РГПУ им. А.И. Герцена

Тема: «Нелинейное программирование»

Свистунова М. П., 2ИВТ (1) 2 подгруппа

Лабораторная работа №5

Модели нелинейного программирования

1. Задание: найти локальный экстремум функции:

$$Z = x^3 + y^3 + 3xy$$

   1) Частные производные:

$$\begin{cases} Z'_x = 3x^2 + 3y \\ Z'_y = 3y^2 + 3x \end{cases}$$

   2) Стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 + y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \; or \; y = -1 \\ x = -y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} or \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$X^1(0;0), X^2(-1;-1)$$

   3) Экстремумы:

$$\begin{cases} Z''_{xx} = 6x \\ Z''_{yx} = Z''_{xy} = 3 \\ Z''_{yy} = 6y \end{cases}$$

$X^1(0;0)$: $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 0$:
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9 < 0 =>$ экстремума нет

$X^2(-1;-1)$: $a_{11} = -6 < 0$, $a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = -6 < 0$:
$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0 =>$ точка максимума

2. Задание: найти локальный экстремум функции:

$$Z = x^3y^3(12 - x - y), x > 0, y > 0$$

   1) Частные производные:

$$\begin{cases} Z'_x = 3x^2y^2(12 - x - y) + x^3y^2(-1) \\ Z'_y = 2x^3y(12 - x - y) + x^3y^2(-1) \end{cases}$$

   2) Стационарные точки:

$$\begin{cases}3x^2y^2(12-x-y)-x^3y^2=0\\ 2x^3y(12-x-y)-x^3y^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3(12-x-y)-x=0\\ 2(12-x-y)-y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}36-3x-3y-x=0\\ 24-2x-2y-y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}36-4x-3y=0\\ 24-2x-3y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}12-\dfrac{4x}{3}-y=0\\ 8-\dfrac{2x}{3}-y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4-\dfrac{2x}{3}=0\\ 8-\dfrac{2x}{3}-y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}$$

$$X^1(6;4)$$

3) Экстремумы:

$$\begin{cases}Z''_{xx}=6xy^2(12-x-y)+3x^2y^2(-1)-3x^2y^2\\ Z''_{yx}=Z''_{xy}=6x^2y(12-x-y)+3x^2y^2(-1)-2x^3y\\ Z''_{yy}=2x^3(12-x-y)+2x^3y(-1)-2x^3y\end{cases}$$

$$\begin{cases}Z''_{xx}=6xy^2(12-x-y)-6x^2y^2\\ Z''_{yx}=Z''_{xy}=x^2y(6(12-x-y)-3y-2x)\\ Z''_{yy}=2x^3(12-x-y)-4x^3y\end{cases}$$

$$\begin{cases}Z''_{xx}=6xy^2(12-x-y-x)\\ Z''_{yx}=Z''_{xy}=x^2y(72-6x-6y-3y-2x)\\ Z''_{yy}=2x^3(12-x-y-2y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}Z''_{xx}=6xy^2(12-2x-y)\\ Z''_{yx}=Z''_{xy}=x^2y(72-8x-9y)\\ Z''_{yy}=2x^3(12-x-3y)\end{cases}$$

$X^1(6;4)$: $a_{11}=-2304<0$, $a_{12}=a_{21}=1728, a_{22}=-2592<0$:
$\begin{pmatrix}-2304 & 1728\\ 1728 & -2592\end{pmatrix}=2985984>0 =>$ точка максимума

3. Задание: найти локальный экстремум функции:

$$Z=x^2+xy+y^2+x-y+1$$

1) Частные производные:

$$\begin{cases} Z'_x = 2x + y + 1 \\ Z'_y = x + 2y - 1 \end{cases}$$

2) Стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$X^1(-1; 1)$$

3) Экстремумы:

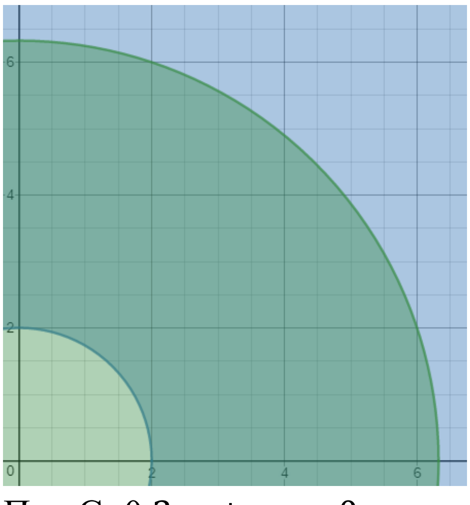
$$\begin{cases} Z''_{xx} = 2 \\ Z''_{yx} = Z''_{xy} = 1 \\ Z''_{yy} = 2 \end{cases}$$

$X^1(-1; 1)$: $a_{11} = 2 > 0, a_{12} = a_{21} = 1, a_{22} = 2 > 0$:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 =>$ точка минимума

4. Задание: найти глобальный экстремум функции Z в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение:

$$Z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



При C=0 $3x_1 + x_2 = 0$

При увеличении C прямая сдвигается вверх.

Линии уровня покидают ОДР, проходя через точку X^*, лежащую на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 40$ или в ОДР.

$$\text{Пусть } x_1 = \sqrt{40 - x_2^2}, x_1 \in [0, 2\sqrt{10}], \text{ тогда}$$

$$Z = 3\sqrt{40 - x_2^2} + x_2$$

$$Z' = 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{40 - x_2^2}} * (-2x_2) + 1 = 1 - \frac{3x_2}{\sqrt{40 - x_2^2}}$$

$$1 - \frac{3x_2}{\sqrt{40-x_2^2}} = 0$$

$$\frac{3x_2}{\sqrt{40-x_2^2}} = 1$$

$$3x_2 = \sqrt{40 - x_2^2}$$

$$9x_2 = 40 - x_2^2$$

$$x_2^2 = 4$$

$$x_2 = \pm 2 => \text{т. к. } x_2 \geq 0 \ x_2 = 2$$

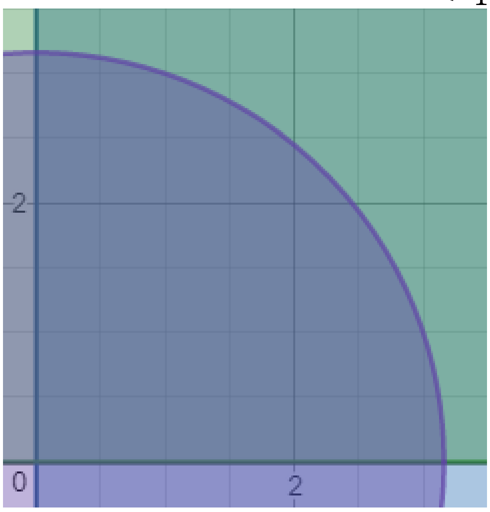
$$x_1 = 6$$

$$Z_{max} = 3 * 6 + 2 = 20, \ X^1(6, 2)$$

5. Задание: найти глобальный экстремум функции Z в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение:

$$Z = x_1^2 + 2x_2 - 3$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



При C=0 $x_1^2 + 2x_2 - 3 = 0$

При уменьшении C график параболы сдвигается вверх.

Линии уровня покидают ОДР, проходя через точку X^*, лежащую на окружности $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$ или в ОДР.

$$\text{Пусть } x_1 = \sqrt{10 - x_2^2}, x_1 \in \left[0, \sqrt{10}\right], \text{ тогда}$$

$$Z = 10 - x_2^2 + 2x_2 - 3 = 7 - x_2^2 + 2x_2$$

$$Z' = -2x_2 + 2 = 0$$

$$x_2 = 1$$

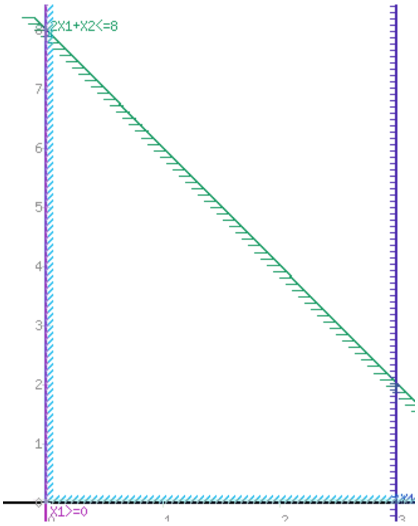
$$x_1 = 3$$

$$Z_{max} = 9 + 2 - 3 = 8,\ \ X^1(3, 1)$$

6. Задание: найти глобальный экстремум функции Z в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение:

$$Z = x_1 x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \end{cases}$$



При C=0 $x_1 x_2 = 0$

При увеличении C прямая сдвигается вверх.

Линии уровня покидают ОДР, проходя через точку X^*, лежащую на прямой $2x_1 + x_2 = 8$ или в ОДР.

$$\text{Пусть } x_1 = 4 - \frac{x_2}{2}, x_1 \in [0, 3], \text{ тогда}$$

$$Z = \left(4 - \frac{x_2}{2}\right) x_2 = 4x_2 - \frac{1}{2} x_2^2$$

$$Z' = 4 - \ x_2 = 0$$

$$x_2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$Z_{max} = 2 * 4 = 8 = 20,\ \ X^1(2, 4)$$

7. Задание: найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

$$Z = x_1 x_2 \text{ при } x_1^2 + x_2^2 = 2$$

$$L(x_1,x_2)=x_1x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2-2)$$

$$\begin{cases}L'_{x_1}=x_2+\lambda(2x_1)\\ L'_{x_2}=x_1+\lambda(2x_2)\\ L'_{\lambda}=x_1^2+x_2^2-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-2\lambda x_1\\ x_1=-2\lambda x_2\\ x_1^2+x_2^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-2\lambda x_1\\ 1=4\lambda^2\\ x_1^2+x_2^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-2\lambda x_1\\ \lambda=\pm\frac{1}{2}\\ x_1^2+x_2^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ x_2=-x_1\\ x_1^2+x_1^2=2\end{cases} or \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\ x_2=x_1\\ x_1^2+x_1^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ x_2=-x_1\\ x_1^2=1\end{cases} or \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\ x_2=x_1\\ x_1^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-x_1\\ x_1=\pm1\end{cases} or \begin{cases}x_2=x_1\\ x_1=\pm1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1\end{cases} or \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=1\end{cases} or \begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\end{cases} or \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-1\end{cases}$$

$$Z_1(1,-1)=1*(-1)=-1$$

$$Z_2(-1,1)=(-1)*1=-1$$

$$Z_3(1,1)=1*1=1$$

$$Z_4(-1,-1)=(-1)*(-1)=1$$

8. Задание: найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

$$Z=x_1+x_2 \text{ при } \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$$

$$L(x_1,x_2)=x_1+x_2+\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)$$

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 1 + \lambda\left(-\dfrac{1}{x_1^2}\right) \\ L'_{x_2} = 1 + \lambda\left(-\dfrac{1}{x_2^2}\right) \\ L'_{\lambda} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\lambda}{x_1^2} \\ 1 = \dfrac{\lambda}{x_2^2} \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x_1^2 \\ \lambda = x_2^2 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x_1^2 \\ \lambda = x_2^2 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1} \\ x_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x_1^2 \\ \lambda = \left(\dfrac{x_1}{x_1 - 1}\right)^2 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1} \\ x_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x_1}{x_1 - 1}\right)^2 = x_1^2 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1} \\ x_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_1 \neq 1, x_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_{max} = 2 + 2 = 4$$

9. Задание: найти условный экстремум с помощью метода Лагранжа:

$$Z = x_1^3 + x_2^3 \text{ при } x_1 + x_2 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$L(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 3x_1^2 + \lambda \\ L'_{x_2} = 3x_2^2 + \lambda \\ L'_{\lambda} = x_1 + x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + \lambda = 0 \\ 3x_2^2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \mathrm{x}_2 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} + \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \mathrm{x}_2 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \mathrm{x}_2 = \sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = 1 \\ \mathrm{x}_2 = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$Z_{max} = 1^3 + 1^3 = 1$$