpha-\beta)\cdot P_2(x)=v.$$

Когда $\varphi(a_0)\geq v$, красный игрок будет иметь оптимальную стратегию

$$\alpha P_1(a_0)+\beta P_2(a_0)+(\gamma-\alpha-\beta)\cdot P_1(a_0)\cdot P_2(a_0)\geq \alpha P_1(a_0)+\beta P_2(a_0),$$

если $\gamma-\alpha-\beta\geq 0$, то игрок I, в соответствии с теоремой имеет стратегию $x^*=x_{a_0}$. А у игрока II, в этом случае, нет оптимальной стратегии, и он должен придерживаться стратегии, сколь угодно близко совпадающей с x^*.

Если же $\gamma-\alpha-\beta<0$, то у игрока II имеется чистая стратегия $y^*=y_{a_0}$, а красный игрок таковой не имеет.

Пример. Рассмотрим-таки, дуэль Е. Онегина и В. Ленского. По её условиям, противники начинают сходиться на $D_{\max}$ шагах от барьеров, которые расположены на расстоянии $D_{\min}$ от центра позиции, и за время сближения, включая начальную и конечную точки, могут произвести выстрел.

За игрока I примем Онегина, а за игрока II – Ленского, произведя нормировку дистанций вида

$$x=y=\frac{D_{\max}-d}{D_{\max}-D_{\min}},$$

где $D_{\min}\leq d\leq D_{\max}$ – дистанция выстрела, придём к игре на квадрате. Условимся, что “подстреленный” Ленский оценивается Онегиным в + 1, а собственные ранение или гибель – в – 1, взаимные повреждения или промахи – в 0.

Для данного случая будет справедливо ядро (4.35) со всеми вытекающими последствиями.

Пусть [45] вероятности в (4.35) описываются функциями вида

$$P_1(x) = 1 — x,\ P_2(y) = 1 — y^2,$$

являющимися монотонно убывающими, тогда

$$1 = P_1(x^*) + P_2(x^*) = \Rightarrow x + x^2 = 1,$$

откуда x^* = 0,62, аналогично и y^* = 0,62. Цена игры составит 0,24. Расчёт дистанции выстрела, из нормированного пространства в реальное, будет определяться выражением

$$d = D_{\max} - x^*\cdot(D_{\max} - D_{\min}) = D_{\max} - y^*\cdot(D_{\max} - D_{\min}).$$

Пусть барьеры положены в шести шагах друг от друга (жёсткая дуэль по условиям того времени) $D_{\min} = 6$ "…Зарецкий 32 шага отмерил с точностью отменной, развёл друзей на крайний след и каждый взял свой пистолет…", то есть $D_{\max} = 32$. Отсюда мы можем рассчитать дистанцию выстрела как 32 — 0,62×26 = 15,88, то есть примерно за восемь шагов друг от друга или за два шага до барьера.

4.9.3. Игры с выбором момента времени действия в условиях неполной информации (бесшумные и смешанные дуэли)

В ряде дуэльных ситуаций каждая сторона имеет лишь частичную информацию (а точнее, хотя бы одна из сторон не имеет информации) о действиях противоположной стороны. И необходимо выбирать момент времени в условиях неполной информации.

В этих дуэлях функции L и N зависят как от x так и от y, а оптимальные стратегии будут смесями чистых стратегий типа I_x.

Пусть игроки производят только по одному выстрелу, но не знают, выстрелил ли его противник или нет.

Рассчитаем ядро при условиях, что $P_1(x) = P_2(x) = x$, $P_1(y) = P_2(y) = y$, а так же если игрок I поражает игрока II, то его выигрыш составляет + 1, а если наоборот, то красный выигрывает – 1, если оба игрока промахнулись или уничтожены, то выигрыш I составил 0.

Считая величины x и y независимыми, получим

$$K(x,y)=\begin{cases} x-y+xy, & x<y,\\ 0, & x=y,\\ x-y+xy, & x>y,\end{cases}$$

которое является симметричным, так как $K(x, y) = - K(x, y)$, такая игра называется симметричной и стратегии, которые оптимальны для одного игрока, являются оптимальными и для другого. В [27] получено, что, в этом случае, оптимальные стратегии игроков имеют плотность вероятностей вида

$$f^*(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le \dfrac{1}{3};\\ \dfrac{1}{4x^2}, & \dfrac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Отсюда интегрированием можно найти

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le \dfrac{1}{3};\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{x} f^*(x)dx=\frac{1}{8}\left(9-\frac{1}{x^2}\right), & \dfrac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Пусть красный игрок знает о производстве выстрела синим игроком, а синий игрок такого рода информацией о действиях красного игрока не располагает. Вероятности поражения примем $P_1(x) = P_2(x) = x$, $P_1(y) = P_2(y) = y$. Тогда функция выигрыша примет следующий вид

$$K(x,y)=\begin{cases} x-y+xy, & x<y,\\ 0, & x=y,\\ x-2y, & x>y.\end{cases}$$

4.10. Игровые модели неантагонистических конфликтов (биматричные игры)

Антагонизм матричных игр двух персон заключался в том, что одна из сторон выигрывала то, что проигрывала другая.

Однако часто имеет место ситуация, когда игроки, чьи интересы сталкиваются, получают (или выплачивают) разные суммы при одних и тех же обстоятельствах. Поэтому суммарный выигрыш оказывается, в этом случае, не равен нулю, а игры называются играми с ***ненулевой суммой***.

Всякая конечная игра с ненулевой суммой формально описывается парой $(m \times n)$ матриц $A = [a_{i,j}]$ и $B = [b_{i,j}]$, или биматрицей $(A, B) = [a_{i,j}, b_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Благодаря особенности описания, такие игры ***называются биматричными***.

Пары (i, j) — ситуации в чистых стратегиях, числа $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ составляют выигрыши игроков I и II соответственно в указанных ситуациях.

По аналогии с играми с нулевой суммой, распределение вероятностей на множестве чистых стратегий будем определять как смешанные стратегии, и математические ожидания выигрышей игроков будут определяться выражениями

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}p_iq_j \text{ и } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}p_iq_j .$$

Игры с ненулевой суммой условно подразделяются на два класса:

1) бескоалиционные (некооперативные) биматричные игры, в которых напрочь исключаются совместные договорённости при выборе стратегии игроками;
2) кооперативные биматричные игры, в которых допускаются любые коалиции или кооперации.

4.10.1. Некооперативные биматричные игры

В основу построения оптимальных стратегий в биматричных играх положен следующий ***принцип***: отклонение от ситуации, сложившейся в результате оптимального поведения, либо невыгодно само по себе, либо, в результате отклонения появляется возможность перейти с выгодой к новой ситуации, достижимой при помощи оптимального поведения.

Ситуация ***является равновесной***, если ни один из игроков не имеет основания для изменения своей стратегии, если другой игрок будет придерживаться своей.

Математическое описание ситуации равновесия определяется через средние выигрыши обоих игроков:

$$\left.\begin{aligned} v_I(P^*,Q^*) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}p_i^*q_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}p_iq_j^*, \\ v_{II}(P^*,Q^*) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}p_i^*q_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}p_i^*q_j, \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

где обозначено $v_I(P^*, Q^*)$ – математическое ожидание выигрыша I-го игрока, а $v_{II}(P^*, Q^*)$ – математическое ожидание выигрыша II-го игрока.

Ситуация равновесия в биматричных играх аналогична понятию оптимальная стратегия в матричных играх с нулевой суммой. Строго говоря, в последних ситуация равновесия образуется оптимальными стратегиями: если (P^*, Q^*) и $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ равновесные ситуации, то $(P^*, Q^\blacklozenge)$ и $(P^\blacklozenge, Q^*)$ тако же являются ситуациями равновесия,

$$v_I = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}p_i^*q_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}p_i^\Diamond q_j^\Diamond = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}p_i^\Diamond q_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}p_i^*q_j^\Diamond,$$

где P^*, $P^\blacklozenge$, Q^*, $Q^\blacklozenge$ – оптимальные смешанные стратегии игроков. То есть, в матричных играх, один из векторов, P^* либо Q^* определяет равновесную ситуацию независимо от другого.

Определение [45]. Ситуации равновесия (P, Q) и $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ называются:

а) эквивалентными, если $v_I(P, Q) = v_I(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ и $v_{II}(P, Q) = v_{II}(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$;
б) взаимозаменяемыми, если $(P, Q^\blacklozenge)$ и $(P^\blacklozenge, Q)$ также являются ситуациями равновесия.

В играх с нулевой суммой ситуации равновесны, эквивалентны и взаимозаменяемы.

Определение [45]. Пара (P, Q) называется совместно недопустимой (совместно подчинённой) если существует пара $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$, такая что

$$v_I(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge) > v_I(P, Q) \text{ и } v_{II}(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge) > v_{II}(P, Q). \tag{4.37}$$

В этом случае говорят, что пара $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ совместно доминирует над парой (P, Q). Пара $(P^\blacklozenge, Q^\blacklozenge)$ является совместно допустимой тогда и только тогда, когда она не является совместно подчинённой другой паре.

В [45] показано, что каждая биматричная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия. Стратегии игроков, её образующие, называются равновесными, а пара чистых равновесных стратегий – ***седловой точкой Нэша***.

Как просматривается из сказанного выше, седловая точка Нэша является аналогом седловой точки матричной игры, при условии, что ни одному игроку не выгодно менять свою чистую стратегию в ситуации, когда противник придерживается своей чистой стратегии.

Пример 1. Пусть имеем биматричную игру в форме

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае существует одна точка Нэша $P^* = (1, 0)$ и $Q^* = (1, 0)$. Эта же пара является совместно допустимой.

Определение [45]. Биматричная игра имеет решение в строгом смысле, когда среди совместно допустимых пар стратегий существует пара равновесных стратегий, а все совместно допустимые равновесные пары взаимозаменяемы и эквивалентны.

Пример 2. Биматричная игра

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 17 & 30 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, согласно (4.36), существует сразу две точка Нэша:

$$[P^* = (1, 0); Q^* = (1, 0)] \text{ и } [P^\blacklozenge = (0, 1); Q^\blacklozenge = (0, 1)].$$

Однако пара (P, Q) совместно доминирует над парой ($P^{\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge}$), потому что $v_I(P, Q) = 30 > v_I(P^{\blacklozenge}, Q^{\blacklozenge}) = 20$, поэтому данная игра имеет решение в строгом смысле.

Решение в строгом смысле может существовать не всегда. Полагается, что если игра не имеет ни одной совместно допустимой пары, и если две любые равновесные пары взаимно заменяются, то игра называется ***разрешимой в смысле Нэша***.

Пример 3. Задана биматричная игра

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ней всякая пара чистых или смешанных стратегий определяет ситуацию равновесия, следовательно, игра разрешимо в смысле Нэша.

Пример 4. А вот в случае биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

имеется две ситуации равновесия [$P^* = (1, 0)$; $Q^* = (1, 0)$] и [$P^{\blacklozenge} = (0, 1)$; $Q^{\blacklozenge} = (0, 1)$], но они не взаимозаменяемы, поэтому игра не разрешима в смысле Нэша, но разрешима в строгом смысле.

Пример 5. Для биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

нет точек Нэша и решений в чистых стратегиях. Необходимо искать смешанные стратегии.

Теорема. Если в некооперативной биматричной игре (A, B) в стратегиях (P^*, Q^*) ситуации равновесия (P^*, Q^*) активны все чистые стратегии ($p_i^* > 0$ и $q_i^* > 0$) и если один из игроков придерживается равновесной смешанной стратегии, то математическое ожидание выигрыша другого игрока остаётся постоянным.

На основании этой теоремы выполняется построение систем уравнений для поиска оптимальных смешанных стратегий.

Для вычисления равновесных смешанных стратегий в ($m \times n$) биматричных играх, необходимо составить $n_a + 1$ уравнение для синего игрока, и $m_a + 1$ уравнение для игрока красного, где m_a и n_a – число активных стратегий для красного и синего игрока соответственно, вида

$$v_I(P^*, Q^*) = \sum_{j=1}^{n_a} a_{i,j} q_j; \qquad \sum_{j=1}^{n_a} q_j = 1; \qquad v_{II}(P^*, Q^*) = \sum_{i=1}^{m_a} b_{i,j} p_i; \qquad \sum_{i=1}^{m_a} q_i = 1;$$

и решить эти две системы, после чего проверить выполнение неравенств (4.36) ситуации равновесия для полученных решений P^*, Q^*, $v_I(P^*, Q^*)$ и $v_{II}(P^*, Q^*)$. Если неравенства выполняются, то смешанные стратегии P^* и Q^* являются равновесными.

Рассмотрим систему уравнений, для игры 2×2 (как тривиальный вариант)

$$\left.\begin{aligned} v_I &= a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* \\ v_I &= a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* \\ q_1^* &+ q_2^* = 1 \\ v_{II} &= b_{11} p_1^* + b_{21} p_2^* \\ v_{II} &= a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* \\ p_1^* &+ p_2^* = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = \dfrac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \\ q_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \end{cases}. \qquad (4.38)$$

Применяя эти формулы к расчёту биматричной игры последнего примера, получим

$$P^* = \left\{\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right\}, Q^* = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{11}{5}; \quad v_{II}(P^*, Q^*) = \frac{11}{5}.$$

Если биматричная игра не разрешима ни в строгом в смысле, ни в смысле Нэша, то вводится в оборот понятие “приведённая игра”, получающаяся при исключении доминируемых стратегий в исходной игре.

При этом говорят, что биматричная игра разрешима в слабом смысле, если соответствующая ей приведённая игра разрешима в строгом смысле.

Принцип доминирования, несколько более видоизменённый, выглядит следующим образом.

1. Если i-я строка матрицы A строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией других строк (в частности, если элементы некоторой строки матрицы A больше соответствующих элементов строки i), то, без изменения множества равновесных стратегий обоих игроков, i-я строка матриц из матриц A и В может быть вычеркнута.

2. Если j-й столбец матрицы B строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией других столбцов (в частности, если элементы некоторого столбца матрицы B больше соответствующих элементов столбца j), то, без изменения множества равновесных стратегий обоих игроков, j-й столбец из матриц A и В может быть вычеркнут.

Таким образом, стратегии исключаются из списка активных при выполнении условий:

$$\left.\begin{array}{l} p_k^* = 0 \text{ если } a_{i,j} > a_{k,j}, \text{ для } j = \overline{1,n} \text{ либо } a_{k,j} < \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_{k,j}, \text{ для } i = \overline{1,m}; \\ q_r^* = 0 \text{ если } b_{i,j} > b_{k,r}, \text{ для } i = \overline{1,m} \text{ либо } b_{i,r} < \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i,r}, \text{ для } j = \overline{1,n}; \end{array}\right\}$$

$$\text{где} \begin{cases} \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \lambda_{\mathrm{i}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ \lambda_i \ge 0, \lambda_j \ge 0. \end{cases}.$$

Пример 6. Пусть биматричная игра (*A, B*) задаётся следующими матрицами [53]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Видно, что игра седловых точек Нэша не имеет, посему применим принцип доминирования. В матрице *B* для первого столбца выполняется неравенство

$$b_{i,r} < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i,r}, \text{ так как } 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0; 4 < \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6; 4 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 8,$$

по каковой причине матрицы сокращаются

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В уменьшенной матрице A' вторая стратегия доминируется первой, ибо $a_{2j} < a_{1j}$, $j = 2, 3$, после исключения которой матрицы сократятся до размерностей 2×2.

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Формальный расчёт по (4.38) и учёт стратегий, не признанных активными, позволяет найти решение исходной биматричной игры

$$P^* = \left\{\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right\}, \qquad Q^* = \left\{0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right\}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{3}{2}; \qquad v_I(P^*, Q^*) = \frac{8}{3}.$$

Результат проверки неравенства (4.36), показывает, что нами найдены равновесные стратегии игроков I и II в биматричной игре (*A, B*). Полученная пара стратегий не является совместно допустимой. Об этом свидетельствует неравенство (4.37). Поэтому, данная игра (*A, B*) неразрешима в строгом смысле.

Тем не менее, найденная пара (P^*, Q^*) – единственная ситуация равновесия, которая и будет решением в смысле Нэша.

Поскольку под теоретическими игроками, как правило, понимаются люди, то им не чуждо всё человеческое. При этом возникает феномен "психологического" доминирования.

Пример 7. Пусть биматричная игра описывается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -30 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пары равновесных стратегий, [$P = (0, 1)$; $Q = (1, 0)$] и [$P^\blacklozenge = (1, 0)$; $Q^\blacklozenge = (0, 1)$] являются совместно допустимыми, но невзаимозаменяемыми и неэквивалентными. Смешанные стратегии образуют ещё одну ситуацию равновесия

$$P^{\Diamond\Diamond} = \left\{\frac{1}{10}; \frac{9}{10}\right\}, \qquad Q^{\Diamond\Diamond} = \left\{\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right\}; \; v_I(P^\Diamond, Q^\Diamond) = \frac{20}{3}; \qquad v_{II}(P^\Diamond, Q^\Diamond) = \frac{21}{5}.$$

Пары [*P, Q*] и [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] или [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] и [$P^{\blacklozenge\blacklozenge}$, $Q^{\blacklozenge\blacklozenge}$] невзаимозаменяемые. Поэтому данная игра (*A, B*) неразрешима ни в строгом смысле, ни в смысле Нэша. Поскольку стратегии игроков активны, то приведение игры неосуществимо, поэтому игра неразрешима и в слабом смысле.

Если же рассматривать пару равновесных стратегий [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$], то второй игрок психологически будет избегать применения стратегии № 1, поскольку при выборе 1-м игроком стратегии № 1 (он будет на ней "настаивать", поскольку выигрыш по этой строке максимален) его проигрыш составит 30 единиц. Поэтому получается, что пара [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] "психологически" доминирует над [*P, Q*].

Учет психологических особенностей просматривается и в игре [33].

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3000 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix},$$

в которой пара равновесных стратегий [$P = (1, 0)$; $Q = (0, 1)$] с вектором выигрышей (10, 6) совместно подчинена паре стратегий [$P^\blacklozenge = (0, 1)$; $Q^\blacklozenge = (1, 0)$] при векторе (12, 8). Здесь психологически предпочтительна пара [*P, Q*], хотя пара [$P^\blacklozenge$, $Q^\blacklozenge$] есть решение игры (*A, B*) в строгом смысле.