

РГПУ им. А.И. Герцена

Тема: «Основные понятия линейного программирования»

Свистунова М. П., 2ИВТ (1) 2 подгруппа

## Лабораторная работа № 4.2

### Открытые модели ТЗ и усложнения в ее постановке

Задание: решить следующие транспортные задачи с дополнительными условиями (в ячейках таблицы даны тарифы  $c_{ij}$ , справа от таблицы - запасы  $a_i$ , внизу ее - потребности  $b_j$  ).

Задача №1.

4	3	2	7	46
1	1	6	4	34
3	5	9	4	40
40	35	30	45	

1. Полностью удовлетворить  $B_2$
2. Заблокировать клетку  $A_1B_4$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 40 + 35 + 30 + 45 = 150$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 46 + 34 + 40 = 120$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j = 150 - 120 = 30 \Rightarrow \text{открытая Т.З.}$$

Т.к. Т.З. открытая вводим дополнительного поставщика  $A_4$  с нулевыми тарифами и запасами равными 30 ед.

1. Полностью удовлетворяем  $B_2$  (метод минимальной стоимости) и удаляем из рассмотрения  $B_2$  и  $A_2$ , запасы  $A_1$  уменьшаем на 1.

Поставщики	Потребители				Запасы $a_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	4	3 1	2	7	46
$A_2$	1	1 34	6	4	34
$A_3$	3	5 -	9	4	40
$A_4$	0	0 -	0	0	30
Потребности	40	35	30	45	

2. Блокируем  $A_1B_4$ , делая тариф этой клетки намного большим максимального тарифа всей таблицы.

Новую таблицу заполняем, используя метод минимальной стоимости.

Т.к.  $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$  и количество занятых клеток равно 4, то опорный план является вырожденным. Следовательно примем  $c_{33}=0$ .

Поставщики	Потребители			Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_3$	$B_4$		
$A_1$	4 - +	2 30	30 15 -	45	0
$A_3$	3 40 -	9 0	4 - +	40	7
$A_4$	0 -	0 -	0 30	30	-30
Потребности	40	30	45		
$v_i$	-4	2	30		

$$Z_1 = 30 \cdot 2 + 15 \cdot 30 + 40 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 30 \cdot 0 = 60 + 450 + 120 = 630$$

3. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 2 \\ u_1 + v_4 = 30 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_3 = 9 \\ u_4 + v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_3 = 7 \\ u_4 = -30 \\ v_1 = -4 \\ v_3 = 2 \\ v_4 = 30 \end{cases}$$

4. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 0 - 4 = -4 < 4 \\ u_3 + v_4 &= 7 + 30 = 37 > 4 \\ u_4 + v_1 &= -30 - 4 = -34 < 0 \\ u_4 + v_3 &= -30 + 2 = -28 < 0 \end{aligned}$$

5. Цикл пересчета клетки  $c_{34}$ :

$$\Delta x = \min(15, 40) = 15$$

Поставщики	Потребители			Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_3$	$B_4$		
$A_1$	4 15	2 30	30 -	45	0
$A_3$	3 25	9 -	4 15	40	-1

$A_4$	0	0	0	30	-5
	-	-	30		
Потребности	40	30	45		
$v_i$	4	2	5		

6. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_4 = 4 \\ u_4 + v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = -5 \\ v_1 = 4 \\ v_3 = 2 \\ v_4 = 5 \end{cases}$$

7. Проверка свободных клеток:

$$u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 < 30$$

$$u_3 + v_3 = -1 + 2 = 1 < 9$$

$$u_4 + v_1 = -5 + 4 = -1 < 0$$

$$u_4 + v_3 = -5 + 2 = -3 < 0$$

8. По теореме 5 план оптимален, следовательно

$$\begin{aligned} Z_{1min} &= 15 * 4 + 30 * 2 + 25 * 3 + 15 * 4 + 30 * 0 = \\ &= 60 + 60 + 75 + 60 + 0 = 255 < Z_1 = 630 \end{aligned}$$

$$9. Z = Z_{1min} + 1 * 3 + 34 * 1 = 255 + 3 + 34 = 292$$

Задача №2.

2	4	5	1	60
2	3	9	4	70
8	4	2	5	50
40	30	20	50	

1. Из  $A_3$  в  $B_4$  доставить 20 ед. груза

2. Вывезти полностью груз из  $A_3$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 40 + 30 + 20 + 50 = 140$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 60 + 70 + 50 = 180$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = 180 - 140 = 40 \Rightarrow \text{открытая Т. 3.}$$

Т.к. Т.З. открытая вводим дополнительного потребителя  $B_5$  с нулевыми тарифами и потребностями равными 40 ед.

1. Полностью вывозим груз из  $A_3$ : из  $A_3$  в  $B_4$  доставляем 20 ед., остальные клетки  $A_3$  заполняем методом наименьшей стоимости. Удаляем из рассмотрения  $B_3$  и  $A_3$ , потребности  $B_2$  уменьшаем на 10 ед., а потребности  $B_4$  уменьшаем на 20 ед.

Поставщики	Потребители					Запасы $a_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	2	4	5 -	1	0	60
$A_2$	2	3	9 -	4	0	70
$A_3$	8 -	4 10	2 20	5 20	0 -	50
Потребности	40	30	20	50	40	

2. Новую таблицу заполняем, используя метод минимальной стоимости.

Поставщики	Потребители				Запасы $a_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	2 30	4 -	1 30	0 -	60
$A_2$	2 10	3 20	4 -	0 40	70
Потребности	40	20	30	40	

Т.к.  $m + n - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$  и количество занятых клеток равно 5, то опорный план является невырожденным.

$$Z_1 = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 0 = 60 + 30 + 20 + 60 + 0 = 170$$

3. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = 0 \end{cases}$$

4. Проверка свободных клеток:

$$u_1 + v_2 = 0 + 3 = 3 < 4$$

$$u_1 + v_5 = 0 + 0 = 0 \leq 0$$

$$u_2 + v_4 = 0 + 1 = 1 < 4$$

5. По теореме 5 план оптимален, следовательно

$$Z_{1min} = Z_1 = 170$$

$$6. Z = Z_{1min} + 10 * 4 + 20 * 2 + 20 * 5 = 170 + 40 + 40 + 100 = 350$$

Задача №3.

2	3	9	7	20
3	4	6	1	16
5	1	2	2	14
4	5	8	1	22
16	18	12	15	

1. Из  $A_2$  в  $B_4$  доставить не более 10 ед. груза

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 20 + 16 + 14 + 22 = 72$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 16 + 18 + 12 + 15 = 61$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^4 a_i = 61 - 72 = -11 \Rightarrow \text{открытая Т.З.}$$

Т.к. Т.З. открытая вводим дополнительного потребителя  $B_5$  с нулевыми тарифами и потребностями равными 11 ед.

1. Фиксируем значение  $c_{24} = 10$ . Заполняем таблицу методом наименьшей стоимости.

Поставщики	Потребители					Запасы $a_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	2 16	3 4	9 -	7 -	0 -	20
$A_2$	3 -	4 -	6 6	1 10	0 -	16
$A_3$	5 -	1 14	2 -	2 -	0 -	14
$A_4$	4 -	5 -	8 6	1 5	0 11	22
Потребности	16	18	12	15	11	

Т.к.  $m + n - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$  и количество занятых клеток равно 8, то опорный план является невырожденным.

$$Z = 16*2 + 4*3 + 6*6 + 10*1 + 14*1 + 6*8 + 5*1 + 11*0 = 32 + 12 + 36 + 10 + 14 + 48 + 5 + 0 = 157$$

2. Построим новую таблицу, исключая из рассмотрения  $c_{24}$ .

Поставщики	Потребители					Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	2 16	3 4	9 -	7 -	0 -	20	0
$A_2$	3 -	4 -	6 6	20 -	0 -	6	0
$A_3$	5 -	1 14	2 -	2 -	0 -	14	-2
$A_4$	4 -	5 -	8 6	1 5	0 11	22	2
Потребности	16	18	12	5	11		
$v_i$	2	3	6	-1	-2		

3. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_4 + v_3 = 8 \\ u_4 + v_4 = 1 \\ u_4 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -2 \\ u_4 = 2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 6 \\ v_4 = -1 \\ v_5 = -2 \end{cases}$$

4. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 &= 0 + 6 = 6 < 9 \\ u_1 + v_4 &= 0 - 1 = -1 < 7 \\ u_1 + v_5 &= 0 - 2 = -2 < 0 \\ u_2 + v_1 &= 0 + 2 = 2 < 3 \\ u_2 + v_2 &= 0 + 3 = 3 < 4 \\ u_2 + v_4 &= 0 - 1 = -1 < 20 \\ u_2 + v_5 &= 0 - 2 = -2 < 0 \\ u_3 + v_1 &= -2 + 2 = 0 < 5 \\ u_3 + v_3 &= -2 + 6 = 4 > 2 \\ u_3 + v_4 &= -2 - 1 = -3 < 2 \\ u_3 + v_5 &= -2 - 2 = -4 < 0 \\ \\ u_4 + v_1 &= 2 + 2 = 4 \leq 4 \\ u_4 + v_2 &= 2 + 3 = 5 \leq 5 \end{aligned}$$

5. Цикл пересчета клетки  $c_{33}$ :

$$\Delta x = \min(14, 6) = 6$$

Поставщики	Потребители					Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	2 16	3 4	9 -	7 -	0 -	20	0
$A_2$	3 -	4 - +	6 6 -	20 -	0 -	6	2
$A_3$	5 -	1 8 -	2 6 +	2 -	0 -	14	-2
$A_4$	4 -	5 6	8 -	1 5	0 11	22	2
Потребности	16	18	12	5	11		
$v_i$	2	3	4	-1	-2		

6. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_3 + v_3 = 2 \\ u_4 + v_2 = 5 \\ u_4 + v_4 = 1 \\ u_4 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = -2 \\ u_4 = 2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = -1 \\ v_5 = -2 \end{cases}$$

7. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 &= 0 + 4 = 4 < 9 \\ u_1 + v_4 &= 0 - 1 = -1 < 7 \\ u_1 + v_5 &= 0 - 2 = -2 < 0 \\ u_2 + v_1 &= 2 + 2 = 4 > 3 \\ u_2 + v_2 &= 2 + 3 = 5 > 4 \\ u_2 + v_4 &= 2 - 1 = 1 < 20 \\ u_2 + v_5 &= 2 - 2 = 0 \leq 0 \\ u_3 + v_1 &= -2 + 2 = 0 < 5 \\ u_3 + v_4 &= -2 - 1 = -3 < 2 \\ u_3 + v_5 &= -2 - 2 = -4 < 0 \\ u_4 + v_1 &= 2 + 2 = 4 \leq 4 \\ u_4 + v_3 &= 2 + 4 = 6 < 8 \end{aligned}$$

8. Цикл пересчета клетки  $c_{33}$ :



$$\Delta x = \min(8, 6) = 6$$

Поставщики	Потребители					Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	2 16	3 4	9 -	7 -	0 -	20	0
$A_2$	3 -	4 6	6 -	20 -	0 -	6	1
$A_3$	5 -	1 2	2 12	2 -	0 -	14	-2
$A_4$	4 -	5 6	8 -	1 5	0 11	22	2
Потребности	16	18	12	5	11		
$v_i$	2	3	4	-1	-2		

9. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_3 + v_3 = 2 \\ u_4 + v_2 = 5 \\ u_4 + v_4 = 1 \\ u_4 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = -2 \\ u_4 = 2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = -1 \\ v_5 = -2 \end{cases}$$

10. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_3 &= 0 + 4 = 4 < 9 \\ u_1 + v_4 &= 0 - 1 = -1 < 7 \\ u_1 + v_5 &= 0 - 2 = -2 < 0 \\ u_2 + v_1 &= 1 + 2 = 3 \leq 3 \\ u_2 + v_3 &= 1 + 4 = 5 < 6 \\ u_2 + v_4 &= 1 - 1 = 0 < 20 \\ u_2 + v_5 &= 1 - 2 = -1 < 0 \\ u_3 + v_1 &= -2 + 2 = 0 < 5 \\ u_3 + v_4 &= -2 - 1 = -3 < 2 \\ u_3 + v_5 &= -2 - 2 = -4 < 0 \\ u_4 + v_1 &= 2 + 2 = 4 \leq 4 \\ u_4 + v_3 &= 2 + 4 = 6 < 8 \end{aligned}$$

11. По теореме 5 план оптимален, следовательно  
при этом тариф  $c_{24} = 1$

$$Z_{\min} = 16*2 + 4*3 + 6*4 + 2*1 + 12*2 + 6*5 + 5*1 + 11*0 + 10*1 = 32 + 12 + 24 + 2 + 24 + 30 + 5 + 0 + 10 = 139 < Z = 157$$

Задача №4.

3	7	5	1	4	9	30
7	5	8	6	3	4	35
6	4	8	3	2	5	45
3	1	7	4	2	3	40
10	35	15	25	55	10	

1. Из  $A_2$  в  $B_5$  доставить не менее 30 ед.

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 30 + 35 + 45 + 40 = 150$$

$$\sum_{j=1}^6 b_j = 10 + 35 + 15 + 25 + 55 + 10 = 150$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i - \sum_{j=1}^6 b_j = 150 - 150 = 0 \Rightarrow \text{закрытая Т.З.}$$

1. Для выполнения условия блокируем  $A_2 B_5$ , уменьшаем запасы  $A_2$  и потребности  $B_5$  на 30 ед.

Заполняем таблицу по методу наименьшей стоимости.

Поставщики	Потребители						Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$		
$A_1$	3 5	7 -	5 - +	1 25 -	4 -	9 -	30	0
$A_2$	7 -	5 -	8 -	6 -	20 -	4 5	5	3
$A_3$	6 -	4 -	8 15 -	3 - +	2 25	5 5	45	4
$A_4$	3 5	1 35	7 -	4 -	2 0	3 -	40	2
Потребности	10	35	15	25	25	10	150	
$v_j$	3	-1	4	1	-2	1		

Т.к.  $m + n - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$  и количество занятых клеток равно 8, то опорный план является вырожденным. Следовательно примем  $s_{45}=0$

$$Z_1 = 5*3 + 25*1 + 5*4 + 15*8 + 25*2 + 5*5 + 5*3 + 35*1 + 0*2 = 15 + 25 + 20 + 120 + 50 + 25 + 15 + 35 + 0 = 305$$

3. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_6 = 4 \\ u_3 + v_3 = 8 \\ u_3 + v_5 = 2 \\ u_3 + v_6 = 5 \\ u_4 + v_1 = 3 \\ u_4 + v_2 = 1 \\ u_4 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 3 \\ u_3 = 4 \\ u_4 = 2 \\ v_1 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = -2 \\ v_6 = 1 \end{cases}$$

4. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 0 - 1 = -1 < 7 \\ u_1 + v_3 &= 0 + 4 = 4 < 5 \\ u_1 + v_5 &= 0 - 2 = -2 < 4 \\ u_1 + v_6 &= 0 + 1 = 1 < 9 \\ u_2 + v_1 &= 3 + 3 = 6 < 7 \\ u_2 + v_2 &= 3 - 1 = 2 < 5 \\ u_2 + v_3 &= 3 + 4 = 7 < 8 \\ u_2 + v_4 &= 3 + 1 = 4 < 6 \\ u_2 + v_5 &= 3 - 2 = 1 < 20 \\ u_3 + v_1 &= 4 + 3 = 7 > 6 \\ u_3 + v_2 &= 4 - 1 = 2 < 4 \\ u_3 + v_4 &= 4 + 1 = 5 > 3 \\ u_4 + v_3 &= 2 + 4 = 6 < 7 \\ u_4 + v_4 &= 2 + 1 = 3 < 4 \\ u_4 + v_6 &= 2 + 1 = 3 \leq 3 \end{aligned}$$

5. Цикл пересчета клетки  $c_{34}$ :

$$\Delta x = \min(15, 25) = 15$$

Поставщики	Потребители						Запасы $a_i$	$u_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$		
$A_1$	3 5	7 -	5 15	1 10	4 -	9 -	30	0
$A_2$	7 -	5 -	8 -	6 -	20 -	4 5	5	1

$A_3$	6 -	4 -	8 -	3 15	2 25	5 5	45	2
$A_4$	3 5	1 35	7 -	4 -	2 -	3 -	40	0
Потребности	10	35	15	25	25	10	150	
$v_j$	3	1	5	1	0	3		

6. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_3 = 5 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_6 = 4 \\ u_3 + v_4 = 3 \\ u_3 + v_5 = 2 \\ u_3 + v_6 = 5 \\ u_4 + v_1 = 3 \\ u_4 + v_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 2 \\ u_4 = 0 \\ v_1 = 3 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 5 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = 0 \\ v_6 = 3 \end{cases}$$

7. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 0 + 1 = 1 < 7 \\ u_1 + v_5 &= 0 + 0 = 0 < 4 \\ u_1 + v_6 &= 0 + 3 = 3 < 9 \\ u_2 + v_1 &= 1 + 3 = 4 < 7 \\ u_2 + v_2 &= 1 + 1 = 2 < 5 \\ u_2 + v_3 &= 1 + 5 = 6 < 8 \\ u_2 + v_4 &= 1 + 1 = 2 < 6 \\ u_2 + v_5 &= 1 + 0 = 1 < 20 \\ u_3 + v_1 &= 2 + 3 = 5 < 6 \\ u_3 + v_2 &= 2 + 1 = 3 < 4 \\ u_3 + v_3 &= 2 + 5 = 7 < 8 \\ u_4 + v_3 &= 0 + 5 = 5 < 7 \\ u_4 + v_4 &= 0 + 1 = 1 < 4 \\ u_4 + v_5 &= 0 + 0 = 0 < 2 \\ u_4 + v_6 &= 0 + 3 = 3 \leq 3 \end{aligned}$$

8. По теореме 5 план оптимален, следовательно

Учитываем, что  $c_{25} = 3, x_{25} = 30$

$$\begin{aligned} Z_{1\min} &= 5*3 + 15*5 + 10*1 + 5*4 + 15*3 + 25*2 + 5*5 + 5*3 + 35*1 = \\ &= 15 + 75 + 10 + 20 + 45 + 50 + 25 + 15 + 35 = 290 < Z_1 = 305 \end{aligned}$$

$$9. Z = Z_{1\min} + 30 * 3 = 290 + 90 = 380$$

