Тренажер по численным методам решения задач линейной алгебры. Метод треугольной факторизации

Руководители:
Доктор педагогических наук, профессор
Е.В. Власова
кандидат педагогических наук, доцент,
С.В. Гончарова
Авторы:
студенты группы 2ИВТ
Е.В. Войтин
М.П. Свистунова
Е.Д. Стрижов
В.А. Сухачева

Цель курсовой работы

Разработка моделей метода треугольной факторизации и программного кода для решения систем линейных алгебраических уравнений данными методами.

Задачи

- вывести формулы для различных вариантов метода треугольной факторизации;
- создать интерфейс пользователя «Треугольная факторизация» для программы «Тренажер по численным методам решения задач линейной алгебры»;
- разработать программный код для решения СЛАУ по выведенным формулам.

Актуальность

Разработка компьютерных моделей актуальна как для учащихся и студентов, так и для людей, профессионально изучающих технологии компьютерного моделирования.

Разработка вычислительной модели объекта и программного кода для проведения расчетов позволяет уменьшить рутинные вычисления и увеличить их точность, визуализировать результаты решения

Постановка задачи

Решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$AX=B,$$

методом треугольной факторизации, используя разложение

$$A=LR$$

Математическая модель
Задача 1

$$i = n \dots 1$$

$$r_{ii} = 1$$

$$i = n \dots 1$$

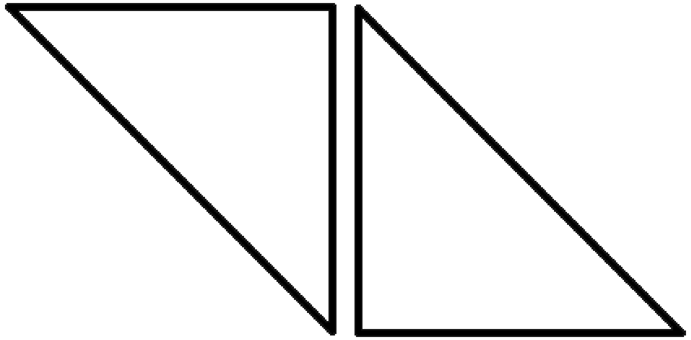
$$l_{in} = a_{in}$$

$$j = (n-1) \dots 1$$

$$r_{nj} = {}^{a_{nj}}/_{l_{nn}}$$

$$i = (n-1) \dots 1$$

$$l_{ii} = a_{ii} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} r_{ji}$$



$$t = (i-1) \dots 1, i = (n-1) \dots 1$$

$$l_{ti} = a_{ti} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{tj} r_{ji}$$

$$r_{it} = (a_{it} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} r_{jt})/l_{ii}$$

$$z_n = {}^{b_n}/_{l_{nn}}$$

$$z_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} z_k)/l_{ii}$$

$$x_1 = {}^{z_1}/_{r_{11}}$$

$$i = 2 \dots n$$

$$x_i = (z_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik} x_k)/r_{ii}$$

Математическая модель
Задача 2

$$k = n + 1 - i$$

$$i = 1 \dots n$$

$$r_{ik} = 1$$

$$i = 1 \dots n$$

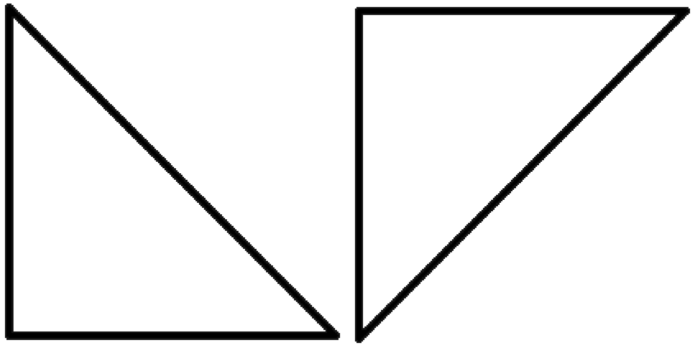
$$l_{i1} = a_{i5}$$

$$j = (n-1) \dots 1$$

$$r_{1j} = {a_{1j}}/{l_{11}}$$

$$k = n + 1 - i, i = 2 \dots n$$

$$l_{ii} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_{jk}$$



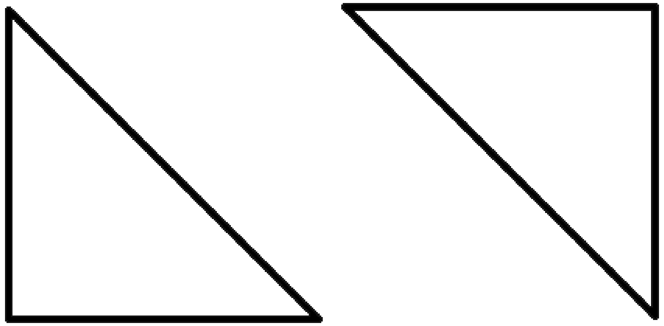
$$z = (k-1) \dots 1$$

$$t = (i+1) \dots n, i = 2 \dots n$$

$$l_{ti} = a_{tk} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{tj} r_{jk}$$

$$r_{iz} = (a_{iz} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_{jz})/l_{ii}$$

Задача 3



$A*X = B$ $L*R*X = B$ $L*Z = B$ $R*X = Z$

1.

$i = 1/n$

$$r_{ii} = 1$$

$$l_{ii} = a_{ii} - \sum_{j=i}^{i-1} l_{ij} r_{ji}$$

2.

$i = 1/n$

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$j = 2/n$

$$r_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

3.

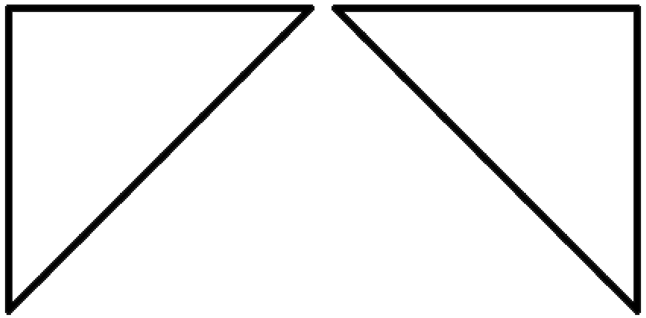
$i = 2/n$

$$t = (i+1)/n, i = 2/n$$

$$l_{ti} = a_{ti} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{tj} r_{ji} \qquad (9)$$

$$r_{it} = (a_{it} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_{jt})/l_{ii} \qquad (10)$$

Задача 4



$A*X = B$ $L*R*X = B$ $L*Z = B$ $R*X = Z$

1.

$$i = n\ldots1$$

$$r_{ii} = 1 \qquad (19)$$

2.

$$i = n\ldots1$$

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad (20)$$

$$j = 2\ldots n$$

$$r_{1j} = \frac{a_{nj}}{l_{n1}} \qquad (21)$$

3.

$$k = n + 1 - i, i = (n-1)\ldots1$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} r_{jk} \qquad (22)$$

$$t = (i-1)\ldots n, i = (n-1)\ldots n$$

$$l_{ti} = a_{ti} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{tj} r_{jk} \qquad (23)$$

$$z = (i+1)\ldots n, i = (n-1)\ldots1$$

$$r_{kz} = (a_{iz} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} r_{jz})/l_{ik} \qquad (24)$$

Задача 5

Для этапа прямого хода

$r_{ii} = 1\ (i = 1 \dots n)$ (5)

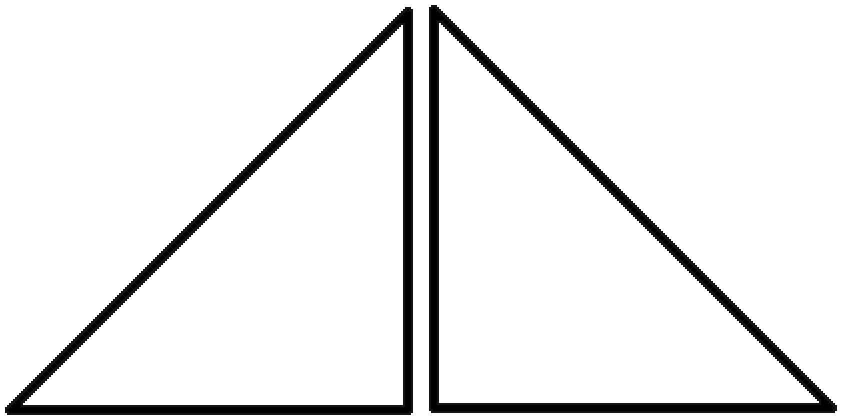
$l_{in} = a_{in}\ \ (i = 1 \dots n)$ (6)

$r_{nj} = {}^{a_{1j}}/_{l_{1n}}\ (j = (n-1) \dots 1)$ (7)

$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} r_{jk}\ (k = n + 1 - i, i = (n-1) \dots 1)$ (8)

$l_{tk} = a_{tk} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{tj} r_{ji}$ (Вспомогательный индекс $t = (i+1) \dots n, i = 2 \dots n$) (9)

$r_{kz} = (a_{iz} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} r_{jz})/l_{ik}\ \ (z = (i-1) \dots 1, i = 2 \dots n)$ (10)



Для этапа обратного хода:

$$z_n = {}^{b_1}/_{l_{1n}} \tag{11}$$

$$z_i = (b_p - \sum_{k=i+1}^{n} l_{pk} z_k)/l_{pi}\,(p = n + 1 - i, i = (n-1) \dots 1) \tag{12}$$

$$x_1 = {}^{z_1}/_{r_{11}} \tag{13}$$

$$x_i = (z_i - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik} x_k)/r_{ii}\,(i = 2 \dots n) \tag{14}$$

Задача 6

Для этапа прямого хода

$r_{ik} = 1\ (k = n + 1 - i, i = 1 \dots n)$ (19)

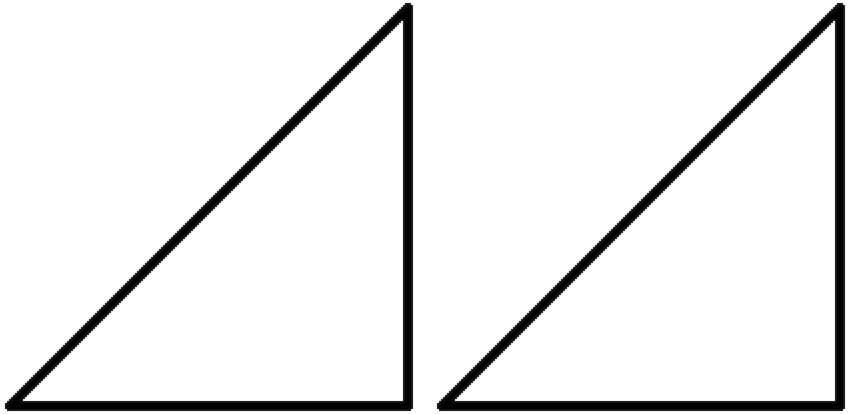
$l_{in} = a_{i1}\ \ (i = 1 \dots n)$ (20)

$r_{nj} = {}^{a_{1j}}/_{l_{1n}}\ (j = 2 \dots n)$ (21)

$l_{ik} = a_{ii} - \sum_{j=k+1}^{n} l_{ij} r_{ji}\ (k = n + 1 - i, i = 2 \dots n)$ (22)

$l_{tk} = a_{ti} - \sum_{j=k+1}^{n} l_{tj} r_{ji}$ (Вспомогательный индекс $t = (i + 1) \dots n, i = 2 \dots n$) (23)

$r_{kt} = (a_{it} - \sum_{j=k+1}^{n} l_{ij} r_{jt})/l_{ik}$ (24)



Для этапа обратного хода:

$$z_n = {}^{b_1}/_{l_{1n}} \tag{25}$$

$$z_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{pk} z_k)/l_{ip} \ (p = n + 1 - i, i = (n-1) \dots 1) \tag{26}$$

$$x_n = {}^{z_1}/_{r_{1n}} \tag{27}$$

$$x_i = (z_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{pk} x_k)/r_{ip} \ (p = n + 1 - i, i = (n-1) \dots 1) \tag{28}$$

Постановка задачи № 7

Решить систему линейных алгебраических уравнений вида

AX=B,

методом треугольной факторизации, используя разложение

A=LR,

где

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & r_{1n} \\ 0 & \dots & r_{2(n-1)} & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{n(n-1)} & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель (прямой ход)

$$r_{ik} = 1, i = 1, 2, \dots, n;\ k = n + 1 - i;$$

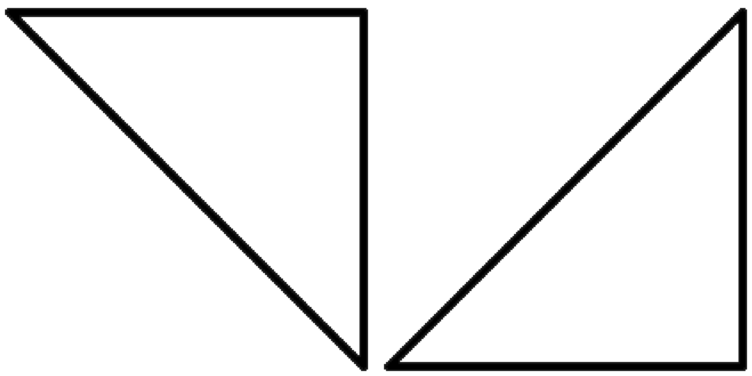
$$l_{in} = a_{i1}, i = n, n - 1, \dots , 1;$$

$$r_{nj} = \frac{a_{nj}}{l_{nn}}, j = 2,\ 3, \dots, n;$$

$$l_{ii} = a_{ik} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} r_{jk} , i = n - 1, \dots , 1;$$

$$l_{ti} = a_{tk} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{tj} r_{jk} , i = n - 1, \dots , 1;\ t = i - 1, \dots , 1;$$

$$r_{iz} = \frac{\left(a_{tk} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{tj} r_{jk}\right)}{l_{ii}}, i = n - 1, \dots , 1; z = k + 1, \dots , n.$$



Математическая модель (обратный ход)

$A = LR, LRX = B \qquad RX = Z, LZ = B$

$$z_n = \frac{b_n}{l_{nn}} \qquad z_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} z_k}{l_{ii}}, \text{где } i = n-1, \dots, 1;$$

$$x_n = \frac{z_1}{r_{1n}} \qquad x_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{pk} z_k}{r_{ip}}, i = n-1, \dots, 1;$$

$$p = n + 1 - i.$$

Постановка задачи № 8

Решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$AX=B,$$

методом треугольной факторизации, используя разложение

$$A=LR,$$

где

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Математическая модель (прямой ход)

$$r_{ik} = 1, i = 1, 2, \dots, n; \; k = n + 1 - i;$$

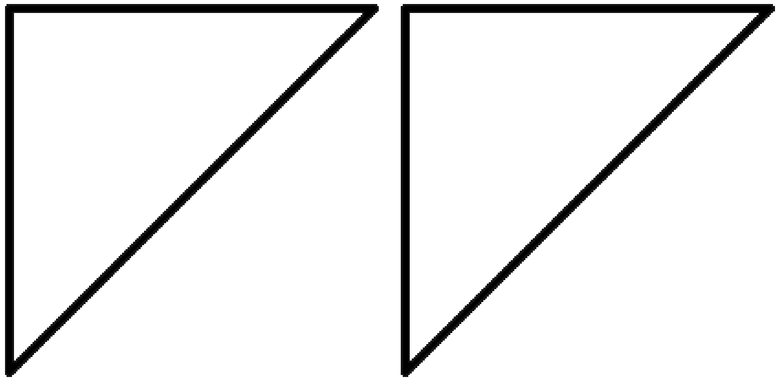
$$l_{i1} = a_{in}, i = n, n - 1, \dots, 1;$$

$$r_{1j} = \frac{a_{nj}}{l_{n1}}, j = n - 1, \dots, 1;$$

$$l_{ik} = a_{ii} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} r_{ji}, i = n - 1, \dots, 1;$$

$$l_{ti} = a_{ti} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{tj} r_{ji}, i = n - 1, \dots, 1, \; t = i - 1, \dots, 1;$$

$$r_{kt} = \frac{\left(a_{it} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} r_{jt}\right)}{l_{ik}}, i = n - 1, \dots, 1, t = i - 1, \dots, 1.$$



Математическая модель (обратный ход)

$A = LR, LRX = B \qquad RX = Z, LZ = B$

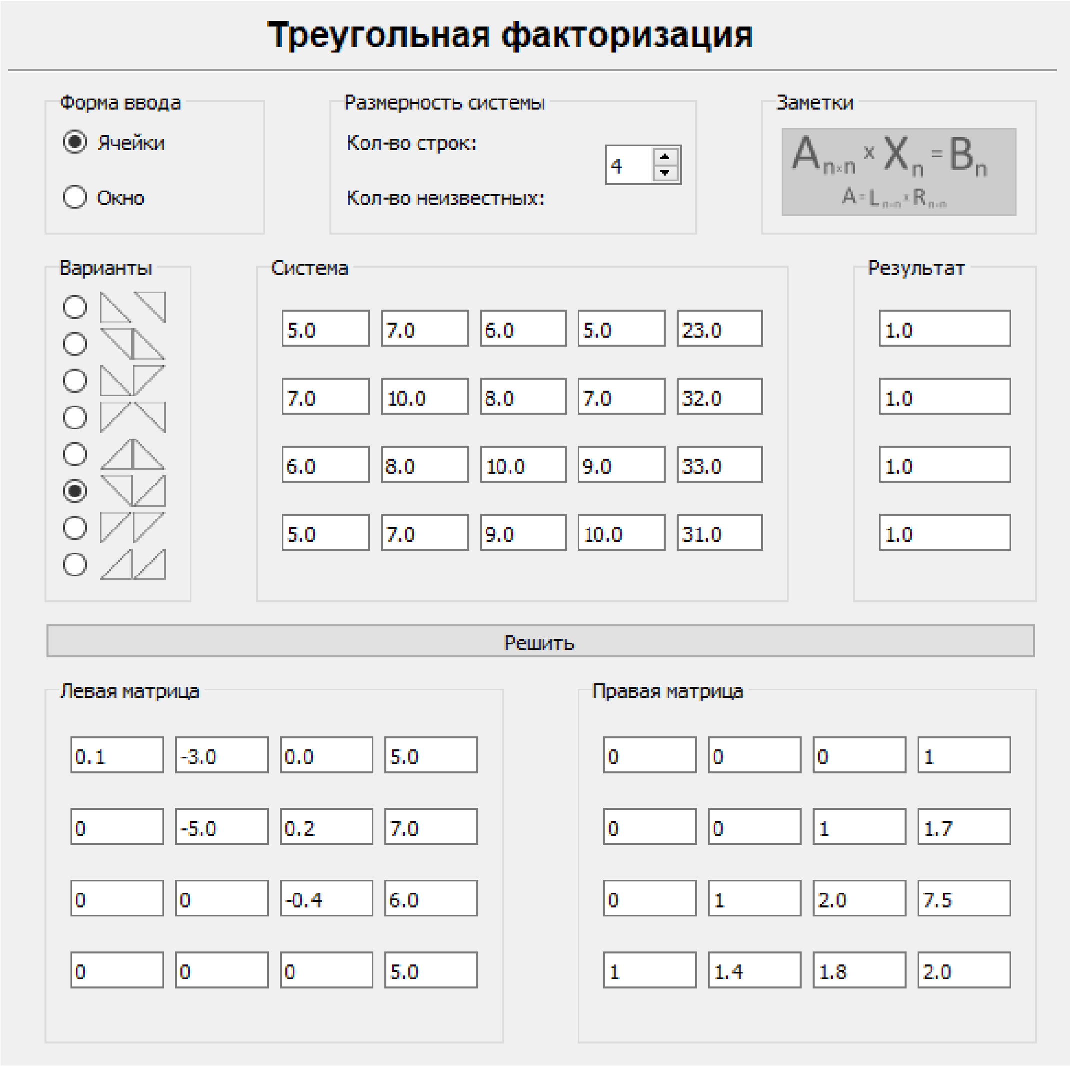
$z_1 = \dfrac{b_n}{l_{n1}} \qquad z_i = \dfrac{b_p - \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk} z_k}{l_{pi}}$, где $i = 2, \dots, n;$

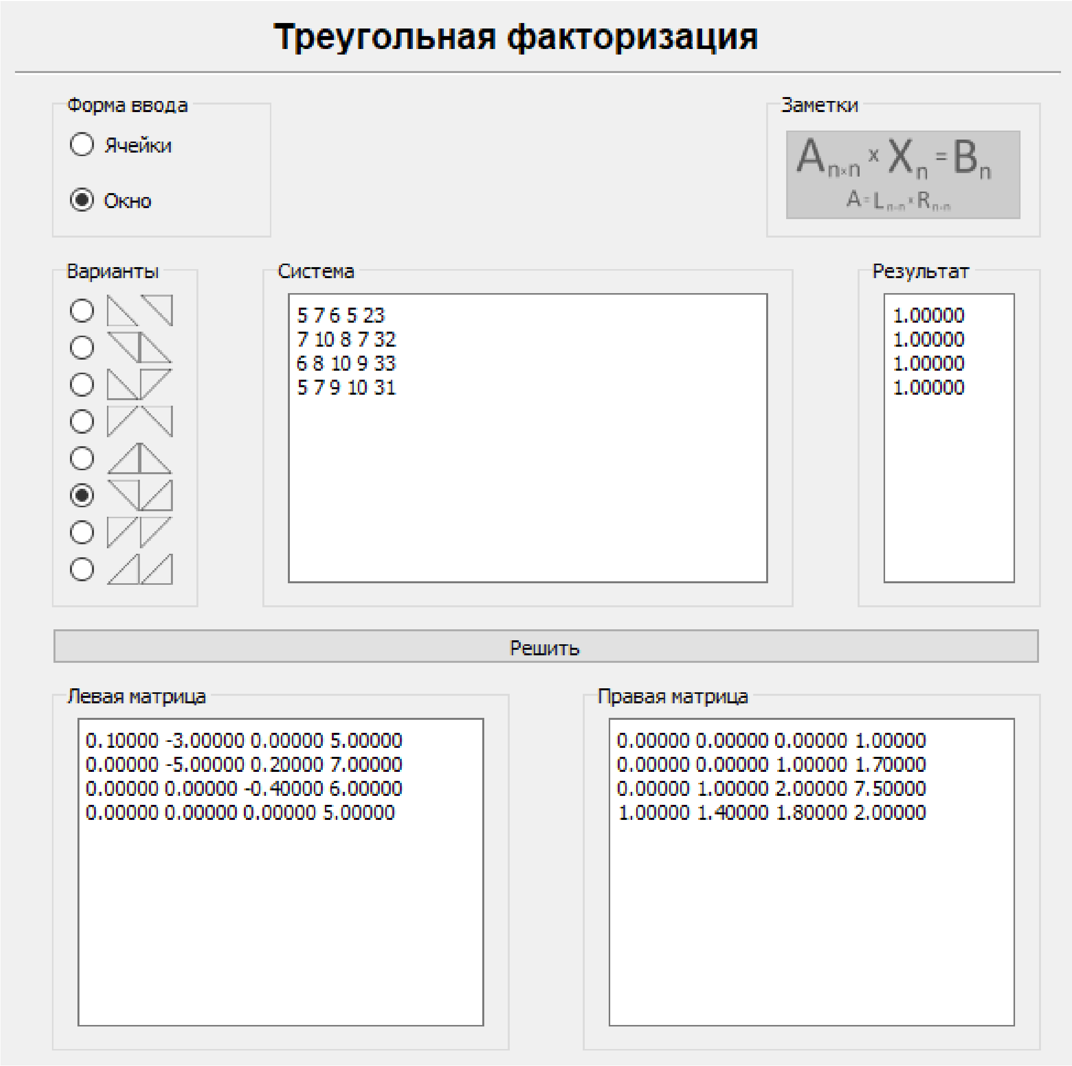
$p = n + 1 - i.$

$x_1 = \dfrac{z_n}{r_{n1}} \qquad x_i = \dfrac{z_p - \sum_{k=1}^{i-1} r_{pk} z_k}{r_{pi}}, i = 2, \dots, n;$

$p = n + 1 - i.$

Реализация задачи





Спасибо за внимание