

- по характеристической функции $u^* = v(\{2, 3\}) = 0$;
 - по соображению, что предприятие № 1 реально воспрепятствует получению выигрыша больше, чем $v^* = c - b$, перебивая цену.
- Воспользовавшись формулами (4.41) получим:

$$\tilde{u} = \frac{1}{2}(k - c + b), \tilde{v} = \frac{1}{2}(k + c - b).$$

Теперь необходимо рассмотреть игру между КБ и коалицией $\{2, 3\}$. На основании характеристической функции имеем $(u^*, v^*) = (a, 0)$. По схеме Нэша КБ получит: $\tilde{u} = \frac{1}{2}(c + a)$, а коалиция предприятий – $\tilde{v} = \frac{1}{2}(c - a)$, откуда прибыль коалиции составит $k = \frac{1}{2}(c - a)$, поэтому, в конце концов, получается такой вектор платежей

$$V = \left\{ \frac{1}{2}(c + a); \frac{1}{4}(2b - a - c); \frac{1}{2}(3c - a - 2b) \right\}.$$

Указанное решение будет иметь смысл, когда $2b - a - c \geq 0 \Rightarrow c + a \leq 2b$.

Окончательно имеем значение игр по Шепли:

$$\begin{cases} \varphi_1[v] = \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c; \\ \varphi_2[v] = -\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b; \\ \varphi_3[v] = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Пример 3.

Для заправки кораблей топливом n сторон должны строить хранилища. Пусть стоимость хранилища задаётся возрастающей функцией от его объёма. Потребности каждой стороны в топливе определяются с помощью функции $f_i(t)$, $i = 1, \bar{n}$, где t – время наступления потребности, откуда суммарный объём хранилищ $\max_t \sum_{i=1}^n f_i(t)$. Когда образуется

коалиция S , то объём такого хранилища составит $\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)$, а его стоимость – $F\left(\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)\right)$.

Необходимо определить коалиции, которые займутся строительством и число таких хранилищ.

Будем считать, что это игра n лиц с характеристической функцией

$$v(s) = F\left(\max_t \sum_{i \in S} f_i(t)\right).$$

Применение подхода Шепли, после вычисления компонент вектора $\varphi_i[v]$ для каждой коалиции необходимо проверить выполнение неравенства

$$\varphi_{S_i}[v] < \varphi_i[v],$$

где $\varphi_{S_i}[v]$ – вектор Шепли, заданный функцией на подмножествах коалиций. При удовлетворении неравенства, коалиция S будет строить своё хранилище, игроки, не вошедшие в неё – своё. Если все игроки вошли в одну коалицию, то они сообща строят общее хранилище, а бремя расходов распределяется согласно вектору Шепли.

Пусть, в конкретных цифрах, имеем [53] характеристическую функцию вида

Коалиция $\{S\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
Характеристическая функция $v\{S\}$	2	3	2,5	4	3,9	5	6

Для коалиций $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$ по формуле (4.45) найдём, сперва

$$\varphi_1[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-5) + \frac{1!1!}{3!}(4-3) + \frac{1!1!}{3!}(3,9-2,5) + \frac{0!2!}{3!}(2-0) = \frac{8,4}{6};$$

$$\varphi_2[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-3,9) + \frac{1!1!}{3!}(4-2) + \frac{1!1!}{3!}(5-2,5) + \frac{0!2!}{3!}(3-0) = \frac{14,7}{6};$$

$$\varphi_3[v] = \frac{2!0!}{3!}(6-4) + \frac{1!1!}{3!}(3,9-2) + \frac{1!1!}{3!}(5-3) + \frac{0!2!}{3!}(2,5-0) = \frac{12,9}{6}.$$

Затем, для коалиций $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$ получается

$$\varphi'_1[v] = \frac{3}{2}; \varphi''_1[v] = \frac{3,5}{2}; \varphi'_2[v] = \frac{5}{2}; \varphi''_2[v] = \frac{5,5}{2}; \varphi'_3[v] = \frac{4,5}{2}; \varphi''_3[v] = \frac{4,4}{2}.$$

Сравнив $\varphi_i[v]$, $\varphi'_i[v]$ и $\varphi''_i[v]$, заметим, что неравенство $\varphi_{S_i}[v] < \varphi_i[v]$ не выполняется, поэтому игрокам целесообразно построить одно мегахранилище, при этом расходы определяться таким образом:

- первый компаньон – $\frac{8,4}{6}$;

- второй компаньон – $\frac{14,7}{6}$;
- третий компаньон – $\frac{12,9}{6}$

условных единиц затрат.

Иногда распределение ресурсов n игроков задаётся при помощи функций вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые обладают следующими свойствами

- f линейный по каждой переменной полином;
- $f(x) = 0$, если $x = 0$;
- $f(x) = f(\pi x)$, где π – произвольная перестановка.

В [45] доказана следующая **теорема**. Существует лишь один набор линейных по каждой переменной полиномов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ который удовлетворяет аксиомам:

- а) если $x_i = 0$, то $\varphi_i(x) \equiv 0$;
- б) если π_{ij} – произвольная перестановка, которая переводит игрока i в j , то $\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(\pi_{ij} x)$;
- в) если π_{ij} – произвольная перестановка, которая переводит игрока i в i , то $\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(\pi_i x)$;
- г) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \equiv f(x)$.

Этот набор является вектором Шепли для игры с характеристической функцией $v(S) = f(x^S)$, где $x_i^S = 0$ при $x \notin S$, $x_i^S = x_i$ при $x \in S$.

Действительно, по условиям полином имеет вид

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i + \alpha_2 \sum_{i < j} x_i x_j + \alpha_3 \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k + \dots + \alpha_n x_1 x_2 \dots x_n,$$

где α_i – некоторый коэффициент.

По аксиомам а) и г) получается, что

$$\varphi_1(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1 \sum_{i \neq 1} x_i + \beta_3 x_1 \sum_{1 \neq j < k} x_j x_k + \dots + \beta_n x_1 x_2 \dots x_n,$$

аксиома б) обеспечивает

$$\varphi_i(x) = \beta_1 x_i + \beta_2 x_i \sum_{j \neq i} x_j + \beta_3 x_i \sum_{\substack{j < k \\ j \neq i \\ k \neq i}} x_j x_k + \dots + \beta_n x_i \prod_{k \neq i} x_k, \quad (4.46)$$

а применение аксиомы г)

$$f \equiv \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j \neq i} x_j + \dots + \beta_n \sum_{i=1}^n x_i \prod_{k \neq i} x_k,$$

откуда $\beta_1 = \alpha_1; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{2}; \dots; \beta_n = \frac{\alpha_n}{n}$.

Компоненты вектора Шепли для игры с характеристической функцией $v(S) = f(x^S)$ суть

$$\varphi_i[x] = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(i-1)!(n-1)!}{n!} [f(x^T) - f(x^{T \setminus \{i\}})].$$

Пример 4. Пусть цепочка из n предприятий производит продукцию в таком порядке:

- е предприятие добывает сырьё;
- е предприятие делает полуфабрикат из сырья;
- е предприятие из полуфабриката производит промежуточный продукт;

и так далее, по технологической цепочке, причём в каждом её звене единица входного продукта преобразуется в единицу выходного, а стоимость сырья равна 1.

Пусть стоимость возросла, а i -му предприятию требуется уже не единица входного продукта, а $1 + x_i$, $i > 1$.

В новых условиях стоимость полуфабриката n -ого предприятия будет равна

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i), \text{ а убыток составит } f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i) - 1.$$

Требуется определить распределение убытков между предприятиями.

По формуле (4.46) получается

$$\varphi_i^*(x) = x_i + \frac{1}{2} x_i \sum_{j \neq i} x_j + \frac{1}{3} x_i \sum_{\substack{j < k \\ j \neq i \\ k \neq i}} x_j x_k + \dots + \frac{1}{n} x_i \prod_{k \neq i} x_k.$$

Пусть $n = 3$. Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3,$$

$$\varphi_i^*(x) = x_i + \frac{1}{2} x_i \sum_{j \neq i} x_j + \frac{1}{3} x_i x_2 x_3.$$

Положим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и получим:

$$\varphi_1^*(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 + 3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 5,5;$$

$$\varphi_2^*(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 + 3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 8,0;$$

$$\varphi_3^*(x) = 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 + 2) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 9,5;$$

$$f(x) = 23.$$

В результате общий убыток составит 23 единицы, 1-е предприятие потеряет 5,5 единиц, 2-е потеряет 8, а на долю третьего придётся 9, 5 единиц потерь.

4.11. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется “конфликтом”?
2. Что такое “цена игры”?
3. Что называется стратегией?
4. В чём состоит основная задача теории игр?
5. Что означает термин “игра с нулевой суммой”?
6. Что называется правилами игры?
7. Как формально описать игры двух персон?
8. Как Вы понимаете термины “чистые” и “смешанные” стратегии?
9. Что такое “платёжная матрица”?
10. Что утверждает основная теорема теории игр?
11. Что утверждает теорема об активных стратегиях?
12. Как скажется на стратегиях игроков умножение платёжной матрицы на положительное число?
13. Как скажется на стратегиях игроков добавление ко всем элементам платёжной матрицы произвольного числа?
14. Что вкладывается в понятие “оптимальная стратегия”?
15. Как определить седловые точки платёжной матрицы?
16. Когда представляется возможным применение графоаналитического метода для расчёта оптимальных стратегий?
17. На чём обоснован метод графоаналитического решения матричных игр?
18. Как, используя метод доминирования, добиться понижения размерности платёжной матрицы?
19. На чём основано применение симплекс-метода для решения задач теории игр?
20. Каковы достоинства и недостатки итерационного метода решения игровых задач?
21. Какие ситуации описываются моделями позиционных игр?
22. Какие игры называются играми с полной информацией, а какие – с неполной памятью?
23. Что такое “стратегия поведения”?
24. Что вкладывается в понятие “информационное множество”?
25. Какая игра называется “игра-компонента”?
26. В чём заключается общий подход к решению многошаговых игр?
27. Когда конфликтная ситуация моделируется стохастической игрой?
28. В какой ситуации необходимо применять усечение игры?

29. В чём отличия рекурсивной игры от стохастической?
30. В каком случае игровая модель представляется игрой на квадрате?
31. Что такое “ядро игры”?
32. Как представляются оптимальные стратегии в играх на квадратах?
33. Что вкладывается в понятие игр дуэльного типа?
34. В каком случае будет использована дуэль шумного типа, а в каком – бесшумного?
35. Что является побудительным мотивом возникновения кооперации игроков?
36. Когда игра разрешима в смысле Нэша?
37. Что представляет собой совместная смешанная стратегия?
38. Для чего может быть использован вектор Шепли?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математизация естественных наук означает формализацию содержательных моделей объективной реальности, которые используются этими науками для описания коллизий, возникающих в практической деятельности, для научного обоснования и принятия наилучших разумных и целесообразных решений. Формализация содержательных моделей является, как принято считать, прикладной функцией различных отраслей математики, которые и объединены в тот неудобоперевариваемый винегрет, который называется “исследованием операций” и изложению которого посвящён настоящийopus.

В заключение уместно процитировать Устав корпуса морских инженеров России 1910 г. “... Никакая самая совершенная инструкция не в состоянии переписать все возможные обязанности должностного лица, предусмотреть все отдельные случаи, и дать наперёд соответствующие указания. А по сему, господа инженеры должны проявить инициативу и употребить все свои знания и опыт для оправдания своего предназначения...”.

Тем и руководствоваться...

Автор

Библиографический список

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры [Текст]: / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967.
2. Акоф Р. Исследование операций [Текст]: / Р. Акоф, П. Райветт. - М.: Мир.-1986. – 230 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]: / И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
4. Анисимов В.В. Элементы теории массового обслуживания и асимптотический подход [Текст] / В.В. Анисимов, О.К. Закусило, В.С. Донченко. – К. : Вища школа, 1987. – 248 с.
5. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях [Текст] / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2012. – 448 с.
6. Байхельт Ф. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход [Текст] / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
7. Балашевич В.А. Основы математического программирования [Текст]: / В.А. Балашевич. - Минск: Высшая школа, 1985. – 174 с.
8. Банди Б. Методы оптимизации: Вводный курс [Текст]: / Б. Банди. - М.: Радио и Связь, 1988. – 128 с.
9. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. [Текст]: / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. - Киев: Вища школа, 1983. - 512 с.
10. Вагнер Г. Основы исследования операций [Текст]: в 3-х томах. / Г. Вагнер. - М.: Мир Т.1: 1972. - 335 с. Т.2: 1973. - 488 с. Т.3: 1973. – 501 с.
11. Васин А.А. Теория игр и модели математической экономики [Текст] / А.А. Васин, В.В. Морозов. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 272 с.
12. Введение в нелинейное программирование [Текст]: / Под. ред. К.-Х. Эльстера. – М.: Наука, 1985. – 263 с.
13. Вентцель Е.С. Исследование операций [Текст]: / Е.С. Вентцель. - М.: Наука, 1980. – 208 с.
14. Вентцель Е.С. Элементы теории игр [Текст]: / Е.С. Вентцель. - М.: Физматгиз, 1969.
15. Вильямс Дж. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр / Дж. Вильямс. - М.: Советское радио, 1960.
16. Воробьёв Н.И. Математическая теория игр [Текст]: / Н.И. Воробьёв. – Л.: Знание, 1963.
17. Гаас Е. Линейное программирование [Текст]: / Е. Гаас. - М.: ГФМЛ, 1961. - 309с.

18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер, М.: Наука, ГРФМЛ, 1988. – 552 с.
19. Гаррет Р. Основы анализа операций на море [Текст]: Пер. с английского И. Разумного под ред. Б. Балаева / Р. Гаррет, Дж. Лондон. - М.: Воениздат, 1974. - 270с.
20. Гельоранд И.М. Лекции по линейной алгебре [Текст]: / И.М. Гельоранд. - М.: Наука, 1971.
21. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст]: / Б.В. Гнеденко, М.Н. Коваленко. - М.: Наука, 1986. – 400 с.
22. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст]: / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. - М.: Наука, 1976. – 384 с.
23. Горлач Б.А. Исследование операций [Текст]:/ Б.А. Горлач. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2013. – 438 с.
24. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений [Текст] / А.А. Грешилов, – М.: МГТУ им. И.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
25. Губанов В.А. Введение в системный анализ [Текст]:/Т.С. Губанов. - Л.: Издательство ЛГУ, 1988. - 228с.
26. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение [Текст]: / Дж. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
27. Дегтярев Ю.И. Исследование операций [Текст]: / Ю.И. Дегтярев. - М.: Высшая школа, 1986. -320 с.
28. Денисов А.А. Теория больших систем управления [Текст]: / А.А. Денисов, Д.Н. Колесников - Ленинград: Энергоиздат, Ленинградское отделение, 1982. - 288 с.
29. Деордица Ю.Ф. Исследование операций в планировании управления [Текст]: / Ю.Ф. Деордица, Ю.М., Нефедов. - Киев: Вища школа, 1991. - 196 с.
30. Дрешер М. Стратегические игры [Текст]: / М. Дрешер. - М.: Советское радио, 1964.
31. Ермольев Ю.М. Математические методы исследования операций [Текст] / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.С. Михалевич, В.И. Тюптя. – К.: Вища школа, 1979. – 319 с.
32. Есипов Б.А. Методы исследования операций [Текст]:/ Б.А. Есипов – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2013. – 304 с.
33. Зайченко Ю.П. Исследование операций. [Текст]: учебное пособие. / Ю.П. Зайченко. -Киев: Вища школа, 1979. -392 с.
34. Зайченко Ю.П. Исследование операций. [Текст]: сборник задач / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. - Киев: Вища школа, 1990. - 239 с.
35. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование [Текст]: / И.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1967. – 179 с.

- 36.Каллихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию [Текст]:/ И.Л. Каллихман – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
- 37.Карандаев И.С. Решение двойственных задач в оптимальном управлении [Текст]: / И.С. Карандаев. – М.: Статистика, 1976. – 87 с.
- 38.Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике [Текст]: / С. Карлин. - М.: Мир.- 1964.
- 39.Карлусов В.Ю. Опыт преподавания базовых понятий игры двух персон с нулевой суммой [Текст]: / В.Ю. Карлусов. Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании: материалы V-й Международной науч.-практ. конф. 31 мая 2016 г., г. Тверь. В 2 ч. Ч.2. Информационные технологии. Вопросы преподавания. – Тверь: Твер. гос. ун – т. – С. 151 – 156.
- 40.Колбин В.В. Специальные методы оптимизации[Текст]:/ В.В. Колбин. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2014. – 384 с.
- 41.Конюховский П.В. Математические методы исследования операций [Текст]: / П.В. Конюховский. – СПб. и др.: Питер, 2001. – 192 с.
- 42.Коффман А. Массовое обслуживание, теория и применение [Текст]: / А. Коффман, Р. Крюон. - М.: Мир, 1965. – 302 с.
- 43.Козн Дж. Граничные задачи в теории массового обслуживания [Текст]: / Дж. Козн, О. Боксма. - М.: Мир.-1987.
- 44.Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике [Текст]: учеб. пособие для вузов. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера / Н.Ш. Кремер и др. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с
- 45.Кюлян В.Р. Математическое программирование [Текст]: В.Р. Кюлян, Е.А. Юнькова, А.Б. Жильцов. – К.: МАУАП, 2000. - 124 с.
- 46.Кюнц Г.П. Нелинейное программирование [Текст]: / Г.П. Кюнц, В. Крелле. - М.: Советское радио, 1965. - 303 с.
- 47.Лесин В.В. Основы методов оптимизации [Текст]:/ В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2012. – 342 с.
- 48.Льюис Р.Д. Игры и решения [Текст]: / Р.Д. Льюис, Х. Райфа. - М.: Иностранная литература, 1961.
- 49.Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр [Текст]: / Д. Мак-Кинси. – М.: Физматгиз, 1960.
- 50.Моудер Дж. Основы исследования операций. [Текст]: в 2-х томах./ Дж. Моудер, С. Элмаграби. - М.: Мир, 1981. Т.1: - 347 с. Т.2: - 492 с.
- 51.Мулен Э. Теория игр [Текст]: / Э. Мулен. - М.: Мир, 1985.
- 52.Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение [Текст]: / Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука , 1970.
- 53.Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания [Текст]: / Л.А. Овчаров. – М.: Машиностроение, 1969.

- 54.Отнер С.Л. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем / С.Л. Отнер. - М.: Советское радио, 1969. – 436 с.
- 55.Оуэн Г. Теория игр [Текст] / Г. Оуэн. – М.: Мир, 1971.
- 56.Петросян Л.А. Теория игр [Текст]: / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Сёмина. – М.: Высшая школа, 1998.
- 57.Пробху Н. Статистические процессы теории запасов [Текст]: / Н. Пробху. - М.: Мир, 1985. – 184 с.
- 58.Прутков Козьма. Сочинения [Текст]: / Козьма Прутков. – М.: Правда, 1986. – 416 с.
- 59.Ржевский С.В. Исследование операций [Текст]:/ С.В. Ржевский – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2012. – 448 с.
- 60.Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания [Текст] / Дж. Риордан. – М.: Связь, 1966. – 184 с.
- 61.Розенберг В.Я. Что такое теория массового обслуживания [Текст]: / В.Я. Розенберг, А.И. Прохоров. - М.: Советское радио, 1982. - 200 с.
- 62.Романовский И.В. О сведении игры с полной памятью к матричной игре / И.В. Романовский. – М.: ДАН СССР, т. 144, 1962, № 1.
- 63.Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации [Текст] / И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 1988. – 472.
- 64.Суздаль В.Г. Теория игр для флота [Текст]: / В.Г. Суздаль. - М.: Воениздат, 1974. - 270 с.
- 65.Таха Х.А Введение в исследование операций [Текст]: в 2-х томах / Х. А. Таха. – М.: Мир, 1985.
- 66.Таха Х.А Введение в исследование операций [Текст]: / Х. А. Таха. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.
- 67.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М.: Т. 1, 1967.
- 68.Фиакко А.В. Нелинейное программирование: Методы последовательной безусловной оптимизации [Текст]:/ А.В. Фиакко, Г.П. Мак-Кормик –М.: Мир, 1972. – 240 с.
- 69.Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст]: / Д. Химмельблау. - М.: Мир, 1975. – 534 с.
- 70.Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле [Текст]: / Ю.В. Чуев. - М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
- 71.Экономико-математические методы и модели планирования и управления [Текст]: / Под общей редакцией В.Г. Шорина. – М.: Знание, 1973. – 240 с.
- 72.Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования [Текст]: / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. - М.: Советское радио, 1964. - 736 с.

73. Юдин Д.Б. Линейное программирование (Теория, методы, приложения) [Текст]: / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
74. Little J.D.C. A Proof for Queuing Formulae $L = \lambda \omega$. - Op. Res. 1961, v. 9, N 3, p. 383-387.

Электронные издания

75. Аттетков А.В. Введение в методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: Финансы и статистика, 2014.— 272 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18794>
76. Грызина Н.Ю. Математические методы исследования операций в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2009.— 196 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/10773> .— ЭБС «IPRbooks»
77. Исследование операций в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Г.Я. Горбюцов [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2006.— 118 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/10690> .— ЭБС «IPRbooks».
78. Карманов В.Г. Математическое программирование [Электронный ресурс]/ Карманов В.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 264 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17324>
79. Колобашкина Л.В. Основы теории игр [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Колобашкина Л.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.— 164 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6541>
80. Короткин, А. А. Модели и алгоритмы исследования операций : учеб. пособие / В. Г. Фокин, Яросл. гос. ун-т, А. А. Короткин .— Ярославль : ЯрГУ, 2006 <http://rucont.ru/efd/200087?cldren=0>
81. Костевич Л.С. Исследование операций. Теория игр [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Костевич Л.С., Лапко А.А.— Электрон. текстовые данные.— Минск: Вышэйшая школа, 2008.— 368 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20076>
82. Линейное программирование. Дискретная математика. Теория вероятностей и математическая статистика : метод. указания / В. С. Альпина, Казан. гос. технол. ун-т .— Казань : КГТУ, 2009 <http://rucont.ru/efd/292520?cldren=0>
83. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач [Электронный ресурс]/ Лунгу К.Н.— Электрон. текстовые

- данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.— 132 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12905>
84. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ О.А. Васильева [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 96 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26859>
85. Минько Э.В. Методы прогнозирования и исследования операций [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Минько Э.В., Минько А.Э.— Электрон. текстовые данные.— М.: Финансы и статистика, 2012.— 480 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18821>
86. Пантелеев А.В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Пантелеев А.В., Летова Т.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2011.— 424 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9093>
87. Прокофьева С.И. Основы теории игр [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Прокофьева С.И., Пак Э.Е., Ершов Е.К.— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 64 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30011>
88. Розова В.Н. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Розова В.Н., Максимова И.С.— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский университет дружбы народов, 2010.— 112 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11536>
89. Салмина Н.Ю. Теория игр [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Салмина Н.Ю.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Эль Контент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.— 92 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13870>
90. Соколов А.В. Методы оптимальных решений. Общие положения. Математическое программирование. Том 1 [Электронный ресурс]/ Соколов А.В., Токарев В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 562 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12922>
91. Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Струченков В.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009.— 315 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/8722>
92. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 367 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17283>