2.5.7. Задачи квадратичного программирования

Квадратичное программирование – специальный класс НП-задач, в которых $f(X)$ – квадратичная (не выше второй степени переменных) вогнутая (выпуклая вверх) функция, а все ограничения $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ – линейны.

Математическая модель такой задачи выглядит следующим образом [4, 11, 29, 30]

$$f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \to \max, \qquad AX \le A_0,\ X \ge 0, \tag{2.110 2.110}$$

где C — симметричная отрицательно определённая матрица размерностью $[n \times n]$, b^T — вектор-строка размерностью $[1 \times n]$, A — матрица системы ограничений размерностью $[m \times n]$, A_0 — вектор свободных членов системы ограничений размерностью $[m \times 1]$, n — число переменных, m – число ограничений.

Задача решается путём применения теоремы Куна-Таккера, в результате чего получается система линейных ограничений, которую можно решить симплекс-методом.

Функция Лагранжа, построенная по условиям задачи, имеет вид

$$L(X,\Lambda) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X + \Lambda^T (A_0 - A \cdot X).$$

Воспользуемся ранее полученными результатами из пункта 2.5.4.2. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X} = b + C \cdot X - A^T \Lambda \le 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda} = A_0 - A \cdot X \ge 0. \end{cases}$$

Приведя её к каноническому виду и добавив условия дополняющей нежёсткости, получим констатирующую формулировку нижеследующей теоремы.

Теорема квадратичного программирования. Вектор $X_0 \ge 0$ является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и

только тогда, когда существуют такие m-мерные вектора $\Lambda > 0$, $W \ge 0$ и n-мерный вектор $V \ge 0$, что выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} & b + C \cdot X_0 - A^T \Lambda + V = 0, && \text{а)} \\ & A_0 - AX_0 - W = 0, && \text{б)} \\ & \left.\begin{aligned} V^T X_0 = 0 \\ W^T \Lambda = 0 \end{aligned}\right\}. && \text{в)} \end{aligned} \tag{2.111}$$

Компоненты всех векторов Λ, W и V — неотрицательны, а вектора W и V могут быть нулевыми. Условия (2.111, а) и (2.111, б) образуют систему из $n + m$ уравнений для $2 \times (n + m)$ неизвестных компонентов X, Λ, V и W. Ограничения (2.111, в) есть условия дополняющей нежёсткости.

Алгоритм решения задачи квадратичного программирования

1. Условия (2.111, а) и (2.111, б) необходимо представить в форме, обеспечивающей положительность элементов столбцов свободных членов

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V = b, \\ AX + W = A_0. \end{cases} \tag{2.112}$$

2. Поскольку знак в ограничениях (2.112) – равенство, следует воспользоваться методом искусственного базиса. Необходимо добавить искусственные переменные $\{y_i\}$ в первую группу уравнений, и $\{z_i\}$, при этом система ограничений примет вид

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V + Z = b, \\ AX + W + Y = A_0. \end{cases} \tag{2.113}$$

3. Конструируется псевдоцелевая [4] функция из искусственных переменных

$$\sum_{i=1}^{m} \mu \cdot y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu \cdot z_j \to \min. \tag{2.114}$$

4. Решается эквивалентная ЗЛП с функцией цели (2.114) при ограничениях (2.113).

Если в ходе решения ЗЛП векторы Y и Z будут выведены из базиса в полном составе (достигнут оптимум), а полученные значения X, Λ, V и W не отрицательны, а так же удовлетворяют (2.111, в), то компоненты вектора X представляют собой оптимальное решение исходной задачи квадратичного программирования (2.110).

5. Рассчитывается значение целевой функции.

Пример.

Пусть компоненты условия (2.110) выглядят так

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\3&2\\1&1\end{pmatrix},\ A_0=\begin{pmatrix}10\\6\\4\end{pmatrix},\quad b^T=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Матрица C симметричная, а об отрицательной определённости можно судить по критерию Сильвестра – знаки минорных определителей должны чередоваться.

$$C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \Delta_1=c_{11}=-\frac{1}{2}<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}>0.$$

Следовательно, матрица C определена отрицательно.

Построение развёрнутой модели (2.110), соответствующей нашим условиям, даёт результат

$$f(x_1,x_2)=2\cdot x_1+3\cdot x_2+\frac{1}{4}\cdot x_1\cdot x_2-\frac{1}{4}\cdot x_1^2-\frac{1}{4}\cdot x_2^2\to\max$$

$$\begin{cases}2\cdot x_1+5\cdot x_2\le 10,\\3\cdot x_1+2\cdot x_2\le 6,\\1\cdot x_1+1\cdot x_2\le 4,\\x_1\ge 0,x_2\ge 0,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}10-2\cdot x_1-5\cdot x_2\ge 0,\\6-3\cdot x_1-2\cdot x_2\ge 0,\\4-1\cdot x_1-1\cdot x_2\ge 0,\\x_1\ge 0,x_2\ge 0.\end{cases}$$

Правая запись системы ограничений соответствует формальному виду, применяемому для представления ограничений в задачах вогнутого программирования.

Исследуем целевую функцию данной задачи на экстремум, найдём координаты стационарной точки.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=2+\dfrac{1}{4}\cdot x_2-\dfrac{1}{2}\cdot x_1=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=3+\dfrac{1}{4}\cdot x_1-\dfrac{1}{2}\cdot x_2=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\left(2+\dfrac{1}{4}\cdot x_2\right),\\[2mm]3+\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{4}\cdot x_2\right)-\dfrac{1}{2}\cdot x_2=0.\end{cases}\Rightarrow X^*=\begin{pmatrix}\frac{28}{3}\\ \frac{32}{4}\end{pmatrix}$$

Полученная точка, в которой наблюдается безусловный глобальный максимум, лежит за пределами области ограничений, значение целевой функции в этой точке есть $f(X^*)=\dfrac{196}{9}\cong 21{,}7$.

По условиям задачи может быть составлена функция Лагранжа

$$\begin{aligned}L(X,\Lambda)=2\cdot x_1+3\cdot x_2+\frac{1}{4}\cdot x_1\cdot x_2-\frac{1}{4}\cdot x_1^2-\frac{1}{4}\cdot x_2^2\ &+\lambda_1(10-2\cdot x_1-5\cdot x_2)+\\&+\lambda_2(6-3\cdot x_1-2\cdot x_2)+\\&+\lambda_3(4-1\cdot x_1-1\cdot x_2).\end{aligned}$$

Применение подхода, связанного с поисками безусловного экстремума функции без ограничений (функции Лагранжа) в задачах вогнутого программирования, позволяет получить систему ограничений для поиска значений X и Λ, являющихся координатами экстремальной точки.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1}=2+\dfrac{1}{4}\cdot x_2-\dfrac{1}{2}\cdot x_1-2\cdot\lambda_1-3\cdot\lambda_2-1\cdot\lambda_3\le 0,\\[2mm]\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1}=3+\dfrac{1}{4}\cdot x_1-\dfrac{1}{2}\cdot x_2-5\cdot\lambda_1-2\cdot\lambda_2-1\cdot\lambda_3\le 0,\\[2mm]\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial\lambda_1}=10-2\cdot x_1-5\cdot x_2\ge 0,\\[2mm]\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial\lambda_2}=6-3\cdot x_1-2\cdot x_2\ge 0,\\[2mm]\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial\lambda_3}=4-1\cdot x_1-1\cdot x_2\ge 0.\end{cases}$$

Для канонизации системы ограничений добавим с соответствующими знаками компоненты векторов V и W. Получим следующую каноническую форму системы ограничений:

$$\begin{cases} 2+\frac{1}{4}\cdot x_2-\frac{1}{2}\cdot x_1-2\cdot\lambda_1-3\cdot\lambda_2-1\cdot\lambda_3+1\cdot v_1=0, \\ 3+\frac{1}{4}\cdot x_1-\frac{1}{2}\cdot x_2-5\cdot\lambda_1-2\cdot\lambda_2-1\cdot\lambda_3+1\cdot v_2=0, \\ 10-2\cdot x_1-5\cdot x_2-1\cdot w_1=0, \\ 6-3\cdot x_1-2\cdot x_2-1\cdot w_2=0, \\ 4-1\cdot x_1-1\cdot x_2-1\cdot w_3=0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ \Lambda>0, V\ge 0, W\ge 0. \end{cases}$$

Сопоставив полученные выражения с выражениями (2.111, а, б) теоремы квадратичного программирования, отметим их полное соответствие.

Пункт № 1 алгоритма.

Преобразуем данную каноническую форму системы ограничений, так, чтобы в столбце свободных членов находились бы положительные элементы.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x_1-\frac{1}{4}\cdot x_2+2\cdot\lambda_1+3\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3-1\cdot v_1=2, \\ -\frac{1}{4}\cdot x_1+\frac{1}{2}\cdot x_2+5\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3-1\cdot v_2=3, \\ 2\cdot x_1+5\cdot x_2+1\cdot w_1=10, \\ 3\cdot x_1-2\cdot x_2+1\cdot w_2=6, \\ 1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot w_3=4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ \Lambda>0, V\ge 0, W\ge 0. \end{cases}$$

Пункты № 2,3 алгоритма.

Построим эквивалентную ЗЛП, введя псевдоцелевую функцию и модифицировав систему ограничений. Функция

$$\mu\cdot y_1+\mu\cdot y_2+\mu\cdot z_1+\mu\cdot z_2+\mu\cdot z_3\to\min$$

Наименование “псевдоцелевая” функция получила, поскольку составляется только из искусственных переменных, а оптимальное решение, в случае его существования, приведёт к обращению её в нуль.

Система ограничений после введения искусственных переменных примет вид.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x_1-\frac{1}{4}\cdot x_2+2\cdot\lambda_1+3\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3-1\cdot v_1+y_1=2, \\ -\frac{1}{4}\cdot x_1+\frac{1}{2}\cdot x_2+5\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+1\cdot\lambda_3-1\cdot v_2+y_2=3, \\ 2\cdot x_1+5\cdot x_2+1\cdot w_1+z_1=10, \\ 3\cdot x_1-2\cdot x_2+1\cdot w_2+z_2=6, \\ 1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot w_3+z_3=4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ \Lambda>0, V\ge 0, W\ge 0,\ Y\ge 0, Z\ge 0. \end{cases}$$

Поскольку переменных *X*, *Λ*, V, W, Z много больше числа ограничений, в качестве алгоритма решения ЗЛП следует модифицированный симплекс-метод.

Пункт № 4 алгоритма.

Подробный ход расчётов опускается, приводится конечный результат решения, опровергнуть или подтвердить который Читатель может самостоятельно, перерешав ЗЛП.

Координаты оптимума составляют:

$$x_1=\frac{10}{11}, x_2=\frac{18}{11}, \lambda_1=\frac{103}{242}, \lambda_2=\frac{109}{242}, \lambda_3=0, v_1=0, v_2=0, w_1=0, w_2=0, w_3=\frac{16}{11}.$$

Элементы векторов *V* и *W* неотрицательны, среди элементов вектора *Λ* – есть положительные (не все равны нулю по Куну-Таккеру).

Так как $x_1\cdot v_1=0,\ x_2\cdot v_2=0,\ \lambda_1\cdot w_1=0,\ \lambda_2\cdot w_2=0,\ \lambda_3\cdot w_3=0,$ то условие дополняющей нежёсткости выполнено, и решение задачи квадратичного программирования находится в крайней точке множества допустимых стратегий, значение функции равно $f\left(\frac{10}{11},\frac{18}{11}\right)=\frac{753}{121}\cong 6{,}223$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как выглядит в общем виде модель для задачи нелинейного программирования?
2. Какие существуют типы задачи НП, чем они различаются?
3. Как формулируются необходимые условия оптимальности в задачах безусловной оптимизации?

4. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой ограниченной области?
5. Что называется частной производной первого порядка функции нескольких переменных?
6. Как следует понимать термины «выпуклая» и «вогнутая» функции применительно к задачам нелинейного программирования?
7. Что называется линией уровня функции двух переменных?
8. Что называется поверхностью уровня функции трех переменных?
9. Что такое частная производная второго порядка функции нескольких пе-
10. ременных?
11. Что называется стационарной точкой?
12. Какие численные методы существуют для вычисления частных производных?
13. Что такое критическая точка функции нескольких переменных?
14. Обязана ли критическая точка быть точкой экстремума?
15. В чем состоит схема исследования функции нескольких переменных на экстремум?
16. Что такое условный экстремум функции нескольких переменных?
17. Какие задачи относят к выпуклому программированию, а какие – к вогнутому?
18. Где отмечаются минимальные и максимальные значения функций в НП-задачах?
19. Как используется матрица Гёссе при определении экстремумов целевой функции?
20. Для чего в задачах многомерной оптимизации применяются методы одномерной минимизации?
21. Какие методы поиска относятся к прямым, а какие – к градиентным?
22. Что такое градиент функции нескольких переменных?
23. Как определить составляющие вектора градиента?
24. Когда будет происходить наискорейший спуск, а когда – полношаговый?
25. Каковы основные свойства градиента функции в некой точке?
26. В чем заключается градиентные методы при поиске минимума функции?
27. Как определяется шаг поиска в градиентных методах?
28. Что такое сопряженные направления?
29. В чём состоят достоинства и недостатки метода Ньютона?
30. В чём предназначение квазиньютоновских методов?
31. Как сконструировать функцию Лагранжа?
32. Что представляют собой множители Лагранжа?
33. В чем заключается метод множителей Лагранжа?

34. В каких случаях необходимые условия оптимальности в задаче НП также являются и достаточными?
35. Какое ограничение НП-задачи называется активным?
36. Как формулируется теорема Куна-Таккера?
37. В чём заключается условие дополняющей нежёсткости?
38. Каковы особенности седловой точки функции многих переменных?
39. Как формулируется теорема о седловой точке?
40. Что вкладывается в понятие “возможное направление”?
41. Для чего строится проецирующая матрица в методе Зойтендейка?
42. Каковы общие идеи, положенные в основу методов штрафных функций?
43. Какие требования предъявляют к штрафным функционалам методов барьерных поверхностей?
44. Какие требования предъявляют к штрафным функционалам методов внешней точки?
45. За счёт чего происходит решение НП-задачи в методах внешней точки?
46. Как формулируется теорема квадратичного программирования?
47. Как по «внешнему» виду математической модели определить: относится ли она к задачам квадратичного программирования?
48. Что означает термин “симметричная” матрица?
49. Что означают термины “отрицательно” и “положительно” определённые матрицы?
50. Когда задача квадратичного программирования неразрешима?
51. Можно ли решить задачу квадратичного программирования для случая с функцией цели вида $f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T CX \to \max$, когда C — симметричная, положительно определённая матрица, и, если Вы полагаете, что можно, поясните, каким образом?
52. Какие шаги предпринять, чтобы пользуясь изложенным выше методом решить НП-задачу с целевой функцией вида $f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T CX$ на минимум?