для которой, в общем случае, можно записать

$$v^{r+1} \sim \mathrm{val}\begin{pmatrix} v^r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие решения игры 2 × 2 имеем

$$v^{r+1} = \frac{1}{2 - v^r}.$$

Полагая, что игроки играют долго и безрезультатно ($v_0 = 0$), получим формулу $v = \dfrac{1}{1+r}$, откуда последует, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{1+r} = 1$.

Окончательно получим платёжную матрицу для расчётов $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которой имеется пара седловых точек (1,1) и (1,2).

Обратимся теперь к исходной игре. Если в ней синий игрок будет выбирать свою первую стратегию в качестве оптимальной, то ***игра не завершится*** никогда, то есть выигрыш красного игрока, в этом случае, составит $h_\infty = 0$.

Поэтому, ***оптимальных стратегий может не существовать***, а существуют ***ε-оптимальные***.

Если, в рассматриваемой игре, игрок I будет осуществлять смешанную стратегию вида $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < 1$, то партия закончится гарантированно. Математическое ожидание выигрыша составит $v = 1 - \varepsilon$, не зависимо от действий игрока II.

Если же II-й игрок применит 2-ю чистую стратегию, то игра заканчивается, а математическое ожидание выигрыша I-го игрока всё равно составит $v = (1 - \varepsilon) \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0$.

Поэтому игрок I может гарантировать математическое ожидание выигрыша, близкое к единице, но не достигающее его. При значениях ε, стремящихся к нулю, математическое ожидание продолжительности игры возрастет, а математическое ожидание выигрыша претерпевает разрыв при переходе к предельным стратегиям с $v = (1 - \varepsilon)$ на $v = \varepsilon$.

Пример. По колумбийским чащам следуют два наркобарона: дон Педро и дон Базилио со своими телохранителями (три телохранителя у Педро, два – у его оппонента). Оба ненавидят друг друга, стремятся уничтожить и знают, что находятся поблизости один от одного, и, поэтому, решаются на нападение.

При этом существует дилемма: сколько человек послать в нападение, а сколько оставить при теле хозяина. Обозначим стратегии игроков как

систему чисел (i, j), где i – число телохранителей, участвующих в нападении, а j – число телохранителей, охраняющих хозяина.

Установим следующие правила игры. Если число нападающих больше, чем, охраняющих, то босс уничтожается, если наоборот, то нападение прекращается и организовывается снова (возобновляется игровой цикл).

Выигрыш дона Педро составит + 1, если он уничтожит дона Базилио, и – 1 в противном случае. В нормальной форме игра представима игрой-компонентой

Γ ~

	{0, 2}	{1, 1}	{2, 0}
{0, 3}	Γ	Γ	Γ
{1, 2)	Γ	Γ	1
{2, 1}	Γ	1	— 1
{3, 0}	1	— 1	1

В данной случае имеем δ-оптимальную стратегию игрока I (дона Педро): $(0,\ 1 - \delta - \delta^2,\ \delta,\ \delta^2)$, получающуюся при рассмотрении предельной игры вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Чем меньше значение δ, тем больше вероятность победы и тем больше математическое ожидание продолжительности игры. При значении δ, равном нулю, игра будет бесконечной продолжительности.

4.9. Бесконечные игры

На практике возникают ситуации, в которых каждая из сторон выбирает некоторый ***непрерывный параметр***. Это может быть дистанция до цели или момент открытия огня, соотношение сил нападения и поиска, отношение сигнал-шум и т.д.

Как правило, такой параметр имеет бесчисленное число значений (в силу его непрерывности) или такое большое конечное число значений, что его удобно рассматривать как бесконечное.

Теоретическими моделями таких игровых ситуаций являются ***бесконечные игры***, то есть такие игры, в которых чистые стратегии представляют собой выборы тех или иных чисел из бесконечных множеств A и B.

Практически данные множества ограничены, поэтому представляют собой некоторые ***замкнутые интервалы*** либо ***замкнутые подмножества*** конечномерных эвклидовых пространств.

При этом стратегии игроков удобно отождествлять с отрезками единичной длины к которым, в принципе, может быть приведён интервал между максимальным и минимальным числами. Таким образом, пара чистых стратегий соответствует точке единичного квадрата.

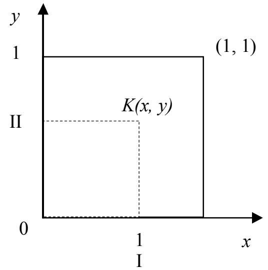


Рисунок 4.11 – Игровой квадрат

Термин “***бесконечная игра***” иногда заменяется термином “***непрерывная игра***”, калькой от латинского слова ***continuum***. В качестве стратегий красного игрока принимается число $0 \le x \le 1$, а в качестве стратегий синего – $0 \le y \le 1$. Пара выбранных стратегий *(x, y)* определяет ситуацию, в которой игрок получит выигрыш равный *K(x, y)*, а игрок – выигрыш – *K (x, y)* (игра же с нулевой суммой!).

Так как множество пар точек *(x, y)* заполняет квадрат, то игра получила название “***игра на квадрате***” (смотри рисунок 4.11).

Функция *K (x, y)*, определяемая на единичном квадрате [0, 1] × [0, 1] и ставящая в соответствие каждой игровой ситуации выигрыш, который получает I-й игрок, называется ***функцией выигрыша*** или ***ядром*** (***игры***).

Для игр на квадрате ***остаются справедливыми*** все те зависимости, которые нами были рассмотрены ранее, для парной игры с нулевой суммой, касательно цены игры и седловой точки с точностью до обозначений.

$$v_1 = \max_x \min_y K(x, y); \qquad v_2 = \min_y \max_x K(x, y); \qquad v_1 \le v_2 .$$
$$K(x, y_0) \le K(x_0, y_0) \le K(x_0, y) .$$

Если находятся пары чисел, удовлетворяющих двойному неравенству седловой точки, то говорят, что игра имеет решение в ***чистых стратегиях***, а ядро имеет седловую точку, в общем же случае $v_1 \le v \le v_2$.

Смешанная стратегия, в соответствии с определением, представляет собой функцию распределения вероятностей, определяемую на интервале [0, 1] и обладающую известными свойствами:

1. $F(0) = 0$;
2. $F(1) = 1$;
3. $x > x_1 \Rightarrow F(x) \ge F(x_1)$;
4. $x_n \to x,\ x < 1,\ x_n < x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.

Вероятность выбора числа из интервала $[x_1, x_2]$ есть $P(x_1, x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, а функция распределения определяется интегралом

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx ,$$

в котором $f(x)$ есть плотность распределения вероятностей, называемая тако же дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения. В теории игр часто используют специальную функцию распределения вида

$$F(x) = \alpha_1 I_{x_1}(x) + \alpha_2 I_{x_2}(x) + ... + \alpha_n I_{x_n}(x), \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, 0 \le x_i \le x_{i+1} \le 1 , \quad (4.29)$$

а $I_a(x)$ одноступенчатая функция

$$I_a(x) = \begin{cases} 1, & x \ge a, \\ 0, & x < a. \end{cases} \quad (4.30)$$

Функция (4.29) называется ступенчатой функцией с *n* степенями.

Для синего игрока определятся функция $G(y)$, аналогичная (4.29) для красного игрока.

Пусть красный игрок использует смешанную стратегию *F*, а синий – чистую стратегию *y*. Тогда математическое ожидание выигрыша красного игрока (если существует)

$$E(F, y) = \int_0^1 K(x, y)dF(x) .$$

Аналогично для синего игрока

$$E(x, G) = \int_0^1 K(x, y)dG(y) .$$

При использовании игроками своих оптимальных смешанных стратегий, математическое ожидание выигрыша, если оно существует, равно

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)dF(x)dG(y).$$

Поэтому, как и в матричных играх, могут существовать максимин, минимакс

$$\max_F \min_G E(F,G) \le \min_G \max_F E(F,G)$$

и оптимальные стратегии игроков F^* и G^*, такие, что $E(F^*, G) \ge v$, $E(F, G^*) \le v$.

Воспользуемся примером по открыванию двери Буратино, изложенному в разделе 4.8.1 в качестве детерминированной игры, при гипотезе о дискретности времени наступления события. На этот раз будем исходить из того, что время непрерывно:

- T – время, в течение которого Буратино должен открыть дверь,
- T – время, в течение которого может появиться Дуремар,
- ΔT – время ($\Delta T < T$), за которое Буратино должен открыть дверь.

Пусть $0 \le t_{\rm I} \le T - \Delta T$ есть время начало действия Буратино, а $0 \le t_{\rm II} \le T$ момент появления Дуремара.

Введём обозначения: $t=\dfrac{\Delta T}{T}; x=\dfrac{t_I}{T}; y=\dfrac{t_{II}}{T}$, после чего будем иметь игру на квадрате, в которой стратегии игроков будут представимы числами из интервала: $[0,\ 1-t]$ для первого игрока и $[0,\ 1]$ для второго, а функция выигрыша представит собой разрывную функцию

$$K(x,y)=\begin{cases}1, & y\le x\le 1-t \equiv y\le x, x\le 1-t;\\ 1, & x+t\le y\le 1 \equiv x+t\le y, y\le 1;\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

область единичных значений, которые показаны на рисунке 4.11.

Нижняя область рисунка соответствует случаю, когда Дуремар не появился до момента времени , а нижняя – когда он появился и ушёл.

Для такой игры Дрешером [23] найдено следующее оптимальное решение.

Оптимальная стратегия красного игрока есть

$$F^*(x)=\frac{1}{[t^{-1}]}\cdot\sum_{j=0}^{[t^{-1}]-1} I_{j\times t}(x).$$

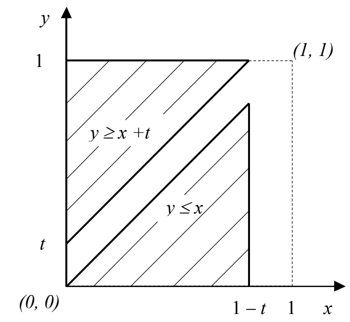


Рисунок 4.11 – Области ядра игры

Для синего игрока имеем

$$G^*(y)=\begin{cases} y, & t^{-1} - \text{целое число},\\ \dfrac{1}{[t^{-1}]}\cdot\sum\limits_{j=0}^{[t^{-1}]} I_{\frac{j}{[t^{-1}]+1}}(y), & t^{-1} - \text{нецелое число}.\end{cases}$$

При этом цена игры составит

$$v=1-\frac{1}{[t^{-1}]},$$

где запись […] обозначает не превосходящее целое, то есть, округление по недостатку.

Пусть, например, T = 6 часов, а ΔT = 2,5 часа. Находим:

$$t^{-1}=\frac{6}{2{,}5}=\frac{12}{5}\Rightarrow [t^{-1}]=2.$$

Имеем оптимальную стратегию красного игрока

$$F^*(x)=0{,}5I_0(x)+0{,}5I_{\frac{5}{12}}(x),$$

синего игрока

$$G^*(y) = 0{,}5 I_{\frac{1}{3}}(y) + 0{,}5 I_{\frac{2}{3}}(y)$$

и цену игры v = 0,5. Получается, что Буратино должен начать манипуляции по отпиранию двери в начальный момент времени и через 2,5 часа равновероятно, а Дуремар – появиться в районе каморки в моменты 2 и 4 часа.

Пусть, как в примере раздела 4.8.1, теперь T = 1 час, ΔT = 12 мин, тогда t^{-1} = 5 – целое число. Цена игры составит v = 0,8.

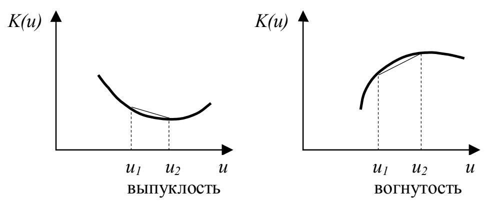
Стратегия Буратино есть $F^*(x) = \frac{1}{5}\left[I_0(x) + I_{\frac{1}{5}}(x) + I_{\frac{2}{5}}(x) + I_{\frac{3}{5}}(x) + I_{\frac{4}{5}}(x) \right]$, Дуремар же имеет равномерное распределение по всему временному интервалу $G^*(y) = y$, $0 \le y \le 1$.

Эта игра имеет ядро с разрывом. Для разрывного ядра игра, в ряде случаев, может не иметь решения, а игроки – своих оптимальных стратегий. Игры с ***разрывным ядром***, в которых выбирается ***момент времени***, называются ***дуэлями***.

Если ядро непрерывно, то решение может быть найдено всегда, но универсальных методов решения не существует.

4.9.1. Выпуклые и вогнутые игры

В случае, когда ядро игры (функция выигрыша) *K(x, y)* является нелинейным, то могут иметь место ***выпуклость*** и ***вогнутость*** по переменным *x* и *y*. Определение этих понятий аналогично определению, данному нами при рассмотрении НП-задач.



Функция *K(u)* называется ***выпуклой*** по *u* на интервале [0, 1] если

$$K[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \le \lambda K(u_1) + (1-\lambda)K(u_2),\ u_1, u_2 \in [0, 1],\ 0 \le \lambda \le 1,$$

и ***вогнутой*** по *u* если

$$K[\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2] \ge \lambda K(u_1) + (1-\lambda)K(u_2),\ u_1, u_2 \in [0, 1],\ 0 \le \lambda \le 1.$$

Дважды дифференцируемая функция выигрыша *K(x, y)* является выпуклой по *y* для любого *x*, если

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} \ge 0 .$$

Игра называется ***выпуклой***. В этом случае, игрок II имеет ***чистую*** оптимальную стратегию в случае ***строгой выпуклости***, и целое ***множество стратегий***, если имеет место ***нестрогая*** выпуклость.

Если

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} \le 0 ,$$

то игра вогнута по *x* для любого *y*. В этом случае, игрок I имеет ***чистую*** оптимальную стратегию в случае ***строгой вогнутости***, и целое ***множество стратегий***, если имеет место ***нестрогая*** вогнутость.

Чистая стратегия игрока задаются в виде одноступенчатых функций вида (4.30)

$$I_{y_1}(y) = \begin{cases} 1, & y \ge y_1, \\ 0, & y < y_1 \end{cases} \text{ и } I_{x_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \ge x_1, \\ 0, & x < x_1 \end{cases},$$

в которых y_1 и x_1 определяются из уравнений:

$$v = \max_x K(x, y_1) \text{ и } v = \min_y K(x_1, y),$$

соответственно, а цена игры есть

$$v = \min_y \max_x K(x,y) = \max_x K(x, y^*) \text{ и } v = \max_x \min_y K(x,y) = \min_y K(x^*, y) .$$

Если игра определяется функцией *K*(*x, y)*, которая вогнута по *x* при любом *y* и выпукла по *y* при любом *x*, то игра называется ***вогнуто-выпуклой***, имеет седловую точку, а игроки – по паре чистых оптимальных стратегий (x_0, y_0).

Существует ряд определений и теорем.

Определение. Чистая стратегия x игрока I называется существенной, если для некоторой оптимальной стратегии y^* игрока II выполняется условие $K(x, y^*) = v$.

Теорема 1. Пусть Г – выпуклая игра с функцией выигрыша K, дифференцируемая по y при любом x; y^* – чистая оптимальная стратегия игрока II в ней, а v – её значение.

Тогда

1) если $y^* = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x', которая является существенной и для которой $K'_y(x',1) \le 0$, где $K'_y(x,y) = \dfrac{\partial K(x,y)}{\partial y}$ (предполагается, что производная $K'_y(x,y)$ существует для всех значений x);

2) если $y^* = 0$, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x'', которая является существенной и для которой $K'_y(x'',0) \ge 0$.

3) если $0 < y^* < 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I найдётся такая, которая является смесью других существенных стратегий x' и x''. Для этих стратегий $K'_y(x',y^*) \le 0$ и $K'_y(x'',y^*) \ge 0$.

При этом стратегии x' и x'' выбираются с вероятностями α и $1 - \alpha$, где α – есть решение уравнения

$$\alpha K'_y(x',y^*) + (1-\alpha)K'_y(x'',y^*) = 0,$$

то есть, стратегии x' и x'' определяются функцией распределения

$$F^*(x) = \alpha \cdot I_{x'}(x) + (1-\alpha)\cdot I_{x''}(x), \qquad (4.31)$$

где $I_{x'}(x)$ и $I_{x''}(x)$ одноступенчатые функции распределения вида (4.30).

Теорема 2. Пусть Г – вогнутая игра с функцией выигрыша K, дифференцируемая по x при любом y; x^* – чистая оптимальная стратегия игрока I в ней, а v – её значение.

Тогда

1) если $x^* = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока II имеется чистая стратегия y', которая является существенной и для которой $K'_x(1,y') \ge 0$, где $K'_x(x,y) = \dfrac{\partial K(x,y)}{\partial x}$ (предполагается, что производная $K'_x(x,y)$ существует для всех значений y);

2) если $x^* = 0$, то среди оптимальных стратегий игрока II имеется чистая стратегия y'', которая является существенной и для которой $K'_x(0,y'') \le 0$;

3) если $0 < x^* < 1$, то среди оптимальных стратегий игрока II найдётся такая, которая является смесью других существенных стратегий y' и y''. Для этих стратегий $K'_x(x^*,y') \ge 0$ и $K'_x(x^*,y'') \le 0$.

При этом стратегии y' и y'' выбираются с вероятностями β и $1 - \beta$, где β – есть решение уравнения

$$\beta K'_x(x^*,y') + (1-\beta)K'_x(x^*,y'') = 0,$$

то есть, стратегии y' и y'' определяются функцией распределения

$$G^*(y) = \beta \cdot I_{y'}(y) + (1-\beta)\cdot I_{y''}(y), \qquad (4.32)$$

где $I_{y'}(y)$ и $I_{y''}(y)$ одноступенчатые функции распределения вида (4.30).

Реализация стратегий (4.31) и (4.32) заключается в генерации случайного числа ξ из интервала (0, 1) и сравнение его с пороговым значением α или β (смотри рисунок 4.12).

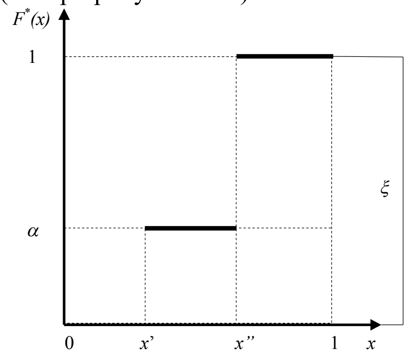


Рисунок 4.12 – Реализация стратегии $F^*(x)$

Если $\xi < \alpha$, то $x = x'$, в противном случае, если $\xi \ge \alpha$, то $x = x''$. Аналогичная схема применяется для смеси стратегий синего игрока $G^*(y)$ (4.32).

Пример 1. Пусть ядро игры имеет вид $K(x, y) = -x^2 + 2y^2 + 5xy - x - 2y$.

Вторые производные ядра

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} = -2 < 0 \text{ и } \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} = 4 > 0.$$

Следовательно, данная игра вогнуто-выпуклая, при такой игре существует седловая точка (x_0, y_0). Её будем искать по алгоритму, предложенному в [45]. Необходимо решить систему вида

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \psi(y_0), \\ y_0 = \varphi(x_0) \end{array}\right\},$$

где $\psi(y)$ – такое значение x, которое максимизирует $K(x, y)$, а $\varphi(x)$ – такое значение y, которое минимизирует $K(x, y)$, то есть

$$K[\psi(y), y] = \max_x K(x,y),$$

$$K[x, \varphi(x)] = \min_y K(x,y).$$

Найдём $\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} = -2x + 5y - 1 \Rightarrow x = \frac{5y-1}{2}$. Так как значение $y < \frac{1}{5}$ делает $x < 0$, что противоречит исходным посылкам, то функция будет ступенчатой:

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & y \le \frac{1}{5}, \\ \frac{5y-1}{2}, & y > \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Аналогично имеем $\frac{\partial K(x,y)}{\partial y} = 4y + 5x - 2 \Rightarrow y = \frac{2-5x}{2}$ и функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2-5x}{2}, & x < \frac{2}{5}, \\ 0, & x \ge \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений для определения координат седловой точки и оптимальных стратегий:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5y-1}{2}, \\ y_0 = \frac{2-5x}{2}, \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{2}{11};\ y_0 = \frac{3}{11}.$$

Пример 2.[53] Пусть игрок II выполняет стрельбу торпедой по игроку I. При обнаружении торпеды, игрок I уклоняется ходом: от неподвижного (Stop) до полного (Fool Speed). В свою очередь, игрок II выбирает упреждение, исходя из предположительной гипотезы о характере манёвра уклонения цели. Пусть ядро функции игры есть $K(x, y) = (x - y)^2$.

Полагая $x = 0$ для Stop, и $x = 1$ для Fool Speed, а в качестве y нормированную поправку на движение цели, придём к игре на квадрате.

Анализ свойств ядра показывает, что игра выпукла для обоих игроков

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2} = 2 > 0.$$

Поэтому игрок II имеет чистую оптимальную стратегию, а I – смешанную стратегию $F^*(x)$ при $x' = 0$ и $x'' = 1$, такую что

$$v = \min_y \max_x (x-y)^2 = \max_x (x - y^*)^2.$$

Для фиксированного значения y максимум v будет достигаться на концах интервала при x =0 или x = 1 и будет равен

$$\max\{y^2, (1-y^2)\}.$$

Указанное выше соображение иллюстрируется на рисунке 4.13, а. Решим уравнение

$$y^2 = (1-y)^2 \Rightarrow y^* = 0{,}5;\ v^* = 0{,}25.$$

Вычислим, в соответствии с теоремой,

$$K'_y(x', y^*) = \left.\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right|_{y^*=\frac{1}{2}; x'=0} = 1, K'_y(x'', y^*) = \left.\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right|_{y^*=\frac{1}{2}; x''=1} = -1.$$

Согласно третьему пункту теоремы 1, имеем уравнение

$$\alpha - (1-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0{,}5,$$

поэтому оптимальная стратегия первого игрока (4.31)

$$F^*(x) = 0{,}5 \cdot I_0(x) + 0{,}5 \cdot I_1(x),$$