海浪谱简介

CPY

2023 年 1 月 26 日

1　海浪谱的基本知识

海面的功率谱是反映海浪的能量相对于组成海浪的各空间频率 ω 或各空间波数 k 的分布的, 用 $S(\omega)$ 或 $S(k)$ 表示，通常是归一化的：

$$\int_0^\infty S(\omega)d\omega = \int_0^\infty S(k)dk = \sigma^2 \tag{1}$$

其中 σ^2 是海面相对于参考面的均方高度。

海浪的方向谱是二维海浪谱，它比一维海浪频谱增加了海浪方向变量，故可以描述海浪能量的方向分布和海浪空间的一些统计特性。二维海浪谱的表示形式有 $S(\omega,\theta)$、$S(\vec{k},\theta)$、$S(k_x,k_y)$ 三种。

三种二维谱的转换：

$$S(\omega,\theta)d\omega d\theta = S(\vec{k},\theta)kdkd\theta = S(k_x,k_y)dk_xdk_y \tag{2}$$

2　海洋相关统计量与谱的关系

2.1　均方高度

高度起伏的均值为：

$$\overline{h} = \langle h(\vec{r})\rangle_s = \int_{-\infty}^\infty hp(h)dh \tag{3}$$

$\langle\,\rangle_s$ 表示沿着整个粗糙面取平均，选取合适粗糙面可以使得 $\overline{h}=0$

均方高定义式：

$$\sigma^2 = \langle h^2(\vec{r})\rangle_s = \int_{-\infty}^\infty h^2p(h)dh \tag{4}$$

与功率谱的关系为：

$$\sigma^2 = \int S(\vec{k})d\vec{k} \tag{5}$$

其实均方高就是高度概率密度函数 $p(h)$ 的方差，高度起伏均值是 $p(h)$ 的期望。

2.2 相关函数

相关函数表明随机表面上任意两点间的关联程度，它的定义为：

$$C_0(R) = \langle h(r)h(r+R)\rangle \tag{6}$$

归一化相关函数：

$$C(R) = \frac{C_0(R)}{\sigma^2} = \frac{\langle h(r)h(r+R)\rangle}{\sigma^2} \tag{7}$$

功率谱函数 $S(k)$ 是相关函数 $C_0(R)$ 的傅里叶变换：

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_0(R)e^{-jkR}dR \\ C_0(R) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{jkR}dk \end{aligned} \tag{8}$$

$C(R)$ 降为 1/e 时的 R 值称为**表面相关长度** l.

表面相关长度是描述随机粗糙面各统计参量中的一个最基本量之一，它提供了估计表面上两点相互独立的一种基准，即如果表面上两点在水平距离上相隔距离大于 l，那么该两点的高度值从统计意义上说是近似独立的。

2.3 均方根斜率

均方根斜率 (mean square slope,MSS) 定义为表面上每一点的斜率的均方根值，即：

$$\sigma_s = \sqrt{\langle(\frac{dh}{dx})^2\rangle} \tag{9}$$

它与海浪谱之间的关系为：

$$\sigma_s = \langle s^2\rangle^{1/2} = [\int k^2 S(k)dk]^{1/2} \tag{10}$$

2.4 两种常用的随机粗糙面

2.4.1 高斯型粗糙面

高斯型自相关函数：

$$C(x_1, x_2) = exp(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{l^2}) \tag{11}$$

功率谱密度：

$$W(k) = \frac{\sigma^2 l}{2\sqrt{\pi}} exp(-\frac{k^2 l^2}{4}) \tag{12}$$

自相关函数 n 次方的傅里叶变换 (常用于 IEM 模型):

$$W^{(n)}(k) = \frac{l^2}{2n} exp([-\frac{(kl)^2}{4n}]) \tag{13}$$

MSS 和均方根高度 (root mean square height,σ) 的关系：$\sigma_s = \sqrt{2}\sigma/l$

2.4.2 指数型粗糙面

$$C(x_1, x_2) = exp(-\frac{|x_1 - x_2|}{l}) \tag{14}$$

功率谱密度：

$$W(k) = \frac{\sigma^2 l}{\pi(1 + k^2 l^2)} \tag{15}$$

自相关函数 n 次方的傅里叶变换 (常用于 IEM 模型):

$$W^{(n)}(k) = (\frac{l}{n})^2 [1 + (\frac{kl}{n})^2]^{-1.5} \tag{16}$$

对于指数谱密度粗糙面，因通常表面边缘形状较尖锐，积分不可积，均方根斜率 MSS 通常不存在。