ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Евтеева Марина, БПМ-143

Вариант 7

2017

Оглавление

Задание 5.1.7 Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений $y_0, y_1, \cdots, y_n$ в точках $x_0, x_1, \cdots, x_n$ Используя метод наименьших квадратов (МНК), найти многочлен $Pm(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ наилучшего среднеквадратичного приближения оптимальной степени $m = m^*$. За оптимальное значение m^* принять ту степень многочлена, начиная с которой величина $\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum_{k=0}^{n}(P_m(x_k) - y_k)^2}$стабилизируется или начинает возрастать.

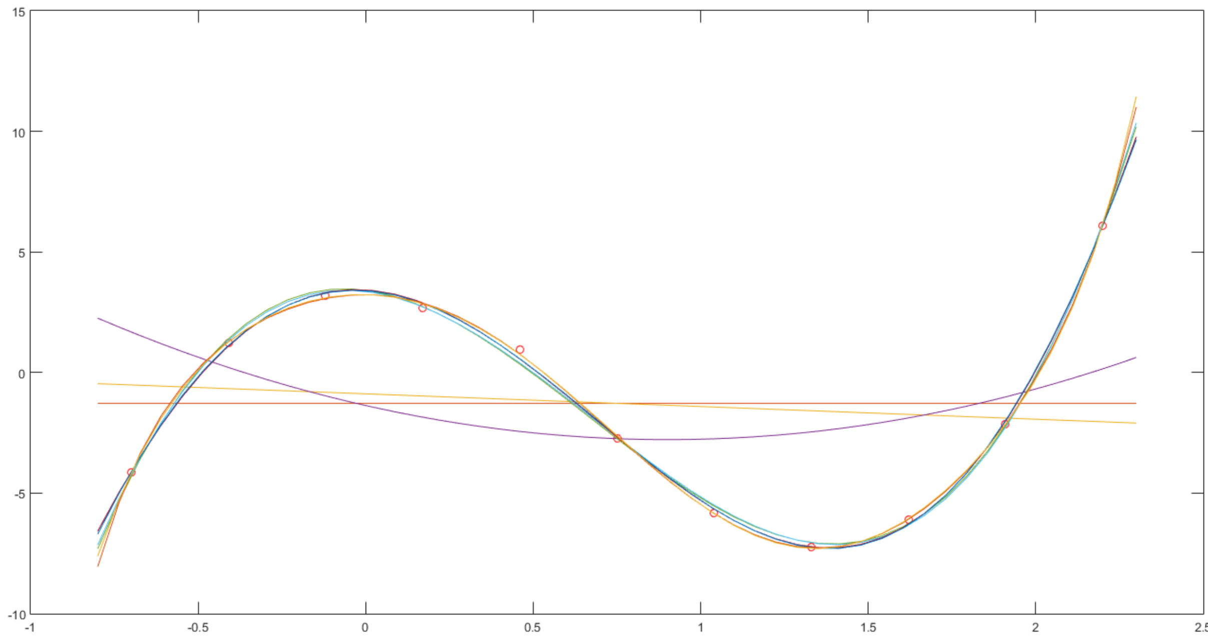
Решение:

Реализую метод наименьших квадратов в MATLAB

```
    x = [-0.7;
    -0.41;
    -0.12;
    0.17;
    0.46;
    0.75;
    1.04;
    1.33;
    1.62;
    1.91;
    2.20];
y = [-4.152;
    1.244;
    3.182;
    2.689;
    0.950;
    -2.743;
    -5.839;
    -7.253;
    -6.100;
    -2.144;
    6.103];
n = numel(x);
plot(x, y, 'ro')
hold on
x1 = linspace(min(x) - 0.1, max(x) + 0.1, 50);
flag = 0;
i = 1;
sigma1 = sqrt(1/(n)*sum((Poly(a, 0, x) - y).^2));
a = mnk(x, y, n, 0);
y1 = Poly(a, 0, x1);
plot(x1, y1)
while ~flag
    a = mnk(x, y, n, i);
    y1 = Poly(a, i, x1);
    plot(x1, y1)
    sigma2 = sqrt(1/(n-i)*sum((Poly(a, i, x) - y).^2))
%     if sigma2 - sigma1 > 0.1
%         flag = 1;
```

```
%     else
%         sigma1 = sigma2;
%     end
    i = i+1
end


function [a] = mnk(x, y, n, m)
A = zeros(m ,m);
b = zeros(m,1);
for j = 1:m
    for i = 1:n
        b(j) = b(j) + y(i)*x(i)^(j-1);
    end
    for k = 1:m
        for i = 1:n
            A(j, k) = A(j, k) + x(i)^(k+j-2);
        end
    end
end
a = A\b;
end

function [P] = Poly(a, m ,t)
P = 0;
for i = 1:m
    P = P + a(i)*t.^(i-1);
end
end
```

Наилучшее приближение начинается с $\mathrm{m} = 4$, соответствует зеленой кривой на рисунке (на нем построено еще несколько следующий шагов, для наглядности стабилизации)



Задание 5.3.4 Зависимость между величинами x и y описывается функцией $y = f(x, a, b)$, где a и b – неизвестные параметры. Найти эти параметры, сведя исходную задачу к линейной задаче метода наименьших квадратов. **Вариант 7**

$$\sqrt{a + bx^2}$$

Решение:

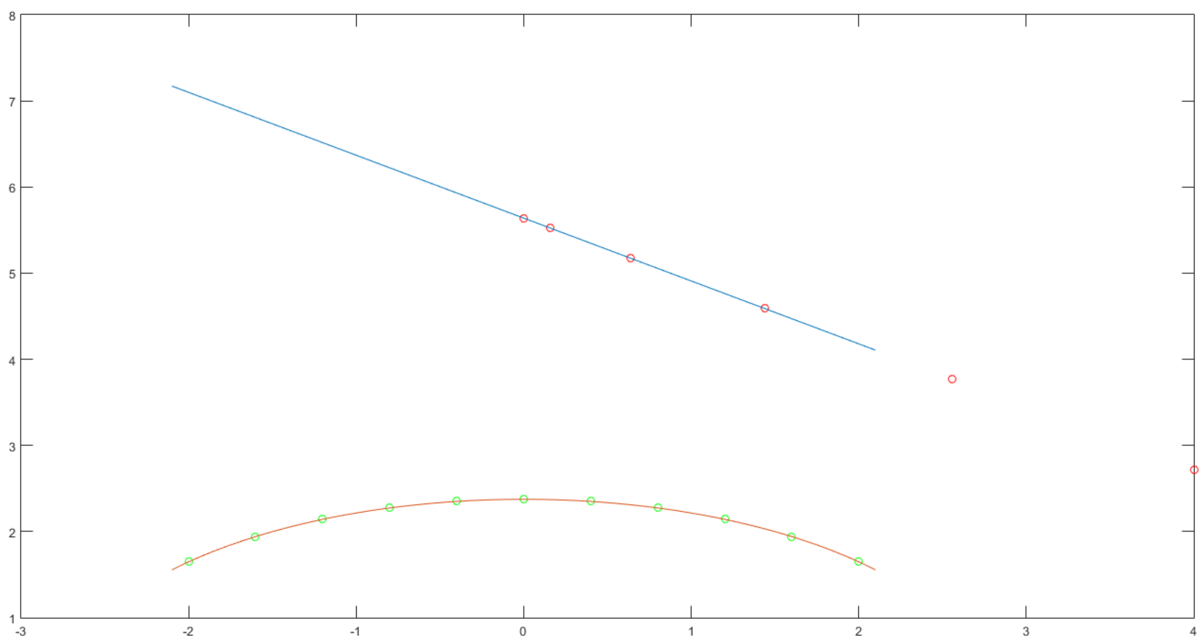
Сделаем замену $s = y^2, t = x^2$ и найдем коэффициенты a и b для функции $s = a + bt$

Код решения на языке MATLAB

```
    x = [-2.0;
    -1.6;
    -1.2;
    -0.8;
    -0.4;
    0;
    0.4;
    0.8;
    1.2;
    1.6;
    2.0];
y = [1.649;
    1.942;
    2.142
    2.274;
    2.35;
    2.375;
    2.35;
```

```
    2.274;
    2.142;
    1.942;
    1.649];
t = x.^2;
s = y.^2;
n = numel(x);
plot(x, y, 'go')
hold on
plot(t, s, 'ro')
hold on
x1 = linspace(min(x) - 0.1, max(x) + 0.1, 50);
a = mnk(t, s, n, 2)
y1 = Poly(a, 2, x1);
y2 = sqrt(a(1) + a(2)*x1.^2);
plot(x1, y1)
plot(x1, y2)
```

Получившиеся коэффициенты: $a = 5.639$ $b = -0.7300$ На графике зеленые точки - заданные в y(x), красные - s(t), синяя линия - функция s(t) с подобранными коэффициентами, оранжевая - искомая y(t) с подобранными коэффициентами



Задание 5.5.4 Известно, что $y = c_1 \sin a\pi x + c_2 \cos b\pi x$, где коэффициенты c_1 и c_2 подлежат определению. Используя метод наименьших квадратов, определить c_1 и c_2. УКАЗАНИЕ. Для нахождения коэффициентов c_1 и c_2 составить нормальную систему МНК (базисные функции: $\sin a\pi x$ и $\cos b\pi x$) и решить ее с помощью встроенной функции

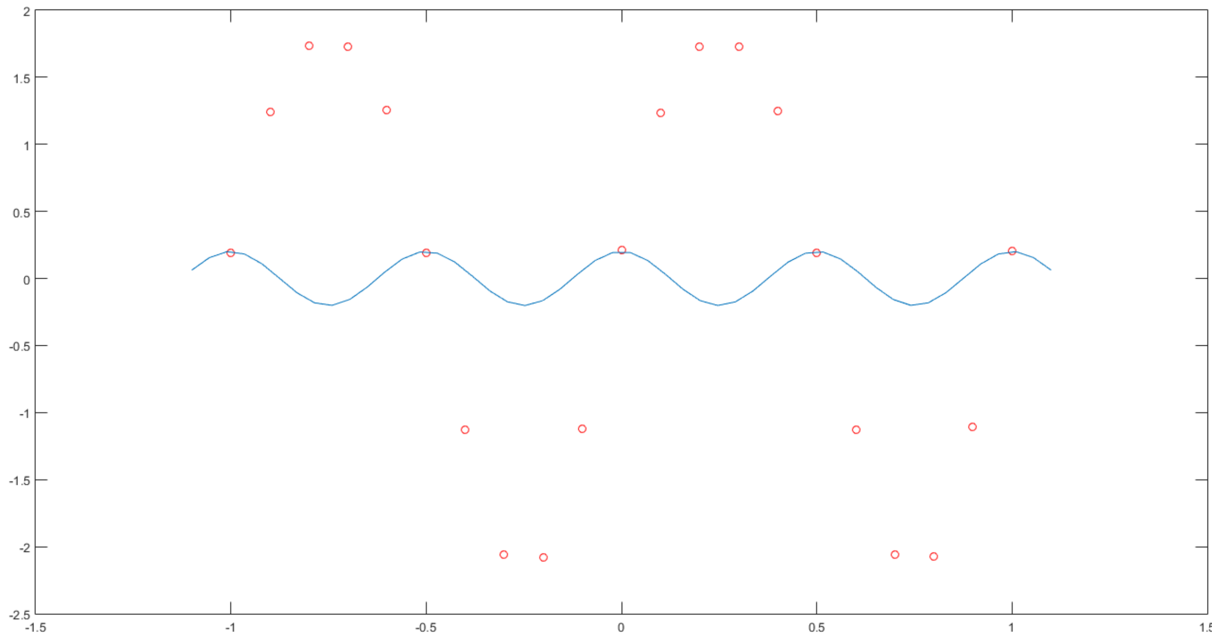
Вариант 7

$a = 3, b = 4$ **Решение:** Код решения на MATLAB

```
    x = zeros(20,1);
for i = 1:21
    x(i) = -1+0.1*(i-1);
end
y = [0.1931;
    1.242;
    1.7388;
    1.7317;
    1.2585;
    0.1876;
    -1.1307;
    -2.0600;
    -2.0782;
    -1.1179;
    0.2087;
    1.2317;
    1.7312;
    1.7316;
    1.2483;
    0.1898;
    -1.1263;
    -2.0577;
    -2.0713;
    -1.1084;
    0.2066;];
a = 3;
b = 4;

c = mnksin(x, y, a, b)
plot(x, y, 'ro')
hold on
x1 = linspace(min(x) - 0.1, max(x) + 0.1, 50);
y1 = c(1)*sin(a*pi*x1) + c(2)*cos(b*pi*x1);
plot(x1, y1)

function [r] = mnksin(x, y, a, b)
A = zeros(2 ,2);
g = zeros(2,1);
A(1, 1) = sum(sin(a*pi*x).^2);
A(1, 2) = sum(sin(a*pi*x).*cos(b*pi*x));
A(2, 1) = A(1, 2);
A(2, 2) = sum(cos(b*pi*x).^2);

g(1) = sum(y.*sin(a*pi*x));
g(2) = sum(y.*cos(b*pi*x));
```

```
r = A\g;
end
```

Получившиеся коэффициенты c_1 и c_2: 0.0001 0.2017 И график



Задание 5.9.4 Дана функция $y = f(x)$. Приблизить $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ методом глобальной интерполяции и указанным в индивидуальном варианте сплайном. На одном чертеже построить графики приближающей функции и функции $f(x)$. Сравнить качество приближения при разном количестве узлов интерполяции.

Вариант 7

$6\frac{\sin x}{x}$, $[5, 15]$ **Решение:** Код решения на MATLAB

```
    f = @(x)(6*sin(x)./x);
a = 5;
b = 15;
x = linspace(a, b, 100);
y = f(x);
plot(x, y, 'cp')
hold on
for i = 3:15
    x1 = linspace(a, b, i);
    y1 = f(x1);
    plot(x, ppval(spline(x1, y1), x), 'LineWidth',i/8)
end
```

На графике звездочками отмечено точное решение, а линиями - интерполированные по точкам сплайнами, чем жирнее линия, тем больше точек было использовано (от 3 до 15), видно, что при большом количестве точек приближение очень похоже на нашу функцию