

РГПУ им. А.И. Герцена

Тема: «Основные понятия линейного программирования»

Свистунова М. П., 2ИВТ (1) 2 подгруппа

Лабораторная работа № 4.1

Оптимальность плана транспортной задачи

Задание: составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

Задача №1.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
b_j	20	30	30	10	90

Метод минимальной стоимости

Поставщики	Потребители				Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 20	3 -	2 10	4 -	30
A_2	3 -	2 30	5 -	1 10	40
A_3	4 -	3 -	2 20	6 -	20
Потребности	20	30	30	10	90

Т.к. $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ и количество занятых клеток равно 5, то опорный план является вырожденным.

$$Z = 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 10 + 80 + 20 + 60 = 170$$

1. Так как план вырожденный, примем $c_{32} = 0$.

Поставщики	Потребители				Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2 20	3 -	2 10	4 -	30	0
A_2	3 -	2 30	5 -	1 10	40	-1
A_3	4 -	3 0	2 20	6 -	20	0
Потребности	20	30	30	10	90	
v_i	2	3	2	2		

2. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_4 = 1 \\ u_3 + v_2 = 3 \\ u_3 + v_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -1 \\ u_3 = 0 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 2 \\ v_4 = 2 \end{cases}$$

3. Проверка свободных клеток:

$$u_1 + v_2 = 0 + 3 = 3 \leq 3$$

$$u_1 + v_4 = 0 + 2 = 2 < 3$$

$$u_2 + v_1 = 2 - 1 = 1 < 3$$

$$u_2 + v_3 = -1 + 2 = 1 < 5$$

$$u_3 + v_1 = 2 + 0 = 2 < 6$$

4. По теореме 5 план оптимален, следовательно $Z = Z_{min} = 170$.

Задача №2.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	30
A_2	9	4	5	7	3	70
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Метод минимальной стоимости

Поставщики	Потребители					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 10	7 -	3 -	6 -	2 20	30
A_2	9 -	4 40	5 20	7 10	3 0	70
A_3	5 -	7 -	6 -	2 50	4 -	50
Потребности	10	40	20	60	20	150

Т.к. $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ и количество занятых клеток равно 6, то опорный план является вырожденным.

$$Z = 10 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 7 = 20 + 40 + 100 + 160 + 100 + 70 = 60 + 260 + 170 = 490$$

1. Так как план вырожденный, примем $c_{24} = 0$.

Поставщики	Потребители					Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	2 10	7 -	3 - +	6 -	2 20 -	30	0
A_2	9 -	4 40	5 20 -	7 10	3 0 +	70	-1
A_3	5 -	7 -	6 -	2 50	4 -	50	-4
Потребности	10	40	20	60	20	150	
v_i	2	3	4	6	2		

2. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_5 = 2 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_2 + v_3 = 5 \\ u_2 + v_4 = 7 \\ u_2 + v_5 = 3 \\ u_3 + v_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -1 \\ u_3 = -4 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 6 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

3. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 0 + 3 = 3 < 7 \\ u_1 + v_3 &= 0 + 4 = 4 > 3 \\ u_1 + v_4 &= 0 + 6 = 6 \leq 6 \\ u_2 + v_1 &= -1 + 2 = 1 < 9 \\ u_3 + v_1 &= -4 + 2 = -2 < 5 \\ u_3 + v_2 &= -4 + 3 = -1 < 7 \\ u_3 + v_3 &= -4 + 4 = 0 < 6 \\ u_3 + v_5 &= -4 + 2 = -2 < 4 \end{aligned}$$

4. Цикл пересчета клетки c_{13} :

$$\Delta x = \min(20, 20) = 20$$

Поставщики	Потребители					Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	2 10	7 -	3 20	6 -	2 0	30	0
A_2	9 -	4 40	5 -	7 10	3 20	70	-1
A_3	5 -	7 -	6 -	2 50	4 -	50	-4
Потребности	10	40	20	60	20	150	
v_i	2	3	3	6	2		

5. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_3 = 3 \\ u_1 + v_5 = 2 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_2 + v_4 = 7 \\ u_2 + v_5 = 3 \\ u_3 + v_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -1 \\ u_3 = -4 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 3 \\ v_4 = 6 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

6. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 0 + 3 = 3 < 7 \\ u_1 + v_4 &= 0 + 6 = 6 \leq 6 \\ u_2 + v_1 &= 1 + 2 = 3 < 9 \\ u_2 + v_3 &= 1 + 3 = 4 < 5 \\ u_3 + v_1 &= -4 + 2 = -2 < 5 \\ u_3 + v_2 &= -4 + 3 = -1 < 7 \\ u_3 + v_3 &= -4 + 3 = -1 < 6 \\ u_3 + v_5 &= -4 + 2 = -2 < 4 \end{aligned}$$

7. По теореме 5 план оптимален, следовательно

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= 10 * 2 + 20 * 3 + 0 * 2 + 40 * 4 + 10 * 7 + 20 * 3 + 50 * 2 = \\ &= 20 + 60 + 0 + 160 + 70 + 60 + 100 = 470 < Z \end{aligned}$$

Задача №3.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	2	5	7	6	20
A_2	7	8	3	4	5	110
A_3	2	1	4	3	2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

Метод минимальной стоимости

Поставщики	Потребители					Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	4 -	2 - +	5 -	7	6 20 -	20	0
A_2	7 -	8 -	3 30	4 60	5 20	110	-1
A_3	2 70	1 40 -	4 -	3 -	2 10 +	120	-4
Потребности	70	40	30	60	50	250	
v_i	6	5	4	5	6		

Т.к. $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ и количество занятых клеток равно 7, то опорный план является невырожденным.

$$Z = 20 \cdot 6 + 30 \cdot 3 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 70 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 120 + 90 + 240 + 100 + 140 + 40 + 20 = 210 + 340 + 200 = 750$$

1. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_5 = 6 \\ u_2 + v_3 = 3 \\ u_2 + v_4 = 4 \\ u_2 + v_5 = 5 \\ u_3 + v_1 = 2 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_3 + v_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -1 \\ u_3 = -4 \\ v_1 = 6 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 5 \\ v_5 = 6 \end{cases}$$

2. Проверка свободных клеток:

$$u_1 + v_1 = 0 + 6 = 6 > 4$$

$$u_1 + v_2 = 0 + 5 = 5 > 2$$

$$u_1 + v_3 = 0 + 4 = 4 < 5$$

$$u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 < 7$$

$$u_2 + v_1 = -1 + 6 = 5 < 7$$

$$u_2 + v_2 = -1 + 5 = 4 < 8$$

$$u_3 + v_3 = -4 + 4 = 0 < 4$$

$$u_3 + v_4 = -4 + 5 = 1 < 3$$

3. Цикл пересчета клетки c_{12} :

$$\Delta x = \min(20, 40) = 20$$

Поставщики	Потребители					Запасы	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	
A_1	4 -	2 20	5 -	7	6 0	20	0
A_2	7 -	8 -	3 30	4 60	5 20	110	2
A_3	2 70	1 20	4 -	3 -	2 30	120	-1
Потребности	70	40	30	60	50	250	
v_i	3	2	1	2	3		

4. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 3 \\ u_2 + v_4 = 4 \\ u_2 + v_5 = 5 \\ u_3 + v_1 = 2 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_3 + v_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = -1 \\ v_1 = 3 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 1 \\ v_4 = 2 \\ v_5 = 3 \end{cases}$$

5. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 0 + 3 = 3 < 4 \\ u_1 + v_3 &= 0 + 1 = 1 < 5 \\ u_1 + v_4 &= 0 + 2 = 2 < 7 \\ u_1 + v_5 &= 0 + 3 = 3 < 6 \\ u_2 + v_1 &= 2 + 3 = 5 < 7 \\ u_2 + v_2 &= 2 + 2 = 4 < 8 \\ u_3 + v_3 &= -1 + 1 = 0 < 4 \\ u_3 + v_4 &= -1 + 2 = 1 < 3 \end{aligned}$$

6. По теореме 5 план оптимален, следовательно

$$\begin{aligned} Z_{min} &= 20 * 2 + 30 * 3 + 60 * 4 + 20 * 5 + 70 * 2 + 20 * 1 + 30 * 2 = \\ &= 40 + 90 + 240 + 100 + 140 + 20 + 60 = 690 < Z \end{aligned}$$

Задача №4.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	8	4	6	3	120
A_2	3	2	5	2	6	30
A_3	6	5	8	7	4	40
A_4	3	4	4	2	1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Метод двойного предпочтения

Поставщики	Потребители					Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	2 30	8 10 -	4 80	6 -	3 - +	120	0
A_2	3 -	2 30	5 -	2 -	6 -	30	-6
A_3	6 -	5 40	8 -	7 -	4 -	40	-3
	3	4	4	2	1	60	-4

A_4	-	10 +	-	20	30 -		
Потребности	30	90	80	20	30	250	
v_i	2	8	4	6	5		

Т.к. $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ и количество занятых клеток равно 8, то опорный план является невырожденным.

$$Z = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 8 + 80 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 60 + 80 + 320 + 60 + 200 + 40 + 40 + 30 = 830$$

1. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 8 \\ u_1 + v_2 = 8 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_2 = 5 \\ u_4 + v_2 = 4 \\ u_4 + v_4 = 2 \\ u_4 + v_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -6 \\ u_3 = -3 \\ u_4 = -4 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 8 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 6 \\ v_5 = 5 \end{cases}$$

2. Проверка свободных клеток:

$$u_1 + v_4 = 0 + 6 = 6 \leq 6$$

$$u_1 + v_5 = 0 + 5 = 5 > 3$$

$$u_2 + v_1 = -6 + 2 = -4 < 3$$

$$u_2 + v_3 = -6 + 4 = -2 < 5$$

$$u_2 + v_4 = -6 + 6 = 0 < 2$$

$$u_2 + v_5 = -6 + 5 = -1 < 6$$

$$u_3 + v_1 = -3 + 2 = -1 < 6$$

$$u_3 + v_3 = -3 + 4 = 1 < 8$$

$$u_3 + v_4 = -3 + 6 = 3 < 7$$

$$u_3 + v_5 = -3 + 5 = 2 < 4$$

$$u_4 + v_1 = -4 + 2 = -2 < 3$$

$$u_4 + v_3 = -4 + 4 = 0 < 4$$

3. Цикл пересчета клетки c_{15} :

$$\Delta x = \min(30, 10) = 10$$

Поставщики	Потребители					Запасы a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	2 30	8 10 -	4 80	6 -	3 - +	120	0
A_2	3 -	2 30	5 -	2 -	6 -	30	-4
A_3	6 -	5 40	8 -	7 -	4 -	40	-1

A_4	3 -	4 10 +	4 -	2 20	1 30 -	60	-2
Потребности	30	90	80	20	30	250	
v_i	2	6	4	4	3		

4. Система уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_5 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_2 = 5 \\ u_4 + v_2 = 4 \\ u_4 + v_4 = 2 \\ u_4 + v_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -4 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = -2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 6 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 4 \\ v_5 = 3 \end{cases}$$

5. Проверка свободных клеток:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 0 + 6 = 6 < 8 \\ u_1 + v_4 &= 0 + 4 = 4 < 6 \\ u_2 + v_1 &= -4 + 2 = -2 < 3 \\ u_2 + v_3 &= -4 + 4 = 0 < 5 \\ u_2 + v_4 &= -4 + 4 = 0 < 2 \\ u_2 + v_5 &= -4 + 3 = -1 < 6 \\ u_3 + v_1 &= -1 + 2 = 1 < 6 \\ u_3 + v_3 &= -1 + 4 = 3 < 8 \\ u_3 + v_4 &= -1 + 4 = 3 < 7 \\ u_3 + v_5 &= -1 + 3 = 2 < 4 \\ u_4 + v_1 &= -2 + 2 = 0 < 3 \\ u_4 + v_3 &= -2 + 4 = 2 < 4 \end{aligned}$$

6. По теореме 5 план оптимален, следовательно

$$\begin{aligned} Z_{min} &= 30 * 2 + 80 * 4 + 10 * 3 + 30 * 2 + 40 * 5 + 20 * 4 + 20 * 3 = \\ &= 60 + 320 + 30 + 60 + 200 + 80 + 60 = 810 < Z \end{aligned}$$