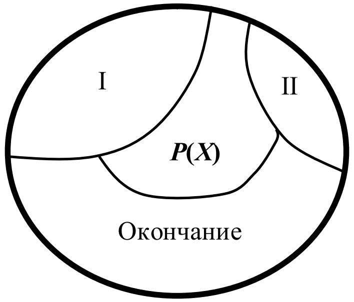


- а) позиции, принадлежащие 1-му игроку (Яну);
- б) позиции, принадлежащие 2-му игроку (ТатьЯне);
- в) позиции со случайными ходами, принадлежащие природе;
- г) окончательные позиции, в которых игра завершена и определяется выигрыш (проигрыш) игроков.

Позиционная игра будет являться ***конечной*** при ***конечном числе*** позиций и альтернатив. Такая игра представима в виде ***дерева***, называемого ***деревом игры***, вариант какового представлен на рисунке 4.8.

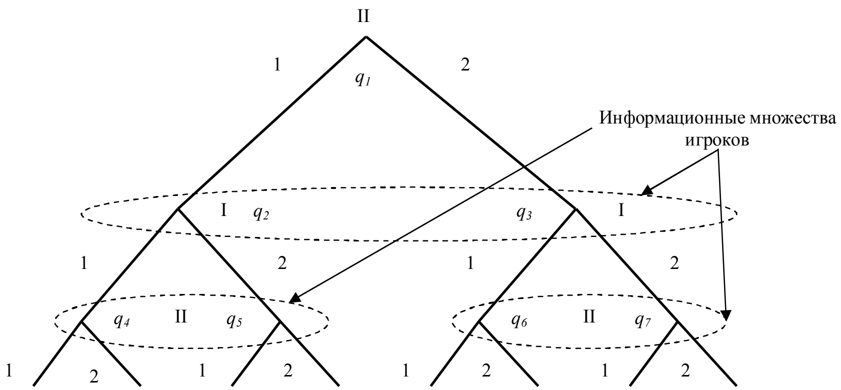


Рисунок 4.8 – Дерево конечной позиционной игры

Партия – путь на дереве игры от начальной вершины к заключительной вершине.

Если игрок при выборе своего очередного хода знает результаты предыдущих ходов, как своих, так и противника, то игра является игрой с ***полной информацией***. В противном случае игра называется игрой с

неполной информацией, и игрок может определить своё местоположение с точностью до некоторого множества вершин игрового дерева.

Такое множество называется ***информационным множеством*** игрока.

Свойства информационного множества

- все позиции одного и того же информационного множества принадлежат одному и тому же игроку;
- все позиции одного и того же информационного множества должны иметь одинаковое число альтернатив (в противном случае игрок определится со своим местоположением бале или менее точно);
- одно информационное множество не должно содержать позиций различных этапов одной и той же партии игры.

Эти множества показаны пунктиром на рисунке 4.7.

Стратегии игроков в позиционных конечных играх суть следующие.

1. **Чистая стратегия**. Выбирается до начала игры в форме “если — то” перебором путей по дереву игры. В ходе перебора игра сводится к матричной нормальной форме. Если ***игра*** является игрой с ***полной информацией***, то имеется седловая точка платёжной матрицы и решение в чистых стратегиях.

2. **Стратегия поведения**. Представляет собой набор из r вероятностных распределений, каждое из которых задано на множестве возможных альтернатив в каждом информационном множестве. В общем случае, при наличии большого числа информационных множеств и альтернатив в них, решение задачи отыскания стратегий поведения нетривиально.

3. **Смешанная стратегия**. В соответствии с ранее данным определением, позволяет реализовывать случайный выбор на множестве чистых стратегий. Если ***игра*** является игрой ***с полной памятью***, то смешанная стратегия эквивалентна стратегии поведения. В этой ситуации необходимо решать ЗЛП, построенную по платёжной матрице. Реализация стратегии поведения предпочтительнее, чем смешанной стратегии.

Уместна следующая аналогическая связь этих стратегий.

Чистая стратегия представляет собой книжку инструкций, каждая страница которой относится к одному из информационных множеств, и где чётко и точно прописано, что делать игроку в том или ином информационном множестве.

Множество чистых стратегий, таким образом, представляет собой библиотеку, из которой, посредством смешанной стратегии, выбирается книжка строгих инструкций.

Стратегия поведения тако же представляет собой книжку, на каждой странице которой содержится распределение вероятностей по альтернативам соответствующего информационного множества, а не жёсткую инструкцию.

Формальное описание антагонистической позиционной игры

Описание игры предусматривает задание системы компонент, в которую входят.

1. Конечное дерево с выделенной вершиной, называемой начальной позицией игры.
2. Функция выигрыша красных, которая ставит в соответствие с каждой окончательной позицией (окончательной вершиной дерева) некоторый выигрыш красного игрока I.
3. Разбиение всех позиций по принадлежности к игрокам.
4. перечисление альтернатив в каждой позиции в каждом информационном множестве.
5. Вероятностные распределения на множестве альтернатив по каждому случайному ходу (выполняемому природой).
6. Подразбиение позиций на информационные множества, при этом
   - позиции множества имеют одинаковое число следующих за ними альтернатив;
   - никакая другая позиция не может следовать за другой позицией из этого информационного множества.

Пример, навеянный произведением А.Н. Толстого “Золотой ключик”.

Папа Карло с Мальвиной, Буратино и прочей кукольной братией укрываются от Карабаса-Барабаса с Дуремаром и их приспешниками.

У беглецов имеются две альтернативы: поехать по правой дороге (П) или левой дороге (Л). В свою очередь, Карабас тоже имеет два варианта противодействия беглецам – выставить засады – блокпосты на путях следования кукол, это

- КДБА – Карабас и Дуремар располагаются на левой дороге, а кот Базилио с лисой Алисой на правой; и
- БАКД – кот Базилио с лисой Алисой располагаются на левой дороге, а Карабас и Дуремар на правой.

При столкновении с засадой, когда будут ясен состав блокпоста, папа Карло со товарищи, может прорываться через заслон (атаковать, А) или спасаться бегством (Б).

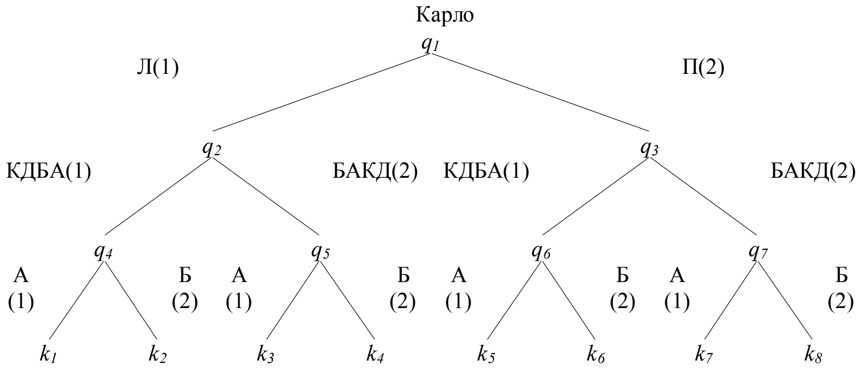
Таким образом, формально игра состоит из этапов:

1. Выбор пути следования папы Карло.

2. Расстановка Карабасом групп захвата.

3. Выбор способа действий папы Карло и его спутниками при попадании в засаду.

По условию задачи строим следующее игровое дерево, показанное ниже.



В качестве функции выигрыша Карабаса-Барабаса примем вероятности пленения кукольной труппы.

Конечная позиция	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
Выигрыш	0,1	0,8	0,4	0,6	0,5	0,2	0,3	0,7

Обычно (в жизни) участники конфликта принимают решения по мере развития конфликтной ситуации во времени.

Однако, абстрагируясь от этого практического соображения, будем считать, что игроки учли все возможные обстоятельства до начала игры и подготовили (запаслись домашними заготовками) набор алгоритмов действия (чистые стратегии) в форме “если — то”.

Формально, если стратегии пронумерованы, чистая стратегия определяется на совокупности информационных множеств и является функцией, приписывающей множеству число из интервала $[1, k_i]$, где k_i — число альтернатив в i-м информационном множестве игрока. Таким образом, общее число чистых стратегий у игрока равно

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r = \prod_{i=1}^{r} k_i .$$

Если стратегия игры приводит к окончательной вершине t, то выигрыш игрока составит величину $M(t)$ при отсутствии случайных ходов. Если в игре присутствуют случайные ходы, то математическое ожидание выигрыша при этом составит

$$\sum_t M(t)P(t), \qquad (4.17)$$

где $P(t)$ - вероятность того, что игра окончится в позиции t.

Так как число позиций на дереве игры конечно, мы можем, в любом случае, свести игру к матричной, перечислив все стратегии игроков в виде иерархической системы чисел

$$[i\ (i_1, i_2, , \ldots , i_k, \ldots , i_m)],$$

что означает выполнить ход с номером i на первом этапе, а на втором использовать ход i_k, если противник использовал k-ю альтернативу.

Например, запись [1 (1, 1)] означает: использовать на 1-м шаге 1-ю стратегию, а на 2-м использовать 1-ю, не зависимо от действий противника. Или [2 (2, 1)] означает: использовать на 1-м шаге 2-ю стратегию, а на 2-м использовать 2-ю, если противник использовал накануне 1-ю, и 1-ю, если противником была использована 2-я.

Отсюда перечень стратегий папы Карло есть [1 (1, 1)], [1 (1, 2)], [1 (2, 1)], [1 (2, 2)], [2 (1, 1)], [2 (1, 2)], [2 (2, 1)], [2 (2, 2)]. Остаётся лишь проследить по дереву игры, в какие конечные вершины нас приведут указанные стратегии. Таким образом, имеем следующую матричную игру, представленную в нормальной форме

	1(1,1)	1(1,2)	1(2,1)	1(2,2)	2(1,1)	2(1,2)	2(2,1)	2(2,2)
	Л(А,А)	Л(А,Б)	Л(Б,А)	Л(Б,Б)	П(А,А)	П(А,Б)	П(Б,А)	П(Б,Б)
	1	2	3	4	5	6	7	8
КДБА	k_1	k_1	k_2	k_2	k_5	k_5	k_6	k_6
(1)	0,1	0,1	0,8	0,8	0,5	0,5	0,2	0,2
БАКД	k_4	k_4	k_3	k_4	k_7	k_8	k_7	k_8
(2)	0,4	0,6	0,4	0,6	0,3	0,7	0,3	0,7

Платёжная матрица имеет седловую точку, показанную серым цветом. Цена игры – вероятность захвата кукол-беглецов Карабасом-Барабасом составляет 0,3.

Противники должны использовать свои стратегии следующего содержания.

- В засаде на левом пути должны располагаться лиса Алиса и кот Базилио, а на правом пути – Карабас-Барабас с Дуремаром.
- Папа Карло должен для следования выбрать правый путь, при встречи с котом и лисой – спасаться бегством, а при виде Дуремара и Карабаса – пытаться прорваться напролом.

  Приведённый содержательный пример служит иллюстрацией теоремы.

Теорема. Всякая игра с полной информацией, представленная в нормальной форме, имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях.

4.7.1. Игры с полной информацией и игры с полной памятью

Игрок I (или игрок II), если для него игра является игрой с полной информацией, имеет дело с ситуацией, когда ***каждое*** его информационное множество состоит лишь из 1-го элемента.

Игра является игрой ***с полной информацией***, если в ней ***каждый игрок*** имеет ***полную*** информацию.

Ранее нами отмечено, что всякая такая игра имеет в нормальной форме седловую точку в платёжной матрице.

Игрой с полной памятью называется игра, в которой ***каждый*** из ***игроков*** помнит всё, что оно делал или знал на каждом этапе.

Однако, в отличие от игр с полной информацией, он ***может не знать***, какой выбор сделал его противник.

Когда противники ординарные (единичные, не делимые) это, как правило, соблюдается всегда, хотя и наблюдаются примеры иного свойства, например потеря кораблём своего места из-за ошибок в счислении или отказе навигационного оборудования. В этом случае, имеем игру с неполной памятью.

Если одна из противоборствующих сторон представляет собой группу из 2-х и более участников, то есть, является составной, а взаимодействие между членами группы, по объективным причинами, отсутствует, то такой игрок может попеременно вспоминать и забывать свои действия и их результаты на предыдущих этапах. В этом случае, тако же имеем игру с неполной памятью.

Формально игрок ***имеет полную память***, если для двух его любых информационных множеств U и V, одно из которых расположено на предыдущем этапе игры (выше на дереве игры) в другое множество ***можно попасть по единственной альтернативе***.

Для случая игры с полной памятью, любой вершины множества $\{q_4, q_5\}$ можно достичь, двигаясь по 1-му (левому) ребру дерева, представленному на рисунке 4.8. Совершенно аналогично, двигаясь по 2-му правому ребру этого дерева, можно достичь вершин $\{q_6, q_7\}$.

Для случая игры с неполной памятью, вершины q_4 из информационного множества $\{q_4, q_5, q_6, q_7\}$ нельзя достичь только по одному ребру.

Поэтому, I-й игрок в одном случае может иметь полную память, а в другом – не иметь её.

Игры с полной памятью удобны тем, что каждый игрок может обойтись стратегиями поведения, описание которых и реализация проще, чем в случае

Сущность упрощения заключается в том, что ***один выбор*** из $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_i \times \ldots \times k_r$ возможных чистых стратегий заменяется r выборами из k_i возможных альтернатив в каждом информационном множестве.

По существу, ***стратегия поведения*** игрока есть функция, ***определённая на классе его информационных множеств***, которая назначает для каждого информационного множества распределение вероятностей альтернатив этого множества.

Поэтому, ***если*** у игрока только ***одно информационное множество***, то его ***стратегия поведения эквивалентна смешанной стратегии***.

Пример, навеянный книгой замечательного детского писателя А. Гайдара "Тимур и его команда".

Пусть вожаки малолетних хулиганов Мишка Квакин и Пётр Пятаков (Фигура) организуют, действуя последовательно, налёт на сад, обороняемый Тимуром и С°. Пусть каждая из разбойных шаек имеет по 2 способа налёта (проникновения в сад), допустим, 1 – через дыру в заборе, 2 – ползком по канаве. Тимур, в свою очередь, из-за малочисленности своих сторонников, имеет возможность блокировать только один из путей.

Игра, по существу, состоит из трёх этапов:

- I: нападает группа Мишки Квакина;
- II: Тимур и С° противодействуют налётчикам;
- III: нападает группа, ведомая Фигурой.

В зависимости от степени доверительного отношения нападающих, возможны две теоретико-игровые модели ситуации.

1. Пусть Квакин и Фигура взаимодействуют и договариваются о совместных действиях при налёте на сад. В этом случае, имеем игру с ***неполной информацией,*** но с ***полной памятью***. Соответствующее игровое дерево показано на рисунке 4.9. Серым цветом выделены информационные множества игроков.

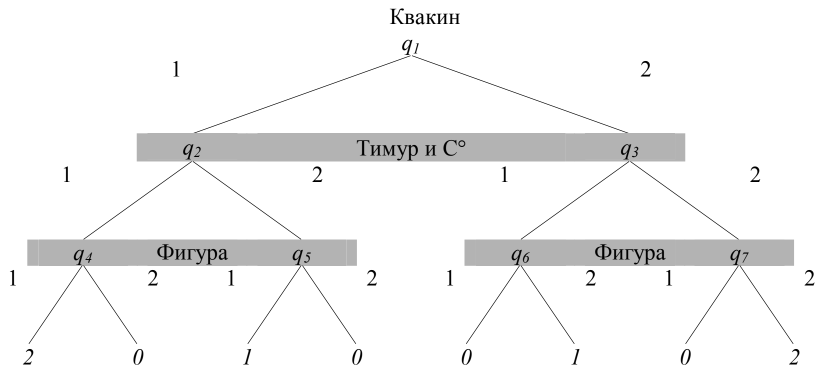


Рисунок 4.9 – Игра с неполной информацией и полной памятью

2. Пусть Квакин и Фигура не взаимодействуют, и выбор способа проникновения в сад ими не согласовывается. Тогда на III-м этапе составной игрок Квакин+Фигура "не помнит" своего хода, сделанного на I-м этапе. Следовательно, ***полной памяти он не имеет***, а игра может быть отнесена к играм ***с неполной информацией и неполной памятью***. Дерево показано на рисунке 4.10, серым цветом выделены информационные множества игроков.

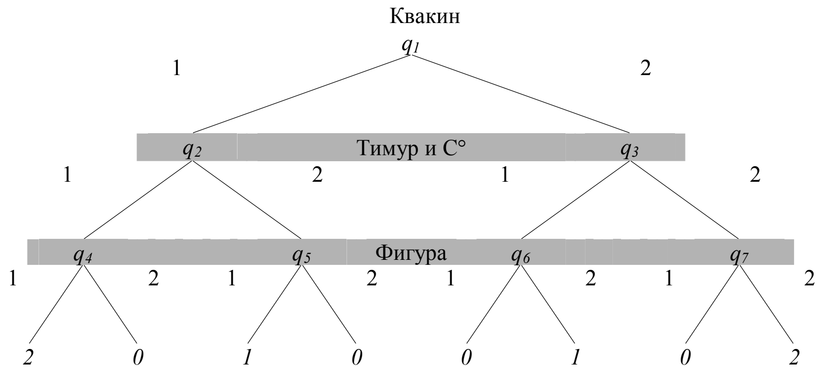


Рисунок 4.9 – Игра с неполной информацией и неполной памятью

На деревьях игры 4.8 и 4.9 в качестве платежей показано количество групп Квакин+Фигура, которым удаётся прорваться в сад.

Для игры с полной памятью, стратегия поведения 1-го игрока (Квакин+Фигура) есть система функций распределения по альтернативам информационных множеств

$$\left.\begin{aligned} f(q_1) &= (\alpha_1, 1-\alpha_1), \\ f(q_4, q_5) &= (\alpha_2, 1-\alpha_2), \\ f(q_6, q_7) &= (\alpha_3, 1-\alpha_3), \end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

где α_i — вероятность выбора 1-й стратегии в соответствующем информационном множестве.

У 2-го игрока стратегия поведения и смешанная стратегия совпадают:

$$g(q_2, q_3) = (\beta, 1-\beta). \qquad (4.19)$$

Математическое ожидание 1-го игрока, при известных распределениях вероятностей, можно вычислить по дискретному аналогу формулы (4.17)

$$\begin{aligned} H(f,g) = 2\cdot\alpha_1\alpha_2\beta + 1\cdot\alpha_1\alpha_2(1-\beta) + 1\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_3)\beta + \\ + 2\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_3)(1-\beta) \end{aligned}, \qquad (4.20)$$

получаемой при обходе дерева.

И.В. Романовский, в своей работе [], показал, что для игр с полной памятью всякая смешанная стратегия эквивалентна стратегии поведения. Таким образом, игра сводится к нормальной форме матричной игры путём перечисления альтернатив.

		Тимур и С°		
	Стратегии	1	2	
Квакин+Фигура	1=[1(1, 1)]	2	1	
	2=[1(1, 2)]	2	1	
	3=[1(2, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	4=[1(2, 2)]	0	0	← Не активная стратегия
	5=[2(1, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	6=[2(1, 2)]	1	2	
	7=[2(2, 1)]	0	0	← Не активная стратегия
	8=[2(2, 2)]	1	2	

Решение эквивалентной ЗЛП для данного случая даёт значение оптимальных смешанных стратегий игроков:

$$P^* = \left\{\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right\}, \quad Q^* = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\},$$
$$v = \frac{3}{2}.$$

Раздолбаи, однако, эти Квакин и Фигура, в заведомо выгодной для них стратегической конфигурации, проиграли слабому числом, но сильному духом Тимуру. Воистину, знания – сила.

Таким образом, 1-я и 6-я стратегии Квакин+Фигура должны применяться равновероятно на I-м этапе, далее, в информационном множестве $\{q_4, q_5\}$ – выбирается только 1-я, а в информационном множестве $\{q_6, q_7\}$ – выбирать только 2-ю. Последнее следует из анализа ситуаций на дереве игры. Поэтому стратегия поведения игрока Квакин+Фигура, эквивалентная его смешанной стратегии, то есть

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 0.$$

Для модели игры неполной информацией и неполной памятью, соответствующей рисунку 4.10, имеем функции распределения вероятностей в информационных множествах

$$\left.\begin{aligned} f(q_1) &= (\alpha_1, 1-\alpha_1), \\ f(q_4, q_5, q_6, q_7) &= (\alpha_2, 1-\alpha_2), \\ g(q_2, q_3) &= (\beta, 1-\beta), \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

совместно с функцией выигрыша, аналогичной (4.20).

$$\begin{aligned} H(f,g) = 2\cdot\alpha_1\alpha_2\beta + 1\cdot\alpha_1\alpha_2(1-\beta) + 1\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\beta \\ + 2\cdot(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\beta) \end{aligned}. \qquad (4.22)$$

В этом случае придётся использовать методы НП-программирования для отыскания оптимума функции (4.22).

Имеем градиент функции выигрыша

$$\nabla H(f,g) = \{3\alpha_2 - 2 + \beta; 3\alpha_1 - 2 + \beta; \alpha_1 + \alpha_2 - 1\} = 0,$$