Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАО УВО “Севастопольский государственный университет”

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторного практикума по дисциплине
“Методы исследования операций”
для студентов основного профиля
09.03.02 – “Информационные системы и технологии”
всех форм обучения

Севастополь
2015

УДК 004.1

Методические указания к выполнению лабораторно - вычислительного практикума по дисциплине “Методы исследования операций” для студентов основного профиля 09.03.02 – “Информационные системы и технологии” всех форм обучения / Разраб. В.Ю. Карлусов, Н.П. Тлуховская-Степаненко. – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 46 с.

Цель методических указаний: обеспечить качественное усвоение теоретических положений курса для наиболее полного овладения математическим и вычислительным аппаратами, применяемыми в организационно-техническом управлении и при анализе сложных систем.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры Информационных систем,
протокол № *01* от *03 февраля* 20*15* г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент Кожаев Е.А., кандидат техн. наук, доцент кафедры кибернетики и вычислительной техники.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математика и опыт – вот подлинные основания достоверного, естественного, разумного живого познания

Бенедикт Спиноза

На самостоятельные исследования при подготовке к лабораторным работам выносятся нижеследующие разделы дисциплины “Математические методы исследования операций” (ММИО): задачи линейного программирования, параметрического программирования, квадратичного программирования, целочисленного программирования и динамического программирования.

Авторы методического указания считают своей обязанностью выразить искреннюю признательность нескольким поколениям студентов групп "И" за работу, проделанную ими в рамках курсового проектирования, по написанию и верификации программных модулей, реализующих алгоритмы отдельных методов и включённых в состав программного обеспечения учебного лабораторного комплекса дисциплины.

Методически выполнение лабораторных работ организовано следующим образом. Получив вариант задания, студент обязан решить его вручную исследуемым методом. На программный модуль возложены функции контроля и обучения; в случае расхождения результатов имеется возможность сравнить по шагам ход решения без и с привлечением вычислительной техники.

Результаты ручных расчетов и машинных вычислений выносятся на защиту, в ходе которой выясняется степень освоения студентом теоретических и практических основ курса.

Вычислительные модули комплекса объединены в систему, общение с которой производится при помощи эргономического меню.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ И СОДЕРЖАНИЮ ОТЧЁТА

Авторы считают целесообразным оформление отчета в отдельной тетради, которая по окончании изучения дисциплины сдается преподавателю. В этом случае, во-первых, результаты выполнения предыдущих работ доступны для анализа; во-вторых, наработанный материал может быть с пользою для дела употреблён на этапе подготовки к экзамену.

В общем случае, отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Титульный лист
2. Цель работы.
3. Математическую модель задачи согласно варианту задания.
4. Результаты предварительных расчетов и подробный ход решения вручную.
5. Отражение результатов, полученных в ходе вычислительного эксперимента.
6. Выводы, основанные на анализе полученных результатов и результатов предыдущих лабораторных работ.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

В качестве лабораторной установки используется обычный персональный компьютер, на котором инсталлирован программный модуль, осуществляющий демонстрационные функции. Инсталляционная программа находится по адресу MMIO\Tools диска методических указаний на сервере локальной вычислительной сети кафедры информационных систем.

После запуска системы экран разделен на зоны: верхнюю, левую и правую.

Сверху экрана размещены пункты меню “Файл”, “Методы” и “Справка”.

Левая часть представляет собой список методов решения задач, а правая – краткую подсказку по выбору и активации метода.

Меню “Файл” содержит пункты, стандартные для большинства программных приложений.

Меню “Методы” включает перечень методов, дублирующий левую зону меню. Пункт меню “Справка/О программе” обеспечивает доступ к информации рекламного характера. Из пункта меню “Справка/Документация” можно получить сведения об особенностях применения того или иного метода, отображении хода решения в интерфейсе.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Точное логическое определение понятий – главнейшее условие истинного знания

Сократ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Получить практические навыки в решении задачи линейного программирования (ЗЛП) графическим методом.
2. Проиллюстрировать приложения основных теорем линейного программирования к решению задач данного типа.
3. Изучить теоретические положения, лежащие в основании метода.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Решение задач линейного программирования [1 – 4, 9] состоит в нахождении для математической модели вида

$$C^T X \to opt \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$AX \otimes B \tag{1.2}$$

и условии неотрицательности всех компонент вектора X, таких его значений, при которых функция (1.1) будет достигать экстремума.

В выражениях (1.1) и (1.2) обозначено:

C — вектор коэффициентов целевой функции размерностью $[n \times 1]$;

T — символ транспонирования;

X — вектор искомых параметров математической модели размерностью $[n \times 1]$;

opt — вид оптимизации (min или max);

A — двумерная матрица $[m \times n]$ системы линейных ограничений;

$\otimes$ — знак отношения ($\le, \ge, =$);

B — вектор правой части ограничений размерностью $[m \times 1]$.

Графический метод достаточно прост и нагляден, его изложение встречается, практически, в каждой из книг, посвященной вопросам линейного программирования [1 – 3, 5, 10 – 13, 18, 19]. Однако широкое его применение ограничено; во-первых, размерностью матрицы ограничений: число столбцов и, соответственно, число переменных равно двум; во-вторых, считывание графической информации в известной мере приблизительно. Метод включает следующие шаги:

1) Для каждого неравенства системы ограничений при замене знака неравенства знаком равенства получают уравнение прямой, линию которого изображают на плоскости $x_1 0 x_2$

2) Учет знаков в ограничениях позволяет получить область допустимых решений.

3) Строится нормаль к плоскости целевой функции. Эта прямая задается парой точек [(0; 0), (c_1;c_2)], где c_1 и c_2 – коэффициенты целевой функции. Перемещение перпендикуляра к нормали, определяемое видом оптимизации (min или max), в соответствии с основной теоремой линейного программирования [7, 9], позволяет найти крайнюю точку области допустимых значений, в которой имеет место оптимум.

3. ХОД РАБОТЫ

1. Для заданного преподавателем варианта в Приложении А применить алгоритм графического метода: найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях. Оси на чертеже должны быть подписаны, содержать индексы лага. Чертеж должен быть в масштабе, обеспечивающем его адекватное восприятие и использование.

Алгоритм решения задачи вкупе с необходимыми пояснениями и иллюстрациями подробно рассмотрен в методических указаниях [14, 15].

2. Оптимальное значения координат (x_1 и x_2), помимо прочтения с чертежа, необходимо уточнить.

Для получения точного решения следует использовать пару прямых, участвующих в формировании крайней точки области ограничений в качестве системы уравнений.

3. Выполните проверку решения на ЭВМ с помощью программного комплекса. Сравните значения, полученные по чертежу, с помощью ЭВМ и рассчитанные вручную. Для сравнения используйте значения абсолютных и относительных погрешностей.

4. Оформить отчет с приложением результатов вычислений, графической информации. Сделать ***содержательный*** вывод, оценивающий полученные результаты.

5. Защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Привести постановку ЗЛП [12, 17, 16].
2. Основные теоремы линейного программирования (ЛП) [7, 9].
3. Условия применения графического метода и его теоретическое обоснование.
4. Перечислить особые случаи, возникающие при решении ЗЛП графическим методом [7 – 9].
5. Почему при решении ЗЛП графическим методом используют именно перпендикуляр к нормали, а не какую-либо другую линию?
6. Поясните, с чем связан выбор направления движения перпендикуляра к нормали?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ТАБЛИЧНЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Знать назубок – ещё не значит знать
Мишель Монтень

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Отработать практические навыки применения основного метода решения ЗЛП.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Табличный симплекс-метод, называемый ещё прямым, исторически был разработан первым и продолжает широко использоваться в настоящее время [1, 2, 8 – 10, 11, 12].

Для его применения необходимо, чтобы знаки в ограничениях были вида (≤ – "меньше, либо равно"), а компоненты вектора *B* положительны. При знаках в хотя бы одном из ограничений вида "равно " или "больше, либо равно" применяется модификация табличного метода, называемая методом искусственного базиса (искусственных переменных). Метод искусственного базиса рассматривается в литературе как самостоятельный метод [7, 10, 12, 17], хотя, по технологии применения, он является по сути эквивалентным прямому (табличному) симплекс-методу.

Алгоритм решения сводится к следующему набору действий:

1. Приведение системы ограничений к каноническому виду путем введения дополнительных переменных для приведения неравенств к равенствам.

2. Симплекс-таблица содержит каноническую форму задачи линейного программирования, основывающуюся на векторном представлении математической модели.

3. Рассчитываются симплекс - разности.

4. Принимается решение об окончании либо продолжении счета.

5. При необходимости выполняются итерации.

6. На каждой итерации определяется вектор, вводимый в базис, и вектор, выводимый из базиса. Таблица пересчитывается по методу Жордана - Гаусса [7, 9] или каким-либо другим способом [1, 3, 19].

Содержательный пример, поясняющий сущность и особенности алгоритма, приводится в [14, 15].

3. ХОД РАБОТЫ

1. Использовать математическую модель из предыдущей работы № 1.

Если в ограничениях исходной системе изначально присутствуют знаки вида “≥”, то обратитесь к преподавателю по поводу модификации математической модели, чтобы “подогнать” ее под условия применения прямого симплекс-метода. Выполненная преподавателем коррекция варианта распространяется только в пределах текущей лабораторной работы.

В ***качестве оптимума*** функции цели принять ***максимум***.

2. Привести задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные.

3. Решить задачу вручную и с использованием ЭВМ.

4. Сопоставить результаты, полученные графическим методом, вручную и при применении ЭВМ.

Если результат решения задачи на ЭВМ нецелочисленный, то найти относительную и абсолютную погрешности результата.

5. Сделать содержательный вывод по результатам сравнения решений: оценить число итераций, сравнить результат с машинным решением и решением графическим методом.

6. Оформить отчет с приложением промежуточных выкладок и расчетов.

7. Обдумать контрольные вопросы, подготовиться и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое каноническая форма ЗЛП?
2. Какое функциональное назначение отводится дополнительным переменным?
3. В чём состоят признаки (условия) неразрешимости задачи при решении её симплекс-методом?
4. Чем обосновано правило выбора вектора, вводимого в базис?
5. Каков физический смысл симплекс – разности?
6. Чем объяснить критерий выбора выводимого из базиса вектора?
7. В чём заключается сущность, и какова последовательность работы алгоритма Жордана-Гаусса.
8. Как проконтролировать правильность хода решения задачи по значениям симплекс – разностей?
9. Чем обосновано требование положительности к вектору свободных членов системы ограничений?
10. В чём заключается связь обычной и канонической форм задач ЛП?
11. В столбце оптимального решения получены ненулевые значения для дополнительных переменных. Что бы это значило?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Кто ищет истины – не чужд и заблужденья
Иоганн Вольфганг Гёте

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Получить практические навыки манипуляции искусственными переменными в ходе выполнения алгоритма, реализующего данный метод.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данный метод применяется, если в системе ограничений ЗЛП имеются ограничения “≥” или “=”. В этом случае векторы, связанные с дополнительными переменными в неравенствах нельзя использовать в качестве базисных, а в ограничениях вида равенство они просто отсутствуют.

Поэтому возникает необходимость использования искусственных переменных и связанных с ними векторов наряду (возникнет смешанный базис из искусственных и дополнительных переменных) или вместо дополнительных переменных (чисто искусственный базис).

Эта разновидность симплекс-метода широко освещена в литературе [7 – 13, 16, 17].

Алгоритм метода искусственного базиса, по сравнению с прямым симплекс-методом, включает этап введения искусственных переменных, как в ограничения задачи, так и в целевую функцию, и проверку на несовместность ограничений, осуществляемую в процессе расчётов.

В целевой функции и при работе алгоритма используется коэффициент “μ” в качестве обозначения бесконечно большого числа. Знак этого коэффициента определяется направлением оптимизации.

Поэтому в ходе расчета симплекс – разностей приходится оперировать коэффициентом “μ” по правилам приведения подобных.

Пояснения к алгоритму с использованием примера излагаются в методических руководствах [14, 15]

3. ХОД РАБОТЫ

1. В качестве исходного варианта используйте математическую модель из лабораторной работы № 1.

Если изначально все ограничения системы будут иметь знак “≤” (меньше либо равно), то Вам необходимо обратиться к преподавателям и, совместными усилиями, скорректировать параметры модели.

Направление оптимизации функции цели ***согласовать с преподавателем***.

Изменённый вариант действует в пределах выполнения текущей лабораторной работы.

2. Преобразовать модель в каноническую форму, особенно обратив внимание на знаки дополнительных переменных.

3. Добавить искусственные переменные в канонизированные ограничения, соответствующие исходным ограничениям со знаками “≥”, дописать искусственные переменные с соответствующими множителями в целевую функцию.

Выбрать искусственный или смешанный базис, составить начальную симплекс-таблицу.

4. Используя алгоритм метода, выполнить решение задачи. Проверить решение на ЭВМ. Сопоставить ход решения вручную и на ЭВМ.

Оценить результаты решения на основании абсолютной и относительной погрешностей.

Сопоставить результаты решения с графическим методом.

5. Сделать содержательный вывод по результатам пункта 4.

6. Оформить отчет с приложением хода решения вручную, аналитических выкладок и расчетов, обдумать контрольные вопросы и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое функциональное назначение отводится искусственным переменным?

2. В чём смысл дополнительных и искусственных переменных?

3. С какими знаками и множителями вводятся искусственные переменные в ограничения и целевую функцию?

4. Как по последовательности значений целевой функции определить правильность хода решения задачи?

5. Чем обусловлено требование к положительности элементов вектора свободных членов?

6. Как определить, что задача имеет несовместные ограничения?

7. Какие случаи неразрешимости задачи линейного программирования могут возникнуть в ходе решения, и как это отображается в симплекс-таблице?

8. Почему, при наличии ограничений больше или равно (“≥”), нельзя обойтись базисом, составленным из векторов, соответствующих дополнительным переменным?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Опыт – дитя мысли, мысль дитя действия
Бенджамин Дизраэли

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучить особенности метода, в основном применяемого для реализации в ЭВМ.
2. Овладеть процедурой расчета ЗЛП указанным методом.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В основу данной разновидности симплекс-метода положены такие особенности линейной алгебры [2, 7 – 13], которые позволяют в ходе решения задачи работать с частью матрицы ограничений. Иногда метод называют методом обратной матрицы [7, 9].

В процессе работы алгоритма происходит поэтапное обращение матрицы ограничений по частям, соответствующим текущим базисным векторам. Указанная особенность делает весьма привлекательной машинную реализацию вычислений, вследствие экономии памяти под промежуточные переменные и значительного сокращения времени счета.

Одна из возможных реализаций алгоритма на языке PASCAL, наряду с другими методами решения ЗЛП, приводится в [6].

В целом, метод отражает традиционные черты общего подхода к решению ЗЛП, включающего в себя канонизацию условий задачи, использование при необходимости искусственного базиса, расчет симплекс - разностей, проверку условий оптимальности, принятие решений о коррекции базиса и исключение Жордана - Гаусса.

Особенности заключаются в наличии двух таблиц основной и вспомогательной, порядке их заполнения и некоторой специфичности расчетных формул, проявляющейся в их векторной нотации (форме записи).

Содержательный пример и изложение алгоритма метода приведено в указаниях [14, 15].

3. ХОД РАБОТЫ

1. В качестве варианта задания выбрать математическую модель, соответствующую лабораторной работе №1.

2. Привести систему ограничений в каноническую форму, проследить за знаками столбца свободных членов (при необходимости, обеспечить их положительность), добавить, если необходимо, искусственные переменные, построить и заполнить основную и вспомогательную таблицы.

3. Направление оптимизации функции цели ***согласовать с преподавателем***.

4. Решить задачу вручную и с использованием ЭВМ, сравнить ход решения, полученные результаты.

5. Показать в абсолютных и относительных величинах снижение числа операций сложения (вычитания) и умножения (по видам операций) в ходе алгоритма модифицированного симплекс-метода и, соответствующего постановке задачи, решения лабораторной работы № 2 или № 3.

6. Сравнить результаты настоящей лабораторной работы с данными предыдущих лабораторных работ по числу итераций, точности результата.

7. Сделайте выводы, оформите отчёт с приложением всех выполненных расчетов, защитите результаты выполнения лабораторной работы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем привлекательность машинной реализации модифицированного симплекс-метода?

2. Дать пояснения основным этапам алгоритма.

3. Сравнить, на основании [6], алгоритмы решения ЗЛП по числу операций, занимаемой памяти и т.п.

4. Почему данный метод ещё называют методом обратной матрицы?

5. Укажите в материалах отчёта по лабораторной работе, в каком месте, на каждом шаге, располагается обратная матрица.

6. Укажите исходную (прямую) матрицу по отношении к соответствующей обратной?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКС - МЕТОДОМ

Ум человеческий имеет три ключа, всё открывающих: знание, мысль, воображение – всё в этом

Виктор Гюго

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Приобрести навыки в постановке двойственной ЗЛП.
2. Изучить особенности данного метода решения.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данный метод основан на свойстве симметрии прямой и двойственной задач [1 – 3, 5, 7 – 9, 12, 13]. Практическая ценность предлагаемого подхода получается за счет возможности введения дополнительных ограничений в условия исходной задачи после достижения оптимального решения. В сравнении с ранее рассмотренными алгоритмами решения ЗЛП, двойственный метод обладает следующими особенностями:

1) После канонизации условий исходной задачи, предварительно приведенной к системе ограничений со знаком "меньше или равно" и установки направления на максимум, производится подбор сопряженного базиса, составленного из векторов прямой задачи, удовлетворяющих ограничениям двойственной.

2) Отыскивается, методом подбора, сопряжённый базис, и рассчитывается псевдоплан, представляющий собой разложение небазисных векторов по векторам сопряженного базиса.

3) Решение о выводе вектора из базиса принимается, в отличие от прочих методов, раньше решения о вводе.

4) Процесс решения продвигается не от одного опорного плана к другому, а по псевдопланам [5].

Операция пересчета матрицы в двойственном симплекс-методе выполняется традиционно, методом Жордана - Гаусса.

Необходимые пояснения алгоритма на примерах присутствуют в [14, 15].

3. ХОД РАБОТЫ

1. Вариант задания совпадает с заданием к лабораторной работе №1.

В качестве оптимума целевой функции полагается её максимизация.

2. Необходимо выполнить приведение системы ограничений задачи к каноническому виду, предварительно обеспечив одинаковые знаки в ограничениях путём умножения на “—1”.

3. На основании канонической формы системы ограничений, сформулировать двойственную задачу по отношению к исходной, прямой задаче.

4. Отыскать, руководствуясь определением, сопряженный базис и на его основании построить псевдоплан. При этом, с учебной целью в сопряженный базис не должно входить более чем n — 1 основных переменных, чтобы можно было выполнить хотя бы одну итерацию.

5. Заполнить симплекс-таблицу и решить задачу вручную. Решить эту же задачу с применением ЭВМ. Сравнить ход решения свой и компьютерный.

6. Сравнить результаты текущей работы с результатами предыдущих работ по числу итераций, точности результата, объему вычислений.

7. Сделать вывод на основании полученных результатов, оформить отчёт с приложением расчётов и защитить результаты лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте теоремы двойственности.
2. Как связаны прямая и двойственная задачи?
3. Как по оптимальному решению прямой задачи получить оптимальное решение двойственной?
4. Дайте определение псевдоплана и сопряженного базиса.
5. Назовите и поясните основные этапы алгоритма.
6. В чём проявляются особенности алгоритма двойственного симплекс-метода при определении вводимого и выводимого векторов?
7. Какой вид имеет симплекс-таблица в случае неразрешимости задачи?
8. Как соотносятся целевые функции прямой и двойственной задач в ходе решения и в оптимальном решении?
9. Как изменится симплекс-таблица в случае добавления дополнительного ограничения к уже имеющимся ограничениям?
10. В каких случаях основные переменные двойственной задачи имеют содержательный смысл, и какой именно?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Не следует смешивать того, что нам кажется невероятным и неестественным, с абсолютно невозможным

Карл Фридрих Гаусс

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Освоить алгоритмы решения задач параметрического программирования.
2. Приобрести навыки исследования линейных моделей математического программирования при наличии параметрических зависимостей в её компонентах.
3. Научиться оценивать зависимости изменения оптимального решения при вариациях вектора коэффициентов целевой функции или вектора свободных членов системы ограничений.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В практической деятельности возникают случаи, когда компоненты модели задачи линейного программирования зависят, в той или иной степени от какого-либо фактора(параметра), например, времени. При этом требуется отыскать оптимальное решение при изменениях (вариациях) этого параметра в некоторых конечных или бесконечных пределах.

Так, для примера, в задачах экономического толка [10, 12, 16, 17], возможны сезонные колебания объёмов продаж (элементы вектора свободных членов системы ограничений) либо величины прибыли / себестоимости (коэффициенты целевой функции).

Хотя зависимость элементов векторов может быть самой разнообразной, в приложениях методов параметрического программирования к задачам линейного программирования чаще всего применяются линейные зависимости указанных элементов от параметров.

Для вектора ограничений

$$b_i^{\nabla} = b_i + tp_i,\ i = \overline{1,m},\ t \in [a,b], \tag{6.1}$$

где b_i — значение элемента i-ого ограничения в отсутствие параметра, t — собственно параметр, p_i — коэффициент параметрического изменения правой части i-ого ограничения; a и b — границы интервала изменения самого параметра.

Для коэффициентов функции цели

$$c_j^{\nabla} = c_j + tp_j,\ j = \overline{1,n},\ t \in [a,b], \tag{6.2}$$

где c_j — значение коэффициента при j-ой переменной целевой функции.

Используя свойство неотрицательности для компонентов вектора оптимальных переменных, в случае (6.1), или условие достижение оптимума, для (6.2), на основании оптимального решения получают условие для уточнения границ [a, b].

Задача параметрического программирования будет считаться решённой, когда интервалы изменения параметров a и b выйдут за пределы заданных в математической модели, то есть $a_0 \to -\infty$, $b_0 \to +\infty$.

$$\begin{aligned} t_0 = a_0 &= \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, \quad a), \\ t_0 = b_0 &= \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, \quad б), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\tilde{p}_i$ и $\tilde{b}_i$ — элементы разложения вектора $B' = A_0'$ по базисным векторам оптимального решения.

$$\begin{aligned} t_0 = a_0 &= \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad a), \\ t_0 = b_0 &= \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad б), \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\tilde{\delta}_j = \delta_j + t_0 \tilde{p}_j$ — симплекс-разность j-ой переменной в таблице оптимального решения.

Формулы (6.3) применяются при решении ЗЛП с параметрическими зависимостями вектора свободных членов системы ограничений. Формула (6.3, б) будет определять при этом номер строки, соответствующей вектору, выводимому из базиса, после чего последует несколько итераций двойственного симплекс- метода.

Формулы (6.4) используются при параметрических изменениях вектора коэффициентов функции цели, при этом (6.4, б) указывает на направляющий столбец.

Если отрицательные значения $\widetilde{p}_i$, $i = 1, m$ или $\widetilde{p}_j$ j=1, n отсутствуют, то это означает, что $b_0 \to +\infty$ и достигнут оптимум. Оптимальное значение параметра a_0 устанавливается, обычно, на первой итерации, как только он становится отрицательным.

Параметрические изменения элементов матрицы ограничений не рассматриваются, поскольку:

указанные элементы считаются «технологическими» коэффициентами (расходы сырья, нормы выхода продукта и т.д.), не зависящими от параметров;

параметрический анализ, в этом случае весьма громоздок и вырождается в последовательное решение всех ЗЛП, возникающих при фиксированных значениях параметра.

3 ХОД РАБОТЫ

1. В дополнение к модели ЗЛП, использовавшейся в лабораторных работах № 1 – 5, получить у преподавателя вектор параметрического изменения P коэффициентов целевой функции или вектора свободных членов системы ограничений и диапазон изменения параметра. Типовые варианты приводятся в приложении Б настоящего методического указания.

2. Зафиксировать значение параметра $t = t_0$, решить ЗЛП и получить оптимальное решение для этого случая. В качестве решения может быть приняты результаты, полученные в предыдущих лабораторных работах № 2 или № 3.

3. Используя оценки (6.3) и/или (6.4) решить задачу параметрического программирования: получить набор интервалов изменения параметра и соответствующие им наборы оптимальных решений.

4. Построить чертёж, на котором представить:

исходную область ограничений;

прямоугольную область (области), в пределах которой будут находиться координаты конца нормали в оптимальных интервалах параметра;

отобразить изменения границ исходной области при изменениях параметра.

5. Оформить отчет, сделать выводы и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Когда возникают задачи параметрического программирования?

2. Почему границей изменения параметра t при вариации вектора свободных членов служит отношение $\frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{p}_i}$?

3. Почему границей изменения параметра t при вариации коэффициентов функции цели служит отношение $\frac{\widetilde{\delta}_j}{\widetilde{p}_j}$?

4. Что означает физически или геометрически параметрические изменения элементов вектора свободных членов системы ограничений?

5. Что означает физически или геометрически параметрические изменения коэффициента целевой функции?

6. Всегда ли разрешима задача параметрического программирования?

7. Почему задача параметрического изменения элементов матрицы системы ограничений рассматривается и решается весьма редко?

8. В чем сущность и особенности метода решения задачи параметрического программирования по отношению к классической ЗЛП?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Самому умному философу трудно отвечать на глупые вопросы

Хилон

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Освоить алгоритм решения задачи квадратичного программирования.

2. Приобрести навыки преобразования исходной задачи в эквивалентную ей задачу линейного программирования.

3. Закрепить навыки решения ЗЛП методом искусственного базиса

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

К области квадратичного программирования следует относить модели математического программирования, у которых система ограничений образована линейными неравенствами, а функция цели – второго порядка, вогнутая [2, 7, 9]. Обычно постановка задачи имеет вид модели

$$\begin{aligned} & f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \to \max, \\ & AX \le A_0, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

где C — симметричная отрицательно определённая матрица $[n \times n]$, b^T- вектор-строка $[1 \times n]$, А — матрица системы ограничений $[m \times n]$, A_0 — вектор свободных членов системы ограничений $[m \times 1]$, n — число переменных.

Путем применения теоремы Куна-Таккера, получают условие существования оптимального решения вида [7]:

$$\begin{aligned} & b + C \cdot X - A^T \Lambda + V = 0, && a) \\ & A_0 - AX - W = 0, && б) \\ & \left. \begin{aligned} V^T X = 0 \\ W^T \Lambda = 0 \end{aligned} \right\}, && в) \end{aligned} \qquad (7.2)$$

где Λ и W — m-мерные векторы, V — n-мерный вектор. Компоненты всех векторов Λ, W и V — неотрицательны.

Условие (7.2, а) и (7.2, б) образуют систему из $n + m$ уравнений для $2 \times (n + m)$ неизвестных компонентов X, Λ, V и W. Условие (7.2, в) есть условие дополняющей нежёсткости.

По условиям (7.2, а) и (7.2, б), которые представляют в форме

$$\begin{cases} A^T \Lambda - C \cdot X - V = b, \\ \quad AX + W = A_0, \end{cases} \qquad (7.3)$$

путём добавления искусственных переменных $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ осуществляют построение эквивалентной ЗЛП с псевдоцелевой функцией вида:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu \cdot y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu \cdot z_j \to \min$$

и системой ограничений

$$\begin{cases} A^T\Lambda - C\cdot X - V + Z = b, \\ \quad AX + W + Y = A_0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Если в ходе решения ЗЛП методом искусственного базиса, векторы Y и Z будут выведены (достигнут оптимум), а полученные значения X, Λ, V и W удовлетворяют (7.2, в), то компоненты вектора X представляют собой оптимальное решение задачи квадратичного программирования.

3 ХОД РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя компоненты целевой функции: вектор b и матрицу C. В качестве системы ограничений использовать систему неравенств из вариантов к лабораторным работам №№ 1 — 5.

2. Согласно варианту задания, построить форму (7.3). Указание: в ходе построения обеспечить положительность столбца свободных членов системы (7.3) путём умножения на множитель “–1” там, где это необходимо.

3. Построить эквивалентную задачу линейного программирования (7.4) и решить её методом искусственного базиса.

4. Выполнить проверку полученного решения на соответствии условиям дополняющей нежёсткости (7.2, в) и, в случае их удовлетворения, рассчитать максимальное значение целевой функции при полученном векторе оптимальных параметров X. Для удобства ручного выполнения расчётов, целевую функцию можно представить в виде

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j .$$

5. Выполнить чертёж, на котором отобразить область ограничений с указанием точки, в которой достигается оптимальное решение НП-задачи, и привести значение функции цели в этой точке.

6. Оформить отчет, сделать содержательные выводы и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
2. Сформулируйте теорему квадратичного программирования.

3. Как по «внешнему» виду математической модели определить: относится ли она к задачам квадратичного программирования?

4. Как следует понимать термины «выпуклая» и «вогнутая» функции применительно к задачам нелинейного программирования?

5. Что означает термин “симметричная” матрица?

6. Что означают термины “отрицательно” и “положительно” определённые матрицы?

7. В чём заключается условие дополняющей нежёсткости? Запишите его формулировку.

8. Когда задача квадратичного программирования неразрешима?

9. Можно ли решить задачу квадратичного программирования для случая с функцией цели вида $f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \to \max$, когда C — симметричная, положительно определённая матрица, и, если Вы полагаете, что можно, поясните, каким образом?

10. Какие шаги предпринять, чтобы пользуясь изложенным выше методом решить задачу вида (7.1) на минимум целевой функции?

11. Как убедиться в положительной определённости матрицы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Если Вы владеете знаниями, дайте другим зажечь от него свои светильники

Маргарет Фуллер

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Освоить алгоритм метода ветвей и границ применительно к решению задач целочисленного программирования.

2. Приобрести навыки введения дополнительных ограничений в систему для обеспечения условия целочисленности переменных.

3. Закрепить навыки решения ЗЛП двойственным симплекс-методом.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача линейного целочисленного программирования (ЛЦП) является частным случаем задач дискретного математического программирования [8, 10, 12] в постановке

$$\begin{aligned} &C^T X \to \max, \\ &AX \le B = A_0, \\ &x_i \in D,\ i = 1,\overline{n}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Известны [12] задачи (8.1) с неделимостями (о рюкзаке), экстремальные комбинаторные задачи (о назначениях, коммивояжёра), о покрытиях и др.

Одним из часто применяемых методов решения задач дискретного программирования, является метод ветвей и границ [3, 16, 17]

Для нужд целочисленного программирования метод приспособлен следующим образом. Так как оптимальное решение ищется на ограниченной области, то о любой переменной входящей в оптимальное решение, можно сказать, что её значение удовлетворяет двойному неравенству

$$X_j^{\min} \le X_j^{opt} \le X_j^{\max}.$$

Наложение на это неравенство условия целочисленности вида

$$I_j = \lfloor X_j^{opt} \rfloor,$$

где [...] — операция округления по недостатку, приведёт к тому, что оптимальное целочисленное значение X_j на числовой оси будет находиться либо слева от оптимального нецелочисленного значения X_j, либо справа.

Указанные соображения отражаются в виде нестрогих неравенств, соответственно:

$$X_j^{opt\ ЦЕЛОЕ} \le I_j, \tag{8.2}$$

$$-X_j^{opt\ ЦЕЛОЕ} \le -(I_j + 1). \tag{8.3}$$

Неравенства (8.2) и (8.3) являются дополнительными ограничениями по отношению к исходной ЗЛП, которые необходимо вводить при получении оптимального нецелочисленного решения для одной из переменных.

В результате применения границ (8.2) и (8.3), происходит разветвление текущей задачи на две подзадачи, каждая из которых получается модификацией таблицы оптимального нецелочисленного решения. Указанная таблица дополняется по следующим правилам.

1. Вводятся строка и столбец, соответствующие канонической форме представления (8.2) или (8.3). При этом дополнительная переменная, соответствующая ограничению, будет входить в число базисных переменных.

2. Формируется так называемая “выводная” строка симплекс-таблицы, при этом дополнительной переменной не вводится.

Пусть *i*-ая строка нецелочисленной симплекс-таблицы, соответствующая основной переменной задачи, на которую налагается ограничение целочисленности, описывается выражением

$$A_i \Rightarrow x_j^{opt} : a_{i,0}^{opt} = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_j + \ldots + a_{i,r} \cdot x_r + \ldots \qquad (8.4)$$

При использовании ограничения (8.2), из канонической формы представления (8.2) необходимо вычесть (8.4) и поместить результат в таблицу.

При построении ветви с использованием (8.3), к канонической форме представления (8.3) следует прибавить (8.4).

3. Получающиеся задачи решаются с применением итерационной процедуры двойственного симплекс-метода до получения оптимума либо факта неразрешимости. В литературе [3, 9] этот шаг называется “большой итерацией”

4. В зависимости от того, является ли текущее решение целочисленным или нет, вводятся новые ограничения (8.2) и (8.3), приводящие к дальнейшему ветвлению задачи, либо процесс вычислений завершается.

5. Когда все возникающие задачи оказываются решёнными, из результатов, соответствующих оптимальным целочисленным решениям, выбирается решение, целевая функция в котором наиболее отвечает условиям оптимальности, то есть самая максимальная или самая минимальная.

3. ХОД РАБОТЫ

1. В качестве варианта к выполнению лабораторной работы использовать ранее выданное к лабораторной работе № 1 задание.

2. Задействовать в качестве оптимального нецелочисленного решения результаты выполнения одной из лабораторных работ №№ 2 или 3.

3. Сформулировать, используя неравенства (8.2) и (8.3) пару задач, построить соответствующие симплекс-таблицы и приступить к решению.

Напоминание: применение неравенств (8.2) и (8.3) допускается, в пределах одного шага алгоритма, только к одной переменной (одной строке симплекс-таблицы). Обычно, в качестве переменных для выполнения ветвления, используются основные переменные математической модели.

4. Построить дерево решений, обозначив на нём ситуации неразрешимости задач и узлы, в которых было достигнуто оптимальное целочисленное решение.

5. Выбрать наилучшее решение из оптимальных целочисленных.

6. Построить чертёж области ограничений и обозначить на ней оптимум.

7. Оформить отчет, сделать содержательные выводы и защитить результаты выполнения работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем сходства и различия терминов «дискретный» и «целочисленный»?

2. Опишите, в самом общем виде, алгоритм метода ветвей и границ.

3. Почему алгоритм получил такое название, что является ветвями, а что — границами?

4. Поясните сущность и неравенств (8.2) и (8.3).

5. Почему в ходе решения ЛЦП используется двойственный симплекс-метод?

6. В каких случаях задача ЛЦП не будет иметь решения?

7. Как вы думаете, оптимальное решение ЛЦП будет единственным? Обоснуйте свои соображения по этому поводу.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ О НАБОРЕ ВЫСОТЫ И СКОРОСТИ

Ум не заменяет знания
Люк де Вовенарг

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Получение представления о сущности задач динамического программирования и об их декомпозиции.

2. Освоение простейших алгоритмов решения задач данного класса

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сущность динамического подхода заключается в замене решения задачи из n шагов последовательностью из n задач: одношаговой, двухшаговой et c. Особенности, которыми должна обладать исходная задача, к которой предполагается приложить указанный подход, состоит в следующем [7, 9].

Исходная задача допускает представление в виде n-шагового процесса принятия решений.

Задача должна быть определённой для любого числа шагов и её структура не зависима от их числа.

В ходе решения задаётся множество параметров, описывающих систему, а компоненты этого множества переменны по значению, но не должны меняться содержательно.

Решение, полученное на k-том шаге не должно оказывать влияние на предыдущие решения, кроме как инициировать пересчёт элементов множества.

Пусть $\vec{\xi}$ — вектор (множество) параметров, описывающих состояние системы, $\Lambda_k\left(\vec{\xi}\right)$ — оптимальное значение функции цели, которая называется функцией состояния, для k-шагового процесса при условии $\vec{\xi}$. $\vec{X}_k$ — вектор переменных (параметров стратегии), подлежащих расчёту на k-том шаге. Тогда

$$\Lambda_k(\vec{\xi}) = \max_{\vec{X}_k}\left\{f\left(\vec{\xi}, \vec{X}_k\right) + \Lambda_{k-1}\left[T\left(\vec{\xi}, \vec{X}_k\right)\right]\right\},$$

где $T\left(\vec{\xi}, \vec{X}_k\right)$ — состояние предыдущего (k — 1) шага при условиях $\vec{\xi}$ и $\vec{X}_k$.

Задача о выборе траектории относится к задачам динамического программирования для систем с дискретным временем и зафиксированными начальным и конечным векторами её состояний. Затраты или эффекты, связанные с изменением состояния, задаются в условии задачи.

Полный пересчёт всех возможных траекторий не исключается, в силу конечности числа состояний системы, но, в соответствии с принципами комбинаторики, число таких траекторий, даже при сравнительно небольшом числе состояний, значительно, что автоматически влечёт рост объёма вычислений с увеличением размерности задачи, что для большинства практических приложений является неприемлемым.

Поэтому, в ходе решения, начиная от конечной точки траектории, производится динамическая оценка текущего состояния, что позволяет не рассматривать затратные (неэффективные) ветви перехода между состояниями системы.

Гипотетически предполагается, что система представляет собой летательный аппарат, который должен набрать заданные высоту и скорость полёта, поэтому в литературе эта задача известна как “задача о наборе высоты и скорости” [4].

Алгоритм решения достаточно подробно рассмотрен в литературе, например [7, 9].

3 ХОД РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя вариант, который представляется прямоугольной матрицей.

Столбцы с нечётными номерами соответствуют “вертикальным” перемещениям системы (у них элемент в верхней строке отсутствует), столбцы с чётными номерами соответствуют “горизонтальным” переходам. На рисунке Д.1 показана привязка матрицы варианта к графу переходов системы.

Смысл элементов матрицы суть издержки, получающиеся при переходе между состояниями системы. Поэтому, цель решения – перевод системы из состояния S_0 в состояние S^*. В результате решения должна получиться траектория, обеспечивающая минимальную издержку перевода.

2. Построить граф переходов системы с нанесенными на дуги величинами издержек.

3. Приняв в качестве начального состояния работы алгоритма состояние S^*, последовательно применяя расчёты, получить оптимальную траекторию (траектории) и рассчитать минимальное значение целевой функции

4. Построить чертёж, на котором представить: отобразить оптимальную траекторию перевода системы.

5. Оформить отчет, сделать выводы и защитить результаты выполнения лабораторной работы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте в общем виде задачу динамического программирования.

2. Как формулируется принцип оптимальности по Р. Беллману?

3. Обеспечивает ли принцип оптимальности независимость последующих решений от предыдущих решений, полученных ранее?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

... наши знания никогда не могут
иметь конца именно потому, что
предмет познания бесконечен
Блез Паскаль

“… а посему господа инженеры должны проявить инициативу и, руководствуясь полученными знаниями и пользой дела, употребить все силы для оправдания своего предназначения” [Устав корпуса Морских Инженеров, 1910 г.].

С уважением и пожеланием успехов в овладении ММИО,
Н.П.Тлуховская-Степаненко,
В.Ю. Карлусов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акоф Р. Исследование операций / Р. Акоф, П. Райветт. – М.: Мир, 1986. – 230 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 317 с.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х томах / Г. Вагнер. – М.: Мир Т.1: 1972. – 335 с. Т.2: 1973. – 488 с. Т.3: 1973. – 501 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
5. Дегтярев Ю.И. Исследование операций / Ю.И. Дегтярев. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
6. Деордица Ю.Ф. Исследование операций в планировании управления / Ю.Ф. Деордица, Ю.М., Нефедов. – Киев: Вища школа, 1991. – 196 с.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций: учебное пособие / Ю.П. Зайченко. – Киев: Вища школа, 1979. – 392 с.
8. Зайченко Ю.П. Исследование операций: сборник задач / Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – Киев: Вища школа, 1990. – 239 с.

9. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. — 4-те вид., перероб. і допов. / Ю.П. Зайченко — К., 2000. — 688 с.

10. Катулев А.Н. Математические методы в системах поддержки принятия решений [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по напр. "Информационные системы" и "Прикладная математика" / А.Н. Катулев, Н.А. Северцев. – М.: Высшая школа, 2005. – 311 с.

11. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций / П.В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2001. – 192 с.

12. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с.

13. Кюлян В.Р. Математическое программирование / В.Р. Кюлян, Е.А. Юнькова, А.Б. Жильцов. – К.: МАУАП, 2000. – 124 с.

14. Методические указания к выполнению лабораторных и контрольных работ для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 07.080401 - “Компьютеризированные системы обработки информации и управления” / Разраб. Л.П. Старобинская, В.Ю. Карлусов. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1998. – 68 с.

15. Методические указания к выполнению контрольных и расчётно-графических заданий по дисциплине “Методы исследования операций’’ для студентов всех форм обучения по направлению 0804 – “Компьютерные науки”. Часть 1. Задачи линейного программирования / Разраб. Л.П. Старобинская, В.Ю. Карлусов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 52 с.

16. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с.

17. Романюк Т.П. Математичне програмування: Навч. посіб. / Т.П. Романюк, Т.О. Терещенко, Г.В. Присенко, І.М. Городкова — К.: ІЗМН, 1996. — 312 с.

18. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.

19. Юдин Д.Б. Линейное программирование (Теория, методы, приложения) / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

00. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 18; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

01. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 35; \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 18; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

02. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 20; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

03. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 42; \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 24; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

04. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 18; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 14; \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

05. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 6; \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

06. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 10; \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 8; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

07. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 35; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 14; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

08. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 8; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

09. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 12; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 24; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 21; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 14; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 5; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 21; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 7; \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 18; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10; \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 12; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 28; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 15; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 9; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 7; \\ 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \geq 7; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 20; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 6; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 14; \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 7; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

21. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 21; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 21; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

22. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 18; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 21; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 2; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

23. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 28; \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 18; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

24. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 25; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 15; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

25. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 14; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

26. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 24; \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 20; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

27. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 15; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 20; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 8; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

28. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 42; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 10; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 7; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 7; \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

31. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

32. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

33. $f(x_1, x_2) = 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 12 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 \le 168; \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \ge 20; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

34. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 5; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

35. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 6; \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 9; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

36. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 18; \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 8; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

37. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 15; \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 24; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

38. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 7; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

39. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 20; \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 24; \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

40. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

41. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 35; \\ 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 24; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

42. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

43. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 6; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 10; \\ 2 \cdot x_1 + 1x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

44. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 15; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

45. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 7; \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16; \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

46. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

47. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 6 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 6; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

48. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 18; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

49. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 20; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 15; \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

50. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 15; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

51. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 24; \\ 7 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 49; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 8; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

52. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16; \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 10; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

53. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 14; \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 12; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 1; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

54. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 20; \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 24; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \ge 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

55. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 9; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

56. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 14; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

57. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 14; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

58. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

59. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 42; \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 35; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 21; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

60. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

61. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

62. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36; \\ 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 35; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 21; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

63. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 18; \\ 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

64. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 20; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

65. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 6; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 8; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

66. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 14; \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 20; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

67. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

68. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 20; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

69. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 4; \\ 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 5; \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

70. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

71. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

72. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 5; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

73. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 10; \\ 6 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

74. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36; \\ 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

75. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 7; \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 10; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

76. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 20; \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

77. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 7; \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 20; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

78. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

79. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 6; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

80. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 18; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

81. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 18; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \ge 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

82. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 10; \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

83. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36; \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

84. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 6; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

85. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

86. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

87. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

88. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 35; \\ 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

89. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 14; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 15; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

90. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 10; \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 25; \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

91. $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 6; \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

92. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 35; \\ 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 18; \\ 7 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

93. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 21; \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 24; \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

94. $f(x_1, x_2) = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 28; \\ 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \le 35; \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

95. $f(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 6; \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 20; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

96. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 21; \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 30; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

97. $f(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 25; \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12; \\ 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

98. $f(x_1, x_2) = 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12; \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 8; \\ 4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

99. $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \text{opt}$
$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30; \\ 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 18; \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(обязательное)
ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Функции цели

0. $f(x_1, x_2) = (1 + 1\ t)\cdot x_1 + (2 - 2\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
1. $f(x_1, x_2) = (2 + 3\ t)\cdot x_1 + (1\cdot + 3\ t)\ x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
2. $f(x_1, x_2) = (2 + 4\ t)\cdot x_1 + (4 - 3\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
3. $f(x_1, x_2) = (3 + 2\ t)\cdot x_1 + (6 - 5\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
4. $f(x_1, x_2) = (7 - 6\ t)\cdot x_1 + (3 + 2\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
5. $f(x_1, x_2) = (3 - 2\ t)\cdot x_1 + (8 - 5\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
6. $f(x_1, x_2) = (4 - 3\ t)\cdot x_1 + (3 + 2\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
7. $f(x_1, x_2) = (5 - 2\ t)\cdot x_1 + (5 - 3\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
8. $f(x_1, x_2) = (4 + 2\ t)\cdot x_1 + (7 - 5\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.
9. $f(x_1, x_2) = (2 + 6\ t)\cdot x_1 + (5 - 3\ t)\cdot x_2 \to \max$; $t \in [-1, 1]$.

Правые части систем ограничений

$t \in [-1, 1]$

```
for (i = 1; i <= 3; i++)
{
    if (b[i] <= 10) a = 1;
        else if (b[i] <= 20) a = 5;
            else if (b[i] <= 30) a = 10;
                else a = 15;
    }
b[i] += a * t;
}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(обязательное)
ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

№	Функция цели	№	Функция цели
0.	$b^T = \begin{vmatrix} -0,1 & -0,2 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,1 & 0,3 \\ 0,3 & -0,1 \end{vmatrix}$	5.	$b^T = \begin{vmatrix} 0,1 & 2,0 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{vmatrix}$
1.	$b^T = \begin{vmatrix} -0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,5 & 0,3 \\ 0,3 & -0,5 \end{vmatrix}$	6.	$b^T = \begin{vmatrix} 1,0 & 2,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,1 & 0,8 \\ 0,8 & -0,1 \end{vmatrix}$
2.	$b^T = \begin{vmatrix} 1,0 & 2,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -1,0 & 0,8 \\ 0,8 & -1,0 \end{vmatrix}$	7.	$\begin{vmatrix} 0,8 & 0,8 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,8 & 1,2 \\ 1,2 & -0,8 \end{vmatrix}$
3.	$b^T = \begin{vmatrix} -1,5 & -0,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -1,25 & 1,75 \\ 1,75 & -1,25 \end{vmatrix}$	8.	$b^T = \begin{vmatrix} -0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,2 & 0,8 \\ 0,8 & -0,2 \end{vmatrix}$
4.	$b^T = \begin{vmatrix} -2,25 & 2,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,75 & 0,8 \\ 0,8 & -0,75 \end{vmatrix}$	9.	$b^T = \begin{vmatrix} -1,0 & 0,5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,75 & -0,25 \end{vmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д
(обязательное)
ВАРИАНТЫ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

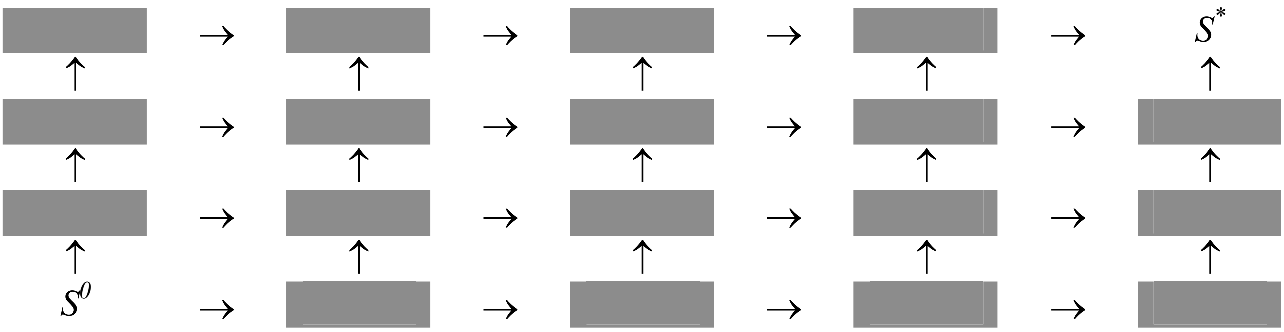

Рисунок Д.1 — Компоновка данных матрицы и граф переходов системы

№№	Маркировка дуг графа состояний								
00.		22		23		21		16	
	25	19	11	18	22	18	25	14	23
	15	11	15	14	10	20	24	20	11
	12	10	19	10	22	20	15	18	10
01.		20		17		19		20	
	13	20	12	24	13	21	22	16	13
	25	17	17	24	13	21	20	18	18
	16	29	10	17	17	14	16	17	17
02.		13		24		22		14	
	14	11	23	24	18	14	11	10	25
	19	17	13	26	23	27	21	12	14
	17	15	22	26	30	16	24	18	19
03.	13	19	19	10	19	10	18	18	17
	16	17	21	27	24	12	24	16	25
	25	11	15	21	24	15	18	10	20
	29	14	21	20	19	16	10	23	15
04.		19		17		14		11	
	25	14	17	22	20	21	17	18	18
	15	11	10	20	20	29	22	23	11
	15	21	19	15	24	15	11	16	13

05.		16		21		10		11	
	11	16	22	21	14	18	14	21	21
	17	21	15	16	24	17	22	23	25
	22	15	15	24	24	19	21	16	16
06.		23		13		11		24	
	16	20	17	24	20	10	11	13	18
	21	10	18	10	11	22	17	10	29
	20	22	24	21	11	10	16	24	20
07.		21		15		19		17	
	18	19	22	13	19	10	10	12	17
	19	15	14	23	15	16	14	19	24
	22	18	15	18	17	20	14	12	20
08.		19		19		18		15	
	12	23	24	13	14	18	22	16	10
	22	14	24	26	17	10	23	21	24
	16	20	21	14	24	15	22	12	11
09.		17		22		13		18	
	27	21	14	18	25	21	11	11	23
	21	18	15	19	16	22	22	14	14
	18	12	12	20	15	26	14	24	20
10.		10		21		14		24	
	15	19	11	19	16	12	21	15	11
	17	24	23	11	16	10	17	26	13
	22	20	23	15	18	11	15	14	23
11.		17		20		11		17	
	10	19	12	16	17	22	14	14	11
	17	12	11	18	19	11	19	11	19
	10	18	11	17	24	20	13	11	17
12.		20		17		22		15	
	18	14	17	15	18	17	23	11	27
	23	20	13	11	21	16	17	12	19
	13	24	23	24	18	23	21	21	21
13.		14		14		11		19	
	21	13	19	23	11	16	17	16	17
	24	13	20	17	15	24	16	13	20
	21	12	21	22	23	15	23	22	24

14.		16		16		21		21	
	20	20	25	24	15	20	23	20	17
	15	16	15	15	17	27	16	25	14
	14	18	15	24	16	19	21	12	12
15.		19		22		18		21	
	24	17	23	20	19	16	25	18	21
	29	15	20	22	18	22	20	11	16
	26	24	22	23	16	16	22	22	22
16.		24		14		26		11	
	24	12	23	24	12	23	23	23	19
	29	10	24	20	24	23	18	23	18
	13	16	22	21	17	13	10	13	17
17.		16		21		10		16	
	15	15	20	21	13	22	23	21	33
	16	17	16	24	16	21	14	14	20
	24	16	22	20	19	16	18	24	34
18.		11		22		17		24	
	16	12	19	23	23	24	10	13	20
	19	15	12	10	23	22	19	16	17
	29	24	25	10	19	18	12	10	11
19.		20		15		24		20	
	20	17	22	16	17	20	16	14	21
	14	21	11	15	12	17	20	11	11
	11	20	14	17	15	14	16	22	24
20.		22		10		14		16	
	14	20	14	22	19	19	11	16	21
	16	13	19	19	18	19	15	23	24
	19	20	15	22	12	12	14	19	12
21.		14		15		10		16	
	19	13	11	22	16	17	14	13	11
	11	15	19	20	17	16	22	12	13
	13	22	17	14	25	23	24	23	19
22.		19		14		15		23	
	22	23	16	15	17	17	22	20	14
	23	20	23	20	10	21	19	16	18
	20	23	28	24	17	22	18	21	20

23.		23		25		23		26	
	16	20	13	16	17	23	22	25	18
	13	23	24	21	17	21	23	17	17
	16	17	25	15	18	23	15	13	23
24.		18		17		29		18	
	22	14	15	24	16	25	19	18	17
	18	23	24	23	21	24	20	24	20
	19	14	20	15	14	21	21	23	18
25.		15		23		24		26	
	19	23	19	19	23	24	12	24	19
	24	27	13	12	21	17	17	22	17
	22	23	16	12	21	21	21	13	22
26.		20		25		20		17	
	13	19	24	24	15	16	12	16	22
	17	16	17	26	13	16	20	18	16
	25	22	19	17	21	20	16	23	12
27.		25		10		16		23	
	18	24	16	20	21	18	21	10	19
	21	15	21	21	18	18	17	22	16
	24	20	22	20	23	22	23	11	18
28.		11		19		22		18	
	16	15	21	16	20	17	24	19	11
	23	21	21	20	25	26	12	22	19
	20	13	11	23	18	10	11	19	23
29.		24		21		10		15	
	19	18	14	20	15	14	20	12	11
	19	16	12	21	12	16	14	23	15
	12	14	12	15	13	19	13	16	13
30.		19		24		20		24	
	15	16	16	12	19	13	23	23	10
	11	23	19	13	11	24	22	21	10
	11	15	10	13	13	21	12	19	19
31.		18		19		22		15	
	16	19	19	26	19	14	22	23	24
	24	11	19	18	19	19	18	29	25
	24	20	19	24	19	22	20	18	14

32.		10		11		14		24	
	16	12	19	13	18	17	22	10	24
	12	18	17	12	19	16	17	23	21
	15	23	23	23	27	11	18	18	11

33.		13		11		17		16	
	16	11	17	18	19	14	24	17	15
	23	12	18	19	17	20	19	20	19
	11	10	12	16	19	11	18	16	20

34.		15		17		23		16	
	16	13	14	23	17	13	11	18	15
	24	11	11	24	16	17	23	11	17
	13	14	11	13	20	17	16	11	21

35.		17		17		10		17	
	10	17	24	17	24	16	22	24	24
	23	20	11	12	19	18	19	13	11
	22	24	10	22	33	20	14	19	24

36.		21		18		24		23	
	22	11	16	15	20	14	22	14	12
	16	19	17	24	21	27	15	20	16
	11	17	18	13	13	12	21	15	12

37.		21		14		21		16	
	17	14	20	10	21	12	23	14	22
	13	14	19	14	18	22	11	11	19
	11	16	18	12	24	20	17	21	16

38.		17		18		18		15	
	14	11	16	16	18	12	20	13	15
	13	18	24	12	14	19	16	14	19
	18	20	22	16	14	21	22	22	15

39.		12		19		16		24	
	16	11	19	12	24	12	23	15	17
	16	19	15	12	18	16	11	23	17
	11	11	16	15	16	14	10	22	13

40.		21		18		15		18	
	19	24	15	15	16	17	13	18	17
	21	20	14	19	19	19	22	10	15
	22	17	23	24	11	15	19	14	22

41.		12		15		10		14	
	10	17	20	11	21	16	11	20	18
	12	16	13	18	18	24	18	16	18
	10	24	21	14	12	24	20	18	17
42.		21		20		24		11	
	10	10	20	18	22	20	15	14	19
	21	17	10	24	11	13	17	15	20
	15	13	16	13	11	23	23	12	17
43.		17		16		19		21	
	19	20	12	24	12	17	20	21	17
	20	22	23	12	14	15	17	18	17
	21	29	16	10	25	23	24	20	12
44.		11		19		21		15	
	21	14	16	19	20	15	13	21	17
	18	15	16	10	23	18	12	13	20
	13	13	18	13	15	19	11	15	10
45.		24		15		15		10	
	23	19	19	12	16	21	11	23	12
	19	19	23	23	13	18	24	24	19
	15	19	23	12	20	17	19	13	12
46.		17		22		24		16	
	15	20	12	14	17	22	20	22	15
	19	17	10	19	13	13	20	25	21
	21	22	18	24	22	19	20	22	17
47.		13		20		20		23	
	20	23	20	20	16	13	14	23	10
	18	10	20	29	11	22	18	15	19
	24	13	22	24	20	17	13	20	22
48.		21		17		17		23	
	11	22	21	15	17	20	23	17	17
	20	17	18	15	22	24	23	16	10
	20	23	20	12	22	21	14	21	20
49.		16		23		21		10	
	15	14	18	10	23	20	20	10	10
	14	13	19	23	18	19	20	16	13
	21	13	24	12	16	22	20	18	11

50.		17		19		20		19	
	15	10	22	19	12	23	21	12	20
	14	15	22	21	15	18	23	20	23
	10	14	24	22	10	20	24	10	21

51.		21		16		13		16	
	16	17	20	15	17	15	12	23	15
	12	16	25	13	16	16	17	15	14
	18	23	24	14	16	17	14	13	10

52.		10		10		15		19	
	18	14	23	19	18	14	10	10	12
	23	10	20	20	24	24	16	17	24
	18	23	21	19	12	11	15	10	14

53.		24		13		17		20	
	12	20	18	19	21	18	18	25	18
	19	23	18	23	26	12	24	19	22
	12	21	21	13	26	21	17	21	10

54.		18		24		19		11	
	20	16	16	23	20	10	15	11	10
	24	11	13	18	17	19	20	12	24
	10	20	13	15	18	26	17	12	12

55.		18		16		24		19	
	20	15	22	19	13	22	21	24	16
	12	23	21	18	17	10	13	20	11
	12	12	15	17	21	15	20	23	24

56.		22		20		23		18	
	24	16	25	12	13	22	24	19	15
	23	15	24	10	19	16	21	23	16
	16	12	21	19	14	24	17	17	18

57.		20		22		20		25	
	14	21	18	21	19	20	18	12	15
	22	23	17	17	16	15	14	10	15
	14	17	17	21	22	23	18	19	15

58.		12		20		14		12	
	16	23	17	17	11	11	19	17	12
	24	19	15	24	17	22	17	23	13
	19	22	22	22	21	20	15	10	10

59.		24		16		19		21	
	23	17	18	18	20	18	13	17	19
	23	24	13	24	24	11	13	24	22
	23	19	17	18	17	22	13	20	22
60.		17		12		21		19	
	21	11	12	11	11	10	12	14	14
	18	23	15	19	11	17	21	17	15
	10	12	23	18	15	11	19	15	11
61.		17		23		10		19	
	14	11	21	20	23	10	22	10	19
	14	20	18	21	11	19	20	10	20
	23	17	11	18	12	21	21	15	17
62.		24		20		24		15	
	18	17	13	13	17	22	20	15	23
	11	19	18	13	19	24	17	24	15
	15	22	18	16	22	24	14	10	18
63.		19		12		19		13	
	13	20	08	10	09	18	14	22	17
	07	18	14	19	23	22	20	20	15
	14	21	22	22	07	22	15	19	19
64.		17		11		20		17	
	16	18	21	19	18	12	20	20	18
	12	11	12	12	15	18	21	19	20
	10	19	20	17	12	17	12	21	20
65.		22		20		13		15	
	15	24	13	20	22	20	21	11	16
	19	23	15	24	23	13	17	12	13
	14	19	17	20	22	21	13	18	23
66.		12		20		23		13	
	12	19	16	24	24	10	21	11	15
	17	16	20	11	16	13	15	11	15
	22	23	17	15	16	18	19	24	20
67.		10		16		18		23	
	10	22	19	16	19	23	16	13	19
	21	18	21	10	20	19	17	22	22
	19	20	16	14	17	21	22	17	21

68.		23		16		16		18	
	15	15	16	17	12	22	18	22	13
	17	18	20	24	21	17	16	21	24
	18	15	10	14	15	24	20	19	17

69.		20		10		17		22	
	14	18	15	11	22	21	19	14	18
	11	24	18	22	18	19	19	16	10
	19	14	13	20	23	24	24	16	15

70.		24		20		16		25	
	16	12	24	18	19	18	11	21	10
	13	19	15	21	11	21	22	15	14
	11	24	11	12	14	12	22	17	19

71.		12		11		15		18	
	12	13	22	14	24	23	20	15	14
	19	16	16	11	20	19	20	15	12
	14	18	21	20	26	21	22	22	21

72.		18		10		19		11	
	10	17	18	23	13	22	15	23	21
	21	15	16	20	18	11	13	19	11
	15	15	18	22	16	13	17	13	17

73.		23		15		19		14	
	16	19	13	21	23	20	13	17	23
	15	21	19	20	23	17	16	12	18
	18	21	21	18	18	13	10	20	22

74.		12		17		12		19	
	24	19	13	11	13	17	12	16	22
	24	10	12	13	19	13	22	17	23
	16	16	17	17	14	24	17	12	15

75.		22		15		23		18	
	15	18	19	15	24	20	19	14	15
	14	21	12	21	24	18	11	19	16
	17	20	18	18	23	18	15	20	23

76.		14		12		16		17	
	12	12	18	24	17	21	14	11	16
	10	16	18	17	17	23	10	12	23
	11	12	22	12	21	23	23	19	11

77.		22		14		11		13	
	11	10	09	17	12	24	15	17	10
	14	24	19	17	10	21	15	16	19
	08	14	12	24	12	12	15	20	13

78.		21		12		22		20	
	15	18	18	21	17	16	13	13	24
	14	20	12	14	11	23	20	11	18
	21	18	15	10	11	15	15	21	22

79.		15		16		12		07	
	17	10	16	14	19	13	11	15	05
	17	15	13	16	12	17	22	14	17
	19	13	12	19	14	21	16	14	14

80.		23		13		19		19	
	13	15	10	19	12	16	21	24	22
	16	11	24	21	22	13	19	22	11
	16	16	12	13	23	23	13	18	23

81.		14		19		22		17	
	17	16	21	12	21	24	19	24	16
	11	19	22	22	20	10	15	17	19
	14	21	19	16	10	18	14	14	16

82.		11		13		24		14	
	04	13	23	17	18	19	12	15	12
	05	13	20	19	21	19	21	12	16
	05	17	14	20	26	21	11	23	21

83.		10		12		22		16	
	10	18	18	17	18	18	19	10	10
	12	11	22	14	19	16	16	17	16
	17	19	15	17	19	19	11	20	13

84.		21		22		12		10	
	20	22	23	24	17	21	15	17	13
	19	23	10	16	19	24	11	12	16
	11	15	21	18	10	17	10	19	15

85.		20		15		21		14	
	16	11	23	22	18	15	15	15	14
	11	18	16	17	19	15	13	12	12
	21	13	17	15	16	23	21	23	16

86.		12		15		24		19	
	20	21	16	21	13	16	11	18	24
	11	11	24	18	11	17	16	11	17
	12	21	14	21	18	21	14	12	13
87.		24		15		15		19	
	16	11	18	12	15	15	15	22	16
	10	18	15	12	24	22	16	20	19
	20	15	28	15	21	23	20	12	24
88.		24		12		17		19	
	14	25	18	22	23	16	20	11	10
	15	23	10	24	25	14	21	20	17
	13	21	12	10	14	19	20	17	20
89.		10		19		11		12	
	10	17	14	11	11	16	14	18	24
	22	20	22	15	16	13	17	10	28
	22	17	20	16	17	15	21	12	28
90.		22		19		13		17	
	23	19	24	20	24	10	21	21	17
	13	10	15	19	15	19	16	17	17
	14	16	15	15	11	14	19	23	12
91.		21		15		12		16	
	13	21	20	13	10	10	16	12	12
	19	13	14	15	13	12	19	11	15
	16	23	11	24	13	13	18	20	14
92.		14		18		13		24	
	16	20	14	21	17	13	10	11	23
	14	24	13	14	11	19	14	21	24
	19	16	23	11	19	15	19	13	11
93.		11		24		19		23	
	15	16	22	19	15	23	17	17	21
	17	20	23	14	23	15	18	17	21
	22	24	15	16	17	15	16	23	13
94.		21		20		14		21	
	15	21	23	16	14	13	14	22	18
	13	16	22	19	13	10	16	10	24
	15	21	13	16	20	10	22	11	23

95.		15		24		19		17	
	19	13	10	20	15	14	20	20	20
	16	15	22	10	22	18	19	22	17
	20	23	10	19	23	24	18	19	24

96.		16		20		12		16	
	12	19	21	16	22	24	12	18	24
	16	17	15	10	10	23	24	13	11
	13	15	12	19	19	11	20	18	16

97.		22		14		17		17	
	20	17	17	15	15	21	24	18	24
	13	15	20	22	22	20	20	22	10
	22	13	17	20	10	24	21	23	20

98.		15		15		23		12	
	15	20	23	20	19	18	17	10	10
	10	11	11	12	20	18	20	13	15
	15	15	11	19	18	13	20	14	17

99.		28		17		20		17	
	17	22	19	24	19	15	15	24	20
	19	15	17	10	11	19	14	20	10
	13	10	16	15	12	20	15	19	28

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Заказ № ________ от “ ________ “ __________________ 20 ____________ . Тираж ___*25*___ экз.
Изд-во СевГУ