

Option Pricing in the local volatility model

**BOUQUET Marine, BUGAUT Léa, CAILLON Pierre,
MONTCHAMP Antoine, MOINE Théo**

Professeur : BUSCA Jérôme

Présenté au Pole Léonard de Vinci en vue de satisfaire partiellement aux exigences du diplôme d'ingénieur.



INGÉNIERIE FINANCIÈRE
ESILV

25 Février 2023

Table des matières

Page de couverture	
Table des matières	2
Remercements	3
1 Qu'est-ce qu'une option ?	1
1.1 Types d'options	1
1.2 Démonstration	2
2 Partie I : Black-Scholes	5
2.1 Modèle de Black-Scholes	6
2.2 Hypothèse de probabilité risque neutre	6
2.3 Borne d'arbitrage	7
2.4 Démonstrations	8
2.4.1 Borne d'arbitrage	8
2.4.2 Parité Call-Put	12
2.4.3 Équation différentielle stochastique	12
2.4.4 Black-Scholes	13
2.5 Limites du modèle	14
3 Partie 2 : Dupire	15
3.1 Volatilité implicite	15
3.2 Pourquoi ne pas utiliser une volatilité constante ?	15
3.3 Extensions du modèle : Modèle de Volatilité locale	17
3.3.1 Démonstration	18
3.4 Méthode des différences finies : Équation de Black-Scholes	20
3.5 Méthode de Crank Nicolson : Équation de Dupire	24
3.6 Critique du modèle de Dupire	26

Remerciements

L'achèvement de ce travail mené sur plusieurs semaines nous procure une grande satisfaction. Il est l'occasion de se remémorer les différentes embûches qu'il a fallu surmonter mais surtout les personnes qui nous ont permis d'en arriver là.

Nous tenons donc à exprimer toute notre reconnaissance à Messieurs BUSCA Jérôme, GARCIN Matthieu pour nous avoir permis d'avoir un sujet intéressant tout le long de cette année. Qu'ils soient assurés de notre profonde gratitude.

Nous tenons également à remercier Madame BRANCHET Bérangère , Professeur à l'École Supérieure d'Ingénierie Léonard de Vinci (ESILV) du Laboratoire pour avoir accepté d'être rapporteur de nos travaux et pour ses observations qui nous ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Nous tenons à lui exprimer nos remerciements pour l'honneur qu'elle nous fait en participant à ce jury.

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'une option ?

Une option est un produit financier dit « dérivé » qui représente un contrat entre deux parties. Ce contrat donne à l'acheteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix déterminé K , appelé prix d'exercice, au plus tard à une date déterminée T , appelée date d'expiration.

Le vendeur d'une option est tenu de respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option.

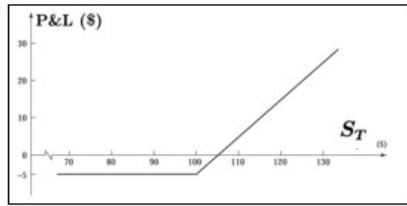
1.1 Types d'options

Il existe deux types d'options :

- L'option d'achat (call) qui donne au détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à une certaine date pour un certain prix.

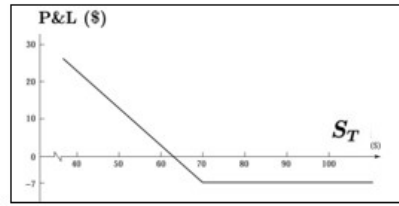
- L'option de vente (put) qui donne au détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à une certaine date et à un certain prix.

P&L long Call (Option d'achat)



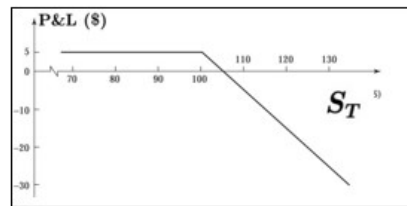
Prix de l'option : $C_0=5\$$
 Strike : 100\$
 Payoff : $(S_T - K)^+ - C_0$

P&L long Put (Option de vente)



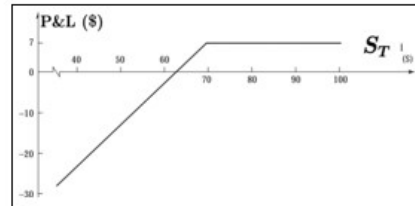
Prix de l'option : $C_0=7\$$
 Strike : 70\$
 Profit : $(K - S_T)^+ - P_0$

P&L short Call (Option de d'achat)



Prix de l'option : $C_0=5\$$
 Strike : 100\$
 Profit : $C_0 - (S_T - K)^+$

P&L short Put (Option de vente)



Prix de l'option : $C_0=7\$$
 Strike : 70\$
 Profit : $P_0 - (K - S_T)^+$

Le payoff d'une option est la somme d'argent que le détenteur de l'option recevra à l'exercice de celle-ci.

$$\text{Call} : (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

$$\text{Put} : (K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

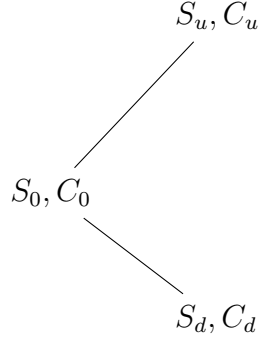
Le prix théorique d'une option est caractérisé par son payoff. Il est donné par l'espérance de probabilité risque neutre du payoff actualisé. Cela signifie que le prix de l'option ne prend en compte que les incertitudes liées au prix futur de l'actif sous-jacent et exclut tous les autres facteurs de risque tels que les taux d'intérêt ou les fluctuations du marché.

$$H_0 = E_Q[\text{Payoff} \times e^{-rT}]$$

1.2 Démonstration

Prix théorique d'une option

Cas à 1 période (temps discret) : long Δ actions S , short 1 call



Avec : $S_u = S_0 \times u$, $S_d = S_0 \times d$, $C_u = (S_u - K)_+$, $C_d = (S_d - K)_+$

Portefeuille sans risque $\Leftrightarrow S_0 u \Delta - C_u = S_0 d \Delta - C_d$

Donc, $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}$

Comme la valeur du portefeuille est la même pour « up » et « down ». Le portefeuille à $t=T$ est un CF. A $t=0$, la valeur du portefeuille est la PV du CF :

$$S_0 \Delta - C_0 = (S_0 u \Delta - C_u) e^{-rT}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C_0 = S_0 \Delta (1 - u e^{-rT}) + C_u e^{-rT}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C_0 = S_0 \left(\frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} \right) (1 - u e^{-rT}) + C_u e^{-rT}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C_0 = \frac{C_u(1 - d e^{-rT}) + C_d(u e^{-rT} - 1)}{u - d}$$

On pose : $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$

On obtient : $C_0 = e^{-rT} (p C_u + (1 - p) C_d)$

Autrement, on peut l'écrire comme $\boxed{C_0 = e^{-rT} E[(S_T - K)_+]}$

Cas à n périodes : $T = n \Delta t$ (Arbre binomiale à n périodes) On va discrétiser le sous-jacent de tel sorte S_0, \dots, S_n , avec $S_k = S_0 u^k d^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$

On peut alors écrire C_0 tel que comme pour 2 périodes on puisse facilement écrire :

$$C_0 = e^{-Nn\Delta t} \sum_{k=0}^N P(S_T = S_k) \times C(S_k, t = T) = e^{-rT} E[C(S_T, T)] = \boxed{e^{-rT} E[\textit{Payoff}]}$$

La différence entre une option européenne et une option américaine est qu'une option européenne ne peut être exercée qu'à la date d'expiration, tandis qu'une option américaine peut être exercée à tout moment avant la date d'expiration. Dans cette section, nous nous concentrerons uniquement sur les options européennes.

Chapitre 2

Partie I : Black-Scholes

Développé en 1973 par Fischer Black, Robert Merton et Myron Scholes, le modèle Black-Scholes a été la première méthode mathématique largement utilisée pour calculer la valeur théorique des prix des options **de type européen** (option qui peut être exercée seulement à maturité T)

Dans le modèle Black-Scholes-Morton, l'action suit un processus stochastique en temps continu ; par opposition au modèle Cox Ross-Rubinstein qui suit un processus stochastique en temps discret.

Ce modèle repose sur les **hypothèses** suivantes :

- Pas d'opportunités d'arbitrage (aucun moyen de réaliser un profit sans risque)
- Marchés aléatoires (le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$S_t = S_0 \times e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}, \forall t \in [0, T]$$

- Pas de coûts de transactions
- Taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant
- Volatilité du prix de l'action connue à l'avance et constante
- Sous-jacents parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100e d'action)
- Action qui ne verse pas de dividende
- Temps continu
- Ventes à découvert autorisées
- L'option est européenne, elle ne peut être exercée qu'à l'échéance

2.1 Modèle de Black-Scholes

Le prix théorique d'une option d'achat (call), qui donne le droit mais non l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent à une certaine date T pour un certain prix K , est caractérisé par son payoff :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$$

et est donné par : $C_0 = S_0.N(d_1) - Ke^{-rT}.N(d_2)$

De plus, le prix théorique d'une option de vente (put), qui donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent à une certaine date T pour un certain prix K , est caractérisé par son payoff :

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$$

et est donné par : $P_0 = Ke^{-rT}.N(-d_2) - S_0.N(-d_1)$

avec $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

t : Temps en années

K : Prix d'exercice (strike)

S_t : Cours actuel du sous-jacent à l'instant t

r : Taux d'intérêt sans risque annualisé

σ : Volatilité du prix de l'action

T : Maturité (fin de la durée de vie de l'option) exprimé en années

N : Fonction de répartition de la loi normal $N(0,1)$

2.2 Hypothèse de probabilité risque neutre

Dans le modèle de Black-Scholes, nous supposons que l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique et utilise une mesure de probabilité risque neutre pour mesurer le prix des options.

Cela signifie que les rendements des actifs risqués sont les mêmes que les rendements des actifs non-risqués. Sinon il y a opportunité d'arbitrage pour les investisseurs.

Les investisseurs sont donc indifférents quant au fait de détenir un actif risqué ou non.

Cette hypothèse donne la possibilité d'utiliser un taux sans risque lors du pricing de l'option.

2.3 Borne d'arbitrage

Les bornes d'arbitrages se réfèrent à la limite inférieure et supérieure de la valeur d'une option.

Quand la volatilité tend vers 0, le prix du Call/Put tend vers sa borne inférieure. A contrario quand sigma tend vers ∞ , le prix tend vers sa borne supérieure.

Pour simplifier le raisonnement, nous pouvons réécrire :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + \ln(e^{rT}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} - \sigma\sqrt{T} = \ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

En faisant tendre σ vers 0 :

Cas $S_0 > Ke^{-rT}$: $\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right) > 0$:

- $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1 = +\infty$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_2 = +\infty$
- $\lim_{d_1 \rightarrow \infty} N(d_1) = \lim_{d_2 \rightarrow \infty} N(d_2) = 1$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow 0} C_0 = S_0 - Ke^{-rT}$
- $\lim_{d_1 \rightarrow \infty} N(-d_1) = \lim_{d_2 \rightarrow \infty} N(-d_2) = 0$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow 0} P_0 = 0$

Cas $S_0 < Ke^{-rT}$: $\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right) < 0$:

- $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_1 = -\infty$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_2 = -\infty$
- $\lim_{d_1 \rightarrow -\infty} N(d_1) = \lim_{d_2 \rightarrow -\infty} N(d_2) = 0$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow 0} C_0 = 0$
- $\lim_{d_1 \rightarrow -\infty} N(-d_1) = \lim_{d_2 \rightarrow -\infty} N(-d_2) = 1$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow 0} P_0 = Ke^{-rT} - S_0$

En faisant tendre σ vers ∞ :

- $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_1 = +\infty$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_2 = -\infty$
- $\lim_{d_1 \rightarrow \infty} N(d_1) = 1$, $\lim_{d_2 \rightarrow -\infty} N(d_2) = 0$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_0 = S_0$
- $\lim_{d_1 \rightarrow \infty} N(-d_1) = 0$, $\lim_{d_2 \rightarrow -\infty} N(-d_2) = 1$, donc $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} P_0 = Ke^{-rT}$

Pour un Call : $(S_0 - Ke^{-rT})_+ \leq C_0 \leq S_0$

Pour un Put : $(Ke^{-rT} - S_0)_+ \leq P_0 \leq Ke^{-rT}$

2.4 Démonstrations

2.4.1 Borne d'arbitrage

Call

- **Montrons que :** $C_0 \leq S_0$

Par un raisonnement par l'absurde on suppose que : $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ C_0 > S_0 \end{cases}$

On se place dans le cadre d'un portefeuille auto-financé tel qu'on a : $\begin{cases} \text{Short 1 Call} \\ \text{Long 1 Stock} \end{cases}$

	Compte titre	Compte Banque	Valeur Portefeuille
t = 0	$-C_0 + S_0$	$C_0 - S_0$	0
t = T	\emptyset	$S_T - (S_T - K)_+ + (C_0 - S_0)e^{rT}$	V_T

$$V_T = S_T - (S_T - K)_+ + (C_0 - S_0)e^{rT}$$

1^{er} cas : $S_T \geq K$

$$V_T = K + (C_0 - S_0)e^{rT} > (C_0 - S_0)e^{rT}$$

2^e cas : $S_T < K$

$$V_T = S_T + (C_0 - S_0)e^{rT} > (C_0 - S_0)e^{rT}$$

Dans les 2 cas on a : $V_T > (C_0 - S_0)e^{rT} > 0$

Donc le portefeuille auto-financé a une valeur $P = 0$ à $t = 0$ et une valeur $P > 0$ à $t = T$ avec probabilité 1 donc il y a opportunité d'arbitrage. C'est absurde par hypothèse donc $C_0 \leq S_0$.

- **Montrons que :** $(S_0 - Ke^{-rT})_+ \leq C_0$

- **On montre d'abord que** $C_0 > 0$

Par un raisonnement par l'absurde on suppose que : $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ C_0 < 0 \end{cases}$

On se place dans le cadre d'un portefeuille auto-financé tel qu'on a : $\begin{cases} \text{Long 1 Call} \end{cases}$

	Compte titre	Compte Banque	Valeur Portefeuille
t = 0	$+C_0$	$-C_0$	0
t = T	\emptyset	$(S_T - K)_+ - C_0e^{rT}$	V_T

$$\text{Or, } (S_T - K)_+ - C_0e^{rT} \geq -C_0e^{rT} > 0$$

A partir d'un investissement nul on peut faire un gain positif, il y a donc opportunité d'arbitrage ce qui est absurde donc $C_0 > 0$

- **On montre maintenant que** $S_0 - Ke^{-rT} \leq C_0$

Par un raisonnement par l'absurde on suppose que : $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ C_0 < (S_0 - Ke^{-rT}) \end{cases}$

Est équivalent à $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ f_0 - C_0 > 0 \end{cases}$

On se place dans le cadre d'un portefeuille auto-financé tel qu'on a : $\begin{cases} \text{Short 1 Forward} \\ \text{Long 1 Call} \end{cases}$

	Compte titre	Compte Banque	Valeur Portefeuille
t = 0	$-f_0 + C_0$	$f_0 - C_0$	0
t = T	\emptyset	$(f_0 - C_0)e^{rT} + (S_T - K)_+ + (K - S_T)$	V_T

$$V_T = (f_0 - C_0)e^{rT} + (S_T - K)_+ + (K - S_T)$$

1^{er} cas : $S_T \geq K$

$$V_T = (f_0 - C_0)e^{rT} > 0$$

2^e cas : $S_T < K$

$$V_T = (f_0 - C_0)e^{rT} + K - S_T > 0$$

Dans les 2 cas on a pour un investissement nul, un gain positif avec probabilité 1 donc il y a opportunité d'arbitrage, ce qui est absurde donc $S_0 - Ke^{-rT} \leq C_0$

Put

- **Montrons que** : $P_0 \leq Ke^{-rT}$

Par un raisonnement par l'absurde on suppose que : $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ Ke^{-rT} < P_0 \end{cases}$

Est équivalent à $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ P_0 - Ke^{-rT} > 0 \end{cases}$

On se place dans le cadre d'un portefeuille auto-financé tel qu'on a : $\begin{cases} \text{Short 1 Put} \\ \text{Long 1 ZCB (zero coupon bond)} \end{cases}$

	Compte titre	Compte Banque	Valeur Portefeuille
t = 0	$-P_0 + Ke^{-rT}$	$P_0 - Ke^{-rT}$	0
t = T	0	$(P_0 - Ke^{-rT})e^{rT} - (K - S_T)_+ + K$	V_T

$$V_T = (P_0 - Ke^{-rT})e^{rT} - (K - S_T)_+ + K$$

1^{er} cas : $S_T \geq K$

$$V_T = (P_0 - Ke^{-rT})e^{rT} + K > 0$$

2^e cas : $S_T < K$

$$V_T = (P_0 - Ke^{-rT})e^{rT} + S_T > 0$$

Dans les 2 cas on a pour un investissement nul, un gain positif avec probabilité 1 donc il y a opportunité d'arbitrage, ce qui est absurde donc $P_0 \leq Ke^{-rT}$

• **On montre maintenant que** $(Ke^{-rT} - S_0)_+ \leq P_0$

A l'aide d'un raisonnement analogue au précédent avec les Call on montre que : $P_0 > 0$

Par un raisonnement par l'absurde on suppose que : $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ (Ke^{-rT} - S_0) > P_0 \end{cases}$

Est équivalent à $\begin{cases} \text{Hypothèse d'AOP} \\ -P_0 - f_0 > 0 \end{cases}$

On se place dans le cadre d'un portefeuille auto-financé tel qu'on a : $\begin{cases} \text{Long 1 Forward} \\ \text{Long 1 Put} \end{cases}$

	Compte titre	Compte Banque	Valeur Portefeuille
t = 0	$f_0 + P_0$	$-f_0 - P_0$	0
t = T	\emptyset	$(-f_0 - P_0)e^{rT} + (K - S_T)_+ + (S_T - K)$	V_T

$$V_T = (-f_0 - P_0)e^{rT} + (K - S_T)_+ + (S_T - K)$$

1^{er} cas : $S_T \geq K$

$$V_T = (-f_0 - P_0)e^{rT} + S_T - K > 0$$

2^e cas : $S_T < K$

$$V_T = (-f_0 - P_0)e^{rT} > 0$$

Dans les 2 cas on a pour un investissement nul, un gain positif avec probabilité 1 donc il y a opportunité d'arbitrage, ce qui est absurde donc $(Ke^{-rT} - S_0)_+ \leq P_0$

Remarque : Indépendamment de tout model, la violation d'une de ces égalités peut entraîner une opportunité d'arbitrage.

Le prix d'une option par Black Scholes est une fonction strictement croissante de la volatilité car $\text{Vega} \geq 0$. Ce qui signifie qu'à mesure que la volatilité augmente, le prix de l'option augmente également. (formule)

Pour rappel Vega représente la sensibilité de l'option par rapport à la volatilité du sous-jacent : $v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-qT} > 0$

Le pricing de l'option par Black Scholes va donc parcourir un intervalle de tous les prix possible 1 seule et unique fois quand σ varie (σ est une fonction croissante).

Ainsi tout prix de marché est associé à une unique valeur de σ : que l'on appelle volatilité implicite.

2.4.2 Parité Call-Put

Le prix d'une option de vente (put) peut également être exprimé en fonction d'une option d'achat (call), de l'actif sous-jacent et du prix d'exercice K actualisé :

$$\text{Call-Put Parity : } C_t - P_t = S_t - K.e^{-r(T-t)}$$

On démontre cette égalité à maturité T . Soit $C_T = (S_T - K)_+$ le payoff d'un call européen à maturité T .

Et $P_T = (K - S_T)_+$ le payoff d'un put européen à maturité T .

$$\text{Cas 1 : } S_T > K : C_T = (S_T - K) \quad \text{et} \quad P_T = 0$$

$$\text{Cas 2 : } K > S_T : C_T = 0 \quad \text{et} \quad P_T = (S_T - K)$$

À maturité T : on a $e^{-r(T-T)} = e^0 = 1$

Donc dans les 2 cas : $C_T - P_T = S_T - K.1 = (S_T - K)$

Sous la NOA (pas d'opportunité d'arbitrage) : cette égalité est bonne à tout instant t .

Ainsi : $C_t - P_t = S_t - K.e^{-r(T-t)}$

2.4.3 Équation différentielle stochastique

Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé en finance comme le plus simple modèle d'évolution de cours de bourse. Il s'agit de la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = d(\log(S_t))$$

La formule d'Itô s'écrit : $d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(dX_t)^2$
Avec $dt^2 = 0$, $dW_t^2 = dt$ et $dt.dW_t = 0$

Ainsi :

$$d(\log(S_t)) = 0 + \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}(dS_t)^2$$

$$d(\log(S_t)) = \frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t)S_t - \frac{1}{2S_t^2}(\mu dt + \sigma dW_t)^2 S_t^2$$

$$d(\log(S_t)) = \frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t)S_t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt$$

$$d(\log(S_t)) = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

En intégrant :

$$\log(S_t) - \log(S_0) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

$$\boxed{S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}}$$

2.4.4 Black-Scholes

- Payoff du call : $(S_T - K)_+ = \max(S_T - K; 0)$
- $C = E[\text{Payoff} \times e^{-rT}]$

$$S_t \sim \mathcal{LN}(m, s) \text{ avec } \begin{cases} m = \ln(S_0) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T \\ s = \sigma^2 T \end{cases}$$

$$f_{St}(S) = \frac{1}{sS\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(\ln(S)-m)^2}{2s^2}}$$

$$C = e^{-rT} \int \max(S_T - K; 0) f_{St}(S) dS$$

$$C = e^{-rT} \int_K^{+\infty} (S - K) f_{St}(S) dS$$

$$C = e^{-rT} \int_K^{+\infty} S f_{St}(S) dS - K \int_K^{+\infty} f_{St}(S) dS$$

$$C = e^{-rT} \int_K^{+\infty} \frac{1}{sS\sqrt{2\pi}} * S * e^{-\frac{(\ln(S)-m)^2}{2s^2}} dS - K \int_K^{+\infty} \frac{1}{sS\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(\ln(S)-m)^2}{2s^2}} dS$$

Changement de variable : $\begin{cases} y = \frac{\ln(S)-m}{s} \Rightarrow S = e^{sy+m} \\ dy = \frac{dS}{sS} \Rightarrow dS = se^{sy+m} dy \end{cases}$

$$C = e^{-rT} \left(\int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} * se^{sy+m} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{sS\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} se^{sy+m} dy \right)$$

$$C = e^{-rT} \left(\int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + \frac{2sy+s^2-s^2}{2} + m} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

$$C = e^{-rT} \left(e^{m-\frac{s^2}{2}} \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+s)^2}{2}} dy - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

On pose : $\begin{cases} u = y + s \\ du = dy \end{cases}$

$$C = e^{-rT} \left(e^{m-\frac{s^2}{2}} \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}-s}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

$$C = e^{\ln(S_0)-qT} \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2)$$

Ainsi :

$$C = S_0 e^{-qT} \mathcal{N}(-d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{cases}$$

2.5 Limites du modèle

Ces hypothèses ne sont pas nécessairement vraies dans le monde réel, et le modèle ne reflète pas toujours avec précision le prix réel d'une option.

Premièrement, le modèle Black-Scholes n'est utilisé que pour évaluer les options européennes et ne tient pas compte du fait que les options américaines pourraient être exercées avant la date d'expiration.

De plus, le modèle suppose que les dividendes, la volatilité et les taux sans risque restent constants pendant la durée de vie de l'option, cela ne reflète pas le marché réel. En pratique, la réalité montre que la volatilité dépend du prix d'exercice et de la maturité.

Ne pas tenir compte des taxes, des commissions, peut également conduire à des évaluations qui s'écartent des résultats réels.

Chapitre 3

Partie 2 : Dupire

3.1 Volatilité implicite

La volatilité implicite est un paramètre essentiel pour déterminer la « fair value » d'une option. N'étant pas observable, elle doit être déterminée par itération en utilisant la formule de Black-Scholes.

On la préfère à la volatilité historique qui est basée sur l'évolution passée du prix du sous-jacent.

La volatilité implicite est la volatilité de l'actif sous-jacent qui rendrait la valeur théorique de l'option calculée avec Black-Scholes égale au prix de l'option observé sur le marché. Autrement dit elle peut être considérée comme une estimation de la volatilité future de l'actif sous-jacent.

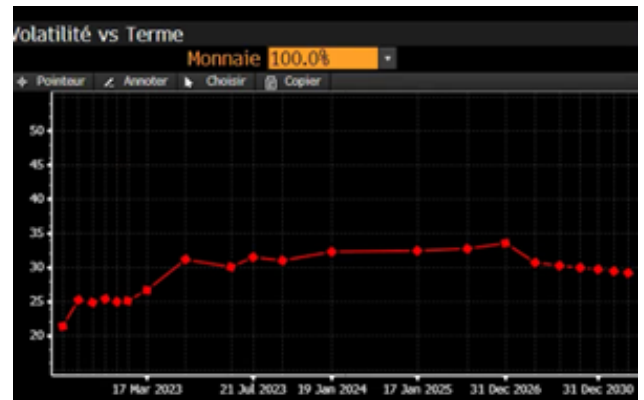
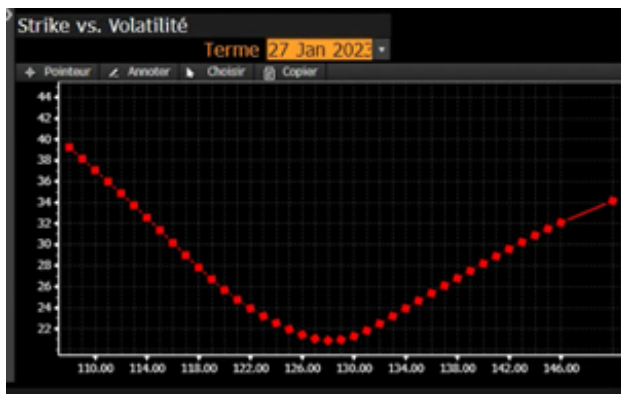
L'avantage le plus important de la volatilité implicite est qu'elle peut être une estimation plus précise de la volatilité future.

3.2 Pourquoi ne pas utiliser une volatilité constante ?

Tout simplement car cela ne reflète pas le marché réel. En pratique, lorsque l'on estime la volatilité implicite pour différents prix d'exercice, on remarque que celle-ci est en forme de « U » : c'est le phénomène connu sous le nom de "smile de volatilité".

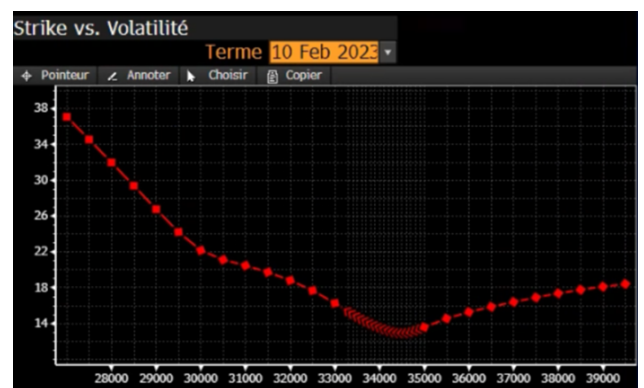
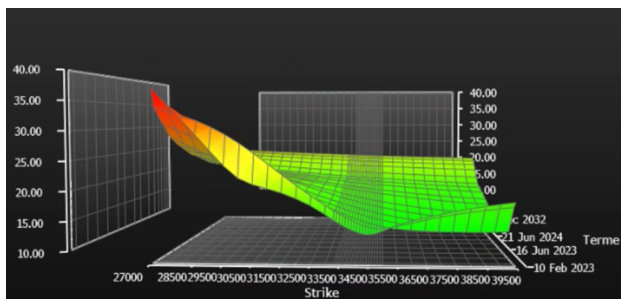
Ce phénomène est observable sur Bloomberg pour une multitude d'options

Nike US Equity :



Remarque : la maturité de l'option a également un effet important sur le « smile de volatilité »

Dow Jones : (représentation 3D)



3.3 Extensions du modèle : Modèle de Volatilité locale

Dans le célèbre modèle de Black-Scholes, la dynamique du cours de l'action est modélisée comme un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.1)$$

L'existence d'un smile de volatilité (vu précédemment) a forcé les quants à passer du simple modèle de Black Scholes à un modèle plus sophistiqué qui permet d'être en adéquation avec les données que l'on trouve sur le marché.

Le modèle de volatilité locale proposé par Dupire est une généralisation du modèle de Black-Scholes, où la volatilité d'un sous-jacent varie avec le temps :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dW_t \quad (3.2)$$

Dans le modèle de volatilité local le prix d'une option est déterminé comme solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black Scholes avec $\sigma(t, S)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S) S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \\ C(t = T, S; T, K) = (S - K)_+ \end{cases}$$

Dupire déclare qu'il existe une autre façon de voir le pricing en fixant K et T et en faisant varier t et S .

Par dualité, quand $S = K$ et $t = T$, on a $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial T}$ et on retrouve bien l'équation de Dupire :

$$\begin{cases} \sigma^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + [(r(T) - q(T))K \frac{\partial C}{\partial K} + q(T)C]}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \\ C(t, S; t = T, K) = (S - K)_+ \end{cases}$$

Rmq : La volatilité est le seul paramètre de Black-Scholes qui n'est pas directement observable sur le marché.

3.3.1 Démonstration

Fokker-Planck equation : $f(S_t, t) = \text{pdf de } S_t$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}(\mu S f(S, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 f(S, t))$$

- discount factor $D(t, T) = e^{\left(-\int_t^T r(x)dx\right)}$

$$C = D(t, T) E\left[(S_t - K)^+\right]$$

$$C = D(t, T) \int_k^{+\infty} (S_t - K) f(S, T) dS$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial D(t, T)}{\partial T} \int_k^{+\infty} (S_t - k) f(S, T) dS + D(t, T) \int_K^{+\infty} (S_t - k) \frac{\partial f(S, T)}{\partial T} dS$$

$$\text{Or : } \frac{\partial D(t, T)}{\partial T} = -r(T) D(t, T) e^{\left(-\int_t^T r(x)dx\right)} = -r(T) D(t, T)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial T} = -r(T) C + D(t, T) \int_K^{+\infty} (S_t - K) \frac{\partial f(S, T)}{\partial T} dS$$

Fokker-Planck :

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r(T) C = D(t, T) \int_k^{+\infty} (S_t - K) \left[\underbrace{-\frac{\partial}{\partial S}(\mu S f(S, T))}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 f(S, T))}_{I_2} \right] dS$$

$$I_1 = \int_k^{+\infty} (S - k) \left(-\frac{\partial}{\partial S}(\mu S f(S, T)) \right) dS$$

$$IPP : \begin{cases} u'(S) = -\frac{\partial}{\partial S}(S f(S, T)) \\ v(S) = S - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(S) = -S f(S, T) \\ v'(S) = 1 \end{cases}$$

$$I_1 = \mu \left([-(S - K) \cdot S f(S, T)]_K^{+\infty} + \int_K^{+\infty} S f(S, T) dS \right)$$

$$I_1 = \mu \int_K^{+\infty} S f(S, T) dS$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_K^{+\infty} (S - k) \cdot \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2 f(S, T)) dS$$

$$\begin{cases} u'(S) = \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S^2 f(S, T)) \\ v(S) = S - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(S) = \frac{\partial}{\partial S} (S^2 f(S, T)) \\ v'(S) = 1 \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2} \left(\left[(S - k) \frac{\partial}{\partial S} (S^2 f(S, T)) \right]_k^{+\infty} - \int_k^{+\infty} \frac{\partial}{\partial S} (S^2 f(S, T)) dS \right)$$

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2} \left(-[S^2 f(S, T)]_k^{+\infty} \right)$$

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot K^2 f(K, T)$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r(T)C = D(t, D) (I_1 + I_2)$$

Calcul de I_1 :

$$\frac{C}{\partial(t, T)} = \int_K^{+\infty} (S - K) f(S, T) dS = \int_K^{+\infty} S f(S, T) dS - K \int_K^{+\infty} f(S, T) dS$$

$$\Rightarrow \int_K^{+\infty} S f(S, T) dS = \frac{C}{\partial(t, T)} + K \int_K^{+\infty} f(S, T) dS$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = D(t, T) \int_K^{+\infty} \frac{\partial}{\partial K} (S - K) f(S, T) dS$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -D(t, T) \int_K^{+\infty} f(S, T) dS$$

$$\Rightarrow \int_K^{+\infty} S f(S, T) dS = \frac{C}{D(t, T)} - \frac{1}{D(t, T)} \cdot \frac{\partial C}{\partial K} \cdot K$$

Donc :

$$I_1 = \frac{\mu}{D(t, T)} \left(C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right)$$

Calcul de I_2 :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = -D(t, T) \cdot f(K, T)$$

Donc :

$$I_2 = -\frac{1}{D(t, T)} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \cdot \frac{\sigma^2 K^2}{2}.$$

Equation de Dupire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r(T)C = \mu C - \mu K \frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\sigma^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

$$\sigma^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + r(T)C - \mu(T)C - \mu(T)K \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

$$\mu(T) = r(T) - q(T) \Rightarrow \boxed{\sigma^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + q(T)C - (r(T) - q(T))K \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

3.4 Méthode des différences finies : Équation de Black-Scholes

C'est une méthode de résolution d'équations différentielles qui consiste à approximer les dérivées par les différences finies. L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S)S^2\frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} - rC(t,S) = 0 \\ C(t=T, S; T, K) = (S_T - K)^+ \end{cases}$$

Avec $C(t, S)$ la valeur d'une option(call) européenne, en fonction du prix de l'action S et du temps t , r est le taux d'intérêt sans risque, et σ est la volatilité de l'action.

Afin de simplifier les calculs, il est préférable d'appliquer la fonction log au sous-jacent S . Ce changement correspond à :

$$X = \log(S/K) : \text{log moneyness} \Leftrightarrow S = Ke^X$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C(t,x)}{\partial t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial C(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C(t,x)}{\partial x^2} - rC(t,x) = 0 \\ C(t=T, S; T, K) = K(e^X - 1)^+ \end{cases}$$

En calculant $\tilde{C} = C/K$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{C}(t,x)}{\partial t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial \tilde{C}(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}(t,x)}{\partial x^2} - r\tilde{C}(t,x) = 0 \\ \tilde{C}(t=T, S; T, K) = (e^X - 1)^+ \end{cases}$$

Approximations aux différences finies :

La méthode des différences finies est une technique pour obtenir des solutions numériques d'équations aux dérivées partielles. L'idée sous-jacente de la méthode aux différences finies est de remplacer les dérivées partielles présentes dans l'EDP par des approximations aux différences finies. Si nous supposons qu'une fonction est continue, nous pouvons utiliser le développement limité de la formule de Taylor Young près du point d'intérêt :

Forward difference :

$$\tilde{C}(t + \Delta t, x) = \tilde{C}(t, x) + \frac{\partial \tilde{C}(t, x)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{C}(t, x)}{\partial t} \approx \frac{\tilde{C}(t + \Delta t, x) - \tilde{C}(t, x)}{\Delta t}$$

Backward difference :

$$\tilde{C}(t - \Delta t, x) = \tilde{C}(t, x) - \frac{\partial \tilde{C}(t, x)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{C}(t, x)}{\partial t} \approx \frac{\tilde{C}(t, x) - \tilde{C}(t - \Delta t, x)}{\Delta t}$$

Central difference :

$$\frac{\partial \tilde{C}(t, x)}{\partial t} = \frac{\tilde{C}(t + \Delta t, x) - \tilde{C}(t - \Delta t, x)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

De même en utilisant taylor à l'ordre 2 on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\tilde{C}(t, x + \Delta x) + \tilde{C}(t, x - \Delta x) - 2\tilde{C}(t, x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{C}(t + \Delta t, x) - \tilde{C}(t, x)}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) * \frac{\tilde{C}(t, x + \Delta x) - \tilde{C}(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} \\ & + \frac{1}{2}\sigma^2 * \left(\frac{\tilde{C}(t, x + \Delta x) + \tilde{C}(t, x - \Delta x) - 2\tilde{C}(t, x)}{\Delta x^2}\right) - r\tilde{C}(t, x) = 0 \end{aligned}$$

On peut définir les incréments liés au temps :

Pour $n = 0, 1, \dots, N$: $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$ on obtient donc : $t_n = t_0 + n\Delta t$.

De même, les incréments liés au sous-jacent :

Pour $i = 0, 1, \dots, M$: $\Delta x = \frac{A_2 - A_1}{M}$ donc $x_i = A_1 + i\Delta x$

On peut donc exprimer le prix de notre Call de manière discrétisé :

$$\tilde{C}(t_0 + n\Delta t, A_1 + i\Delta x) = \tilde{C}_i^n$$

Notre équation de pricing peut donc s'écrire comme ça :

$$\frac{(\tilde{C}_i^{n+1} - \tilde{C}_i^n)}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) * \frac{(\tilde{C}_{i+1}^n - \tilde{C}_{i-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{(\tilde{C}_{i+1}^n + \tilde{C}_{i-1}^n - 2\tilde{C}_i^n)}{\Delta x^2} - r\tilde{C}_i^n = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i^{n+1} &= \tilde{C}_{i-1}^n \left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \tilde{C}_i^n \left(1 + r\Delta t + \sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\ &+ \tilde{C}_{i+1}^n \left(- \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_i^{m+1} = a_i \tilde{C}_{i-1}^m + b_i \tilde{C}_i^m + c_i \tilde{C}_{i+1}^m$$

On obtient donc le système suivant qu'on peut implémenter sous python :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1^{m+1} \\ \tilde{C}_2^{m+1} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{M-1}^{m+1} \\ \tilde{C}_M^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ddots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_M & b_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^n \\ \tilde{C}_2^n \\ \vdots \\ \tilde{C}_{M-1}^n \\ \tilde{C}_M^n \end{pmatrix}$$

Ce système matriciel donne la relation entre les prix de call entre 2 instants et M sous-jacent différents

Condition en espace :

$$\frac{\partial(\text{Payoff})}{\partial x} = \frac{\partial(e^x - 1)}{\partial x} = e^x$$

$$x_{min} : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$x_{max} : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \text{Max}(e^x)$$

Condition au bords :

Pour trouver les conditions aux bords on résout l'équation de pricing (1) avec $i=1$ (bord gauche) et $i=M$ (bord droit)

Bord gauche : $i = 1$

$$\frac{\tilde{C}_1^{n+1} - \tilde{C}_1^n}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tilde{C}_2^n - \tilde{C}_0^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\tilde{C}_2^n + \tilde{C}_0^n - 2\tilde{C}_1^n}{\Delta x^2} - r\tilde{C}_1^n = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} : \tilde{C}_1^n = \tilde{C}_0^n$$

$$\text{Ainsi} : \frac{\tilde{C}_1^{n+1} - \tilde{C}_1^n}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tilde{C}_2^n - \tilde{C}_1^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\tilde{C}_2^n - \tilde{C}_1^n}{\Delta x^2} - r\tilde{C}_1^n = 0$$

$$\tilde{C}_1^{n+1} = - \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\Delta t (\tilde{C}_2^n - \tilde{C}_1^n)}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta t (\tilde{C}_2^n - \tilde{C}_1^n)}{\Delta x^2} + \Delta t \cdot r\tilde{C}_1^n + \tilde{C}_1^n$$

$$\tilde{C}_1^{n+1} = \tilde{C}_2^n \left(- \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\Delta t}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \tilde{C}_1^n \left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \Delta t \cdot r + 1 \right)$$

$$\text{Or} : \tilde{C}_1^{n+1} = \dot{a}_1 \tilde{C}_0^n + \dot{b}_1 \tilde{C}_1^n + \dot{c}_1 \tilde{C}_2^n$$

$$\text{Donc par identification} : \dot{b}_1 = b_1 + a_1$$

Bord droit : $i=M$

$$\frac{\tilde{C}_M^{n+1} - \tilde{C}_M^n}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tilde{C}_{M+1}^n - \tilde{C}_{M-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\tilde{C}_{M+1}^n + \tilde{C}_{M-1}^n - 2\tilde{C}_M^n}{\Delta x^2} - r\tilde{C}_M^n = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = e^{x_{\max}} \quad \text{donc} : \frac{\tilde{C}_{M+1}^n - \tilde{C}_{M-1}^n}{2\Delta x} = e^{x_{\max}}, \tilde{C}_{M+1}^n = \tilde{C}_M^n + e^{x_{\max}} \Delta x \quad \text{et} \quad \tilde{C}_{M-1}^n = \tilde{C}_M^n - e^{x_{\max}} \Delta x$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\tilde{C}_M^{n+1} - \tilde{C}_M^n}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) e^x + \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2}(e^x \Delta x + \tilde{C}_M^n) + \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2}(\tilde{C}_{M-1}^n - 2\tilde{C}_M^n) - r\tilde{C}_M^n = 0$$

$$\tilde{C}_M^{n+1} = \left(1 + r\Delta t + \sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) C_M^n - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{M-1}^n - \left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\sigma^2}{2\Delta x}\right) \Delta t e^{x \max}$$

$$\text{Or : } \dot{\tilde{C}}_M^{n+1} = \dot{a}_M \tilde{C}_{M-1}^n + \dot{b}_M \tilde{C}_M^n + \dot{c}_M \tilde{C}_{M+1}^n$$

Donc :

$$\dot{b}_M = b_M + c_M + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

$$\dot{a}_M = a_M - \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1^{n+1} \\ \tilde{C}_2^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{M-1}^{n+1} \\ \tilde{C}_M^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{b}_1 & \dot{c}_1 & 0 & \ddots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{a}_M & \dot{b}_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^n \\ \tilde{C}_2^n \\ \vdots \\ \tilde{C}_{M-1}^n \\ \tilde{C}_M^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\sigma^2}{2\Delta x}\right) \Delta t e^{x \max} \end{pmatrix}$$

3.5 Méthode de Crank Nicolson : Équation de Dupire

On rappelle l'équation de Dupire :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial T} - \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K, T)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r - q)K\frac{\partial C}{\partial K} + qC = 0 \\ C(t, S; t = T, K) = (S_0 - K) + \end{cases}$$

En appliquant le changement de variable $X = \log(S_0/K)$: log moneyness $\Leftrightarrow K = S_0 e^{-X}$ et en posant $\tilde{C} = C/S_0$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T} - \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2(T, x)\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2(T, x)\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + q(T)\tilde{C} = 0 \\ \tilde{C}(t, S; t = T, K) = (1 - e^{-x})_+ \end{cases}$$

Crank Nicolson

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{C}_i^{n+1} - \tilde{C}_i^n}{\Delta T} + \frac{1}{2} \left[- \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^{n+1} - \tilde{C}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(x, T) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^{n+1} + \tilde{C}_{i-1}^{n+1} - 2\tilde{C}_i^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + q\tilde{C}_i^{n+1} \right. \\ & \left. - \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^n - \tilde{C}_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(x, T) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^n + \tilde{C}_{i-1}^n - 2\tilde{C}_i^n}{\Delta x^2}\right) + q\tilde{C}_i^n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\tilde{C}_i^{n+1}}{\Delta T} - \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^{n+1} - \tilde{C}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(x, T) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^{n+1} + \tilde{C}_{i-1}^{n+1} - 2\tilde{C}_i^{n+1}}{\Delta x^2}\right) + q\tilde{C}_i^{n+1} \\ & = \frac{2\tilde{C}_i^n}{\Delta T} + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^n - \tilde{C}_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, T) \left(\frac{\tilde{C}_{i+1}^n + \tilde{C}_{i-1}^n - 2\tilde{C}_i^n}{\Delta x^2}\right) - q\tilde{C}_i^n \end{aligned}$$

Conditions aux bords

$$\text{Quand : } i = 1 \text{ et } i = M : \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad \tilde{C}_0^{n+1} = \tilde{C}_1^{n+1} \quad \& \quad \tilde{C}_M^{n+1} = \tilde{C}_{M-1}^{n+1} = \tilde{C}_{M+1}^{n+1}$$

Ainsi :

$$\frac{2\tilde{C}_1^{n+1}}{\Delta T} + q\tilde{C}_1^{n+1} = \frac{2\tilde{C}_1^n}{\Delta T} - q\tilde{C}_1^n \quad (i = 1)$$

Et

$$\frac{2\tilde{C}_M^{n+1}}{\Delta T} + q\tilde{C}_M^{n+1} = \frac{2\tilde{C}_M^n}{\Delta T} - q\tilde{C}_M^n \quad (i = M)$$

Donc :

$$- \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(x, T) \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} + C_{i-1}^{n+1} - 2C_i^{n+1}}{\Delta x^2}\right)$$

$$= + \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left(\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, T) \left(\frac{C_{i+1}^n + C_{i-1}^n - 2C_i^n}{\Delta x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} & C_{i-1}^{n+1} \left(\left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2 \right) + C_i^{n+1} \left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} \right) + C_{i+1}^{n+1} \left(- \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2 \right) = \\ & C_{i-1}^n \left(- \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2 \right) + C_i^n \left(- \frac{\sigma^2}{\Delta x^2} \right) + C_{i+1}^n \left(\left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2 \right) \end{aligned}$$

$$a_i = \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2$$

$$b_i = \frac{\sigma^2}{\Delta x^2}$$

$$c_i = - \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta x^2} \sigma^2$$

$$\left[\left(\frac{2}{\Delta t} + q \right) I + M \right] C^{n+1} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} - q \right) I - M \right] C^n$$

3.6 Critique du modèle de Dupire

Une critique courante du modèle de Dupire est qu'il suppose que la volatilité est dépendante du temps t et du prix de l'actif sous-jacent S_t de manière linéaire, ce qui peut entraîner des erreurs dans les calculs de prix d'options si la relation entre la volatilité et le temps et le prix de l'actif sous-jacent n'est pas linéaire.

De plus, le modèle de Dupire nécessite des données historiques de marché très détaillées pour être calibré, ce qui peut être difficile à obtenir dans certains cas.

Enfin, le modèle de Dupire suppose que les prix de l'actif sous-jacent sont continus, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité, les prix des actifs peuvent avoir des sauts, des événements qui peuvent entraîner des erreurs importantes dans les calculs de prix d'options.