Министерство образования и науки Российской Федерации
Севастопольский государственный университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению лабораторных работ по дисциплине

«Теория принятия решений»

для студентов дневного и заочного отделения по направлению 09.03.02

«Информационные системы и технологи»

(Часть II)

Севастополь

2015

УДК 519.2

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория принятия решений» для студентов дневного и заочного отделения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Часть II/Сост. К.В.Кротов. – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 37с.

Методические указания составлены в соответствии с требованиями программы дисциплины «Теория принятия решений» для студентов направления 09.03.02 и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 2 от 24 февраля 2015 года.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Брюховецкий А.А. , кандидат технических наук, доцент кафедры Информационных технологий и вычислительной техники

СОДЕРЖАНИЕ

Общие требования к выполнению лабораторных работ……………………..…..………………..4

1. Лабораторная работа №4. Исследование применения метода анализа иерархий для решения задачи выбора альтернатив……..…………………………………………….……………………….5
2. Лабораторная работа №5. Исследование методов решения многокритериальных задач принятия решений на основе построения множества Парето......…………………………15

Библиографический список……………………………………………………..……………29
Приложение А…………………………………………………………………………...30

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Цель настоящих лабораторных работ состоит в исследовании методов теории принятия решений для реализации задач выбора эффективных альтернатив в различных предметных областях. Задачами выполнения лабораторных работ являются: 1) углубленное изучение основных теоретических положений дисциплины; 2) получение практических навыков написания программ, реализующих методы теории принятия решений.

2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Объектом исследования в лабораторных работах являются методы и алгоритмы решения задач теории принятия решений, реализации методов с использованием современных программных средств. Инструментом исследования методов и алгоритмов теории принятия решений является ЭВМ. Программным средством исследования является язык C++, для разработки программ используется среда Visual studio. Выполнение работы предусматривает создание проекта в среде Visual studio, разработку и отладку программы на языке C++ на основе методов и алгоритмов теории принятия решений, рассматриваемых в данных методических указаниях.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчеты по лабораторной работе оформляются каждым студентом индивидуально. Отчет должен включать: название лабораторной работы; цель работы; краткие теоретические сведения; постановку задачи; текст программы, реализующей задание; распечатку результатов выполнения программы.

4.ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Задание выбирается в соответствии с вариантом, назначаемым преподавателем.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

1. Цель работы: исследовать применение аппарата метода анализа иерархий при принятии решений по выбору альтернатив

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия метода анализа иерархий

При принятии решений в сложной системе, состоящей из взаимосвязанных компонент различного вида (ресурсы, желаемые исходы либо цели и т.д.), процесс функционирования которой необходимо проанализировать, может быть применен метод анализа иерархий (МАИ). Метод анализа иерархий сводит принятие решений в сложной системе к последовательности попарных сравнений ее отдельных компонент.

Метод может быть применен для принятия решений при покупке оборудования, планировании распределения энергии, вложениях в условиях неопределенности и т.д.

Для принятия решений в соответствии с МАИ выполняется декомпозиция сложной системы (задачи) на отдельные её компоненты (составляющие) и определяются отношения между составляющими. В результате формируется модель системы (задачи), имеющая вид иерархии. Вид иерархии предполагает наличие следующих уровней:

1) первый (верхний) уровень – одна глобальная (общая) цель принятия решений;
2) второй уровень – локальные подцели, полученные в результате декомпозиции глобальной (общей) цели;
3) третий уровень – воздействия (управления), реализация которых в системе позволяет достичь сформированных подцелей (решения, стратегии, приводящие к достижению подцелей);
4) четвертый (нижний) уровень – исходы, представляющие собой результаты реализации решений в системе (стратегий).

После формирования иерархии «цель – подцели – решения - результаты» реализуется сравнение отдельных компонент уровней иерархии между собой. В результате сравнения отдельных компонент системы между собой определяется относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии.

Понятие иерархии с точки зрения теории множеств.

Упорядоченным множеством называется множество X с отношением порядка $\succeq$ (не хуже), если отношение $\succeq$ удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Если решения x_1 и x_2 связаны отношением $\succeq$ (т.е. $x_1 \succeq x_2$), то x_1 не хуже x_2 (т.е. x_1 лучше, чем x_2, либо x_1 и x_2 эквивалентны). Тогда x_1 предшествует x_2 (если $x_1 \succeq x_2$) в цепочке решений. Свойства отношения $\succeq$ (не хуже):

а) рефлексивность: для всех x_i, $x_i \succeq x_i$ (т.е. x_i не может быть хуже самого себя);
б) антисимметричность: если $x_1 \succeq x_2$ и $x_2 \succeq x_1$, то $x_2 = x_1$;
в) транзитивность: если $x_1 \succeq x_2$ и $x_2 \succeq x_3$, то $x_1 \succeq x_3$.

Отношение $\succ$ - отношение «лучше».

Тогда, если $x_1 \succ x_2$, то x_1 лучше x_2. Решение x_1 доминирует решение x_2, если $x_1 \succ x_2$, $x_1 \succ x_i \succ x_2$ невозможно ни для какого x_i.

Подмножество X' упорядоченного множества X называется ограниченным сверху, если существует элемент $x_i \in X$ такой, что $x_i \succeq x_j$ для любого $x_j \in X'$. Элемент x_i - верхняя граница множества (подмножества) X'.

Способ задания иерархии

Обозначения: $X^{-} = \{ x_j \mid x_i$ покрывает $x_j \}$, т.е. X^{-}– те решения x_j, которые покрываются рассматриваемым решением x_i; $X^{+} = \{ x_j \mid x_j$ покрывает $x_i \}$, таким образом, X^{+} - множество тех элементов x_j, которые покрывают элемент x_i (рассматриваемый элемент x_i). При этом $x_i \in X$ и $x_j \in X$, где X - упорядоченное множество.

Определение иерархии:

1) H – упорядоченное множество (частично упорядоченное множество) с наибольшим элементом b (т.е. упорядоченное множество H ограничено сверху элементом b);

2) выполнено разбиение множества элементов H на подмножества элементов L_k, $k = 1,2,...,h$, при этом $L_1 = \{b\}$, таким образом, L_k - подмножество элементов, соответствующих k-му уровню иерархии, первый уровень состоит из одного элемента b ($L_1 = \{b\}$);

3) если $x_i \in L_k$, то $X^{-} \subset L_{k+1}$, где X^{-} – это элементы *(k+1)-го* уровня (множества L_{k+1}), покрываемые элементом x_i;

4) если $x_i \in L_k$, то $X^{+} \subset L_{k-1}$, где X^{+} – это элементы *(k-1)-го* уровня (множества L_{k-1}), которые покрывают элемент x_i.

Функция приоритета

Если $X^{-} = \{ x_j \mid x_i$ покрывает $x_j \}$, то может быть определена функция $w_x(x_j)$, такая, что $w_x : X^{-} \to [0,1]$, т.е. отображающая элементы x_j множества X^{-} на интервал [0,1]. Таким образом, каждому элементу $x_j \in X^{-}$ ставится в соответствие весовая функция $w_x(x_j) \to [0,1]$, при этом выполняется условие: $\sum\limits_{x_j \in X^{-}} w_x(x_j) = 1$. Т.е. $w_x(x_j)$ – вес, который ставится в соответствие элементу $x_j \in X^{-}$.

Пример построения иерархии элементов в задаче выбора сетевого оборудования. Элементами множества H являются: 1) цель (выбор оборудования); 2) факторы, влияющие на цель (наименование характеристик моделей сетевого оборудования, на основе анализа значений которых выполняется выбор); 3) модели сетевого оборудования, среди которых будет выполняться выбор эффективного.

Тогда $H = \{$ оборудование, производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтопригодность, модель 1, модель 2, модель 3 $\}$.

Формирование иерархии элементов множества H. Реализуется разбиение множества H на подмножества L_1, L_2, L_3 (т.е. $k = 3$); где $L_1 = \{$оборудование$\}$, $L_2 = \{$ производительность процессора, объем ОЗУ, производительность сети, цена, ремонтопригодность $\}$, $L_3 = \{$ модель 1, модель 2, модель 3$\}$. Вид иерархии цели, характеристик, решений представлен на Рис.1.

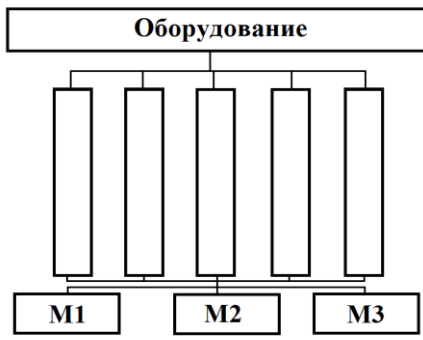

Рисунок 1.– Вид иерархии уровней для задачи выбора оборудования

Если x_1 = оборудование и при этом $x_1 \in L_1$, то $X^- = L_2$.

Если x_i = Модель 1, а при этом $x_i \in L_3$, то $X^+ = L_2$.

Определение весовой функции w_x для элемента x_i = оборудование. Эта функция ставит в соответствие характеристикам оборудования (элементам L_2) значения из отрезка [0,1] и определяет приоритет характеристик относительно цели – «выбора оборудования».

Пример определения значений $w_x(x_j)$ следующий (где $x_j \in X^-$)

$W_{оборудоваие}(производительность\ \ процессора) = 0{,}3$;

$W_{оборудоваие}(объем\ \ ОЗУ) = 0{,}2$;

$W_{оборудоваие}(производительность\ \ сети) = 0{,}2$;

$W_{оборудоваие}(цена) = 0{,}2$;

$W_{оборудоваие}(релоктопригодность) = 0{,}1$;

При этом $\sum\limits_{x_j \in X^-} W_{оборудование}(x_j) = 1$;

Т.е. характеристика «Производительность процессора» имеет 30%–ое значение при выборе оборудования, характеристика «объем ОЗУ» имеет 20%–ое значение при выборе оборудования и т.д.

Понятие полной иерархии предполагает, что иерархия называется полной, если для всех $x \in L_k$ множество $X^+ = L_{k-1}$ $(k = 2,...,h)$. В рассматриваемом случае иерархия является полной.

Свойства элементов уровней иерархии

Упрощенный вид иерархии уровней для принятия решений следующий: цели (общая цель функционирования системы, общая цель принятия решения); критерии, раскрывающие цели (характеристики цели); виды деятельности (решения), обеспечивающие достижение целей; характеристики видов деятельности.

С точки зрения анализа общей цели выполняется выбор видов деятельности, обеспечивающих достижение цели с точки зрения различных критериев. Т.е. критерии – это свойства (характеристики) цели, реализация которых (реализация свойств цели) обеспечивается тем или иным видом деятельности.

Возможен также расширенный подход к построению иерархии уровней, предусматривающий определение: 1) цели системы; 2) подцелей системы; 3) критериев, раскрывающих цель и подцели (свойств, характеристик цели либо подцелей); 4) Компонент системы, обеспечивающих достижение цели; 5) локальные цели компонент вышестоящего (4-го) уровня; 6) виды деятельности (сценарии, решения), обеспечивающие достижение локальных целей компонент системы, деятельность которых приводит к достижению общей цели.

Стандартный подход предполагает задание трех уровней иерархии:

1) нижний уровень – виды деятельности (т.е. альтернативы, решения);
2) второй уровень – характеристики видов деятельности (видов действий);
3) верхний уровень – общая цель функционирования системы.

Пример. Нижний уровень – различные маршруты движения транспорта между двумя пунктами (виды деятельности), второй уровень – характеристики видов деятельности (время следования, сужения, выбоины, безопасность и т.д.), верхний уровень – общая цель – выбор эффективного маршрута.

Таким образом, формируемая иерархия является моделью системы, в которой реализуется принятие решений.

В общем виде задача принятия решений – это определение видов деятельность. В общем виде действия по определению видов деятельности, наиболее эффективных с точки зрения реализации общей цели, следующие:

1) задание важности характеристик видов деятельности относительно общей цели (важность критериев, используемых для оценки решений с точки зрения достижения общей цели);
2) для каждой характеристики деятельности определяется степень влияния соответствующего вида деятельности на эту характеристику, т.е. степень соответствия вида деятельности определенной на втором уровне ее характеристике (т.е. в какой степени данный вид деятельности предполагает реализацию данной характеристики).

В результате определяется степень обеспечения видом деятельности рассматриваемой общей цели.

Степень влияния элементов одного уровня на один элемент другого (вышестоящего уровня) представляет собой важность каждого элемента нижнего уровня для одного рассматриваемого элемента верхнего уровня (т.е. приоритет элемента нижнего уровня для соответствующего элемента верхнего уровня). Для определения приоритетов влияния j-ых элементов $(k+1)$-го уровня на i-ый элемент k-го уровня реализуются следующие действия:
1) выполняется сравнение (попарное) элементов $(k+1)$-го уровня ($j=\overline{1,n_{k+1}}$) по степени их влияния на i-ый элемент k-го уровня; в результате будет сформирована матрица суждений о степенях влияния;
2) определяется собственный вектор и собственное значение сформированной матрицы парных сравнений; собственный вектор обеспечивает упорядочивание приоритетов, собственное значение является мерой согласованности суждений.

Если характеристика x_j $(k+1)$-го уровня важнее характеристики x_i того же уровня, то степень важности определяется по таблице (матрице) парных уравнений. Т.е., если альтернатива x_j $(k+1)$-го уровня реализует некоторое свойство (критерий) с предшествующего уровня в большей степени, чем альтернатива x_i, то вес w_j альтернативы x_j имеет большее значение, чем вес w_i альтернативы x_i. А значения w_i и w_j соответствующих альтернатив x_i и x_j определяются на основе матрицы A парных сравнений альтернатив (задаются в матрице парных сравнений альтернатив). Матрица парных сравнений A предполагает, что элемент a_{ij} равен степени превышения важности альтернативы x_i над альтернативой x_j для некоторого рассматриваемого свойства. При формировании матрицы парных сравнений должно быть выполнено условие ее согласованности (условие согласованности оценок сравнений).

Пример матрицы парных сравнений для трех альтернатив. Альтернативы $x_i(i=\overline{1,3})$ представляют собой модели оборудования, матрица парных сравнений предполагает определение (задание) степени превосходства одной альтернативы x_i над альтернативой x_j с точки зрения реализации критерия (свойства) «производительность оборудования»).

Если $x_1=2x_2$, $x_1=6x_3$, тогда $3x_2=6x_3$, $x_2=2x_3, x_3=1/2x_2$.

Т.е. в альтернативе x_2 (модель оборудования x_2) рассматриваемое свойство (критерий) «производительность оборудования» в 2 раза превышает этот же критерий в альтернативе x_3. В итоге матрица парных сравнений реализации рассматриваемого свойства (критерия) в альтернативах $x_i(i=\overline{1,3})$ имеет вид:

$$A=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{array}\right| \end{array}.$$

Если матрица A сформирована, то необходимо выполнить проверку согласованности оценок парных сравнений (проверить согласованность матрицы A). Если условие согласованности выполняется, то сформированная матрица A может быть использована для расчета приоритетов (весов) w_i соответствующих альтернатив x_i. Если матрица A не согласована, то значения элементов a_{ij} этой матрицы должны быть изменены. Для проверки согласованности матрицы A на ее основе должен быть вычислен вектор приоритетов влияния $w_{ij}\,(j=\overline{1,3})$ j-ых компонент рассматриваемого уровня иерархии на i-ый компонент предшествующего уровня (вычисляются веса w_{ij} текущих j-ых элементов). Таким образом, должно быть определено значение $w_{i_k j_{k+1}}$ приоритета влияния j-ой компоненты $(k+1)$-го уровня на i-ый элемент k-го уровня, в итоге определяется вектор собственных значений $\overline{W}$ матрицы A - вектор приоритетов.

С математической точки зрения – это вычисление главного собственного вектора матрицы A, который после нормализации становится вектором приоритетов (собственный вектор матрицы A есть вектор приоритетов).

Методы получения собственного вектора матрицы A сформулированы в приложении A.

Метод получения грубой оценки согласованности

Имеем матрицу парных сравнений A в виде:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате реализации одного из методов получен собственный вектор w матрицы A в виде:

$$w=\begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{vmatrix}.$$

На основе вектора w необходимо вычислить вектор w’ следующим образом: $w' = Aw$ (произведение матрицы A на вектор w). Далее на основе вектора w' определяется вектор w'' следующим образом: $w''[i] = w'[i]/w[i]$, где $i=\overline{1,n}$. Значение $\lambda_{\max}$ (собственное значение матрицы A) на основе вектора w’’ будет вычислено следующим образом:

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{n} w''[i]/n \ .$$

Если $\lambda_{\max} \to n$, то матрица парных сравнений значений характеристик альтернатив является хорошо согласованной. Если $\Delta = n - \lambda_{\max}$ имеет большое значение, то степень согласования низкая и должна быть переопределена матрица парных сравнений A.

Степень согласованности может быть выражена величиной $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, которая называется индексом согласованности (ИС). Если значение $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ приближается к 0, то согласованность достаточная.

Приведенная процедура вычисления приоритетов и определения согласованности матриц A реализуется для всех уровней иерархии.

Обоснование метода получения эффективного решения (оценки эффективности решений)

Группа экспертов формирует суждения об относительной важности объектов (действий), всего n объектов (действий). В итоге реализации метода необходимо количественно интерпретировать суждения по всем объектам (совместно количественно интерпретировать суждения по всем объектам). Таким образом, из количественных суждений, ассоциированных с каждой из пар объектов, реализуется формирование весов, ассоциированных с отдельными объектами (вес каждого объекта отражает количественные суждения всей группы экспертов).

Обозначения: x_1, x_2, ..., x_n – совокупность объектов (действий). Для пары (x_i, x_j) определяется элемент a_{ij} матрицы парных сравнений A, соответствующий степени важности элемента x_i относительно элемента x_j.

Элементы a_{ij} определяются следующим образом:

1) если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$;

2) если x_i и x_j имеют одинаковую важность, то $a_{ij} = 1$ и $a_{ji} = 1$.

Тогда матрица суждений (парных сравнений) A примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

На основе сформированной матрицы A необходимо определить числовые веса $w_1, w_2, ..., w_n$, которые соответствовали бы каждому действию (объекту). Т.е. реализовать способ получения весов w_i на основе суждений a_{ij}. Результатом является определение вектора приоритетов ($w_1, w_2, ..., w_n$). Определение вектора приоритетов действия (решений, альтернатив) реализуется путем нахождения собственных векторов матриц A парных сравнений для каждого уровня (данный подход введен в рассмотрение выше).

После того, как для каждого вида деятельности сформированы приоритеты с точки зрения удовлетворения характеристик (критериев), выполняется определение приоритетов характеристик (критериев) относительно общей цели (т.е. как рассматриваемые свойства будут обеспечивать общую цель).

Для получения общей характеристики вида деятельности (например, *i*-го вида деятельности) по каждому критерию необходимо:

1) умножить вес оценки *i*-го вида деятельности по некоторому *j*-ому критерию на вес этого критерия в общей цели принятия решения (таким образом, $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$, где w_{ij}^2 – вес оценки *i*-го вида деятельности относительно *j*-ой характеристики второго уровня иерархии, w_j^1 – вес *j*-ой характеристики относительно общей цели системы (первого уровня иерархии); всего должно быть получено m значений $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$, где m – количество критериев(характеристик) видов деятельности;

2) полученные значения $w_{ij}^2 \cdot w_j^1$ для каждого *i*-го вида деятельности сложить по всем *j*-ой критериям $(j = \overline{1, m})$ (критериям, характеризующим общую цель принятия решений), тогда общая характеристика *i*-го вида деятельности D_i будет определена следующим образом:

$$D_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \cdot w_j^1 \ .$$

Понятно, что тот *i'*-ый вид деятельности, который гарантирует максимальное значение оценки D_i, будет являться эффективным. Условие определения эффективного вида деятельности *i'* имеет следующий вид:

$$i' = arg \max_{i=\overline{1,n}} D_i = arg \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \cdot w_j^1 \ .$$

Пример применения метода анализа иерархий для реализации принятия решения по выбору вида сетевого оборудования, приобретаемого компанией.

Т.к. общая цель реализации процедуры принятия решения состоит в выборе эффективного оборудования, то верхний уровень иерархии принятия решений содержит узел «эффективное оборудование» (это и будет общая цель в иерархии).

Второй уровень представляет собой критерии (характеристики), в соответствии с которыми выполняется определение эффективного решения по выбору оборудования (т.е. критерии, определяющие цель выбора оборудования). Множество характеристик (критериев) определено следующим образом: {производительность процессора, скорость передачи данных, объем памяти для хранения пакетов, цена оборудования, ремонтопригодность, срок гарантии}.

В сокращенном виде множество характеристик оборудования представлено в следующем виде: {производительность, скорость, объем памяти, цена, ремонтопригодность, гарантия}.

Выбор осуществляется среди трех единиц оборудования. Обозначим их как O_1, O_2, O_3 соответственно. Тогда иерархия «цель – критерии - решения» представлена на Рис.2.

Рисунок 2. – Вид иерархии при принятии решений о выборе оборудования.

Для характеристик, определяющих (соответствующих) эффективному оборудованию сформирована матрица парных сравнений A_1. Элементы этой матрицы соответствуют степени важности какой-либо из характеристик оборудования по сравнению с другими характеристиками с точки зрения общей цели принятия решений.

Вид матрицы парных сравнений A_1 (важность характеристики относительно цели) следующий:

$A_1 =$

	производительность	*скорость*	*объем памяти*	*цена*	*ремонто пригодность*	*гарантия*
производительность	1	4	3	1	3	4
скорость	1/4	1	7	3	1/5	1
объем памяти	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
цена	1	1/3	5	1	1	1/3
ремонтопригодность	1/3	5	5	1	1	3
гарантия	1/4	1	6	3	1/3	1

С использованием одного из приведенных в Приложении *A* методов определения собственного вектора матрицы *A* (использован первый метод) получены следующие значения w_j^1 элементов вектора приоритетов $W^1 (j = \overline{1,m})$: $W^1 = (0.32;0.14;0.03;0.13;0.24;0.14)$.

В этом случае вес $w_1^1 = 0.32$ соответствует производительности процессора в общей цели выбора оборудования, вес $w_2^1 = 0.14$ – скорости передачи данных в общей цели, вес $w_3^1 = 0.03$ – объему памяти в общей цели и т.д.

Тогда собственное значение λ^{1}_{max} матрицы A_1, определяющее согласованность сформированных суждений определено равным 7.49 $(\lambda^{1}_{max} = 7.49)$, а индекс согласованности суждений определен равным 0.3 $(ИС^{1} = 0{,}3)$.

Для уровня иерархии видов оборудования сформированы матрицы парных сравнений по каждой из характеристик $A_j^2 (j = \overline{1,m})$. Значения a_{il} элементов этих матриц определяют степень эффективности какого-либо $i-го$ типа оборудования по сравнению с другими (l-ми) типами для соответствующей $j-ой$ характеристики (критерия).

Вид матриц A_j^2 и вид собственных векторов w_j^2 соответствующих матриц, коэффициенты согласованности имеют следующий вид:

- Производительность:

$$A_1^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ O_2 & 3 & 1 & 3 \\ O_3 & 2 & 1/3 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_1^2 = (0.16;0.59;0.25), \\ \lambda_{max} = 3.05; \\ ИС = 0.025; \end{array}$$

- Скорость передачи данных:

$$A_2^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1 & 1 \\ O_2 & 1 & 1 & 1 \\ O_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_2^2 = (0.33;0.33;0.33), \\ \lambda_{max} = 3.0; \\ ИС = 0; \end{array}$$

- Объем памяти:

$$A_3^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 5 & 1 \\ O_2 & 1/5 & 1 & 1/5 \\ O_3 & 1 & 5 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_3^2 = (0.45;0.09;0.46), \\ \lambda_{max} = 3.0; \\ ИС = 0; \end{array}$$

- Цена оборудования:

$$A_4^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 9 & 7 \\ O_2 & 1/9 & 1 & 1/5 \\ O_3 & 1/7 & 5 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_4^2 = (0.77;0.05;0.17), \\ \lambda_{max} = 3.21; \\ ИС = 0.105; \end{array}$$

- Ремонтопригодность:

$$A_5^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 1/2 & 1 \\ O_2 & 2 & 1 & 2 \\ O_3 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_5^2 = (0.25;0.5;0.25), \\ \lambda_{max} = 3.21; \\ ИС = 0; \end{array}$$

- Срок гарантии

$$A_6^2 = \begin{array}{c|ccc|} & O_1 & O_2 & O_3 \\ O_1 & 1 & 6 & 4 \\ O_2 & 1/6 & 1 & 1/3 \\ O_3 & 1/4 & 3 & 1 \end{array}; \quad \begin{array}{l} w_6^2 = (0.69;0.09;0.22), \\ \lambda_{max} = 3.05; \\ ИС = 0.025. \end{array}$$

В соответствии с полученными векторами $w_j^2 (j = \overline{1,m})$ для каждого вида оборудования $O_i (i = \overline{1,3})$ формируется свой вектор значений всех характеристик следующим образом $(j = \overline{1,m})$:

$$w_{o_1}^2 = (0.16;0.33;0.45;0.77;0.25;0.69);$$

$$w_{o_2}^2 = (0.59;0.33;0.09;0.05;0.5;0.09);$$

$$w_{o_3}^2 = (0.25;0.33;0.46;0.17;0.25;0.22).$$

Так как вектора w^1 и $w_{O_i}^2$ $(i = \overline{1,3})$ сформированы, то может быть получена оценка D_i каждого вида оборудования по формуле:

$$D_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \cdot w_j^1 .$$

Полученные значения D_i следующие: $D_1 = 0.37;\ D_2 = 0.38;\ D_3 = 0.25$. Отсюда следует, что второй вид оборудования наиболее предпочтителен.

3. Программа выполнения работы

3.1. Сформировать следующие матрицы:
а) парных сравнений влияния характеристик альтернатив (решений) на общую цель принятия решений (матрицу A_1);
б) парных сравнений наличия рассматриваемых свойств (характеристик) у предлагаемых к анализу решений x_j – матрицы A_j^2 (где $j = \overline{1,m}$, m – количество критериев (свойств, характеристик) рассматриваемых альтернатив);
3.2. Реализовать процедуру, которая используя заданный в варианте метод, определяет вектор собственных значений W каждой из матриц парных сравнений, вычисляет собственное значение матрицы λ_{max} и индекс согласованности (ИС) оценок в ней.
3.3. Проверить выполнение условия согласованности оценок в каждой из матриц парных сравнений на каждом уровне. В случае плохой согласованности повторить шаги 1 и 2.
3.4. Разработать процедуру, которая на основе векторов собственных значений w_j^2 матриц A_j^2 ($j = \overline{1,m}$, количество элементов в каждом из векторов равно количеству рассматриваемых решений (альтернатив), т.е. n) для каждого из решений сформировать вектор W_i^2 весовых коэффициентов w_i^2, каждый из которых соответствует наличию j-ой характеристики (свойства, критерия) у соответствующего i-го решения (количество элементов в каждом из этих векторов равно количеству свойств решений, влияющих на общую цель принятия решений, т.е. m);
3.5. Разработать процедуру, которая на основе векторов весовых коэффициентов на первом уровне – W_1, на втором уровне – W_j^2 ($j = \overline{1,m}$) выполняет расчет оценок D_i для каждого решения, эта же процедура реализует определение на основе значений D_i ($i = \overline{1,n}$) эффективного решения x_i^*.

4. Варианты заданий

Вариант 1.

У студентов в процессе обучения возникает необходимость определения предмета, который они хотели бы изучать по выбору. Характеристиками (критериями), соответствующими свойствам предметов, на основе которых выполняется выбор (влияющих на выбор предмета) являются: фундаментальные знания, которые содержит преподаваемый предмет, соответствие современному уровню развития науки в данной области, возможность использования в профессиональной деятельности, симпатии к преподавателю. Для анализа и выбора могут быть предложены следующие предметы: теория принятия решений, теория алгоритмов, теория вероятностей и математическая статистика, теория информационных процессов, технологии обработки информации, технологии программирования. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать первый из предложенных в Приложении А методов.

Вариант 2.

В процессе реализации дипломного или курсового проектов возникает необходимость в выборе языка программирования. (цель принятия решений– выбор языка программирования для реализации проекта). Характеристики, соответствующие свойствам альтернатив (решений), влияющие на цель принятия решений: наличие базовых знаний синтаксиса языка, соответствие языка современному уровню развития технологий программирования, сложность синтаксиса, имеющееся время на реализацию проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать второй из предложенных в Приложении А методов.

Вариант 3.

В процессе дипломного проектирования возникает необходимость выбора темы дипломного проекта. (дипломный руководитель предлагает несколько тем на выбор). Цель принятия решений состоит в выборе темы для дипломного проектирования из предлагаемого перечня. Характеристиками (критериями) , соответствующими свойствам решений, являются: сложность материала, положенного в основу темы дипломного проект; наличие знаний по материалу, на основе которого реализуется дипломный проект; возможность использования знаний, полученных при дипломном проектировании по выбранной теме, в дальнейшей деятельности; наличие свободного времени для реализации выбранной темы дипломного проекта. Для реализации выбора необходимо сформировать требуемые матрицы парных сравнений и реализовать процедуру принятия решений. При этом для определения значений элементов собственных векторов матриц парных сравнений использовать третий из предложенных в Приложении А методов.

5. Контрольные вопросы

5.1. Какой вид с точки зрения иерархически упорядоченных уровней имеет модель системы в МАИ (какие уровни образуют иерархию с точки зрения модели системы в МАИ)?
5. 2. Какие виды отношений используются при определении иерархической модели системы в МАИ (какие понятия используются при определении иерархии уровней в модели системы в МАИ) ?
5. 3. Каким образом формализуется определение иерархии уровней в модели системы в МАИ?
5. 4. Что такое функция приоритета для элементов уровней и что она определяет (для элементов каждого уровня) ?
5.5. Для чего используются матрицы парных сравнений на каждом уровне иерархической модели системы в МАИ?
5. 6. В чем отличие в формировании матрицы парных сравнений A_1 , формируемой на втором уровне иерархии в модели системы, от матриц парных сравнений $A_j^2 (j=\overline{1,m})$, формируемой на третьем уровне иерархии модели системы?
5.7. Каким образом выполняется вычисление вектора собственных значений матрицы парных сравнений?
5. 8. Каким образом выясняется согласованность оценок в матрицах парных сравнений
5. 9. Какие действия должны быть предприняты в случае плохой согласованности оценок в матрицах парных сравнений?
5. 10. Каким образом на основе матриц парных сравнений могут быть получены весовые коэффициенты для характеристик или решений соответственно на втором и третьем уровнях иерархии?
5.11. В чем состоит процедура вычисления значения оценки эффективности каждой альтернативы в МАИ?
5.12. В чем заключается обобщенный алгоритм принятия решений в МАИ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

1. Цель работы: исследовать способы формирования множества Парето-оптимальных решений и определения эффективных решений в этом множестве

2. Теоретическое введение

2.1. Общие понятия о формировании множества Парето-оптимальных решений

Для формализации задачи формирования множества Парето-оптимальных решений в множестве допустимых решений в рассмотрение введены следующие обозначения:
1) X - множество допустимых решений многокритериальной задачи определения эффективных решений;
2) $f_i \ (i=\overline{1,m})$ – локальные частные критерии, соответствующие целям функционирования системы, тогда $f=(f_1,f_2,..,f_m)$ - векторный критерий принятия решений; для определения значений векторных оценок $f=(f_1,f_2,..,f_m)$ в рассмотрение введено обозначений $y=(f_1,f_2,..,f_m)$, тогда Y^m- критериальное пространство значений векторного критерия f, используемого при выборе решений;

Таким образом рассматривается задача принятия решений при многих критериях, при этом скалярные критерии $f_i \ (i=\overline{1,m})$ образуют векторный критерий f.

Способ определения наилучших вариантов (решений) при многих критериях предполагает определение множества Парето в пространстве допустимых решений *X*.

Для идентификации (определения) множества эффективных решений в рассмотрение введено отношение предпочтения вида: $x_i \succ x_j$, которое предполагает, что решение x_i является более предпочтительным, чем решение x_j в множестве X. По аналогии для значений y оценок векторного критерия $f(x)$ введено отношение $\geq$, т.е. $y_1 \geq y_2$ либо $f(x_1) \geq f(x_2)$, где y_1 и y_2 –соответствующие значения оценок векторного критерия f для решения x_1 и x_2.

В общем виде (для m критериев) отношение $\geq$ для значений y_1 и y_2 (где y_1 и y_2 соответствующие значения векторных оценок), либо для значений векторов $f(x_1)$ и $f(x_2)$ выполняется в том случае, если $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$ и хотя бы для одного из критериев $f_j(x_1) \neq f_j(x_2)$. Таким образом, для случая $m=2$ имеем: $f(x_1) \geq f(x_2)$, если $f_1(x_1) \geq f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, то $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$ (соответственно, $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, либо $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$, а также $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) > f_2(x_2)$ либо $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) = f_2(x_2)$).

Так как связь между решениями x_i и значениями y_i векторного критерия $f(x_i)$ является однозначной, тогда при реализации $f(x_i) \geq f(x_j)$ выполняется отношение предпочтения в виде $x_i \succ x_j$. Тогда решение x_i доминирует решение x_j, если по всем критериям решение x_i не хуже решения x_j (отношение "не хуже" имеет вид $\succeq$), а по одному критерию x_i строго лучше x_j. Данное заключение в формализованной форме имеет следующий вид: $f_1(x_i) \geq f_1(x_j)$, $f_2(x_1) \geq f_2(x_2),..., f_i(x_1) > f_i(x_2),..., f_m(x_1) \geq f_m(x_2)$. В рассматриваемом случае доминирование решения x_j решением x_i является однозначным. В основу приведенных рассуждений положена аксиома Парето о предпочтениях ЛПР: «Лицо, принимающее решения, стремится получить большие значения всех компонент векторного критерия».

В соответствии с введёнными отношениями предпочтения и доминирования может быть определено условие формирования множества недоминируемых решений:

– если $\exists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, то x_i является недоминируемым решением.

Понятно, что в соответствии с этим условием можно сформировать множество недоминируемых решений. Однако, в силу того, что выполняется решение многокритериальной задачи оптимизации, не все решения могут быть связаны отношением предпочтения (доминирования), т.е. не к каждой паре решений x_1 и x_2 ($x_1, x_2 \in X$) может быть применено отношение предпочтения. В общем виде (для m критериев) данные утверждения могут быть прокомментированы следующим образом.

Решение x_i не доминирует решение x_j, а x_j не доминирует решение x_i, если:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \geq f_2(x_2), .., f_i(x_1) < f_i(x_2), .., f_m(x_1) \geq f_m(x_2); \tag{1}$$

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j),\ f_2(x_1) \leq f_2(x_2), .., f_i(x_1) > f_i(x_2), .., f_m(x_1) \leq f_m(x_2). \tag{2}$$

В этом случае решения x_i и x_j являются несравнимыми с использованием отношения предпочтения. Таким образом, могут быть выделены решения, которые являются недоминируемыми какими-либо решениями множества *X*, т.к. решения x_i и x_j несравнимы, поэтому недоминируемы.

Для случая двух критериев f_1 и f_2 условие (1) может быть представлено в следующем виде:

$$f_1(x_i) \geq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) < f_2(x_j), \tag{4}$$

либо

$$f_1(x_i) > f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \leq f_2(x_j). \tag{5}$$

По аналогии условие (2) для двух критериев примет следующий вид:

$$f_1(x_i) \leq f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) > f_2(x_j), \tag{6}$$

либо

$$f_1(x_i) < f_1(x_j) \text{ и } f_2(x_i) \geq f_2(x_j). \tag{7}$$

Те решения x_i и x_j, для которых выполняются либо условия (4), (5) либо условия (6), (7) не могут быть сравнимы с использованием отношения $\succ$.

Таким образом, если условия $x_i \succ x_j$ либо $x_j \succ x_i$ не выполняются, то решения x_i и x_j входят в так называемую границу Парето допустимого множества решений. Границе Парето поставлено в соответствие множество решений $x_i \in X$, которые не могут быть сравнимы между собой с помощью отношения предпочтения $\succ$ и, как следствие, являются недоминируемыми. Элементы $x_i \in X$, которые являются недоминируемыми и не сравнимыми с другими решениями с использованием отношения $\succ$, образуют множество Парето. Парето - границу множества X допустимых решений обозначим как $P(X)$. Способ формирования Парето- границы определяет аксиома о доминируемости (Парето – доминируемости) решений.

Аксиома Парето о доминируемости решений.

Если $x_i \succ x_j$, то $x_j \notin P(X)$, где x_j – решение, доминируемое решением x_i.

Тогда решение x_j не может входить в Парето-множество (лежать на Парето-границе). И, соответственно, если $\exists x_j$ такой, что $x_j \succ x_i$, то $x_i \notin P(X)$. Тогда Парето-множество содержит так называемые Парето - оптимальные решения.

Т.к. сформулировано условие формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X, тогда принцип Эджворта – Парето [8,9] определяет способ идентификации множества эффективных решений: выбираемые эффективные решения будут Парето-оптимальными. Т.е. эффективные решения в множестве *X* нужно выбирать только среди Парето-оптимальных решений. В результате эффективное решение (множество эффективных решений) будет выбираться (определяться) в множестве Парето-оптимальных решений (эффективное решение будет выбираться на Парето- границе).

Таким образом, если решение $x_i \in P(X)$ является недоминируемым ни одним из решений $x_j \in X$ (т.е. условие $x_j \succ x_i$ не выполняется ни для одного $x_j \in X$) и не может быть сравнимо с другими решениями, принадлежащими этой границе, с использованием отношения предпочтения $\succ$, тогда решение добавляется в Парето – границу (в Парето – множество). При этом оно недоминируется другими решениями, уже находящимися на границе.

Решение добавляется в Парето-границу, если нет решений, которые бы его доминировали, и, соответственно, удаляется из границы, если оно доминируется рассматриваемыми на данном шаге алгоритма решениями. Данная формулировка целиком согласуется с формулировкой аксиомы о доминировании (о Парето – границе), приведённой в [9]: если для какой-либо пары решений x_i и x_j выполняется $f(x_i) \geq f(x_j)$ (соответственно $x_i \succ x_j$), то $x_j \notin P(x)$.

Тогда доминируемое решением x_i решение x_j не может быть включено в Парето-границу, а для решения x_i выполняется условие: $\exists x_j$ такого, что $x_j \succ x_i$, $x_i, x_j \in X$

В связи с тем, что в реализацию метода многокритериальной оптимизации положен принцип Эджворта – Парето (выбор эффективных решений на Парето-границе (в множестве Парето)), то возникает вопрос по поводу существования этого множества (т.к. требуется, чтобы $P(X) \neq \varnothing$).

В соответствии с заключениями, приведёнными в [9], при условии, что множество X является конечным, множество $P(X)$ является непустым. Допустим, что решаемая задача является задачей с конечным и счетным множеством возможных решений X, то $P(X) \neq \varnothing$.

Таким образом, выполнение поиска эффективных решений многокритериальной задачи осуществляется путём реализации двух этапов:

1) формирование множества Парето-оптимальных решений (Парето-границы $P(X)$) множества допустимых решений X;

2) определение на Парето-границе тех эффективных решений, которые позволят максимизировать (в наибольшой степени) все критерии в многокритериальной задаче (в соответствии с аксиомой о предпочтениях ЛПР).

Так как рассматриваемая задача предполагает наличие конечного множества допустимых решений, при поиске эффективных альтернатив реализуется переход от одного решения к другому, тогда должны быть определены особенности формирования Парето-границы $P(X)$ множества допустимых решений X.

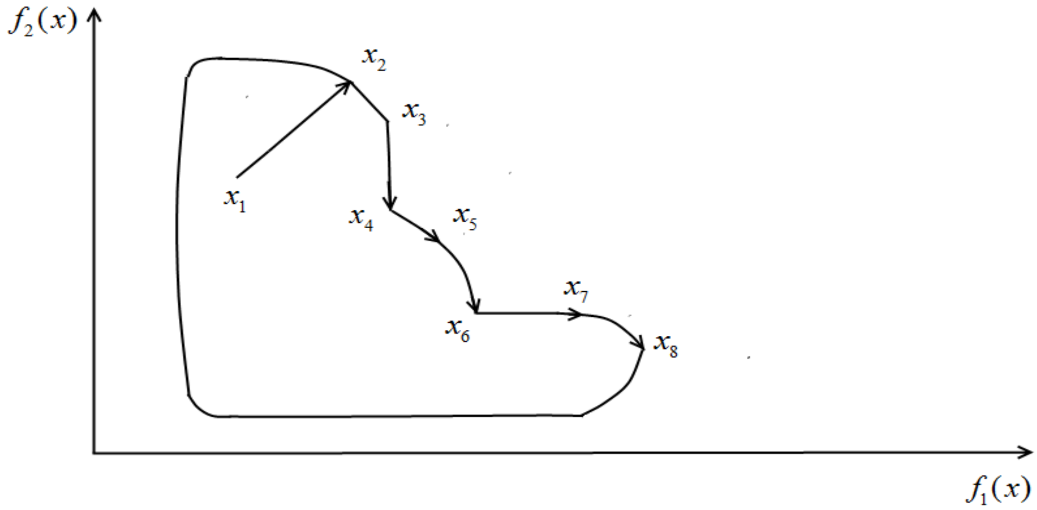

Рисунок 1 – Особенности определение решений, входящих в Парето-границу множества допустимых решений X

Выяснение особенностей формирования Парето-границы (определения решений, входящих в Парето-границу) выполняется на основе Рис. 1 с использованием аксиом о предпочтениях ЛПР, о доминировании решений (понятий доминируемых и недоминируемых по Парето решений). Для Рис. 1 рассуждения, определяющие особенности формирования Парето-границы, строятся следующим образом:

1) при формировании решения x_2 решение x_1 исключается из рассмотрения, т.к. $x_2 \succ x_1$ (в результате x_1 не может входить в Парето-границу);

2) при переходе от решения x_2 к решению x_3 сравнение их с использованием отношения предпочтения $\succ$ невозможно, т.к. $f_1(x_2) < f_1(x_3)$ и $f_2(x_2) \geq f_2(x_3)$; в соответствии с этим решения x_2 и x_3 могут быть включены в границу Парето $(x_2 \in P(X), x_3 \in P(X))$;

3) переход от решения x_3 к решению x_4 обуславливает эквивалентность решений по одному из критериев $(f_1(x_3) = f_1(x_4))$ и доминирование решением x_3 решения x_4 по другому критерию $(f_2(x_3) > f_2(x_4))$, в соответствии с этим $x_3 \succ x_4$ (по введённому выше понятию отношения предпочтения (доминирования) решений) и решение $x_4 \notin P(X)$ (в соответствии с аксиомой);

4) при переходе от решения x_4 к решению x_5 должна быть исследована возможность включения решения x_5 в Парето- границу (при условии, что решение x_4 исключено из неё); т.к. множество Парето $P(X)$ образуют только те решения, которые не сравнимы с использованием отношения $\succ$, а решение x_4 исключено из $P(X)$, тогда должно быть выполнено сравнение решения x_5 с решением x_3, входящим в $P(X)$, т.к. (в соответствии с Рис. 1) связывание решений x_3 и x_5 отношение $\succ$ невозможно, то $x_5 \in P(X)$, также как $x_3 \in P(X)$;

5) по аналогии решение x_6 не может быть связано с решением x_5 отношением предпочтения $\succ$, поэтому на данном этапе рассуждений x_6 должно быть включено в $P(X)$ ($x_6 \in P(x)$);

6) переход от решения x_6 к решению x_7 обуславливает эквивалентность решений по критерию f_2 $(f_2(x_6) = f_2(x_7))$ и доминирование решением x_7 решения x_6 по критерию f_1 $(f_1(x_7) > f_1(x_6))$, тогда выполняется $x_7 \succ x_6$ и в соответствии с аксиомой о Парето- границе x_6 должно быть исключено из множества $P(X)$; аналогичные рассуждения, касающиеся решения x_8, которое не может быть связано с решением x_7 отношением $\succ$, позволяют сделать вывод о том, что $x_8 \in P(X)$.

Выполненные рассуждения касаются доминирования и не доминирования решений x_i $(i = \overline{1,8})$, они позволили сформировать множество Парето в следующем виде:

$$P(X) = \{x_2, x_3, x_5, x_7, x_8\}.$$

В общем виде при переходе от решения x_i к решению x_{i+1} возможны следующие ситуации, определяющие реализацию отношения $\succ$ для них: 1) $x_i \succ x_{i+1}$; 2) $x_{i+1} \succ x_i$; 3) $x_i \overline{\succ} x_{i+1}$ и $x_{i+j} \overline{\succ} x_i$.

Понятно, что в первом случае $x_{i+1} \notin P(X)$, во втором – $x_i \notin P(X)$, в третьем – $x_i \in P(x)$ и $x_{i+1} \in P(X)$ на рассматриваемом текущем шаге формирования Парето-границы.

Таким образом, в основу формирования множества $P(X)$ положена аксиома «о предпочтениях ЛПР» и аксиома «о Парето- границе множества X ».

Следует отметить, что вид границы Парето (выпуклость либо вогнутость) не рассматривается, определяется принадлежность (возможность включения) следующего рассматриваемого решения Парето-границе и необходимость исключения предыдущего рассматриваемого решения из этой границы в случае его доминирования. При этом принадлежность решения Парето-границе определяется на основе рассматриваемых условий доминирования и недоминирования решений (условий для отношений предпочтения/ доминирования). Т.к. в соответствии с принципом Эджворта – Парето эффективные решения принадлежат Парето-границе, тогда должен быть сформирован способ определения наиболее эффективного решения (эффективных решений) среди тех, которые принадлежат $P(X)$. В литературе [7-9] изложены различные способы определения эффективных решений, выбор которых будет обеспечивать выполнение аксиомы «о предпочтениях ЛПР» (выбор решения, в наибольшей степени максимизирующего все используемые критерии) [9].

Наиболее развитыми методами определения эффективных решений на Парето-границе являются: метод идеальной точки (метод точки утопии), метод последовательных уступок. Рассмотрим аппарат этих методов с точки зрения решения задачи принятия решений при двух критериях.

В основу первого способа определения эффективного решения в множестве Парето (на Парето-границе) положено понятие идеальной точки (точки утопии) и метрики (расстояния) от текущего рассматриваемого решения до этой идеальной точки (Рис.2.)

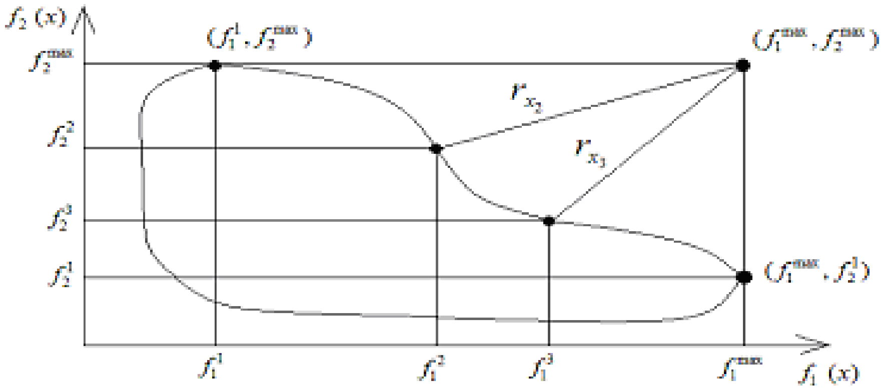

Рисунок 2 – Определение эффективных решений на Парето-границе с использованием метода идеальной точки

Точка утопии – это точка с координатами $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, где $f_i^{\max}$ $(i=\overline{1,2})$ - максимально возможные значения каждого из критериев. Значения $f_i^{\max}$ $(i=\overline{1,2})$ фиксируются как значения соответствующих решений с координатами (f_1^{max}, f_2^{1}) и (f_1^{1}, f_2^{max}), т.е. решений с максимальными значениями соответствующих критериев.

В качестве меры удалённости точки критериального пространства от точки утопии для текущего рассматриваемого решения x используется эвклидова метрика в виде:

$$r_x = \left[(f_1^{\max} - f_1)^2 + (f_2^{\max} - f_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Очевидно, что эффективным выбирается решение $x_i^* \in P(X)$, для которого выполняется условие: $x_i^* = arg \min\limits_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$. Таким образом, для каждого решения $x_i \in X$ определяется принадлежность его к Парето-границе (множеству Парето $P(X)$), затем в случае, если $x_i \in P(X)$, тогда для решения x_i вычисляется расстояние r_{x_i} точки утопии $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$, выполняется сравнение полученного для решения x_i расстояния до точки утопии с расстоянием текущего локально эффективного решения x_j^*. Если для текущего решения x_i расстояние r_{x_i} является меньшим, чем $r_{x_j^*}$, то решение x_i становится локально эффективным ($x_j^* = x_i$).

Тогда для задачи определения эффективных решений на Парето-границе при наличии двух критериев (при векторном критерии) разработан алгоритм соответствующей процедуры принятия решений. Для реализации алгоритма принятия решений при двух критериях в рассмотрение введены следующие обозначения:

1) $P1$– множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P1$); $P2$– множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P2 \,\big|\, x_i \in P(X)$);

2) kp – количество элементов в множествах $P1$ и $P2$;

3) i – индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$;

4) $P1_i$, $P2_i$ – i-е текущие рассматриваемые элементы множеств $P1$ и $P2$;

5) j– индекс рассматриваемого решения из множества X, принадлежность которого Парето-границе будет исследована на текущем шаге алгоритма;

6) x_i - некоторое текущее решение, принадлежность которого к Парето-границе определена на предыдущих шагах алгоритма и значения критериев которого $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ сри исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_i соответствуют значения критериев $f_1(x_i)$ и $f_2(x_i)$.
7) x_j - некоторое текущее решение ($x_j \in X$), для которого исследуется возможность включения его в Парето-границу, решению x_j соответствуют значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$;
5) s – индекс текущего шага алгоритма.
7) n– количество решений в множестве X (мощность множества решений X).

Первоначальная инициализация введенных параметров, выполняемых на первом шаге алгоритма (при $s = 1$) выглядит следующим образом: 1) $P1(1) = 0$; $P2(1) = 0$; 2) $kp(1) = 0$.

В случае рассмотрения первого решения x_1 (при $P1 = 0; P2 = 0; kp = 0$), преобразование введенных параметров выполняется в соответствии с выражениями вида (при этом индекс шага алгоритма $s = 2$):

$$P1(2) = P1(1) \cup \{ f_1(x_1)\}; P2(2) = P2(1) \cup \{ f_2(x_1)\};$$
$$kp(2) = kp(1) + 1.$$

Для решения x_1 выполняется вычисление расстояния до идеальной точки $r_{x_1} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_1))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_2))^2\right]^{\frac{1}{2}}$, после чего реализуется присваивание $r_{x^*} = r_{x_1}$ и, соответственно, $x^* = x_1$. Т.е. локально эффективным решением на начальной стадии реализации алгоритма является решение x_1.

Для всех последующих решений x_i $(i = \overline{2,n})$ шаги алгоритма принятия решений при двух критериях предполагают: определение принадлежности x_i $(i = \overline{2,n})$ Парето-границе (определение, что $x_i \in P(X)$), вычисление расстояния r_{x_i} до точки утопии (точки $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$), определение выполнения условия минимума значения метрики до этой точки $x_i^* = arg \min\limits_{x_i \in P(X)} r_{x_i}$ (фиксация локально эффективного и глобально эффективного решений). Если kp соответствует количеству элементов, включенных в результате реализации алгоритма в Парето-границу, тогда возможность включения в эту границу нового x_j-го решения исследуется путем сравнения его значений критериев f_1 и f_2 (значений $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$) со значениями этих критериев для решений x_i (с его значениями $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, при этом $i = \overline{1,kp}$).

В этом случае алгоритм определения эффективных решений в множестве X на основе метода идеальной точки имеет следующую последовательности шагов:
1) значения индекса j решения $x_j \in X$, возможность добавления которого в Парето-границу исследуется на текущем шаге алгоритма, задается равным 2 ($j=2$);
2) значение индекса i текущего рассматриваемого решения в множестве $P(X)$ (т.е. $x_i \in P(X)$) задается равным 1 ($i = 1$); для рассматриваемого элемента x_i, значения критериев равны соответственно $P1_i$, $P2_i$;
3) если для решения x_j значение $f_1(x_j) > P1_i$, тогда решение x_j доминирует решение x_i по критерию f_1 $(x_j \succ_{f_1} x_i)$, которому соответствует значение $(f_1(x_i) = P1_i) \in P1$; если условие доминирования решением x_j решения x_i по критерию f_1 выполняется, тогда необходимо реализовать проверку условия ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$); при невыполнении условия $f_1(x_j) > P1_i$ требуется осуществить переход к шагу 8;

4) если ($f_2(x_j) < P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то рассматриваемое решение x_j не может быть сравнимо с использование отношения предпочтения $\succ$ с решением x_i, которому соответствуют значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ (т.е. $x_j \overline{\succ} x_i$ и $x_i \overline{\succ} x_j$), выполняется переход к шагу 15;

5) если ($f_2(x_j) \geq P2_i = f_2(x_i) \mid x_i \in P(X)$), то $(x_j \succ x_i)$, где $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, тогда x_i не может входить в Парето-границу, т.к. является доминируемым, поэтому значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ необходимо исключить из множеств $P1$ и $P2$ следующим образом:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$
$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

6) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),…,kp* в позиции с индексами *i,…,kp-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

7) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1 и* переход на шаг 3;

8) если условие ($f_1(x_j) < P1_i \mid x_i \in P(X)$) выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по критерию f_1 ($x_i \succ_{f_1} x_j$), должна быть выполнена проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$ ($x_i \in P(X)$); если условие $f_1(x_j) < P1_i$ выполняется, то реализуется переход к шагу 9; при невыполнении условия $f_1(x_j) < P1_i$ реализуется переход к шагу 11;

9) выполняется проверка условия $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие выполняется, то решения x_j и $x_i \in P(X)$ не могут быть сравнимы с использованием отношения предпочтения $\succ$ ($x_{kp} \overline{\succ} x_i$ и $x_i \overline{\succ} x_{kp}$), выполняется переход к шагу 15;

10) реализуется проверка условия $f_2(x_j) \leq P2_i$, если условие $f_2(x_j) \leq P2_i$ выполняется, то решение x_i доминирует решение x_j по векторному критерию f ($x_i \succ_f x_j$), т.е. рассматриваемое решение x_j не может быть включено в Парето-границу; тогда должно быть определено следующее решение x_j, его значения критериев $f_1(x_j)$ и $f_2(x_j)$, выполнен последующий анализ возможности включения его в *P(X)*, для этого реализуется переход на шаг 19;

11) выполняется проверка условия $f_1(x_j) = P1_i$ (при реализации перехода на этот шаг данное условие выполняется априори); реализуется проверка условия $f_2(x_j) \leq P2_i$, если условие ($f_2(x_j) < P2_i$) является истинным, то решение x_j доминируется решением x_i (которому соответствует значение $f_2(x_i) = P2_i$), поэтому решение x_j не может быть включено в Парето-границу, реализуется переход к шагу 19; если $f_2(x_j) = P2_i$, то решение x_j эквивалентно решению x_i (переход к решению x_j не приводит к улучшению значения векторного критерия и анализируемое решение x_j не включается в Парето-границу), выполняется переход к шагу 19;

12) выполняется проверка $f_2(x_j) > P2_i$, если это условие является верным, то по критерию f_2 решение x_j доминирует решение x_i ($x_j \succ_{f_2} x_i$); т.к. по критерию f_1 решения x_j и x_i эквивалентны и $x_j \succ_{f_2} x_i$, то решение x_j доминирует решение x_i по векторному критерию f ($x_j \succ_f x_i$ или $x_j \succ x_i$), следовательно решение x_i должно быть исключено из Парето-границы,

а его значения $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$ из множеств *P1* и *P2* соответственно, тогда преобразования этих множеств выполняется с использованием выражений:

$$P1(s+1) = P1(s) \setminus \{P1_i\};$$

$$P2(s+1) = P2(s) \setminus \{P2_i\};$$

13) смещение элементов массивов $P1$ и $P2$ с индексами *(i+1),…,n* в позиции с индексами *i,…,n-1* (изменение вида массивов (множеств) $P1$ и $P2$ после исключения из них значений $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$, соответствующих решению x_i, доминируемому решением x_j); при исключении *i*-ых элементов из множеств *P1* и *P2* на их место должны быть размещены значения $P1_{i+1}$ и $P2_{i+1}$, поэтому индекс текущих рассматриваемых элементов в множествах $P1$ и $P2$ изменяться не должен;

14) если *i=kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 15; если *i<kp*, тогда изменение количества решений в Парето-границе (множестве *P(X)*) *kp=kp-1* и переход на шаг 3;

15) изменение индекса *i* текущих рассматриваемых элементов $P1_i$ и $P2_i$ множеств $P1$ и $P2$ следующим образом: *i=i+1*, если $i \le kp$, то выполняется переход к шагу 3; если $i > kp$, то выполняется переход на шаг 16;

16) значения критериев f_1 и f_2 для анализируемого решения x_j добавляются в множества $P1$ и $P2$ соответственно (само решение x_j принадлежит Парето-границе $P(X)$):

$$P1(s+1) = P1(s) \cup \{f_1(x_j)\};$$

$$P2(s+1) = P2(s) \cup \{f_2(x_j)\};$$

$$kp(s+1) = kp(s) + 1;$$

17) для решения $x_j \in P(X)$ вычисляется значение расстояния r_{x_j} до точки утопии:

$$r_{x_j} = \left[(f_1^{\max} - f_1(x_j))^2 + (f_2^{\max} - f_2(x_j))^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

18) реализуется сравнение полученного значения со значением r_{x^*} текущего эффективного решения, если $r_{x^*} > r_{x_j}$, то: $r_{x^*} = r_{x_j}$; $x^* = x_j$ (т.е. выполняется сохранение (буферизация) текущего локального эффективного решения);

19) изменение индекса текущего рассматриваемого решения *j* следующим образом: *j=j+1*; если $j \le n$, то переход к шагу 2; в противном случае – шаг 20;

20) останов алгоритма (окончание алгоритма).

После окончания алгоритма множества (массивы) *P1* и *P2* содержат значения всех решений x_i ($i = \overline{1, kp}$), которые входят в Парето-границу (множество *P(X)*), а параметр x^* представляет собой то решение, которое ближе всего находится к точке утопии.

Предложенный алгоритм может быть модифицирован следующим образом:

1) определение координат идеальной точки (координат точки утопии);

2) формирование Парето-границы для множества *X* (определение множества *P(X)* решений и соответствующих им значений критериев *f₁ и f₂*);

3) определение среди элементов множества *P(X)* такого решения x_j^*, расстояние r_{x_j} до идеальной точки $(f_1^{\max}, f_2^{\max})$ для которого будет являться минимальным.

Метод уступок при определении эффективного решения x_j^* также предполагает, что первоначально должна быть сформирована Парето-граница, затем, начиная от решений с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ и $(f_1^2, f_2^{\max})$, выполняются последовательные уступки по каждому из критериев:

1) для точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$ – уступки по критерию f_1 для получения приращения по критерию f_2;

2) для точки $(f_1^2, f_2^{\max})$ – уступки по критерию f_2 для получения приращения по критерию f_1.

Порядок последовательных уступок по критериям для поиска эффективных решений на Парето-границе комментирует Рис.3.

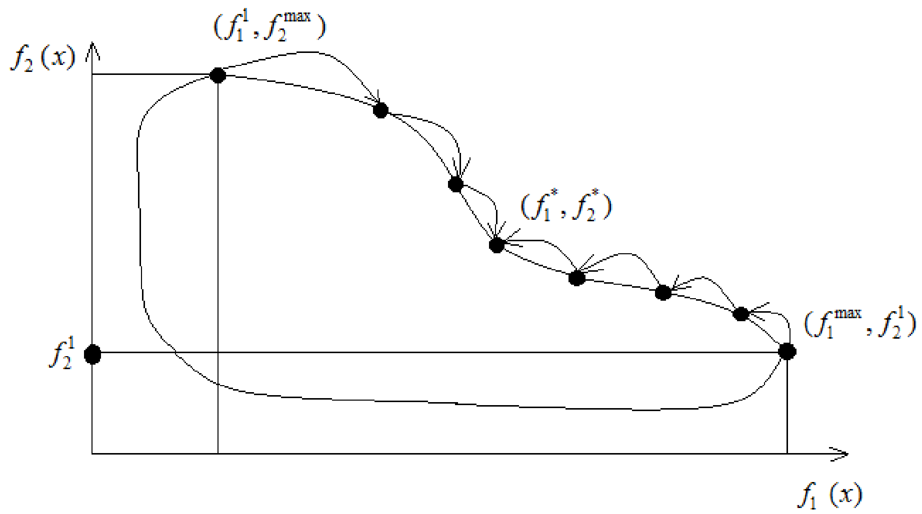

Рисунок 3– Реализация процедуры метода последовательных уступок

Реализация метода уступок предполагает, что по каждому из критериев может быть выполнена уступка (в значении этого критерия) для получения приращения по другому критерию. Т.е. может быть выполнен переход от одного решения к другому, который гарантирует при уменьшении значения одного из критериев увеличение значения другого критерия. Реализация метода предусматривает переход между решениями на Парето-границе при анализе уступок и приращений критериев f_1 и f_2. Реализация метода последовательных уступок позволит:

1) при переходе от решения с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$ путем выполнения уступки по критерию f_2 получить приращение по критерию f_1;

2) при переходе от решения с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$ путем выполнения уступки по критерию f_1 получить приращение по критерию f_2.

При этом, т.к. критерии f_1 и f_2 являются равными по важности, то величины приращений по каждому критерию (размеры приращений по критериям) должны быть если не одинаковыми, то хотя бы сравнимыми друг с другом (сравнимыми с точки зрения их величин). Если при реализации уступки по критерию f_2 (при переходе из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$) получено приращение критерия f_1, обозначенное Δ_1, а при реализации уступки по критерию f_1 (при переходе из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$) получено приращение критерия f_2, обозначенное Δ_2, тогда желательной является ситуация $\Delta_1 \approx \Delta_2$.

Если $\Delta_1 >> \Delta_2$ (либо $\Delta_1 > \Delta_2$), тогда на следующем шаге реализации алгоритма метода уступка по критерию f_2 для получения нового приращения Δ_1 по критерию f_1 может не выполняться, в то же время уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 должна быть выполнена. Если $\Delta_1 << \Delta_2$ (либо $\Delta_1 < \Delta_2$), тогда уступка по критерию f_1 для получения приращения Δ_2 по критерию f_2 может не выполняться, при этом уступка по f_2 для получения приращения Δ_1 по критерию f_1 должна быть выполнена. Сформулированные рассуждения должны обеспечивать одинаковый порядок приращений по каждому из критериев при реализации метода последовательных уступок.

Уступки по каждому из критериев будут продолжаться до тех пор, пока не будут определена некоторая «общая» точка критериального пространства, достижимая как из точки с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$, так и из точки с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$. Если такая точка не может быть найдена (т.е. не может быть выполнено одинакового количества уступок по каждому критерию для определения «общей» точки), тогда по каждому критерию выбираются те повторяющиеся решения, которые уже были выбраны (рассмотрены) до этого при реализации уступок по противоположному критерию, т.е.: 1) при реализации уступки по критерию f_2 определяется решение, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_1; 2) при реализации уступки по критерию f_1 выполняется переход к решению, которое уже было рассмотрено при выполнении уступок по критерию f_2. При этом выполнение приведенных выше условий фиксируется одновременно, алгоритм реализации дальнейших уступок останавливается, а в качестве действующего (эффективного) решения может быть выбрано любое из двух решений, на которых алгоритм последовательных уступок был остановлен.

Для реализации метода последовательных уступок при сформированной Парето-границе в рассмотрение введены следующие дополнительные обозначения (дополняющие введенные выше в рассмотрение обозначения):

1) $P11$ – множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P11$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$, $P21$ – множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P21$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

2) $P12$ – множество значений критерия f_1 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_1(x_i) \in P12$), соответствующее множеству $P1$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$, $P22$ – множество значений критерия f_2 для решений $x_i \in P(X)$ (т.е. $f_2(x_i) \in P22$), соответствующее множеству $P2$, используемое при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

3) $i1$ – индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}1, P11, P21$ при реализации уступок по критерию f_2;

4) $i2$ – индекс элементов векторов (множеств) $P\tilde{O}2, P12, P22$ при реализации уступок по критерию f_1;

5) $PX1$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P11_{i1}$ и $f_2(x_i) = P21_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_2 из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$

4) $PX2$ – множество решений $x_i \in P(X)$, которым соответствуют значения критериев $f_1(x_i) = P12_{i1}$ и $f_2(x_i) = P22_{i2}$ при реализации уступок по критерию f_1 из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

8) *delta1* – параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_1 при реализации уступок по критерию f_2 при переходе из точки $(f_1^2, f_2^{\max})$;

9) *delta2* – параметр, определяющий общую величину приращения по критерию f_2 при реализации уступок по критерию f_1 при переходе из точки $(f_1^{\max}, f_2^1)$;

Первоначальная инициализация значений параметров алгоритма выполняется следующим образом: *delta1=0; delta2=0.* В соответствии с введенными обозначениями порядок шагов алгоритма метода последовательных уступок следующий (при условии сформированной предварительно Парето-границы и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев $f_1(x_i) = P1_i$ и $f_2(x_i) = P2_i$):

1) на основе множества решений PX и множеств $P1$ и $P2$ значений критериев f_1 и f_2 реализовать инициализацию значений элементов множеств $PX1$ и $PX2$, $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ следующим образом: $PX1 = PX2 = PX$, $P11 = P12 = P1$, $P21 = P22 = P2$ (множества $PX1, P11$, $P21$ используются для реализации уступок по критерию f_2, множества $PX2$, $P12$, $P22$ для реализации уступок по критерию f_1);

2) элементы множеств (векторов) сортируются по: убыванию значений критерия f_2 для вектора (множества) $P21$, по возрастанию критерия f_1 для вектора (множества) $P12$;

3) в соответствии с выполненным упорядочиванием элементов векторов (множеств) $P21$ и $P12$ реализовать упорядочивание элементов связанных с ними векторов (множеств) $PX1$ и $P11$; $PX2$ и $P22$; тогда элементы всех векторов (множеств) будут упорядочены следующим образом: а) $P11$, $P21$, $PX1$ – в соответствии с убыванием значений критерия f_2, б) $P12$, $P22$,

$PX2$ – в соответствии с убыванием критерия f_1; первые элементы в векторах $P11$ и $P21$ имеют значения f_1^2 и f_2^{max}, а первый элемент в векторе $PX1$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^2, f_2^{\max})$; первые элементы в векторах $P12$ и $P22$ имеют значения f_1^{max} и f_2^1, а первый элемент в векторе $PX2$ соответствует решению x_j с координатами $(f_1^{\max}, f_2^1)$;
4) значение индекса $i1$ элементов в векторах (множествах) $P11$, $P21$, $PX1$ задается равным 2 ($i1=2$);
5) значение индекса $i2$ элементов в векторах (множествах) $P12$, $P22$, $PX2$ задается равным 2 ($i2=2$);
6) реализуется сравнение элементов векторов (множеств) $P11_{i1}$ и $P12_{i2}$, $P21_{i1}$ и $P22_{i2}$; если выполняются условия $p11_{i1}=p12_{i2}$ и $P21_{i1}=P22_{i2}$, то выполненные уступки позволили получить некоторое «общее» решение (при упорядочивании векторов (множеств) $P11$, $P21$ в соответствии с убыванием значений критерия f_2 и упорядочивании векторов (множеств) $P12$, $P22$ в соответствии с возрастанием значений критерия f_1 выполнение первого равенства гарантирует автоматическое выполнение второго), в этом случае $x^* = PX1_{i1}$, выполнить переход на шаг 12;
7) если условия $P11_{i1}=P12_{i2}$ и $P21_{i1}=P22_{i2}$ не являются истинными (не выполняются), то реализуется следующая проверка: $P11_{i1}=P12_{i2-1}$ и $P22_{i2}=P21_{i1-1}$; если данные условия выполняются, то решение x_{i1} было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_1, решение x_{i2} также было рассмотрено ранее при выполнении уступки по критерию f_2; в этом случае «общее» решение, достигаемое путем реализации уступок по критериям f_1 и f_2, получено быть не может; в этом случае выполняется вычисление значений параметров $delta1$ и $delta2$ следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$
$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

в том случае, если $delta1 > delta2$, то в качестве эффективного решения выбирается решение $x^* = x1_{i1}$; при $delta1 < delta2$ эффективным выбирается решение $x^* = x2_{i2}$; при $delta1 = delta2$ в качестве эффективного решения может быть выбран любой из элементов $x1_{i1}$ либо $x2_{i2}$ множеств $X1$ и $PX2$ (т.е. $x^* = px1_{i1}$ либо $x^* = px2_{i2}$), выполняется переход на шаг 10; при невыполнении условий $P11_{i1}=P12_{i2-1}$ и $P22_{i2}=P21_{i1-1}$ реализуется переход на шаг 8;
8) выполняется вычисление значений параметров $delta1$ и $delta2$ следующим образом:

$$delta1 = delta1 + (P11_{i1} - P11_{i1-1});$$
$$delta2 = delta2 + (P22_{i2} - P22_{i2-1});$$

9) определение значений индексов элементов векторов (множеств) $P11$ и $P21$, $P12$ и $P22$ выполняется следующим образом:
если $delta1 > delta2$, то $i2 = i2+1$, индекс $i1$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;
если $delta1 < delta2$, то $i1 = i1+1$, индекс $i2$ остается без изменения, реализуется переход на шаг 7;
если $delta1 = delta2$, то $i1 = i1+1$ и $i2 = i2+1$, реализуется переход на шаг 7;
10) окончание алгоритма.

Реализация приведенного алгоритма позволяет определить единственное решение на Парето-границе, эффективное с точки зрения приращений по критериям f_1 и f_2 при реализации уступок по критериям f_2 и f_1.

3. Программа выполнения работы

3.1. Для первого и третьего вариантов в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:
а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества $P(X)$, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения координат идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) (точки утопии);

в) разработать процедуру расчета расстояния r_{x_i} до точки утопии для координат текущего рассматриваемого решения x_i;

г) разработать процедуру определения эффективного решения x^*, расстояние r_{x^*} до которого от идеальной точки (f_1^{max}, f_2^{max}) является минимальным.

3.1. Для второго варианта в соответствии с заданием необходимо реализовать следующий порядок действий для выполнения лабораторной работы:
а) разработать процедуру определения на основе задаваемого множества решений X и соответствующих им значений критериев f_1 и f_2 множества $P(X)$, представляющего собой Парето-границу X;

б) разработать процедуру определения решений x_i с координатами точек (f_1^{max}, f_2^1) и (f_1^2, f_2^{max}) в критериальном пространстве;

в) разработать процедуру упорядочивания векторов (множеств) $PX1, P11, P21$ по убыванию значений критерия f_2, начиная от значения f_2^{max}, векторов (множеств) $PX2, P12, P22$ по убыванию значений критерия f_1, начиная от значения f_1^{max};

г) разработать процедуру, реализующую переход между решениями в множестве (векторе) $PX1$ при осуществлении уступок по критерию f_2 и приращении по критерию f_1, в множестве (векторе) $PX2$ при осуществлении уступок по критерию f_1 и приращении по критерию f_2; кроме перехода между решениями в разрабатываемой процедуре требуется предусмотреть контроль выполнения условий реализации уступок на каждом шаге алгоритма, контролировать условие окончания процесса реализации перехода между решениями (контролировать условие окончания процесса осуществления уступок при переходе между решениями).

4. Задание на работу

Вариант 1. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{x_i, i = \overline{1,10}\}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i ($i = \overline{1,10}$) сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	4	5
x_3	5	3
x_4	8	3
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	6	4
x_{10}	2	5

Вариант 2. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1,10} \}$ выполнить определение эффективных решений двухкритериальной задачи выбора с использованием метода последовательных уступок. Значения критериев f_1 и f_2 для соответствующих решений x_i ($i = \overline{1,10}$) сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2
x_1	3	2
x_2	5	6
x_3	5	3
x_4	8	4
x_5	6	2
x_6	3	8
x_7	6	4
x_8	2	5
x_9	9	2
x_{10}	3	9

Вариант 3. Требуется для задаваемого множества X в виде: $X = \{ x_i, i = \overline{1,10} \}$ выполнить определение эффективных решений трехкритериальной задачи выбора с использованием метода идеальной точки. Значения критериев f_1, f_2 и f_3 для соответствующих решений x_i ($i = \overline{1,10}$) сведены в матрицу, представленную ниже.

	f_1	f_2	f_3
x_1	3	2	2
x_2	5	6	4
x_3	5	3	3
x_4	8	4	4
x_5	6	2	6
x_6	3	8	5
x_7	6	4	3
x_8	2	5	2
x	9	2	5
x_{10}	3	5	2

5. Контрольные вопросы

5.1. В чем заключаются условия доминирования вектора $f(x_j)$ со стороны вектора $f(x_i)$ (условие для выполнения отношения $x_i \succ x_j$ при многих критериях).

5.2. В чем заключаются условия, в соответствии с которыми решение x_i несравнимо с решением x_j с использованием отношения предпочтения (при векторном критерии *f*).

5.3. В чем состоит смысл аксиомы Парето о предпочтениях ЛПР с точки зрения условия доминирования вектора $f(x_j)$ вектором $f(x_i)$.

5.4. В чем заключается условие формирования Парето-границы множества решений X с точки зрения аксиомы Парето о доминировании решений, какой вид имеет формализация этого условия.

5.5. Каким образом осуществляется определение эффективных решений в множестве X с точки зрения принципа Эджворта-Парето.
5.6. Каковы особенности определения решений, входящих в Парето-границу с точки зрения аксиомы о предпочтениях ЛПР (для двухкритериальной задачи).
5.7. В чем состоит понятие идеальной точки (точки утопии) и как она используется при определении эффективного решения на Парето-границе.
5.8. В чем состоит алгоритм метода построения Парето-границы множества решений X (определить обобщенно последовательность шагов).
5.9. Проверка каких условий включения текущего рассматриваемого решения в границу Парето и каким образом реализуется в алгоритме метода формирования $P(X)$.
5.10. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования $P(X)$ позволяет исключить решение из Парето-границы.
5.11. Истинность каких условий в алгоритме метода формирования $P(X)$ позволяет не включать решение в Парето-границу.
5.12. Каким образом в методе идеальной точки выполняется выбор эффективного решения на Парето-границе.
5.13. В чем состоит подход к определению эффективных решений в методе последовательных уступок.
5.14. В чем заключается условие реализации на следующем шаге алгоритма уступки по одному (либо по каждому) из критериев в одноименном методе.
5.15. В чем состоит алгоритм метода последовательных уступок при условии использования сформированной Парето-границы.
5.16. Истинность каких условий позволяет выполнить остановку алгоритма метода последовательных уступок.
5.17. В чем заключаются причины использования метода идеальной точки и метода последовательных уступок при поиске эффективных решений на Парето-границе.

Библиографический список

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений./ А.Б. Петровский – М.: Издательский центр "Академия", 2009.– 400 с.

2. Будаева А.А. Принятие решений: теория, технология, приложения. Учебное пособие. / А.А. Будаева, В.О.Гроппен. – Владикавказ: Изд–во "Фламинго", 2010.– 184 с.

3. Фишберн П.К. Теория полезности для принятия решений./ П.К. Фишберн — М.: Наука, 1978– 353 с.

4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: Предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.– 250 с.

5. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследования операций для бакалавров информатики. Ч. III.Теория решений. Учебное пособие. – Томск: Изд–во НТЛ, 2012.– 280 с.

6. Турунтаев Л.П. Теория принятия решений. Учебное пособие./ Л.П. Турунтаев. – Томск: Изд–во Томского ун–та систем управления и радиоэлектроники, 2003.– 222 с.

7. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений./ А.В.Лотов, И.И.Поспелова.– М.:Изд–во МГУ, 2008. – 198 с.

8. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач./ В.В.Подиновский, В.Д. Ногин– М.: Из-во "Наука", 1982 – 255 с.

9. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход./ В.Д. Ногин– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 144 с.

10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ A

Метод 1

1) Выполнить суммирование элементов каждой строки
2) Нормализовать каждую из полученных сумм путем ее деления на сумму всех элементов
3) Полученные результаты в сумме должны давать единицу; первый элемент результирующего вектора является приоритетом (весом) первого объекта, второй – второго и т.д.

Метод 2

1) Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (нормализовать элементы каждого столбца)
2) Полученные элементы сложить для каждой строки (выполнить построчное суммирование полученных нормализованных элементов)
3) Разделить каждую из полученных сумм на число элементов в строке (процесс усреднения по нормализованным столбцам)

Метод 3

1) Выполнить суммирование элементов каждого столбца и определить величины, обратные каждой из полученных сумм (обратная величина для рассматриваемого значения – это результат деления единицы на само это значение)
2) Разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин (нормализация обратных величин с тем, чтобы их сумма была равна 1).