Рассчитываем симплекс-разности по формуле (2.19) и помещаем во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [2 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = -1,$$

$$\delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [2 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 2,\ \delta_4 = 0,\ \delta_5 = 0.$$

Оптимум не достигнут, направляющий столбец – 2-й.

Пересчитываем столбец, используя (2.17),

$$A^* = A_x^{-1} \times A_j^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

и помещаем в основную таблицу, затем вычисляем и заполняем столбец оценок Θ. На его основании выводим A_4. Преобразуем таблицу по методу Жордана-Гаусса.

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
A_2	*6*	3	2/3	-1	0		
A_1	*5*	4,5	-0,5	1,5	0		
A_5	*0*	1,5	-0,5	-1,5	1		
	Λ	*40,5*	3/2	3/2	0		

Рассчитываем симплекс-разности и помещаем их во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = 1,\quad \delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = 0,$$

$$\delta_3 = 2/3,\ \delta_4 = 2/3,\ \delta_5 = 0.$$

Решение можно считать законченным. Обратите внимание на значение оптимальной дополнительной переменной, соответствующей

вектору A_5. Её значение в десять раз больше значения соответствующей переменной, полученной для исходной модели.

2.2.8. Двойственность в ЗЛП [4, 23, 24, 28, 29, 32, 60]

Рассмотрим ранее упоминавшуюся содержательную задачу о картофельных чипсах, кубиках и дольках, для которой была построена модель

$$f = 5k_1 + 6k_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 \le 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 \le 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 \le 2{,}4; \\ k_1 \ge 0; \\ k_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.20)$$

При построении модели было принято во внимание, что переменные k_1 и k_2 – суть количества картофеля, закупаемого у поставщиков, коэффициенты целевой функции показывают прибыль на единицу продукции из сырья соответствующего поставщика, элементы матрицы $a_{i,j}$ – выход i-ой продукции из сырья j-того поставщика.

Теперь построим наши рассуждения следующим образом. Пусть y_i, $i = 1, m$ – затраты на вид выпускаемой продукции, её себестоимость.

Тогда себестоимость всей продукции есть

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \times y_i,$$

а величина

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \times y_i$$

представляет суммарную стоимость продукции, получаемой из сырья j-того поставщика.

Поэтому мы вправе потребовать снижения себестоимости продукции (минимизацию её), а так как прибыль включаётся (закладывается) в суммарную стоимость продукции, то величина последней превышает прибыль (что определит знак ограничений как “больше или равно”).

Исходя из этих соображений, можно записать

$$g(y_1, y_2, y_3) = 1{,}8y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \ge 5, \\ 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 \ge 6, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Задачу (2.21) называют ***двойственной*** по отношению к (2.20), которую называют ***прямой***. Для каждой прямой задачи существует соответствующая двойственная задача. Двойственные переменные не имеют, в общем случае, физического (смыслового) содержания, исключая задачи производственные и экономические, где этим переменным приписывается смысл затрат разнообразной природы.

2.2.9. Формальная связь прямой и двойственной задач

Сопоставим математические модели прямой и двойственной задач.

Прямая задача	Двойственная задача
Развёрнутая форма представления	
$\min \sum_{j=1}^{n} c_i x_i,$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i \le b_i, \ i = \overline{1,m},$	$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge c_j, \ j = \overline{1,n},$
$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}.$	$y_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}.$
Матричная форма представления	
$C^T X \to \max,$	$B^T Y \to \min,$
$AX \le B.$	$A^T Y \ge C.$

Анализируя эти выражения, сформулируем **правила перехода между этими задачами**.

- Если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум.

- Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся элементами вектора ограничений двойственной задачи.
- Свободные члены в ограничениях прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции в двойственной задаче.
- Матрица ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.
- Знаки ограничений в неравенствах заменяются противоположными знаками.
- Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных в прямой задаче.

Когда в ограничениях задачи присутствуют только неравенства, пара задач прямой и двойственной и сами задачи называется ***симметричными***. Если i-ая переменная не ***ограничена в знаке*** в прямой задаче, то j-ое ограничение в двойственной задаче будет ***равенством***.

В некоторых источниках, например в [3, 24, 29], правила перехода сформулированы в виде теорем.

2.2.10. Теоремы двойственности [29]

Теорема 1. Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач соответственно (при этом выполняется неравенство $AX_0 \le B$ и $A^T Y_0 \ge$ C), то значение целевой функции прямой задачи не превышает значения целевой функции двойственной $C^T X_0 \le B^T Y_0$.

Теорема 2 (Основная). Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если $C^T X_0 = B^T Y_0$, то X_0 и Y_0 – оптимальные решения пары двойственных задач.

Теорема 3. Если в оптимальном решении прямой задачи i-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю, то есть $A_i X^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$, где A_i – i-я строка матрицы.

Теорема 4. Если в оптимальном решении двойственной задачи j-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю, то есть $A_j^T Y^* - c_j > 0 \Rightarrow x_j^* = 0$, где A_j – j-й столбец матрицы.

Из последних теорем просматривается связь оптимальных решений прямой и двойственной задач:

$$\delta_{n+i}^{ПрямойЗадачи} = y_i^*,\ i = 1,\overline{m},$$
$$-\delta_{m+j}^{ДвойственнойЗадачи} = x_j^*,\ j = 1,\overline{n},$$

где n и m – число переменных и ограничений прямой задачи.

Поэтому оптимальное решение одной из пары двойственных задач позволяет автоматически получить значение другой.

2.2.11. Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом [15, 23, 28, 29]

Двойственный симплекс-метод предложен Дж. Данцигом [23] и называется ещё методом последовательного улучшения оценок. Метод базируется на ряде определений.

Сопряжённый базис (базис двойственной задачи) – система m независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой Y удовлетворяет ограничениям двойственной задачи: $A_j^T Y > c_j$.

Псевдоплан прямой задачи – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса.

Иногда псевдоплан трактуется как разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.

Если среди ***базисных*** компонентов псевдоплана нет отрицательных, то псевдоплан оказывается оптимальным решением прямой задачи, а опорный план – оптимальным решением двойственной задачи.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Подразумевается, что решается задача максимизации функции цели.

1. Необходимо привести систему ограничений в каноническую форму. Искусственные переменные при этом не вводятся.

Перед началом канонизации имеет смысл, путём умножения на –1, добиться одинаковых знаков в ограничениях, и, по необходимости, преобразовать задачу минимизации к задаче максимизации.

2. Выполнить построение двойственной задачи по отношению к канонической форме.

3. Осуществить отыскание базиса сопряжённой задачи (сопряжённый базис).

- Подбор сопряжённого базиса, осуществляется отчасти наугад.

- Нужно выбрать m векторов, руководствуясь определением, данным выше.
- Неравенства двойственной задачи, соответствующие включаемым в базис векторам, преобразуются в систему линейных алгебраических уравнений, результат решения которых подставляются в остальные неравенства, не вошедшие в сопряжённый базис.
- Если неравенства выполняются как истинные, базис подобран правильно, в противном случае, подбор базиса необходимо продолжить.
- Если сопряжённый базис подобрать не удалось, то система ограничений не совместна, и пара задач является неразрешимой.

4. Рассчитать псевдоплан, путём решения ряда систем уравнений вида

$$A_j = M \times \widetilde{A}_j,$$

где A_j – разлагаемый вектор, M – матрица составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис, $\widetilde{A}_j$ – искомое разложение вектора для всех векторов прямой задачи, не вошедших в базис.

Из практических соображений, в первую очередь рассчитывают A_0.

5. Если в полученном псевдоплане все элементы столбца A_0 неотрицательны, то указанный план является ***оптимальным***, алгоритм завершается нормально. В противном случае, когда $\exists_i\, a_{i,0} < 0\ \&\ \forall_j\, a_{i,j} \geq 0$, имеем дело с неразрешимой задачей, целевая функция которой не ограничена в направлении оптимизации, и алгоритм завершает работу аварийно.

6. В иных случаях самый минимальный отрицательный элемент столбца A_0 определяет ***направляющую строку***: $\arg\min\limits_i a_{i,0} < 0 \Rightarrow i^*$,

а ***направляющий столбец*** определится по правилу

$$\arg\min_j \left\{ \frac{-\delta_j \geq 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

7. Далее выполняются исключения Жордана-Гаусса, после чего переходим к п.5.

Замечания.

1. Симплекс-метод перемещается от одного опорного плана к другому, а двойствен симплекс-метод переходит от псевдоплана к псевдоплану.

2. К текущему псевдоплану допускается добавлять новые строки, соответствующие дополнительным ограничениям, усиливающим уже существующие ограничения задачи.

Продемонстрируем работу алгоритма на примере задачи о закупке картофеля.

Этап 1. Приведение математической модели в каноническую форму.

$$f = 5k_1 + 6k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}2k_1 + 0{,}3k_2 + 1k_3 + 0k_4 + 0k_5 = 1{,}8; \\ 0{,}2k_1 + 0{,}1k_2 + 0k_3 + 1k_4 + 0k_5 = 1{,}2; \\ 0{,}3k_1 + 0{,}3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 1k_5 = 2{,}4; \\ \;A_1 \quad\; A_2 \quad\; A_3 \quad A_4 \quad A_5 \qquad A_0. \end{cases}$$

Этап 2. Построение двойственной задачи.

$$1{,}8y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \ge 5, & A_1 \\ 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 \ge 6, & A_2 \\ y_1 \ge 0, & A_3 \\ y_2 \ge 0, & A_4 \\ y_3 \ge 0. & A_5 \end{cases}.$$

Её целевая функция нам безразлична, в дальнейших расчётах она не используется.

Этап 3. Подбор сопряжённого базиса.

Постараемся включить в него один из векторов, соответсвующий основной переменных. Ориентировочно выберем A_1, A_2 и A_3. Решим систему уравнений, составленную из соответствующих строк системы ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 0{,}2y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 = 5, \\ y_1 = 0, \\ y_3 = 0. \end{cases}$$ В результате нами получено $y_2 = 25$.

Проверка на остальных ограничениях двойственной задачи показывает, что ограничение $A_4 : y_2 \ge 0$ – выполняется, а $A_2 : 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 = 2{,}5 \ge 6$ – нет.

Поэтому базис A_1, A_2 и A_3 не подходит в качестве сопряжённого.

Попробуем базис A_2, A_3 и A_5. Соответствующая система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 0{,}3y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}3y_3 = 6, & A_2 \\ y_1 = 0, & A_3 \\ y_3 = 0. & A_5 \end{cases}$$ её решение даёт $y_2 = 20$.

Легко показать, что выполняются неравенства A_1 и A_4. Поэтому A_2, A_3 и A_5 является сопряжённым базисом.

Этап 4. Найдём псевдоплан для этого базиса. Для этого нам необходимо решить несколько систем уравнений.

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A_2X_{20} + A_3X_{30} + A_5X_{50}, \\ A_1 &= A_2X_{21} + A_3X_{31} + A_5X_{51}, \\ A_4 &= A_2X_{24} + A_3X_{34} + A_5X_{54}.. \end{aligned}\right\}$$ – индексы суть координаты в таблице

псевдоплана, первый индекс указывает на привязку к базисному вектору, второй – к разлагаемому. Имеем:

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}2 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{20} \\ X_{30} \\ X_{50} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{31} \\ X_{51} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{24} \\ X_{34} \\ X_{54} \end{bmatrix}.$$

Для первой системы $1{,}2 = 0{,}1 \times X_{20} \Rightarrow X_{20} = 12$, остальные переменные находятся путём последовательной подстановки в первое и третье уравнения. Окончательно рассчитаем:

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -1{,}8 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}; \qquad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -0{,}4 \\ -0{,}3 \end{bmatrix}; \qquad \tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Из базисных векторов и векторов разложения формируем симплекс-таблицу и подсчитываем симплекс-разности.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	12	2	1	0	10	0
A_3	0	–1,8	–0,4	0	1	–3	0
A_5	0	–0,6	–0,3	0	0	–5	1
	δ_j	72	7	0	0	60	0

Направляющая строка определяется самым отрицательным элементом столбца A_0. направляющий столбец определится как $\min\left\{\frac{-7}{-0{,}4};\quad \frac{-60}{-3}\right\}$.

Пересчитываем таблицу и проводим расчёт симплекс-разностей.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	5	–5	0
A_1	5	4,5	1	0	–2,5	7.5	0
A_5	0	0,15	0	0	–0,75	–0,75	1
	δ_j	40,5	0	0	17.5	7.5	0

Получено оптимальное решение, которое совпадает с полученными нами ранее.

2.2.12. Вопросы для самоконтроля

1. Какие модели являются предметом исследования в линейном программировании?
2. Что утверждают основные теоремы линейного программирования?
3. Каковы условия применения графического метода?
4. Каковы особые случаи, возникающие при решении ЗЛП?
5. Почему при решении ЗЛП графическим методом используют именно перпендикуляр к нормали, а не линию под каким-либо другим углом?
6. Поясните, с чем связан выбор направления движения перпендикуляра к нормали?
7. Что такое каноническая форма ЗЛП?
8. Какое функциональное назначение отводится дополнительным переменным?
9. В чём состоят признаки (условия) неразрешимости задачи при решении её симплекс-методом?
10. Чем обосновано правило выбора вектора, вводимого в базис?
11. Каков смысл симплекс – разности?
12. Чем обоснован выбора выводимого из базиса вектора?
13. Какова последовательность работы алгоритма Жордана-Гаусса?
14. Как проконтролировать правильность хода решения задачи по значениям симплекс – разностей?

15. Чем обосновано требование положительности к вектору свободных членов системы ограничений?
16. В чём состоит связь обычной и канонической форм задач ЛП?
17. Что значит присутствие в столбце оптимального решения ненулевых значений дополнительных переменных?
18. Для чего требуются искусственные переменные?
19. В чём сходство и различие дополнительных и искусственных переменных?
20. От чего зависят знаки и множители при искусственных переменных?
21. Как по последовательности значений целевой функции определить правильность хода решения задачи?
22. Как определить, что задача имеет несовместные ограничения?
23. Какие случаи неразрешимости ЗЛП отображаются в симплекс-таблице?
24. Почему, при наличии ограничений больше или равно (“≥”), нельзя обойтись базисом соответствующим, дополнительным переменным?
25. В чем привлекательность машинной реализации модифицированного симплекс-метода?
26. Почему модифицированный симплекс-метод наиболее эффективен в случаях, когда число переменных n превышает число ограничений m?
27. Почему модифицированный симплекс-метод ещё называют методом обратной матрицы?
28. Где располагается обратная матрица в симплекс-таблице, и по отношению к какой матрице она является обратной?
29. Что утверждают теоремы двойственности.
30. Как связаны прямая и двойственная задачи?
31. Как по оптимальному решению прямой задачи получить оптимальное решение двойственной?
32. Что такое псевдоплан?
33. Что такое сопряженный базис?
34. Как узнать при решении двойственным симплекс-методом, что ограничения, заданные в математической модели, несовместны?
35. В чём проявляются особенности алгоритма двойственного симплекс-метода при определении вводимого и выводимого векторов?
36. Какой вид имеет симплекс-таблица двойственного метода в случае неразрешимости задачи?
37. Как соотносятся целевые функции прямой и двойственной задач в ходе решения и в оптимальном решении?
38. В каких случаях основные переменные двойственной задачи имеют содержательный смысл, и какой именно?