# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6.
# ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Евтеева Марина, БПМ-143

Вариант 7

2017

# Оглавление

**Задание 6.1.7** Вычислить значение интеграла $\int_1^{1.44} P_n(x)dx$, где $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, с помощью квадратурных формул трапеций и Симпсона для элементарного отрезка интегрирования. Оценить величину погрешности. Применяя те же квадратурные формулы для составного отрезка интегрирования, вычислить интеграл $I$ с точностью 0.0001. Предварительно оценить шаг интегрирования, при котором достигается заданная точность.

**Вариант 7**

$c = [6.81.7 - 4.10.1 - 6.1]$

**Решение:**

Код решения MATLAB (аналитическое решение также выполнено при помощи MATLAB, результат ниже)

```
ab = [1 1.44];
c = [6.8 1.7 -4.1 0.1 -6.1];
I = @(ab)(c(1)*ab(2) - c(1)*ab(1) + c(2)*ab(2)^2/2 - c(2)*ab(1)^2/2 + ...
c(3)*ab(2)^3/3 - c(3)*ab(1)^3/3 + c(4)*ab(2)^4/4 - c(4)*ab(1)^4/4 + c(5)*ab(2)^5/5 - c(5
Ian = I(ab);
Pn = @(c, x)(c(1) + c(2).*x + c(3).*x.^2 + c(4).*x.^3 + c(5).*x.^4);
xii = (ab(2) - ab(1))/2;
%
Itrf = (ab(2) - ab(1))/2*(Pn(c, ab(1)) + Pn(c, ab(2))) - (ab(2) - ab(1))^2/12*(2*c(3) +
%
Isif = (ab(2) - ab(1))/6*(Pn(c, ab(1)) + 4*Pn(c, (ab(1) + ab(2))/2) + Pn(c, ab(2)));


P1 = @(c, x)(c(2) + 2*c(3).*x + 3*c(4).*x.^2 + 4*c(5).*x.^3);
P2 = @(c, x)(2*c(3) + 3*2*c(4).*x + 4*3*c(5).*x.^2);
P4 = @(c, x)(4*3*2*c(5));
x = linspace(ab(1), ab(2), 50);
% plot(x, P1(c, x))
M1 = max(abs(P1(c, x)));
M2 = max(abs(P2(c, x)));
M4 = max(abs(P4(c, x)));
R = 0.0001;
hlrp = 2*R/(M1*(ab(2) - ab(1)));
hcp = sqrt(24*R/(M2*(ab(2) - ab(1))));
htrap = sqrt(12*R/(M2*(ab(2) - ab(1))));
hsym = nthroot(2880*R/(M4*(ab(2) - ab(1))), 4);

%lrp
n = (ab(2) - ab(1))/hlrp;
xlp = linspace(ab(1), ab(2), n-1);
%
Ilp = hlrp*sum(Pn(c, xlp));
xrp = linspace(ab(1), ab(2), n);
%
Irp = hlrp*sum(Pn(c, xrp));
```

```
%cp
n = (ab(2) - ab(1))/hcp;
xcp = linspace(ab(1), ab(2), n-1);
%
Icp = 0;
for i = 1:n-2
    Icp = Icp + hcp*(Pn(c, (xcp(i+1) + xcp(i))/2));
end

%trap
n = (ab(2) - ab(1))/htrap;
xtr = linspace(ab(1), ab(2), n-1);
%
Itr = htrap*((Pn(c, ab(1)) + Pn(c, ab(2)))/2 + sum(Pn(c, xtr)));

%sym
n = (ab(2) - ab(1))/hsym;
xsym = linspace(ab(1), ab(2), n-1);
Isym = hsym/6*(Pn(c, ab(1)) + Pn(c, ab(2)) + 2*sum(Pn(c, xsym)));
for i = 1:n-1
    Isym = Isym + 4*hsym/6*Pn(c, (xsym(i+1) + xsym(i))/2);
end
```

Аналитически значение интеграла $= -5.061041144661332$
Значение интеграла $I$ по формулам трапеций и Симпсона, считая отрезок $[1, 1.44]$ элементарным отрезком интегрирования.
Трапеции $= -5.705167714986665$, абсолютная погрешность $= 0.6441$
Симпсона $= -5.061879468799998$, $unc = 8.3832e-04$
Шаги интегрирования, при которых погрешность будет меньше 0.0001 для нескольких квадратичных формул были оценены также с помощью матлаба:

```
    hlrp = 2*R/(M1*(ab(2) - ab(1)));
    hcp = sqrt(24*R/(M2*(ab(2) - ab(1))));
    htrap = sqrt(12*R/(M2*(ab(2) - ab(1))));
    hsym = nthroot(2880*R/(M4*(ab(2) - ab(1))), 4);
```

Полученные значения $hcp = 0.005854800401582$,
$hlrp = 5.520084561830951e-06$,
$hsym = 0.258582829677067$,
$htrap = 0.004139969066452$

Были вычислены значения интегралов с соответствующими шагами:
Формула левых треугольников $= -5.060929422679584, unc = 1.1172e-04$
Формула правых треугольников $= -5.060992916713851, unc = 4.8228e-05$
Формула центральных прямоугольников $= -4.916040184879595, unc = 0.1450$
Формула трапеций $= -5.063382446889911, unc = 0.0023$
Формула Симпсона $= -1.154315693463089, unc = 3.9067$

**Задание 6.2.3** Вычислить интегралы $\int_1^{1.44} P_n(x)dx$, где $\sum_{i=0}^{k} c_i x^i, k = 0, 1, \cdots, 5$ аналитически и используя квадратурную формулу, указанную в индивидуальном варианте, с шагом h = (b-a)/2. Для многочленов какой степени используемая квадратурная формула точна и почему? Оценить погрешность интегрирования по правилу Рунге

**Вариант 7**

$ab = [01]; c = [0.1 - 0.11111];$

Квадратурная формула трапеций

**Решение:**

Код решения на MATLAB

```
ab = [0 1];
c = [0.1 -0.1 1 1 1 1];
h = (ab(2) - ab(1))/2;

I = @(ab)(c(1)*ab(2) - c(1)*ab(1) + c(2)*ab(2)^2/2 - c(2)*ab(1)^2/2 + ...
c(3)*ab(2)^3/3 - c(3)*ab(1)^3/3 + c(4)*ab(2)^4/4 - c(4)*ab(1)^4/4 + ...
c(5)*ab(2)^5/5 - c(5)*ab(1)^5/5 + c(6)*ab(2)^6/6 - c(6)*ab(1)^6/6);
Ian = I(ab);

%x = linspace(ab(1), ab(2), 50);
Pn = @(c, x)(c(1) + c(2).*x + c(3).*x.^2 + c(4).*x.^3 + c(5).*x.^4 + c(6).*x.^5);
%plot(x, Pn(c, x))
%trap
for i = 1:6
    ci = zeros(6, 1);
    ci(1:i) = c(1:i);
    figure
    x = linspace(ab(1), ab(2), 50);
    plot(x, Pn(ci, x))
    n = (ab(2) - ab(1))/h;
    xtr = linspace(ab(1), ab(2), n-1);
    %
    Itr = h*((Pn(ci, ab(1)) + Pn(ci, ab(2)))/2 + sum(Pn(ci, xtr)));
    xtr2 = linspace(ab(1), ab(2), 2*(n-1));
    Itr2 = h*((Pn(ci, ab(1)) + Pn(ci, ab(2)))/2 + sum(Pn(ci, xtr2)));
    Itr
    Itr2
    unc = 1/3*abs(Itr2 - Itr)

end
```

Аналитическое значение = 1 Получившиеся значения: $Itr = 0.1000, Itr2 = 0.1500, unc = 0.0167$

$Itr = 0.0250, Itr2 = 0.0750, unc = 0.0167$

$Itr = 0.7750, Itr2 = 0.8250, unc = 0.0167$

$Itr = 1.5250, Itr2 = 1.5750, unc = 0.0167$

$Itr = 2.2750, Itr2 = 2.3250, unc = 0.0167$

$Itr = 3.0250, Itr2 = 3.0750, unc = 0.0167$

Получается, что наиболее близкое значение в методе трапеций с 2 шагами при $k = 3$, то есть многочлен 2 степени.

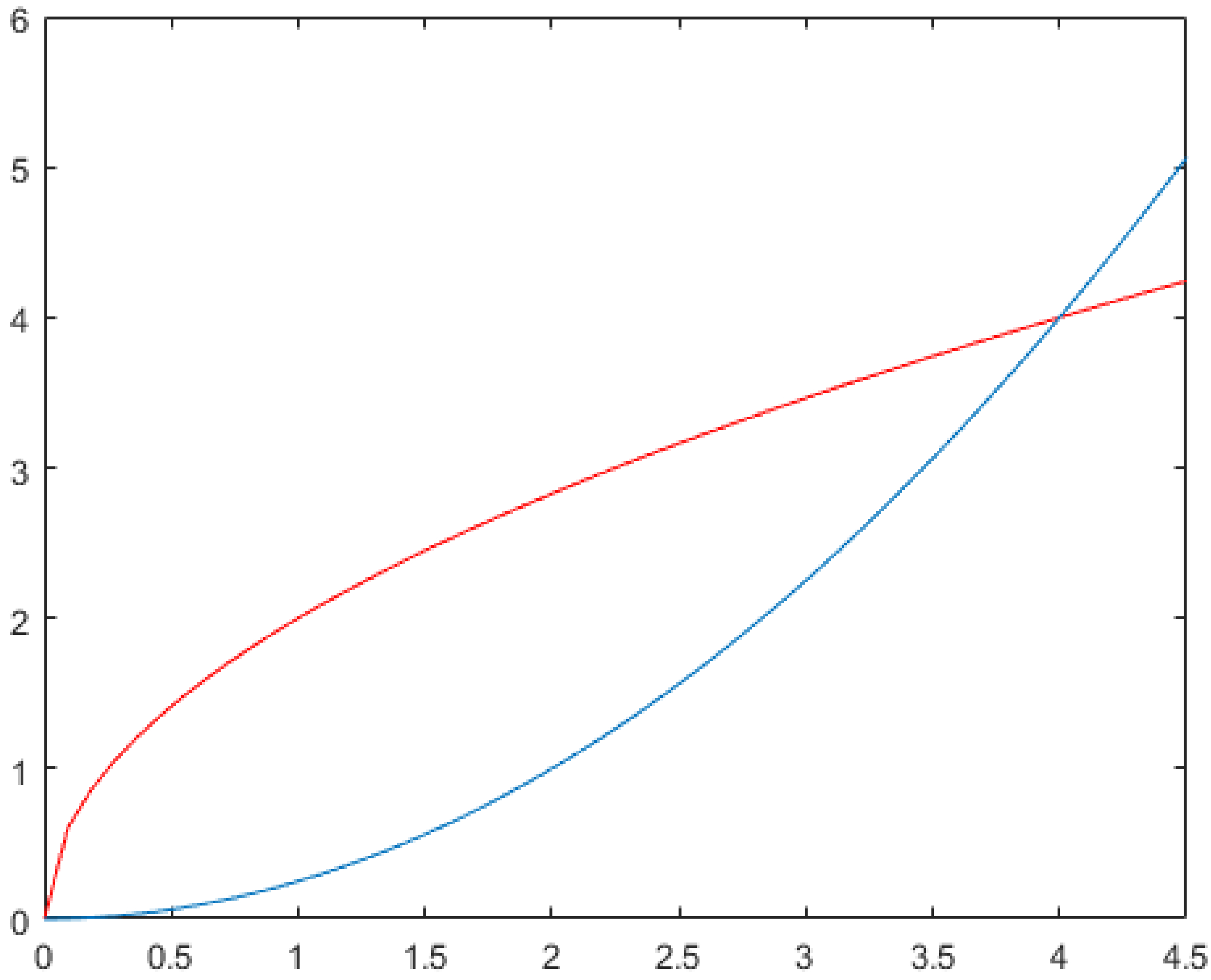
**Задание 6.7.2** Вычислить приближенно площадь фигуры, ограниченной кривыми, указанными в индивидуальном варианте. Точки пересечения кривых найти графически. Для вычисления интегралов с точностью $10^{-8}$ использовать квадратурную формулу, указанную в индивидуальном варианте, и правило Рунге оценки погрешности.

**Вариант 7**

$y^2 = 4x; x^2 = 4y$, метод Симпсона

**Решение:**

Графически область выглядит таким образом. Точки пересечения в $(0, 0)$ и $(4, 4)$




Код решения на MATLAB

```
f1 = @(x)(sqrt(4.*x));
f2 = @(x)(x.^2./4);
x = linspace(0, 4.5, 50);
plot(x, f1(x), 'r', x, f2(x));
```

```
ab = [0 4];
h = (ab(2) - ab(1))/4;
n = (ab(2) - ab(1))/h;

xsym = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, n-1);
Isym = h/6*(f1(ab(1)) + f1(ab(2)) + 2*sum(f1(xsym)));
for i = 1:n-2
Isym = Isym + 4*h/6*f1((xsym(i+1) + xsym(i))/2);
end

xsym2 = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, 2*n-1);
Isym2 = h/6*(f1(ab(1)) + f1(ab(2)) + 2*sum(f1(xsym2)));
for i = 1:n-2
Isym2 = Isym2 + 4*h/6*f1((xsym2(i+1) + xsym2(i))/2);
end
xsym = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, n-1);
Isym1 = h/6*(f2(ab(1)) + f2(ab(2)) + 2*sum(f2(xsym)));
for i = 1:n-2
Isym1 = Isym1 + 4*h/6*f2((xsym(i+1) + xsym(i))/2);
end

xsym2 = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, 2*n-1);
Isym22 = h/6*(f2(ab(1)) + f2(ab(2)) + 2*sum(f2(xsym2)));
for i = 1:n-2
Isym22 = Isym22 + 4*h/6*f2((xsym2(i+1) + xsym2(i))/2);
end



unc = 1/3*abs((Isym2 - Isym22) - (Isym-Isym1));
while unc > 1e-8
n = 2*n;
xsym = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, n-1);
Isym = h/6*(f1(ab(1)) + f1(ab(2)) + 2*sum(f1(xsym)));
for i = 1:n-2
    Isym = Isym + 4*h/6*f1((xsym(i+1) + xsym(i))/2);
end

xsym2 = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, 2*n-1);
Isym2 = h/6*(f1(ab(1)) + f1(ab(2)) + 2*sum(f1(xsym2)));
for i = 1:n-2
    Isym2 = Isym2 + 4*h/6*f1((xsym2(i+1) + xsym2(i))/2);
end
xsym = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, n-1);
Isym1 = h/6*(f2(ab(1)) + f2(ab(2)) + 2*sum(f2(xsym)));
for i = 1:n-2
    Isym1 = Isym1 + 4*h/6*f2((xsym(i+1) + xsym(i))/2);
```

```
end

xsym2 = linspace(ab(1)+h, ab(2)-h, 2*n-1);
Isym22 = h/6*(f2(ab(1)) + f2(ab(2)) + 2*sum(f2(xsym2)));
for i = 1:n-2
    Isym22 = Isym22 + 4*h/6*f2((xsym2(i+1) + xsym2(i))/2);
end



unc = 1/3*abs((Isym2 - Isym22) - (Isym-Isym1))


%unc = 1/3*abs(Isym2 - Isym)
end
```

**Задание 6.6.7** Вычислить значение интеграла $I$ из задачи 6.1, используя квадратурную формулу Гаусса с одним, двумя, тремя, четырьмя узлами. Определить абсолютную погрешность результата.

**Решение:**

Код решения на Matlab

```
ab = [1 1.44];
c = [6.8 1.7 -4.1 0.1 -6.1];
I = @(ab)(c(1)*ab(2) - c(1)*ab(1) + c(2)*ab(2)^2/2 - c(2)*ab(1)^2/2 + ...
c(3)*ab(2)^3/3 - c(3)*ab(1)^3/3 + c(4)*ab(2)^4/4 - c(4)*ab(1)^4/4 + c(5)*ab(2)^5/5 - c(5
Ian = I(ab);
Pn = @(c, x)(c(1) + c(2).*x + c(3).*x.^2 + c(4).*x.^3 + c(5).*x.^4);




t0 = 0;
A0 = 2;
t1 = [-0.577350269189626 0.577350269189626];
A1 = [1.000000000000000 1.000000000000000];
t2 = [-0.77459666929954 0.00000000000000 0.77459666929954];
A2 = [0.55555555555556 0.88888888888888 0.55555555555556];
t3 = [-0.861136311594052 -0.339981043584856 0.339981043584856 0.861136311594052];
A3 = [0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454];

Ig = @(c, ab, A, t)((ab(2) - ab(1))/2*sum(A.*Pn(c, (ab(2) + ab(1))/2 + (ab(2) - ab(1))/2

Ig0 = Ig(c, ab, A0, t0);
Ig1 = Ig(c, ab, A1, t1);
Ig2 = Ig(c, ab, A2, t2);
Ig3 = Ig(c, ab, A3, t3);
[abs(Ian - Ig0), abs(Ian-Ig1), abs(Ian - Ig2), abs(Ian - Ig3)]
```

Аналитический ответ $= -5.061041144661332$
Получившиеся ответы по формуле Гаусса при разном числе узлов:
1 узел $= -4.646574247039998; unc = 0,414466897621334$
2 узла $= -5.060482261902220; unc = 0,000558882759111867$
3 узла $= -5.061041144723653; unc = 6,23208151750987e-11$
4 узла $= -5.061041144661331; unc = 8,88178419700125e-16$
Точнее всего ответ при 4 узлах

**Задание 6.9.7** Для интегрального уравнения $y(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = f(x)$ составить таблицу значений решения с тремя верными значащими цифрами с постоянным шагом $h = (b-a)/10$, используя указанную в индивидуальном варианте квадратурную формулу. Построить график решения.

**Вариант 7**

$k(x,t) = 1/(5 + sin(x+t)); f(x) = cos(x); \lambda = 0.1; a = 0; b = \pi$

Квадратурная формула Гаусса с тремя узлами

**Решение:**

Заменим интеграл на соответствующую сумму, обозначим неизвестную функцию как $\xi$ и будем подставлять значения $x$ с шагом из задания в известные функции, кроме шага из задания добавляем значение из квадратурной формулы.

Получится система уравнений с неизвестными $\xi$, решим ее, потом выражаем неизвестную из изначального уравнения, заменив $\xi$ в сумме найденными.

Код решения на MATLAB

```
lam = 0.1;
ab = [0 pi];
f = @(x)(cos(x));
kk = @(x, t)(1./(5 + sin(x+t)));
h = (ab(2) - ab(1)) / 10;
t = [-0.77459666929954 0.00000000000000 0.77459666929954];
A = [0.55555555555556 0.88888888888888 0.55555555555556];
D = [];
g = [];
n = (ab(2) - ab(1))/h;
kronk = @(i, j)(i == j);
x = linspace(ab(1), ab(2), n);
xk = [(ab(2) + ab(1))/2 + (ab(2) - ab(1))/2*t(1) (ab(2) + ab(1))/2 + (ab(2) - ab(1))/2*t
for i = 1:numel(x)+3
    for j = 1:numel(x) + 3
D(i, j) = kronk(i, j) - kronk(i, 1)*lam*A(1)*kk(xk(j), xk(1)) - kronk(i, 2)*lam*A(2)*kk(

    end
    g(i) = f(xk(i));
end

ksi = D \ g';
kksi = ksi(1:3);
for i = 1:numel(x)
```

```
Ig(i) = lam*sum(A.*(kksi').*kk((ab(2) + ab(1))/2 + (ab(2) - ab(1))/2.*t, x(i))) + f(x(i)
end

plot(x, Ig)
```

Получившиеся значения:
0, 999465496931385
0,937968975027789
0,763191424706252
0,496175019432099
0,169144249189396
-0,178388701663386
-0,504430892988778
-0,769619286173458
-0,941979115302339
-1,00075665439690
И график