ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.
ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАШИННАЯ АРИФМЕТИКА

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 2]. Варианты к задачам 1.1-1.10 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 1.А.*
Пример оформления **отчета** по лабораторной работе приведен в *ПРИЛОЖЕНИИ 1.В.*

Задача 1.1. Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:
1. Найти сумму ряда S аналитически как предел частичных сумм ряда (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.В).*
2. Используя функцию $S(N) = \sum_{n=0}^{N} a_n$, вычислить значения частичных сумм ряда при указанных значениях N.
3. Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности $\left|S(N)-S\right|$ и определить количество верных цифр в $S(N)$.
4. Представить результаты в виде гистограммы.

Задача 1.2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. В каждый из диагональных элементов матрицы A по очереди внести погрешность в 1%. Как изменился определитель матрицы A? Указать количество верных цифр и вычислить величину относительной погрешности определителя в каждом случае.

Задача 1.3. Для заданной матрицы A найти обратную матрицу (если это возможно). Затем в элемент a_{11} внести погрешность в 10% и снова найти обратную матрицу. Объяснить полученные результаты.

Задача 1.4. Найти ранг заданной матрицы A. Затем внести погрешность в 0.1% a) в элемент a_{11}; b) во все элементы матрицы и снова найти ранг. Объяснить полученные результаты.

Задача 1.5. Дано квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (в индивидуальном варианте помечен *) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

Задача 1.6. Для пакета MATHCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.В*).

Задача 1.7. Вычислить значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон в режимах одинарной и двойной точности на алгоритмическом языке. Сравнить результаты с результатами задачи 1.6.
УКАЗАНИЕ: при использовании языка Python, вещественные числа ординарной точности можно получить используя библиотеку NumPy, напр. `np.float32(1)` и т.д.

Задача 1.8. Составить программу, моделирующую вычисления на ЭВМ с ограниченной разрядностью m.
Решить **задачу 1.1** для случая $N = 10000$, используя эту программу. Составить график зависимости погрешности от количества разрядов m=4,5,…,8.

Задача 1.9. Для матрицы *A* решить вопрос о существовании обратной матрицы в следующих случаях:
1) элементы матрицы заданы точно;
2) элементы матрицы заданы приближенно с относительной погрешностью a) $\delta = \alpha\%$ и b) $\delta = \beta\%$. Найти относительную погрешность результата.
УКАЗАНИЕ. См. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.C.*

Задача 1.10. Три вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ заданы своими координатами в базисе **i , j , k .** Что можно сказать о компланарности этих векторов, если:
1) координаты векторов заданы точно;
2) координаты векторов заданы приближённо с относительной погрешностью а) $\delta = \alpha\,\%$; б) $\delta = \beta\,\%$.
УКАЗАНИЕ. См. *ПРИЛОЖЕНИЕ 1.C.*

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.A.

Схема вариантов к лабораторной работе 1.

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	1.1.1, 1.8, 1.2.1, 1.7, 1.6, 1.10.1	16	1.1.16, 1.8, 1.5.4, 1.7, 1.6, 1.10.5
2	1.1.2, 1.8, 1.3.1, 1,7, 1.6, 1.10.2	17	1.1.17, 1.8, 1.2.5, 1.7, 1.6, 1.10.6
3	1.1.3, 1.8, 1.4.1, 1.7, 1.6, 1.10.3	18	1.1.18, 1.8, 1.3.5, 1.7, 1.6, 1.9.1
4	1.1.4, 1.8, 1.5.1, 1.7 , 1.6, 1.10.4	19	1.1.19, 1.8, 1.4.5, 1.7 , 1.6, 1.9.2
5	1.1.5, 1.8, 1.2.2, 1.7, 1.6, 1.10.5	20	1.1.20, 1.8, 1.5.5, 1.7, 1.6, 1.9.3
6	1.1.6, 1.8, 1.3.2, 1.7, 1.6, 1.10.6	21	1.1.21, 1.8, 1.2.6, 1.7, 1.6, 1.9.4
7	1.1.7, 1.8, 1.4.2, 1.7, 1.6, 1.9.1	22	1.1.22, 1.8, 1.3.6, 1.7, 1.6, 1.9.5
8	1.1.8, 1.8, 1.5.2, 1.7, 1.6, 1.9.2	23	1.1.23, 1.8, 1.4.6, 1.7, 1.6, 1.9.6
9	1.1.9, 1.8, 1.2.3, 1.7, 1.6, 1.9.3	24	1.1.24, 1.8, 1.5.6, 1.7, 1.6, 1.10.1
10	1.1.10, 1.8, 1.3.3, 1.7, 1.6, 1.9.4	25	1.1.25, 1.8, 1.2.1, 1.7, 1.6, 1.10.2
11	1.1.11, 1.8, 1.4.3, 1.7, 1.6, 1.9.5	26	1.1.26, 1.8, 1.3.1, 1.7, 1.6, 1.10.3
12	1.1.12, 1.8, 1.5.3, 1.7, 1.6, 1.10.1	27	1.1.27, 1.8, 1.4.1, 1.7, 1.6, 1.10.4
13	1.1.13, 1.8, 1.2.4, 1.7, 1.6, 1.10.2	28	1.1.28, 1.8, 1.5.1, 1.7, 1.6, 1.10.5
14	1.1.14, 1.8, 1.3.4, 1.7, 1.6, 1.10.3	29	1.1.29, 1.8, 1.2.2, 1.7, 1.6, 1.10.6
15	1.1.15, 1.8, 1.4.4, 1.7, 1.6, 1.10.4	30	1.1.30, 1.8, 1.3.2, 1.7, 1.6, 1.9.6

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

Таблица к задаче 1.1

N	a_n	N	a_n	N	a_n
1.1.1	$\dfrac{2}{n^2+5n+6}$	1.1.11	$\dfrac{60}{11(n^2+12n+35)}$	1.1 21	$\dfrac{24}{7(n^2+8n+15)}$
1.1.2	$\dfrac{36}{11(n^2+5n+4)}$	1.1.12	$\dfrac{144}{5(n^2+6n+8)}$	1.1.22	$\dfrac{36}{n^2+5n+4}$
1.1.3	$\dfrac{9}{n^2+7n+12}$	1.1.13	$\dfrac{36}{n^2+7n+10}$	1.1.23	$\dfrac{46}{n^2+5n+6}$
1.1.4	$\dfrac{48}{5(n^2+6n+8)}$	1.1.14	$\dfrac{48}{n^2+8n+15}$	1.1.24	$\dfrac{96}{n^2+9n+20}$
1.1.5	$\dfrac{48}{5(n^2+6n+5)}$	1.1.15	$\dfrac{20}{n^2+4n+3}$	1.1.25	$\dfrac{60}{n^2+6n+8}$

1.1.6	$\dfrac{72}{5(n^2+6n+8)}$	1.1.16	$\dfrac{32}{n^2+5n+6}$	1.1.26	$\dfrac{72}{n^2+7n+10}$
1.1.7	$\dfrac{24}{n^2+8n+15}$	1.1.17	$\dfrac{144}{n^2+18n+80}$	1.1.27	$\dfrac{24}{n^2+4n+3}$
1.1.8	$\dfrac{32}{n^2+9n+20}$	1.1.18	$\dfrac{24}{n^2+4n+3}$	1.1.28	$\dfrac{96}{n^2+8n+15}$
1.1.9	$\dfrac{216}{7(n^2+8n+15)}$	1.1.19	$\dfrac{180}{n^2+20n+99}$	1.1.29	$\dfrac{72}{n^2+6n+8}$
1.1.10	$\dfrac{84}{13(n^2+14n+48)}$	1.1.20	$\dfrac{112}{15(n^2+16n+63)}$	1.1.30	$\dfrac{12}{5(n^2+6n+8)}$

Таблица к задаче 1.2

N	*A*	N	*A*	N	*A*
1.2.1	$\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 33 & 28 & 24 \\ 360 & 320 & 270 \end{matrix}$	1.2.2	$\begin{matrix} 30 & 34 & 19 \\ 314 & 354 & 200 \\ 2 & 8 & 13 \end{matrix}$	1.2.3	$\begin{matrix} 1.3 & 1 & 13 \\ 3.4 & 1.4 & 23 \\ 5 & 3 & 1.5 \end{matrix}$
1.2.4	$\begin{matrix} 9 & 5 & 6 \\ 17 & 9 & 11 \\ 7 & 4 & 5 \end{matrix}$	1.2.5	$\begin{matrix} -7 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix}$	1.2.6	$\begin{matrix} 3 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 15 \\ 11 & 5 & 40 \end{matrix}$

Таблица к задаче 1.3

N	*A*	N	*A*	N	*A*
1.3.1	$\begin{matrix} 2 & 16 & -6 \\ 3 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{matrix}$	1.3.2	$\begin{matrix} 2 & 4.4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{matrix}$	1.3.3	$\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$
1.3.4	$\begin{matrix} 48 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$	1.3.5	$\begin{matrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 1.1 & 0.2 & 3 \\ 2.3 & 1.2 & 4 \end{matrix}$	1.3.6	$\begin{matrix} 5 & 5.5 & 5.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{matrix}$

Таблица к задаче 1.4

N	*A*	N	*A*	N	*A*
1.4.1	$\begin{matrix} 1.1 & 0.1 & 0.8 & 1.6 \\ 1.3 & -0.3 & 1.2 & 2.1 \\ 0.9 & 0.5 & 0.4 & 1.1 \\ -0.4 & -3.8 & 2 & 1.3 \end{matrix}$	1.4.2	$\begin{matrix} 0.6 & 4.5 & 0.3 & 3 \\ -2.4 & -12 & 0.9 & -7 \\ 1.2 & 9 & 0.6 & 6 \\ -1.2 & 3 & 3.6 & 4 \end{matrix}$	1.4.3	$\begin{matrix} 1.8 & 4 & 0 & 1.9 \\ 20.9 & 37 & -25 & 19.2 \\ 0.5 & 3 & 5 & 1.1 \\ 10.6 & 16 & -20 & 8.9 \end{matrix}$
1.4.4	$\begin{matrix} 2 & 15 & 22 & 7 \\ 1 & 14.1 & 18.8 & 2.3 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ -0.4 & 2.5 & 2.1 & -2.4 \end{matrix}$	1.4.5	$\begin{matrix} 1.9 & 9 & 1.6 & 0.1 \\ 11.3 & 23 & 6.8 & -3.7 \\ 0.5 & 10 & 1.1 & 1.1 \\ 0.9 & -11 & -0.6 & -2.1 \end{matrix}$	1.4.6	$\begin{matrix} 1.2 & 9 & 0.6 & 6 \\ 1.6 & 23 & -7.2 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 37 & -15 & 12 \end{matrix}$

Таблица к задаче 1.5

N	Коэффициенты	N	Коэффициенты	N	Коэффициенты
1.5.1	b* = -39.6 c = -716.85	1.5.2	b = 27.4 c* = 187.65	1.5.3	b* = 37.4 c = 187.65
1.5.4	b = -30.9 c* = 238.7	1.5.5	b* = -3.29 c = 2.706	1.5.6	b = -3.29 c* = 2.706

Таблица к задаче 1.9

N	*A*	α	β	N	*A*	α	β
1.9.1	31 27 22 32.2 28.2 24 36 32 27	0.1	0.4	1.9.2	30 34 19 31.4 35.4 20 24 28 13	0.05	0.1
1.9.3	3 1 13 13.4 11.4 23 5 3 15	0.05	0.1	1.9.4	9 5 6 13.5 9.5 11 8 4 5	0.1	0.5
1.9.5	-7 -8 -10 28.6 27.6 25 7 6 4	0.1	0.2	1.9.6	-3 -1 -13 26.8 22.4 46 5 3 15	0.1	0.1

Таблица к задаче 1.10

N	**a₁**	**a₂**	**a₃**	α	β
1.10.1	(10 , 15 , 1)	(0.7, 5.7, -9)	(11, 16, 2)	0.05	0.1
1.10.2	(- 2 , - 5 , 13)	(14.2 , 11.2 , 28)	(0, -3, 15)	0.5	0.1
1.10.3	(24, 28, 13)	(21.1, 25.1, 10)	(18, 22, 7)	0.05	0.01
1.10.4	(9, 17, 1)	(27, 35, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1
1.10.5	(14, 4, 17)	(33.9, 23.9 , 38)	(13, 3, 16)	0.05	0.1
1.10.6	(9, 17, 1)	(27, 35, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. В

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4. Первый лист - титульный. На нем указываются фамилия студента, номер группы, тема лабораторной работы, номер варианта и номера выполняемых задач.

Ниже приведен пример оформления содержательной части отчета по лабораторной работе 1.

Задача 1.1.0. Постановка задачи: дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4}$. Найти сумму ряда S аналитически.

Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5. Построить гистограмму зависимости числа верных цифр результата от N.

Аналитическое решение задачи:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{72}{n^2+5n+4} = \sum_{n=0}^{N} \frac{72}{(n+1)\cdot(n+4)} = 72\cdot\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right) =$$

$$= 24\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right),$$

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = 44.$$ ОТВЕТ: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4} = 44.$

Теоретический материал. Пусть a - точное значение, a^* - приближенное значение некоторой величины. Абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называется величина $\Delta(a^*) = \left|a - a^*\right|$.

Относительной погрешностью значения a^* (при $a \neq 0$) называется величина $\delta(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|}$. Так как значение a как правило неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида: $|a - a^*| \leq \overline{\Delta}(a^*)$; $\dfrac{|a - a^*|}{|a|} \leq \overline{\delta}(a^*)$. Величины $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\delta}(a^*)$ называют верхними границами (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей.

Значащую цифру числа a^* называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Введем функцию $S(N) = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{72}{n^2 + 5n + 4}$. Тогда абсолютную погрешность можно определить с помощью функции $d(N) = |S(N) - S|$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Значение частичной Величина абсолютной Количество суммы ряда погрешности верных цифр

$S(10)$=38.439560439 $d(10)$=5.56 $M_1 = 1$

$S(100)$=43.3009269 $d(100)$=0.699 $M_2 = 2$ $S(1000)$=43.9282153

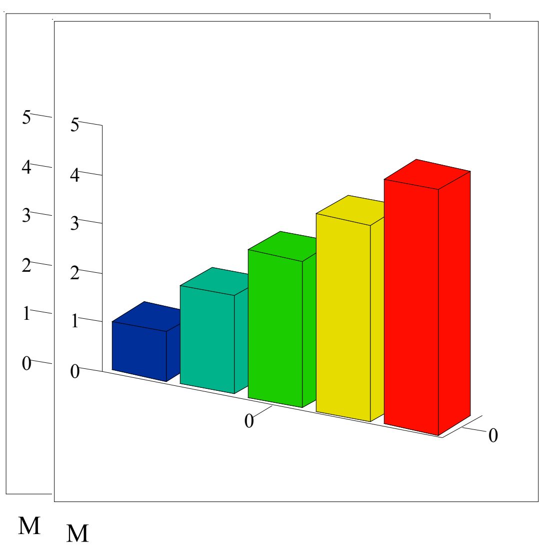
$d(1000)$=0.072 $M_3 = 3$

$S(10000)$=43.992802 $d(10000)$=0.0072 $M_4 = 4$

$S(100000)$=43.9992802159957 $d(100000)$=0.00072 $M_5 = 5$

Вывод: Как видно из приведенного вычислительного эксперимента, увеличение числа членов ряда в 10 раз по сравнению с предыдущим случаем увеличивает число верных цифр в ответе на 1.

Гистограмма



Задача 1.6. Постановка задачи: для пакета MATHCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Теоретический материал. В ЭВМ для вещественных чисел используется двоичная система счисления и принята форма представления чисел с плавающей точкой $x = \mu \cdot 2^p$,

$\mu = \pm(\gamma_1 \cdot 2^{-1} + \gamma_2 \cdot 2^{-2} + ... + \gamma_t \cdot 2^{-t})$. Здесь μ - мантисса ; $\gamma_1, \gamma_2, ..\gamma_t$ - двоичные цифры, причем всегда γ_1=1, p-целое число называемое двоичным порядком. Количество *t* цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Диапазон представления чисел в ЭВМ ограничен конечной разрядностью мантиссы и значением числа *p*. Все представимые числа на ЭВМ удовлетворяют неравенствам: $0 < X_0 \le |x| < X_\infty$, где $X_0 = 2^{-(p_{\max}+1)}$, $X_\infty = 2^{p_{\max}}$. Все числа, по модулю большие X_∞, не представимы на ЭВМ и рассматриваются как машинная бесконечность. Все числа, по модулю меньшие X_0, для ЭВМ не отличаются от нуля и рассматриваются как машинный нуль. Машинным эпсилон ε_M называется относительная точность ЭВМ, то есть граница относительной погрешности представления чисел в ЭВМ. Покажем, что $\varepsilon_M \approx 2^{-t}$. Пусть $x^* = \mu \cdot 2^p$, тогда граница абсолютной погрешности представления этого числа равна $\overline{\Delta(x^*)} \approx 2^{-t-1} \cdot 2^p$. Поскольку $\frac{1}{2} \le \mu < 1$, то величина относительной погрешности представления оценивается так:

$$\overline{\delta}(x^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(x^*)}{|x^*|} \approx \frac{2^{-t-1} \cdot 2^p}{\mu \cdot 2^p} = \frac{2^{-t-1}}{\mu} \le \frac{2^{-t-1}}{2^{-1}} = 2^{-t}.$$

Машинное эпсилон определяется разрядностью мантиссы и способом округления чисел, реализованным на конкретной ЭВМ.

Примем следующие способы определения приближенных значений параметров, требуемых в задаче:

1. Положим $X_\infty = 2^n$, где *n* - первое натуральное число, при котором происходит переполнение.
2. Положим $X_0 = 2^{-m}$, где *m* – первое натуральное число , при котором 2^{-m} совпадает с нулем.
3. Положим $\varepsilon_M = 2^{-k}$, где *k* – наибольшее натуральное число, при котором сумма вычисленного значения 1+ 2^{-k} еще больше 1. Фактически ε_M есть граница относительной погрешности представления числа $x^* \approx 1$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Машинная бесконечность $X_\infty \approx 10^{307}$

Машинный нуль $X_0 \approx 10^{-306}$

Машинное эпсилон $\varepsilon_M \approx 10^{-15}$

Тексты программ:

ЗАДАЧА 1.1.0

$ORIGIN := 1$

$$S(N) := \sum_{n=0}^{N} \frac{72}{n^2 + 5\cdot n + 4} \qquad d(N) := |S(N) - 44|$$

Значение частичной суммы ряда	Величина абсолютной погрешности	Количество верны цифр
$S(10) = 38.43956043956044$	$d(10) = 5.56$	$M_1 := 1$
$S(100) = 43.30092694284587$	$d(100) = 0.699$	$M_2 := 2$
$S(1000) = 43.9282153063675$	$d(1000) = 0.072$	$M_3 := 3$
$S(10000) = 43.99280215930432$	$d(10000) = 7.198\cdot 10^{-3}$	$M_4 := 4$
$S(100000) = 43.99928002159933$	$d(1000000) = 7.2\cdot 10^{-5}$	$M_5 := 5$

ЗАДАЧА 1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

МАШИННАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ $inf(n) := 2^{n}$

МАШИННЫЙ НУЛЬ $zero(m) := 2^{-m}$

МАШИННОЕ ЭПСИЛОН $eps(k) := 2^{-k}$

$inf(1019) = 5.618\cdot 10^{306}$ $inf(1020) = 1.124\cdot 10^{307}$ $inf(1021) =$

$zero(1019) = 1.78\cdot 10^{-307}$ $zero(3020) = 0$

$res(k) := 1 + eps(k)$

$res(47) = 1.000000000000007$ $res(48) = 1.000000000000004$

$res(49) = 1.000000000000002$ $res(50) = 1.000000000000001$ $res(51) = 1$

$eps(50) = 8.881784197001252\cdot 10^{-16}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.С

В задачах 1.9 и 1.10 исходный вопрос решается путем нахождения определителя и сравнения его с нулем. В случае, когда элементы определителя заданы точно, следует вычислить определитель и правильно ответить на поставленный в задаче вопрос.

В случае, когда элементы определителя заданы приближенно с относительной погрешностью δ, дело обстоит сложнее. Пусть элементы матрицы обозначены через a_{ij}. Тогда каждый элемент матрицы a_{ij} теперь уже не равен конкретному значению, а может принимать любое значение из отрезка $[a_{ij}(1-\delta)\ ;\ a_{ij}(1+\delta)]$, если $a_{ij} > 0$, и из отрезка $[a_{ij}(1+\delta)\ ;\ a_{ij}(1-\delta)]$, если $a_{ij} < 0$. Множество всех возможных значений элементов матрицы представляет собой замкнутое ограниченное множество в 9-мерном пространстве. Сам определитель является непрерывной и дифференцируемой функцией 9 переменных - элементов матрицы a_{ij}. По известной теореме Вейерштрасса эта функция достигает на указанном множестве своего наибольшего и наименьшего значений M и m. Если отрезок $[m, M]$ не содержит точку 0 , то это означает, что при всевозможных допустимых значениях элементов матрицы a_{ij}

определитель не обращается в 0. Если же точка 0 принадлежит отрезку $[m, M]$, такое утверждение будет неправомерным. Будет иметь место неопределённость.

Нахождению значений m и M помогают следующие рассуждения. Как функция своих аргументов (элементов матрицы a_{ij}) определитель обладает таким свойством (принцип максимума): эта функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений всегда на границе области. Более того, можно доказать, что эти значения достигаются в точках, координаты которых имеют вид $a_{ij}(1 \pm \delta)$. Таких точек $2^9 = 512$. В каждой из них следует вычислить определитель, а затем выбрать из полученных значений самое большое и самое маленькое. Это и будут числа M и m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.