ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2.
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 4].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) результаты вычислительного эксперимента; 4) анализ полученных результатов; 5) графический материал (если необходимо);
6) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 2.1-2.10 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.А.*

Фрагмент решения задачи 2.1 дан в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.В.*

Задача 2.1. Даны два уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ все корни уравнений, содержащиеся на отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать метод бисекции. Найти корни с помощью встроенной функции **root** пакета MATHCAD.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти аналитическое решение уравнения $f(x)=0$.
2. Используя пакет MATHCAD, локализовать корни $f(x)=0$ графически.
3. Используя программу **bisec** (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 2.В*), найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε с помощью метода бисекции.
4. Используя встроенную функции **root** пакета MATHCAD, найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε .
5. Аналогично п. 1-4 попытаться найти корни уравнения $g(x)=0$. Объяснить полученные результаты.

Задача 2.2. Найти указанный в варианте корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, двумя способами.

a) Использовать метод бисекции. Предварительно определить отрезок локализации $[a, b]$.

b) Использовать метод Ньютона. В качестве начального приближения для метода Ньютона взять середину отрезка локализации из п. а).

Сравнить число итераций в п. а), b).

Задача 2.3. Локализовать корни уравнения $f(x)=0$ и найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя метод простой итерации. К виду $x=\varphi(x)$, удобному для итераций, уравнение $f(x)=0$ привести двумя способами.

a) Преобразовать уравнение к виду $x=x-\alpha f(x)$, где $\alpha=2/(M+m)$, $0 < m \le f'(x) \le M$, а x принадлежит отрезку локализации $[a, b]$.

b) Любым другим преобразованием уравнения. Проверить достаточное условие сходимости метода.

Использовать критерий окончания итерационного процесса вида $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$, где в п. а) $q=(M-m)/(M+m)$, в п. b) $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$.

Сравнить число итераций и значения величины q в пп. a), b).

Задача 2.4. Локализовать корни уравнения $f(x)=0$. Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$, используя методы простой итерации и Ньютона. Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций).

Задача 2.5. Найти приближенно корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий отрезку $[a,b]$, с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя модификацию* метода Ньютона для случая кратного корня при значениях m=1,2,3,4,5. По числу итераций определить кратность корня.

Задача 2.6. Локализовать корни уравнения $f(x)=0.$ Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, спользуя метод Ньютона и метод, указанный в индивидуальном варианте. Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций) для каждого значения ε .

---

* Расчетная формула модификации метода Ньютона для поиска кратных корней дана в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.С.*

Задача 2.7. Локализовать корни уравнения *f(x)=0*. Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, используя метод Ньютона, упрощенный метод Ньютона и метод секущих[**]. Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций) для каждого значения ε .

Задача 2.8. Найти приближенно все (в том числе комплексные) корни уравнения *f(x)=0* с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя метод Ньютона.
УКАЗАНИЕ. Для поиска комплексных корней следует использовать комплексные начальные приближения.

Задача 2.9. a) Локализовать корни уравнения *f(x)=0*. Уточнить их с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$, используя метод Ньютона. Для поиска кратного корня и определения его кратности следует использовать модификацию метода Ньютона для случая кратного корня с m=1,2,3. При любых ли начальных приближениях такой метод сходится?
b) Рассмотреть уравнение $f(x)+\delta=0$, где $\delta = 10^{-8}$. Найти корень кратности 1, используя метод Ньютона. Применить для нахождения кратного корня соответствующую модификацию* метода Ньютона. Удается ли найти кратный корень? Если нет, то использовать метод Ньютона с комплексными начальными приближениями. Сохранился ли кратный корень? Объяснить результаты.

Задача 2.10. Функция *y=f(x)* задана неявно уравнением *F(x,y)=0*. На отрезке [1, 5] построить таблицу значений функции *y=f(x)* с шагом h=0.5, применяя один из методов численного решения нелинейного уравнения (с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$). Построить график функции *y=f(x)* на заданном отрезке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.А.

Схема вариантов к лабораторной работе 2

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	2.1.1, 2.2.1, 2.10.1	11	2.1.11, 2.6.2, 2.9.4	21	2.1.21, 2.4.4, 2.8.2
2	2.1.2, 2.3.1, 2.9.1	12	2.1.12, 2.7.2, 2.8.4	22	2.1.22, 2.5.4, 2.10.3
3	2.1.3, 2.4.1, 2.8.1	13	2.1.13, 2.2.3, 2.10.5	23	2.1.23, 2.6.4, 2.9.3
4	2.1.4, 2.5.1, 2.10.2	14	2.1.14, 2.3.3, 2.9.5	24	2.1.24, 2.7.4, 2.8.3
5	2.1.5, 2.6.1, 2.9.2	15	2.1.15, 2.4.3, 2.8.5	25	2.1.25, 2.2.5, 2.10.4
6	2.1.6, 2.7.1, 2.8.2	16	2.1.16, 2.5.3, 2.10.1	26	2.1.26, 2.3.5, 2.9.4
7	2.1.7, 2.2.2, 2.10.3	17	2.1.17, 2.6.3, 2.9.1	27	2.1.27, 2.4.5, 2.8.4
8	2.1.8, 2.3.2, 2.9.3	18	2.1.18, 2.7.3, 2.8.1	28	2.1.28, 2.5.5, 2.10.5
9	2.1.9, 2.4.2, 2.8.3	19	2.1.19, 2.2.4, 2.10.2	29	2.1.29, 2.6.5, 2.9.5
10	2.1.10, 2.5.2, 2.10.4	20	2.1.20, 2.3.4, 2.9.2	30	2.1.30, 2.7.5, 2.8.5

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 2

Таблица к задаче 2.1

N	*f(x)*	*g(x)*	[*a*, *b*]
2.1.1	$(\sin x)^2 - \frac{5}{6}\sin x + \frac{1}{6}$	$(\sin x)^2 - \sin x + \frac{1}{4}$	$[0,1]$
2.1.2	$(\sin x)^2 + \frac{7}{12}\sin x + \frac{1}{12}$	$(\sin x)^2 + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9}$	$[-1,0]$
2.1.3	$(\sin x)^2 - \frac{1}{30}\sin x - \frac{1}{30}$	$(\sin x)^2 - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{25}$	$[-0.5,0.5]$

[**] Расчетные формулы упрощенного метода Ньютона и метода секущих даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 2.С.*

2.1.4	$(\cos x)^2+\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{7}\cos x+\frac{1}{49}$	$[0,2]$
2.1.5	$(\cos x)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\cos x+\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{2}$	$[0,1.5]$
2.1.6	$(\cos x)^2+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2+\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{36}$	$[0,2]$
2.1.7.	$(\ln x)^2-5\ln x+6$	$(\ln x)^2-4\ln x+4$	[5,25]
2.1.8	$(\ln x)^2-\ln x-2$	$(\ln x)^2+2\ln x+1$	[0.1,10]
2.1.9	$(\ln x)^2-\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{8}$	$(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{4}$	[0.1,2]
2.1.10	$(tgx)^2+(\sqrt{3}-1)tgx-\sqrt{3}$	$(tgx)^2-2tgx+1$	$[-1.2,1]$
2.1.11	$(tgx)^2-\frac{28}{9}tgx+\frac{1}{3}$	$(tgx)^2-6tgx+9$	$[0,1.5]$
2.1.12	$(tgx)^2-\frac{53}{6}tgx-\frac{3}{2}$	$(tgx)^2-\frac{1}{3}tgx+\frac{1}{36}$	$[-0.5,1.5]$
2.1.13	x^4-7x^2+10	x^4-4x^2+4	[0,3]
2.1.14	$x^4-\frac{10}{3}x^2+1$	x^4-6x^2+9	[0,2]
2.1.15	$x^4-\frac{13}{2}x^2+3$	$x^4-x^2+\frac{1}{4}$	[0,3]
2.1.16	$(\sin x)^2+\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	$[-1,0]$
2.1.17	$(\sin x)^2-\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}$	$[0,1]$
2.1.18	$(\sin x)^2+\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{36}$	$[-0.5,0.5]$
2.1.19	$(\cos x)^2-\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{25}$	$[0,3]$
2.1.20	$(\cos x)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)\cos x-\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}$	$[0,2]$
2.1.21	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{9}$	$[0,2]$
2.1.22	$(\lg x)^2+\frac{5}{3}\lg x-\frac{2}{3}$	$(\lg x)^2-\frac{2}{3}\lg x+\frac{1}{9}$	[0.001,3]

2.1.23	$(\lg x)^2 - \lg x - \frac{3}{4}$	$(\lg x)^2 - 3\lg x + \frac{9}{4}$	[0.1,35]
2.1.24	$(\lg x)^2 + \frac{3}{4}\lg x - \frac{1}{4}$	$(\lg x)^2 + 2\lg x + 1$	[0.01,3]
2.1.25	$(tgx)^2 - (1+\frac{1}{\sqrt{3}})tgx + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$(tgx)^2 - 2tgx + 1$	$[0,1]$
2.1.26	$(tgx)^2 - \frac{7}{4}tgx - \frac{1}{2}$	$(tgx)^2 + \frac{1}{2}tgx + \frac{1}{16}$	[-0.5,1.5]
2.1.27	$(tgx)^2 + \frac{37}{6}tgx + 1$	$(tgx)^2 + 12tgx + 36$	[-1.5,0]
2.1.28	$x^4 - 11x^2 + 24$	$x^4 - 6x^2 + 9$	[1,3]
2.1.29	$x^4 - \frac{26}{5}x^2 + 1$	$x^4 - 10x^2 + 25$	[0,3]
2.1.30	$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$	[0,5]

Таблица к задаче 2.2

N	*f(x)*	Найти корень
2.2.1	$e^{-x} - 2 + x^2$	отрицательный
2.2.2	$xe^x - x - 1$	положительный
2.2.3	$e^x + 1 - \sqrt{9 - x^2}$	положительный
2.2.4	$(x+1)\cdot e^{x+1} - x - 2$	наибольший по модулю
2.2.5	$\sqrt{x} - \cos x$	все корни

Таблица к задаче 2.3

N	*f(x)*
2.3.1	$\sin x + 2x^2 + 4x$
2.3.2	$e^{-x} - \lg(1 - x^2) - 2$
2.3.3	$\sin(x+2) - x^2 + 2x - 1$
2.3.4	$(x-1)sh(x+1) - x$
2.3.5	$x - e^{-x^2}$

Таблица к задаче 2.4

$$f(x) \equiv P_5(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

N	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2.4.1	4.545004	-3.055105	-18.06895	4.002429	4.722482
2.4.2	-2.656764	-3.406111	10.89372	-1.752935	-3.423612
2.4.3	-4.556062	2.93309	9.274868	-10.32081	0.422098
2.4.4	7.809249	16.28542	-2.771356	-27.95304	-11.33921
2.4.5	-13.0072	60.24546	-122.0716	105.6798	-30.19201

Таблица к задаче 2.5

N	*f(x)*	[*a*, *b*]
2.5.1	$36\cos x + 18\sqrt{3}x + 9x^2 + \pi^2 - 18 - 6\sqrt{3}\pi - 6\pi x$	[0.8,1.2]
2.5.2	$144\sin x + 12\sqrt{3}\pi + 36x^2 + \pi^2 - 72 - 12\pi x - 72\sqrt{3}x$	[0.3,0.7]

2.5.3	$32\sqrt{2}\sin x+8\pi+16x^2+\pi^2-32-8\pi x-32x$	[0.5,1]
2.5.4	$ctgx+2x+\pi x-1-\pi/2-2x^2-\pi^2/8$	[0,1]
2.5.5	$\sqrt{3}ctgx+4\sqrt{3}x+4\pi x-3-2\pi/\sqrt{3}-12x^2-\pi^2/3$	[0,0.7]

Таблица к задаче 2.6

N	*f(x)*	Метод*
2.6.1	$e^x-3\sqrt{x}$	упрощенный метод Ньютона
2.6.2	$\sqrt{2-x^2}-e^x$	метод ложного положения
2.6.3	$\ln x-2\cos x$	метод простой итерации
2.6.4	$\sqrt{x}e^{\cos x}-1$	метод секущих
2.6.5	$e^{-(x+1)}+x^2+2x-1$	метод Стеффенсена

Таблица к задаче 2.7

N	*f(x)*
2.7.1	$x\ln x-x^2+3x-1$
2.7.2	$x^3-0.9x^2-x-0.1$
2.7.3	$e^{-x}-5x^2+10x$
2.7.4	$\ln(2x-x^2)+2-\sqrt{x}$
2.7.5	$\sqrt{x}+x^2-10$

Таблица к задаче 2.8

N	*f(x)*
2.8.1	x^3-2x-5
2.8.2	$x^4-2.7x^3+3$
2.8.3	$x^4-2.7x^3+x-1$
2.8.4	$x^5+3x^4+2x^3-1$
2.8.5	$x^5+2x^4+4x^3-5x+2.7$

Таблица к задаче 2.9

N	*f(x)*
2.9.1	$3x^3-77x^2+605x-1331$
2.9.2	$3x^3-35x^2+125x-125$
2.9.3	$x^3-7x^2+15x-9$
2.9.4	$x^3-5.5x^2+9.5625x-5.0625$
2.9.5	$3x^3-28x^2+80x-64$

Таблица к задаче 2.10

N	*F(x,y)*
2.10.1	$sh\left(ye^y-\dfrac{x}{20}\right)+arctg\left(20ye^y-x\right)-0.5,\quad 1\le x\le 5,\quad 0.1\le y\le 1.2$
2.10.2	$ch\left(ye^y+\dfrac{x}{20}\right)+\dfrac{1}{arctg(20ye^y+x)}-13,\quad 1\le x\le 5,\quad 1\le y\le 1.5$
2.10.3	$e^{xy}-\cos(xy^3),\quad 0.5\le x\le 1.5,\quad -1.3\le y\le -0.3$
2.10.4	$e^{xy}-\cos\left(x\sqrt[3]{y}\right),\quad 4.5\le x\le 7.2,\quad -1.2\le y\le -0.2$
2.10.5	$\ln(xy)-\sin(yx^2),\quad 1\le x\le 2.5,\quad 0.5\le y\le 2.5$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. В

Фрагмент решения задачи 2.1.0

$$f(x)=(\cos x)^2-\frac{1}{12}\cos x-\frac{1}{24}=0, \quad [a,b]=[0,\ \pi]$$

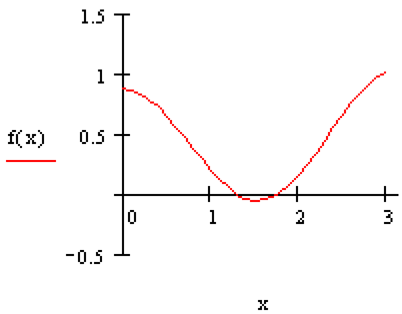
Аналитическое решение задачи:

$$f(x)=\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\cos x+\frac{1}{6}\right),\quad x_1=\arccos\left(\frac{1}{4}\right)=1.31811607652818,\quad x_2=\pi-\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

$=1.738244406014586$

Численное решение задачи: Локализация корней для численного решения задачи:

$$f(x):=(\cos(x))^2-\frac{\cos(x)}{12}-\frac{1}{24} \qquad x:=0,0+0.1..3$$



Отрезки локализации
[1,1.5], [1.5,2]

Метод бисекции

bisec(f a b [redacted] ← a
bn ← b
k ← 0
while (bn − an) [redacted]
  $xn \leftarrow \frac{an+bn}{2}$
  fa ← f(an)
  fb ← f(bn)
  fxn ← f(xn)
  bn ← xn if fa fxn ≤ 0
  an ← xn otherwise
  k ← k + 1
$xn \leftarrow \frac{an+bn}{2}$
$res \leftarrow \begin{bmatrix} xn \\ k \end{bmatrix}$
res

ПЕРВЫЙ КОРЕНЬ

$$\mathrm{bisec}\left(f,1,1.5,10^{-10}\right)=\begin{bmatrix}1.318116071692202\\ 32\end{bmatrix}$$

Встроенная функция пакета MATHCAD

$x0 := 1$ - задание начального приближения

$$root(f(x0), x0) = 1.317959944516193$$

Значение корня отличается от найденного с помощью функции bisec , так как по умолчанию величина погрешности при работе встроенных функций равна 0.001.

Переопределим параметр для задания погрешности $TOL := 10^{-10}$

$$root(f(x0), x0) = 1.318116071652817$$

Значение корня с заданной точностью 1.3181160717.

ВТОРОЙ КОРЕНЬ

$$\text{bisec}\left(f, 1.5, 2, 10^{-10}\right) = \begin{bmatrix} 1.738244406005833 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Значение корня с заданной точностью 1.7382444060, число итераций 32.

$x0 := 1.8$ - задание начального приближения

$$root(f(x0), x0) = 1.738244406014586.$$

Значения корней в пределах заданной точности совпадают.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.С

Расчетные формулы методов решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$.

Упрощенный метод Ньютона: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$, *n=0,1,...*

Метод ложного положения: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{c - x_n}{f(c) - f(x_n)} f(x_n)$, *n=0,1,...;*

с-фиксированная точка из окрестности корня

Метод секущих: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} f(x_n)$, *n=0,1,...*

Метод Стеффенсена: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n)$, *n=0,1,...*

Модифицированный метод Ньютона для поиска кратных корней:

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\ldots,\ m=1,2,\ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.