Однако, если использовать полученный результат для расчёта оптимальных стратегий при анализе конфликтной ситуации между Японией и США, то получим оптимальное решение, не соответствующее правильному:

$$p_1^* = \frac{3-1}{2+3-1-2} = \frac{2}{2} = 1; q_1^* = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}; v = \frac{2\cdot 3 - 1\cdot 2}{2} = 2.$$

Из этого решения, видно, что у красного игрока стратегия чистая, а у синего игрока – как бы смешанная. Хотя в соответствии с теоремой об активных стратегиях это не влияет на цену игры. Отсюда можно сделать вывод, что применять метод к решению игр с седловой точкой следует осторожно.

Перейдём далее к рассмотрению матричных игр, у которых одно из измерений равно двум. Графическая часть алгоритма применяется для определения активных стратегий игроков и сведения платёжной матрицы, таким образом, к размерности 2×2, после чего выполняются численные расчёты.

Рассмотрим игру $2\times n$. Платёжная матрица такой игры имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать игровую ситуацию с позиции красного игрока. Изобразим функции выигрыша 1-го игрока прямыми линиями, соединяющими точки $(h_{2j} \quad h_{1j})$ на отрезке единичной длины, для смешанных стратегий 1-го игрока: $H(P, j) = h_{1j} \times p_1 + h_{2j} \times (1 - p_1)$.

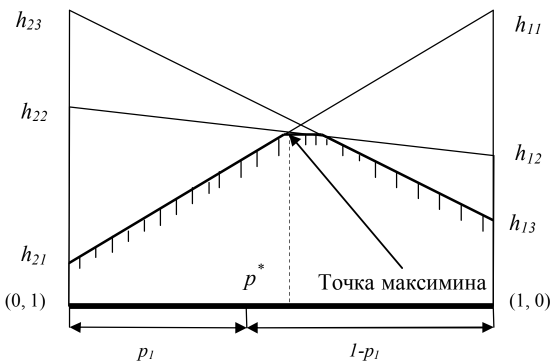

Рисунок 4.6 – Пояснение к решению игры $2 \times n$

На области, ограниченной отрезками прямых (h_{2j}, h_{1j}) и осью абсцисс, найдём пару стратегий, формирующих максимин. Линии, которые пересекаются в точке максимина, соответствуют активным стратегиям первого игрока. Для ситуации, отражённой на рисунке, стратегия № 3 синего игрока не является активной, поэтому может быть исключена из рассмотрения, а соответствующий столбец платёжной матрицы должен быть удалён.

В результате размерность платёжной матрицы сократилась до двух, и задача может быть решена применением формул (4.6), (4.8) и (4.9).

Если в точке максимина ***пересекаются более двух прямых***, то в качестве активных ***можно взять любую пару*** из них без потери точности решения.

Если возникает две точки максимина, то для определения пары активных стратегий ***можно взять любую точку***.

Рассмотрим игру $m\times 2$. Платёжная матрица такой игры имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать игровую ситуацию с позиции синего игрока. Изобразим функции выигрыша 2-го игрока отрезками прямых вида (h_{i2}, h_{i1}) на отрезке единичной длины, что соответствует смешанным стратегиям 2-го игрока:

$$H(i, Q) = h_{i1} \times q_1 + h_{i2} \times (1 - q_1)$$

и отыщем точку минимакса, руководствуясь теми же соображениями, что и для решения матричной игры $2\times n$. После определения пары активных стратегий игроков остаётся лишь выполнить расчеты по формулам (4.6), (4.8) и (4.9). Точка минимакса показана на чертеже, показанном на рисунке4. 7.

Очевидно, что как и ранее, если в точке минимакса ***пересекаются более двух прямых***, то в качестве активных ***можно взять любую пару*** из них без потери общности решения.

Если возникает две точки минимакса (одна из прямых, участвующих в его формировапнии, параллельна оси абсцисс), то для определения пары активных стратегий ***можно взять любую точку***.

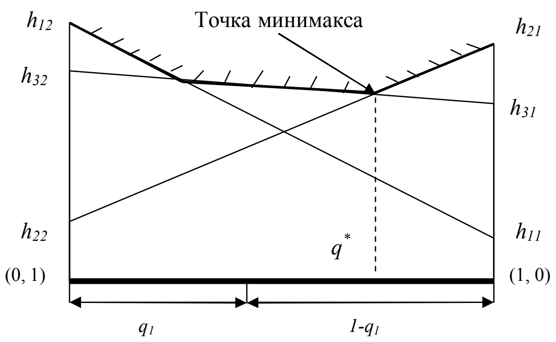

Рисунок 4.7 – Пояснение к решению игры $m \times 2$

Замечание. При значительном числе n или m поиск оптимальных стратегий становится визуально затруднительным, что должно компенсироваться выбором правильного размера и масштаба изображения.

4.6.2. Использование принципа доминирования для снижения размерности платёжной матрицы игровой задачи

Определение. Вектор α размерности n строго доминирует вектор β размерности n, если каждая координата вектора α строго больше соответствующей координаты вектора β.

Принимая во внимание алгоритм нахождения равновесных ситуаций максимина и минимакса, изложенный нами ранее, можно сформулировать принцип доминирования следующим образом.

1. Если i-я строка платёжной матрицы строго ***доминируется*** некоторой выпуклой комбинацией других строк (в частности, если элементы некоторой строки больше соответствующих элементов строки i), то i-я строка может быть вычеркнута из матрицы без изменения множества оптимальных стратегий первого игрока.

2. Если j-й столбец платёжной матрицы строго ***доминирует*** некоторую выпуклую комбинацию других столбцов (в частности, если элементы столбца j больше соответствующих элементов некоторого другого столбца), то j-й столбец может быть вычеркнут из матрицы без изменения множества оптимальных стратегий второго игрока.

То есть, из множества стратегий игрока исключается та, которая принесёт заведомо худший, по сравнению с другими, результат: если одна стратегия игрока лучше, нежели другая, то худшая должна быть исключена. Для красного игрока – это строка, по стратегии,

соответствующей которой, получается заведомо меньший выигрыш. А для синего игрока стратегия, соответствующая вычеркнутому столбцу, ведёт к большему проигрышу.

Поочерёдное применение принципов доминирования позволяет, в ряде случаев, существенно снизить размерность платёжной матрицы и уменьшить, тем самым, объём расчётов.

Пример. Пусть задана платёжная матрица вида.

24	2	10	30
3	8	7	9
4	4	7	15
2	3	3	1

Оценки цены игры суть $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 4$, а $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 8$. Элементы, сформировавшие максимин и минимакс выделены серым цветом. Следовательно, седловая точка в платёжной матрице отсутствует. Видно, что 4-я строка строго доминируется одновременно 2-й и 3-й строками. Поэтому соответствующая стратегия красного игрока активной не является, и может быть удалена. Получим

24	2	10	30
3	8	7	9
4	4	7	15

В этой матрице 4-й столбец строго доминирует любой другой, поэтому соответствующая стратегия синего игрока исключается из списка активных. Новая платёжная матрица:

24	2	10
3	8	7
4	4	7

Теперь 3-я строка строго доминируется выпуклой комбинацией 1-й и 2-й строк: $24^{(1)} > 4$, $8^{(2)} > 4$, $10^{(1)} > 7$, и исключается вместе со стратегией № 3 красного игрока. Получается

24	2	10
3	8	7

Теперь можно применять графоаналитический метод. Отметим, что в новой платёжной матрице понизилось значение максимина $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 3$.

Однако, в полученной матрице 3-й столбец доминирует выпуклую комбинацию двух других: $10^{(3)} > 2^{(2)}$, $7^{(3)} > 3^{(1)}$. Справедливость этой операции может быть проверена читателем графически.

24	2
3	8

Очевидно, что размерность не всякой платёжной матрицы может быть уменьшено до 2-х.

4.6.3. Построение эквивалентной ЗЛП по платёжной матрице

Пусть имеется игра, заданная в нормальной форме, а элементы платёжной матрицы либо положительны, либо приведены к таковому виду на основании использования выражения (4.3).

Из теоремы об активных стратегиях следует, что для любой чистой *j-й* стратегии 2-го игрока при использовании первым игроком своей оптимальной стратегии выполняется неравенство.

$$a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{mj} p_m^* \geq v. \qquad (4.10)$$

Знак "≥" возникает в неравенстве за счёт того, что *j*-я стратегия может не являться активной, а результат игры получится хуже. Неравенство (4.10) может послужить основой для построения системы ограничений

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \ldots + a_{m1} p_m^* \geq v, \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \ldots + a_{m2} p_m^* \geq v, \\ \ldots \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \ldots + a_{mn} p_m^* \geq v. \end{cases}$$

Прибегнув к нормировке, обозначим $x_i = \dfrac{p_i^*}{v}$, введём функцию цели вида

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{v} \Rightarrow \min \qquad (4.11)$$

и получим систему ограничений, пригодную для расчётов:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) представляют собой формулировку ЗЛП, построенной по платёжной матрице.

Для синего игрока, который является антагонистом красного, может быть сформулирована двойственная задача линейного программирования.

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \leq 1, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \leq 1, \\ \ldots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n \leq 1. \end{cases} \qquad (4.13)$$

В (4.13) обозначено $y_j = \dfrac{q_j^*}{v}$. Из теории решения двойственных задач известно, что вектор симплекс-разностей для дополнительных переменных соответствует вектору оптимальных значений переменных сопряжённой задачи. Пусть нами найдено оптимальное решение задачи (4.13). Тогда оптимальное решение матричной игры есть:

$P^* = \left\{ \dfrac{\delta_{n+1}^*}{f_{opt}}; \dfrac{\delta_{n+2}^*}{f_{opt}}; \ldots; \dfrac{\delta_{n+m}^*}{f_{opt}} \right\}$, $Q^* = \left\{ \dfrac{y_1^*}{f_{opt}}; \dfrac{y_2^*}{f_{opt}}; \ldots; \dfrac{y_n^*}{f_{opt}} \right\}$ где $f_{opt} = \dfrac{1}{v^*}$, v^* — цена игры.

Пример. Пусть платёжная матрица задачи имеет вид

5	1	1
2	3	1
3	2	4

Оценки игровой ситуации: $v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = 2$, $v_2 = \min_j \max_i h_{ij} = 3$. По данному условию может быть составлена ЗЛП вида

$$f_{\max} = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$\begin{cases} 5y_1 + 1y_2 + 1y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \le 1, \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 1. \end{cases}$$

В ходе её решения получилась оптимальная симплекс-таблица

		c_j	1	1	1	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	3/20	1	0	0	1/4	-1/20	-1/20
A_2	1	9/40	0	1	0	-1/8	17/40	-3/40
A_3	1	1/40	0	0	1	-1/8	-7/40	13/40
	δ_j	2/5	0	0	0	0	1/5	1/5

Из последней получаем цену игры $v = \frac{5}{2} = 2{,}5$ и оптимальные смешанные стратегии игроков: красного $P^* = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ и синего $Q^* = \left\{\frac{3}{8}; \frac{9}{16}; \frac{1}{16}\right\}$. У красного игрока, таким образом, две активных стратегии.

4.6.4. Итерационный метод решения матричной игры с нулевой суммой

При большом числе стратегий игроков решение эквивалентной ЗЛП представляется вычислительно трудоёмкой, требующей применения вычислительной техники.

Итерационный метод основывается на имитации серии игр, требует использования арифметики и наличия времени, необходимого для выполнения расчётов. Внешне ситуация напоминает игру крокодила Гены в шахматы с самим собой, сюжет визуализирован в 1-й части Советского мультблокбастера о похождениях Чебурашки со товарищи.

Применение метода состоит в попеременном выполнении за играющие стороны ходов. При этом синий игрок стремится уменьшить выигрыш красного в среднем (принцип минимакса), а красный – наоборот, увеличить его (принцип максимина).

1. Первый ход красного игрока может быть сделать случайно, либо по строке с максимальным средним значением выигрыша. Результаты хода, с разбивкой по стратегиям синего игрока, фиксируется в строке итога.

2. Ответный ход синих выбирается по элементу с наименьшим значением выигрыша, результат запоминается в столбце итога, разнесённый по стратегиям красного игрока.

3. Последующие ходы выполняются игроками поочерёдно, руководствуясь правилами максимина и минимакса. Результаты ходов суммируются накопительно, а выбираемые стратегии запоминаются.

4. По прошествии заданного числа ходов, игра прекращается, и подсчитываются относительные частоты использования тех или иных стратегий конфликтующими сторонами и цена игры.

Пусть сторонами проведено n игр. Тогда оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока есть

$$\tilde{p}_i = \frac{m_i^{red}}{n}, \tag{4.14}$$

где m_i^{red} — число использований красным игроком своей i-ой чистой стратегии. Для второго игрока аналогично

$$\tilde{q}_j = \frac{m_j^{blue}}{n}, \tag{4.15}$$

где m_j^{blue} — число использований синим игроком своей j-ой чистой стратегии.

Оценка цены игры находится как

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2}{2 \times n}. \tag{4.16}$$

В выражении (4.16) $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ оценки суммарного максимина и минимакса, получающиеся в ходе накопления результатов ходов.

Результаты игры представляют совокупностью таблиц, заголовки которых определяются чистыми стратегиями игроков, а строки соответствуют ходам игроков и содержат суммарные текущие значения выигрыша красного игрока.

Иногда такие таблицы представляют в виде комплекса, Г-образно, как это будет показано ниже. Рассмотрим пример из предыдущего раздела с платёжной матрицей вида:

5	1	1
2	3	1
3	2	4

Итерационное решение игры, в ходе которой было проведено 20 розыгрышей, показано ниже.

5	1	1	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*0*
2	3	1	1	3	6	9	12	**15**	**18**	**21**	22	**25**	**28**	29	32	**35**	**38**	39	42	**45**	**48**	49	*9*
3	2	4	**4**	**7**	**9**	**11**	**13**	15	17	19	**23**	25	27	**31**	**33**	35	37	**41**	**43**	45	47	**51**	*11*
2	3	**1**																					
5	5	6																					
8	**7**	7																					
11	**9**	11																					
14	**11**	15																					
17	**13**	19																					
19	**16**	20																					
21	**19**	21																					
23	22	**22**																					
26	**24**	26																					
28	**27**	27																					
30	30	**28**																					
33	**32**	32																					
36	**34**	36																					
38	**37**	37																					
40	40	**39**																					
43	**42**	43																					
46	**44**	47																					
48	**47**	48																					
50	50	**49**																					
1	*14*	*5*																					

В ходе игры, стратегии, используемые игроками в текущем розыгрыше, выделены жирным шрифтом и серым фоном.

Курсивом справа от боковика таблицы показано количество использования красным игроком каждой из своей стратегий, а внизу хвостовика таблицы такая же информация представлена по синему игроку. Суммарные оценки игры по максимину и минимаку суть $\tilde{v}_1 = 49$ и $\tilde{v}_2 = 51$.

Имеем, по (4.16), оценку цены игры $\tilde{v} = \dfrac{49+51}{2\times 20} = 2{,}5$.

Оценки оптимальных стратегий игроков, используя (4.14) и (4.15), составят:

для красного — $\tilde{P}^* = \left\{0; \dfrac{9}{20}; \dfrac{11}{20}\right\}$, а для синего — $\tilde{Q}^* = \left\{\dfrac{1}{20}; \dfrac{7}{10}; \dfrac{1}{4}\right\}$.

Сравнивая результаты расчётов – точного по ЗЛП и итерационного метода, можно отметить: цена игры совпала, значения вероятностей применения стратегий красного игрока практически совпали, для синего результаты несколько хуже.

Примечание. Для повышения точности результатов, надо сыграть изрядное число игр. Математическая статистика гласит, что устойчивость среднего наступает после серии не менее 50 экспериментов, а устойчивость по дисперсии – после 400.

Очевидно, что большИй размер платёжной матрицы потребует большЕго объёма розыгрышей.

4.7. Конечные позиционные игры двух персон

К понятию позиционных игр можно прийти следующим образом. Необходимо отображать динамику действий, связанную с дополнительным приобретением или потерей информации, изменением игровой ситуации, ставок, возможных расценок и д.п.

Подобные ситуации моделируются теоретико-игровыми моделями, которые называются ***антагонистические позиционные игры***. В ходе игры (процессе развития игры) стороны проходят ***последовательно*** конечное число позиций, в каждой из которых необходимо принимать некоторое частное решение.

Ход – выбор игроком одной из его альтернатив.

На каждом этапе ход выполняется только одним игроком. Сами ходы ***бывают личными*** и случайными.

Личный ход – сознательный выбор игроком одной из имеющихся в его распоряжении альтернатив.

Случайный ход – отражение закономерностей случайных событий или величин.

Предполагается, что случайный ход выполняет природа, фактически не заинтересованная в чьей либо победе. Для этого случая задаётся распределение вероятностей на множестве всех альтернатив природы. Указанное множество априори известно.

Позиция – игровая ситуация, в которой игроки оказываются в результате совершения своих ходов.

Множество всех позиций разбивается на подмножества:
смешанных стратегий.