Булева алгебра

Булевой алгеброй B = [A, $\wedge$, $\vee$, ’, O, I] называется множество A с двумя отмеченными элементами ("универсальными границами") O и I, двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$, и одной унарной операцией ', причем для любых x, y, z$\in$ A

31. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (идемпотентность)
32. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = x \vee y$ (коммутативность)
33. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
    $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность)
34. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение)
35. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
    $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность)
36. $x \wedge O = O$, $x \vee O = x$,
    $x \wedge I = x$, $x \vee I = I$ (универсальные границы)
37. $x \wedge x' = O$, $x \vee x' = I$ (дополняемость)
38. $(x')' = x$ (инволютивность)
39. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
    $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (законы де Моргана)

Отметим, что универсальные границы могут быть двумя единственными элементами множества A.

Процесс получения булевой алгебры прост – нужно определить некоторым образом операции на множестве и доказать, что для таких операций выполняются законы 1-9.

Пример булевой алгебры: множество A – множество всех подмножеств некоторого множества E, элемент O – пустое множество, элемент I – само множество E. Одноместной операцией является дополнение, а двумя двухместными – пересечение и дополнение множеств. По определению операций дополнения, пересечения и объединения можно доказать все 9 законов.

Пусть E = {a} - одноэлементное множество. Переобозначив E через 1, а Ø через 0, получаем простейшую нетривиальную булеву алгебру [P({a}), ∩, ∪, ’], операции в которой задаются таблицами:

∩	0	1
0	0	0
1	0	1

∪	0	1
0	0	1
1	1	1

’	
0	1
1	0

На пересечении строки а и столбца в - результат указанной операции, произведенной над упорядоченной парой (а, в)
Из таблиц видно, что 0 ∪ 0 = 0, 0 ∪ 1 = 1, 1 ∩ 0 = 0 и т.д.

Булевы функции

Булевой, или двоичной, или логической называется функция
f: {0,1} -> {0,1}
Число булевых функций равно 4 – число всевозможных соответствий между указанными двумя множествами:

f0	f1	f2	f3
f(0)=0	f(0)=0	f(0)=1	f(0)=0
f(1)=0	f(1)=1	f(1)=0	f(1)=1

или в виде таблицы

Арг-ты	Функции			
x	*f0*	*f1*	*f2*	*f3*
0	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**

Комбинации значений приведены в порядке возрастания двоичных кодов натуральных чисел от 0 до 3, которые они образуют.

Функция f2 имеет историческое значение – ее называют отрицанием или инверсией, т.к.
Функции f0 и f3 – константы.
Функция f1 – тождественное отображение.

распространяя это определение на N переменных, имеем
f: {0,1}x{0,1}x … x {0,1} -> {0,1}
Число булевых функций от двух переменных равно 16.
Вообще, число булевых функций от N переменных равно 2^(2^N)

В компьютерах реализованы схемы, моделирующие поведение булевых функций от двух переменных f(x,y). Некоторые из них имеют особое историческое значение

Арг-ты		Функции															
x	*y*	*f0*	*f1*	*f2*	*f3*	*f4*	*f5*	*f6*	*f7*	*f8*	*f9*	*f10*	*f11*	*f12*	*f13*	*f14*	*f15*
0	*0*	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	*1*	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	*0*	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	*1*	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
			конъюнкция					исключ. ИЛИ	дизъюнкция		эквиваленция				импликация		

Комбинации значений приведены в порядке возрастания двоичных кодов натуральных чисел от 0 до 15, которые они образуют.

Так как f1 возвращает 1 только в одном случае – когда оба аргументы единицы, то ее название логическое И, т.е конъюнкция. Так как f7 возвращает 1 когда хотя бы один из аргументов равен единице, то ее название логическое ИЛИ, т.е дизъюнкция.
Эквиваленция дает 1 когда оба аргумента одинаковы – оба нули или обе единицы. Прямо противоположное делает исключающее ИЛИ – дает 1, когда оба аргумента разные (ее также называют суммой по модулю 2).
Импликация (следование) дает 0 только когда первый аргумент 1, а второй 0.
Функции f0 и f15 – константы

Булевы функции двух переменных – это математическая модель аристотелевой логики, поэтому их и называют логическими. Толкование конъюнкции и дизъюнкции очевидно. Толкование импликации: из лжи следует что угодно, из истины не следует ложь. Эквиваленция истинна когда связывает одновременно две истины или две лжи.

Название «сумма по модулю два» становится ясным при рассмотрении двоичного арифметического сложения двух двоичных одноразрядных чисел (битов):

	0		**0**		**1**		**1**
	0		**1**		**0**		**1**
0	**0**	*0*	**1**	*0*	**1**	*1*	**0**

При двоичном сложении двух единиц в первом разряде получается ноль – переполнение разряда. Единица переходит в соседний разряд (перенос).

<u>Булевы функции и булева алгебра</u>

Возьмем множество {0,1} и рассмотрим его элементы в качестве универсальных границ. В качестве одноместной операции рассмотрим на этом множестве функцию одной переменной f2. В качестве двухместных операций возьмем булевы функции двух переменных f1 и f7. Иными словами, определим на {0,1} операции ‘, * и + следующим образом:

‘ 0’=1 1’=0

* 0*0=0 0*1=0 1*0=0 1*1=1

+ 0+0=0 0+1=1 1+0=1 1+1=1

По этой таблице легко доказать выполнение всех законов.

В частности, легко видеть, что $\forall x \in \{0,1\}\ x + 0 = x$ и $\forall x \in \{0,1\}\ x + 1 = 1$

$\forall x \in \{0,1\}\ x * 0 = 0$ и $\forall x \in \{0,1\}\ x * 1 = x$

Это будет булева алгебра

Далее рассмотрим множество булевых функций F и рассмотрим константы f1 и f15 в качестве универсальных границ. В качестве одноместной операции рассмотрим на этом множестве функцию одной переменной f2. В качестве двухместных операций возьмем булевы функции двух переменных f1 и f7. Полученная система будет булевой алгеброй. Важно только отметить, что такое операция на множестве фунцкии. Что значит применить отрицание f2 к функции? Это значит применить отрицание в возвращаемому функцией результату. Это не что иное, как суперпозиция булевых функций на исходном множестве {0,1}, которое в данном примере булевой алгебры не фигурирует явно.

С помощью таблиц истинности легко доказать все законы булевой алгебры. Например, закон де Моргана

(x Ù y)’ = x’ Ú y’

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$(x \wedge y)$	**0**	**0**	**0**	**1**
$(x \wedge y)'$	**1**	**1**	**1**	**0**
x’	1	1	0	0
y’	1	0	1	0
$x' \vee y'$	**1**	**1**	**1**	**0**

Мы видим, что для функции f14 нашлось два выражения суперпозицией через три выбранных нами функции-операции. Очевидно, что по-разному комбинируя и сверяя таблицы можно найти бесконечно много выражений через основные функции. Среди них есть те, которые принято считать базовыми.

Лемма 1 [Бауэр, Гооз, Т1, с.277; Новиков, с.89]

$$\boxed{f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n) = \mathbf{x_i}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) + \mathbf{x_i'}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)}$$

Доказательство:

□ Пусть $\mathbf{x_i}=0$. Тогда правая часть равна

$\mathbf{0}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) + \mathbf{0'}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) =$

$= \mathbf{0} + \mathbf{1}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)$

т.е равна левой при подстановке $\mathbf{x_i}=0$

Пусть $\mathbf{x_i}=1$. Тогда правая часть

$\mathbf{1}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) + \mathbf{1'}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) =$

$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) + \mathbf{0}*f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n)$

т.е равна левой при подстановке $\mathbf{x_i}=1$ ■

Лемма 2

$$\boxed{f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n) = [\mathbf{x_i}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)] * [\mathbf{x_i'}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n)]}$$

Доказательство:

□ Пусть $\mathbf{x_i}=0$. Тогда правая часть равна

$[\mathbf{0}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)] * [\mathbf{0'}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n)] =$

$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) * [\mathbf{1}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) =$

$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n) * 1 = f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)$

т.е равна левой при подстановке $\mathbf{x_i}=0$

Пусть $\mathbf{x_i}=1$. Тогда правая часть

$[\mathbf{1}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{0},x_{i+1},\ldots,x_n)] * [\mathbf{1'}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n)] =$

$= 1 * [\mathbf{0}+f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) =$

$= 1 * f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{1},x_{i+1},\ldots,x_n)$

т.е равна левой при подстановке $\mathbf{x_i}=1$ ■

Используем Леммы 1 и 2 относительно функций двух переменных.

По Лемме 1: возьмем в качестве $f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n)$ $f(a,\mathbf{b})$

$f(a,\mathbf{b}) = \mathbf{b}*f(a,\mathbf{1})+\mathbf{b'}*f(a,\mathbf{0})$

Теперь возьмем в качестве $f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n)$ функцию $f(\mathbf{a},1)$

$f(\mathbf{a},1) = \mathbf{a}*f(\mathbf{1},1)+\mathbf{a'}*f(\mathbf{0},1)$

Теперь возьмем в качестве $f(x_1,\ldots,x_{i-1},\mathbf{x_i},x_{i+1},\ldots,x_n)$ функцию $f(\mathbf{a},0)$

$f(\mathbf{a},0) = \mathbf{a}*f(\mathbf{1},0)+\mathbf{a'}*f(\mathbf{0},0)$

Подставим два последних выражения в первое:

$f(a,b) = b*(a*f(1,1)+a'*f(0,1)) + b'*(a*f(1,0)+a'*f(0,0)) =$

$= b*a*f(1,1)+b*a'*f(0,1) + b'*a*f(1,0)+b'*a'*f(0,0) =$

$= \mathbf{f(0,0)a'b' + f(0,1)a'b + f(1,0)ab' + f(1,1)*ab}$

Мы получили разложение функции двух переменных по переменным через три операции.

По Лемме 2:

$f(a,\mathbf{b}) = [b+f(a,0)]*[b'+f(a,1)]$

$f(\mathbf{a},0) = [a+f(0,0)]*[a'+f(1,0)]$

$f(\mathbf{a},1) = [a+f(0,1)]*[a'+f(1,1)]$

Итак, $f(a,b) = [b+[a+f(0,0)]*[a'+f(1,0)]]*[b'+[a+f(0,1)]*[a'+f(1,1)]] =$

$= [[b+a+f(0,0)]*[b+a'*f(1,0)]]*[[b'+a+f(0,1)]*[b'+a'+f(1,1)]] =$

$= \mathbf{[f(0,0)+a+b][f(0,1)+a+b'][f(1,0)+a'+b][f(1,1)+a'+b']}$

Мы получили другой вариант разложения.

Первый называется совершенной дизънктивной формой булевой функции (СНДФ), а второй называется совершенной конъюнктивной формой (СКНФ).

Окончательно:

```
f(a,b) =  f(0,0)a'b' + f(0,1)a'b   + f(1,0)ab'   + f(1,1)*ab
f(a,b) = [f(0,0)+a+b]*[f(0,1)+a+b']*[f(1,0)+a'+b]*[f(1,1)+a'+b']
```

Разложим по обеим формулам функцию f13 с таблицей

0	0	1	1
0	1	0	1
1	**1**	**0**	**1**

(1)
f(a,b)=1*a’b’+1*a’b+0*ab’+1*ab = a’b’+a’b+ab
(2)
f(a,b)=[1+a+b][1+a+b’][0+a’+b][1+a’+b’] = 1*1*[a’+b]*1 = a’+b

Сверим совпадение с таблицей истинности:

a	**0**	**0**	**1**	**1**
b	**0**	**1**	**0**	**1**
a’	1	1	0	0
b’	1	0	1	0
a’b’	1	0	0	0
a’b	0	1	0	0
a’b’+a’b	1	1	0	0
ab	0	0	0	1
a’b’+a’b+ab	**1**	**1**	**0**	**1**
a’+b	**1**	**1**	**0**	**1**

Покажем, как получить (2) из (1)
a’b’+a’b+ab = [ab+a’b’]+[a’b] =
= [a’b+ab’]’+[a+b’]’ =
= ([a’b+ab’][a+b’])’ =
= [(a’b+ab’)a + (a’b+ab’)b’] =
= [a’ba + ab’a + a’bb’ + ab’b’]’ =
= [aa’b + aab’ + abb’ + ab’b’]’ =
= [0*b + ab’ + a*0 + ab’]’ =
= [ab’ + ab’]’=
= [ab’]’=
= **a’ + b**

[a’b+ab’]’ = [a’b]’[ab’]’ =
= [a’’+b’][a’+b’’] =
= [a+b’][a’+b] =
= [a+b’]a’ + [a+b’]b =
= aa’ + a’b’ + ab + bb’ =
= 0 + a’b’ + ab + 0 =
= ab + a’b’

Упражнение.
Сопоставить таким же образом разложения функций:

- с таблицей (0 1 1 0)
- с таблицей (1 1 1 0)