Все симплекс-разности неотрицательны, поэтому достигнут максимум целевой функции в точке с координатами (4,5; 3; 0; 0; 0,15). Оптимальное значение функции в этой точке равно F_{max} =40,5. Значения основных переменных получены: $k_1 = 4{,}5$ и $k_2 = 3$.

Результат решения совпадает с решением, рассчитанным при демонстрации графического метода.

Следовательно, для обеспечения максимально прибыли следует закупать картофель в указанных или пропорциональных (3:2) количествах у первого и у второго поставщиков соответственно. Каков же содержательнй смысл переменной $k_5 = 0{,}15$ в оптимальном решении?

Если подставить оптимальные значения в третье уравнение канонизированной системы, то мы получим равенство. Таким образом, 0,15 – величина уравновешивающее третье ограничение в точке оптимума. Если бы правая часть указанного ограничения была бы меньше на эту величину, то в точке оптимума пересекались бы сразу три прямые.

2.2.6. Решение ЗЛП методом искусственного базиса [24, 40, 55]

Указанный метод называют ещё методом искусственных переменных. Он предназначен для решения ЗЛП с целевой функцией

$$Z = C^T X \to opt,$$

при наличии ограничениях на переменные вида

$$AX \otimes B, \tag{2.12}$$

где обозначено:

- C – вектор коэффициентов целевой функции размерностью $[n \times 1]$;
- T – символ транспонирования;
- X – вектор искомых параметров математической модели размерностью $[n \times 1]$;
- opt - вид оптимизации (min или max);
- A - двумерная матрица $[m \times n]$ системы линейных ограничений;
- $\otimes$ – знак отношения ($\geq, =, \leq$);
- B – вектор правой части ограничений размерностью $[m \times 1]$.

Достаточно хотя бы ***одного знака отношений*** "$\geq$" или "=" для необходимости использовать этот метод.

Система, в которой присутствуют различные знаки ограничений, называется ***смешанной***.

Пусть все знаки ограничений, для примера, имеют вид "$\geq$". В этом случае, после введения дополнительных переменных и приведения задачи в каноническую форму имеем

$$AX - EX_{ДОП} = B \equiv A_0. \tag{2.13}$$

Если воспользоваться прямым симплекс-методом, то начальной точкой решения является дополнительные переменные, удовлетворяющие системе уравнений $-EX_{ДОП} = A_0$, но при этом ***будет нарушаться условие неотрицательности*** дополнительных переменных (в этом несложно убедиться, решив систему).

Поэтому появляется потребность во введении фиктивных ***искусственных переменных***, не имеющих содержательного смысла, но обеспечивающих существование корректного допустимого базисного решения (ДБР) на начальном шаге, благодаря чему метод и получил своё наименование.

После введения искусственных переменных x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, …,$x_{n+2\times m}$ получаем

$$AX - EX_{ДОП} + EX_{ИСК} = A_0, \tag{2.13}$$

полагая в котором равными нулю основные и дополнительные переменные, придём к ДБР, соответствующему уравнению

$$EX_{ИСК} = A_0.$$

В случае, когда исходная математическая модель представлена в канонической форме, также вводятся искусственные переменные для обеспечения начального решения.

Когда, наряду с ограничениями "$\geq$" или "=", присутствуют ограничения "$\leq$" на практике используют, для компактности расчётных таблиц, вместо целиком искусственного базиса, ***смешанный базис***, составленный из ортов, соответствующих как искусственным переменным, так и дополнительным переменным, введённым для канонизации неравенств со знаком "$\leq$".

Подведя итоги, скажем, что метод искусственного базиса применяется в следующих случаях.

- Все знаки отношения в системе ограничений имеют вид "$\geq$". Имеем чисто искусственный базис.

- Все знаки имеют вид “=”. Также строится чисто искусственный базис.
- Имеется смесь знаков “≥” и “=”. Базис чисто искусственный.
- Имеется смесь знаков “≥”, “=” и “≤”. Базис смешанный.

Для того, чтобы, по мере потери надобности, избавляться от искусственных переменных, которые, как мы помним, не имеют содержательного смысла ни в постановке задачи, ни при её канонизации, в целевую функцию искусственные переменные вводятся с коэффициентами $-\mu$ для задач максимизации и $+\mu$ для решения задач минимизации, где μ – бесконечно большое число.

Обратите внимание, что знак выбран таким, чтобы помешать оптимизации.

Алгоритм метода дадим в отличиях от прямого симплекс-метода для избегания повторения, которое, вопреки расхожему мнению о “матери учения”, таковою быть не может, ибо – среднего рода.

Алгоритм метода искусственных переменных

1. Ограничения исходной математической модели подвергаются канонизации путём введения дополнительных переменных в ограничения со знаками “≥” и “≤”. Система ограничений при этом приобретёт вид (2.12).

2. В те ограничения, которые изначально имели знаки “≥” и “=”, вводятся искусственные переменные. Эти же одновременно вводятся в целевую функцию с бесконечно большими множителями $\pm\mu$, знаки которых определяются направлением оптимизации: $-\mu$ для задач максимизации и $+\mu$ для решения задач минимизации. Ограничения при этом трансформируются в форму (2.13). В развёрнутой форме записи, для случая всех знаков “≥”, получается

$$f(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) = c_1x_1 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \pm \mu x_{n+m+1} ... \pm \mu x_{n+2m},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 1x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} - 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 1x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... - 1x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 1x_{n+2m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

Векторы-орты A_{n+m+1}, A_{n+m+2}, ..., $A_{n+2\times m}$ – образуют начальный базис в крайней точке

$$X_0^T = \left[\underbrace{0,...,0}_{\leftarrow n \rightarrow},\quad \underbrace{0,...0}_{\leftarrow n \rightarrow},\quad b_1, b_2, ..., b_m\right]$$

выпуклого полиэдрального множества.

3. По условиям расширенной задачи производится построение симплекс-таблицы следующего общего вида.

		c_j	c_1	...	c_n	0	...	0	$\pm\mu$	$\pm\mu$	...	$\pm\mu$
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	...	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+m}	A_{n+m+1}	A_{n+m+2}	...	A_{n+2m}
A_{n+m+1}	$\pm\mu$,	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	-1	...	0	1		...	
A_{n+m+2}	$\pm\mu$,	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0	0		...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	
A_{n+2m}	$\pm\mu$,	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	-1	0		...	
	δ	δ_0	δ_1	...	δ_n	δ_{n+1}	...	δ_{n+m}	δ_{n+m+1}	δ_{n+m+2}	...	δ_{n+2m}

4. Задача решается изложенным в предыдущем разделе симплекс-методом, со всеми нюансами.

5. Если искусственная переменная выводится из базиса, то соответствующий ей столбец удаляется из таблицы.

6. В процессе решения необходимо вывести искусственные переменные из базиса. Если строка симплекс-разностей указывает на получение оптимума, а в базисе находятся искусственные переменные, то это означает несовместность системы ограничений. Это дополнительный признак неразрешимости по сравнению с прямым симплекс-методом.

Продемонстрируем работу алгоритма на ранее рассмотренном примере. Математическая модель модернизирована. Заменены: направление оптимизации, знаки в первом и втором неравенстве, а все неравенства умножены на 10 для удобства расчётов.

$$f = 5k_1 + 6k_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 \geq 18; \\ 2k_1 + 1k_2 \geq 12; \\ 3k_1 + 3k_2 \leq 24; \\ k_1 \geq 0;\ k_2 \geq 0. \end{cases}$$

Каноническая форма с введёнными искусственными переменными для этого случая есть

$$f = 5k_1 + 6k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + \mu k_6 + \mu k_7 + \mu k_8 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 + 1k_3 + 0k_4 + 0k_5 + 1k_6 + 0k_7 + 0k_8 = 18; \\ 2k_1 + 1k_2 + 0k_3 + 1k_4 + 0k_5 + 0k_6 + 1k_7 + 0k_8 = 12; \\ 3k_1 + 3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 1k_5 + 0k_6 + 0k_7 + 1k_8 = 24; \\ k_1 \geq 0;\ k_2 \geq 0;\ k_3 \geq 0;\ k_4 \geq 0;\ k_5 \geq 0;\ k_6 \geq 0;\ k_7 \geq 0;\ k_8 \geq 0. \end{cases}$$

В записи использован полностью искусственный базис A_6, A_7, A_8, однако, так как вектор A_8 дублирует вектор A_5, следует использовать смешанный базис A_6, A_7, A_5, составленный как из дополнительных, так и из искусственных переменных. Первоначально решение, в последнем случае, находится в точке с координатами (0; 0; 0; 0; 24; 18; 12).

Построим симплекс-таблицу, содержащую векторное представление канонической формы.

			c_j	5	6	0	0	0	μ	μ
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
	A_6	μ	18	2	3	–1	0	0	1	0
←	A_7	μ	12	2	1	0	–1	0	0	1
	A_5	0	24	3	3	0	0	1	0	0
		δ_j	30μ	4μ–5	4μ–6	–μ	–μ	0	0	0
				↑						

Значения симплекс-разностей свидетельствуют о том, что текущий план необходимо улучшать. По поводу выбора направляющего столбца в шутку, хотя в ней немало логики, заметим, что “четыре мешка зерна без пяти зёрнышек” больше, чем “четыре мешка зерна без шести зёрнышек”

1-я итерация даёт:

			c_j	5	6	0	0	0	μ
	Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
←	A_6	μ	6	0	2	–1	1	0	1
	A_1	5	6	1	0,5	0	–0,5	0	0
	A_5	0	6	0	1,5	0	1,5	1	0
		δ_j	6μ+30	0	2μ–3,5	-μ	μ–2,5	0	0
					↑				

После 2-й итерации получим оптимальное решение:

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	6	3	0	1	-0,5	0,5	0
A_1	5	4,5	1	0	0,25	-0,75	0
A_5	0	1,5	0	0	0,75	2,25	1
	δ_j	40,5	0	0	-1,75	-0,75	0

Достигнут минимум целевой функции в точке с координатами (4,5; 3; 0; 0; 0,15). Это хорошо просматривается на рисунке 2.3, с учётом области

действия двух первых ограничений. Оптимальное значение при этом равно $F_{\max} = 40{,}5$ при основных переменных $k_1 = 4{,}5$ и $k_2 = 3$.

2.2.7. Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом [24, 25]

Указанный метод называется ещё ***методом обратной матрицы***.

Его особенностью является работа только с базисными векторами, поэтому объём расчётом определяется числом базисных векторов, определяемым размером системы ограничений m. По этой причине наибольшая эффективность алгоритма, по сравнению с прямым симплекс-методом или методом искусственного базиса, проявляется, когда n значительно превосходит m. Экономия памяти под промежуточные результаты и сравнительно меньший объём вычислений обусловил преимущественную реализацию этого метода на ЭВМ. Впервые предложен Л.В. Канторовичем.

Для расчётов используются ***две таблицы***. Вспомогательная таблица, содержащая в постоянной части каноническую форму системы ограничений, а в переменной части – заранее не известное число строк симплекс-разностей, пополняемых по мере расчёта при завершении итерации. По необходимости, каноническая форма пополняется искусственными переменными, а таблица – соответствующими им столбцами векторов искусственного базиса.

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ^0	δ_0^0	δ_1^0	...	δ_n^0	δ_{n+1}^0	...	δ_{n+m}^0
	...							
	δ^r	δ_0^r	δ_1^r	...	δ_n^r	δ_{n+1}^r	δ_0^r	δ_1^r

Основная таблица, в которой производятся расчёты и содержится матрица, обратная матрице, ***составленной из базисных векторов*** системы ограничений ***канонической задачи***, из-за чего метод и получил второе своё название.

$$\longleftarrow A_x^{-1} \longrightarrow$$

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	A^*	Θ
A_{n+1}	0	b_1	1	0	…	0		
A_{n+2}	0	b_2	0	1	…	0		
...	...	...	...	…	…	...		
A_{n+m}	0	b_m	0	0	…	1		
	Λ	λ_0	λ_1	λ_2	...	λ_m		

Графы последней таблицы имеют следующее смысловое наполнение.

A_x^{-1} – фрагмент матрицы, обратной исходной матрице ограничений. Первоначально – это единичная матрица.

Столбец e_0 вычисляется по векторной формуле

$$e_0 = A_x^{-1} \times A_0, \tag{2.14}$$

что, на первых порах совпадает с A_0.

Строка оценок Λ определяется формулой

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1}, \tag{2.15}$$

а произведение

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0 \tag{2.16}$$

есть текущее значение целевой функции.

Столбец A^* рассчитывается после выбора направляющего столбца:

$$A^* = A_x^{-1} \times A_{j^*}. \tag{2.17}$$

Столбец оценок Θ служит для определения вектора, выводимого из базиса:

$$\Theta_i = \frac{e_{i,0} \ge 0}{a_i^* > 0}. \tag{2.18}$$

Алгоритм модифицированного симплекс-метода

1. Приведение задачи к канонической форме, введение, по необходимости, искусственных переменных, формирование на их базе основной и вспомогательных таблиц.

2. Расчёт текущего значения целевой функции (2.14), вектора оценок (2.15) и симплекс-разностей . Расчёт последних выполняют по формуле

$$\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j, \tag{2.19}$$

где A_j – столбец вспомогательной таблицы.

3. Анализ симплекс-разностей на предмет получения оптимального решения. Осуществляется традиционным для прямого симплекс-метода способом. При наличии в базисе искусственных переменных, здесь может быть определена несовместность системы ограничений.

4. Выбор направляющего столбца и вектора, вводимого в базис, выполняется на основании симплекс-разностей по известному правила:

$$\max : \arg\min_j \delta_j < 0 \rightarrow j^*, \text{ или } \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \rightarrow j^*.$$

5. Выполнение пересчёта вектора вводимого в базис вектор A^* и заполнение соответствующего столбца основной таблицы осуществляется по формуле (2.17).

6. Заполнение столбца Θ основной таблицы по выражению (2.18).

7. Выбор направляющей строки по минимальному значению компонентов столбца Θ. Если направляющую строку определить не удаётся, то необходимо выбрать другой столбец в качестве направляющего, повторив пп. 4 – 7. В случае невозможности выбора остаётся констатировать неразрешимость задачи по причине не замкнутости области в направлении оптимизации.

8. Преобразование основной таблицы по методу исключений Жордана – Гаусса.

9. После пересчёта таблицы алгоритм продолжает своё выполнение с п.2.

Пример. Используем математическую модель из демонстрационных материалов раздела 2.2.1 вида

$$f = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим каноническую форму и вспомогательную таблицу.

		c_j	5	6	0	0	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	18	2	3	1	0	0
A_4	0	12	2	1	0	1	0
A_5	0	24	3	3	0	0	1
	δ^0	0	-5	-6↑	0	0	0
	δ^1	36	-1↑	0	2	0	0
	δ^2	40,5	1	0	2/3	2/3	0

Формируем основную таблицу.

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
←	A_3	*0*	18	1	0	0	3	6
	A_4	*0*	12	0	1	0	1	12
	A_5	*0*	24	0	0	1	3	8
		Λ	*0*	0	0	0		

$$A_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассчитываем оценки Λ по формулам (2.11) и (2.12) и заносим в основную таблицу.

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Рассчитываем симплекс-разности по формуле (2.15) и помещаем во вспомогательную таблицу.

$$\delta_1 = \Lambda^T \times A_1 - c_1 = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 = -5,$$

$$\delta_2 = \Lambda^T \times A_2 - c_2 = [0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = -6,$$

$$\delta_3 = 0,\ \delta_4 = 0,\ \delta_5 = 0.$$

По значениям симплекс-разностей определяем: оптимум не достигнут, направляющий столбец – 2-й.

1-я итерация.

Пересчитываем столбец, используя (2.17),

$$A^* = A_x^{-1} \times A_j^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ и помещаем в основную таблицу.

Вычисляем оценки (2.18), тако же помещаем в соответствующий столбец основной таблицы

$$\Theta^T = \left[\frac{e_{i,0} \ge 0}{a_i^* > 0}\right] = \left[\frac{18}{3} \quad \frac{12}{1} \quad \frac{24}{3}\right] = [6 \quad 12 \quad 8]$$

и принимаем решение о выводе из базиса вектора A_3 (обозначен стрелкой), направляющий элемент выделен серым цветом.

Пересчитываем таблицу по методу исключений Жордана-Гаусса.

	Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	e_3	A^*	Θ
	A_2	*6*	6	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	9
←	A_4	*0*	6	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{2}$
	A_5	*0*	6	-1	0	1	1	6
		Λ	*36*	2	0	0		

Рассчитываем оценки Λ по формулам (2.14) и (2.15) и заносим в основную таблицу.

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1} = [6 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0 \quad 0].$$

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0 = [6 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 36.$$