IMA205 - TP 2

Introduction to constrained Optimization

1.) $$\left|\begin{array}{l} \max\limits_{x,y} f(x,y) = x - y \\ \text{s.t.} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \quad (1)$$

$$\mathcal{L}(x,y,\phi) = f(x,y) + \langle g(x,y) - 1 | \phi \rangle$$
$$= x - y + \phi(x^2+y^2-1) \text{ avec } \phi < 0$$

Si $\phi < 0$, L est concave comme somme de fonctions concave, elle admet donc un maximum

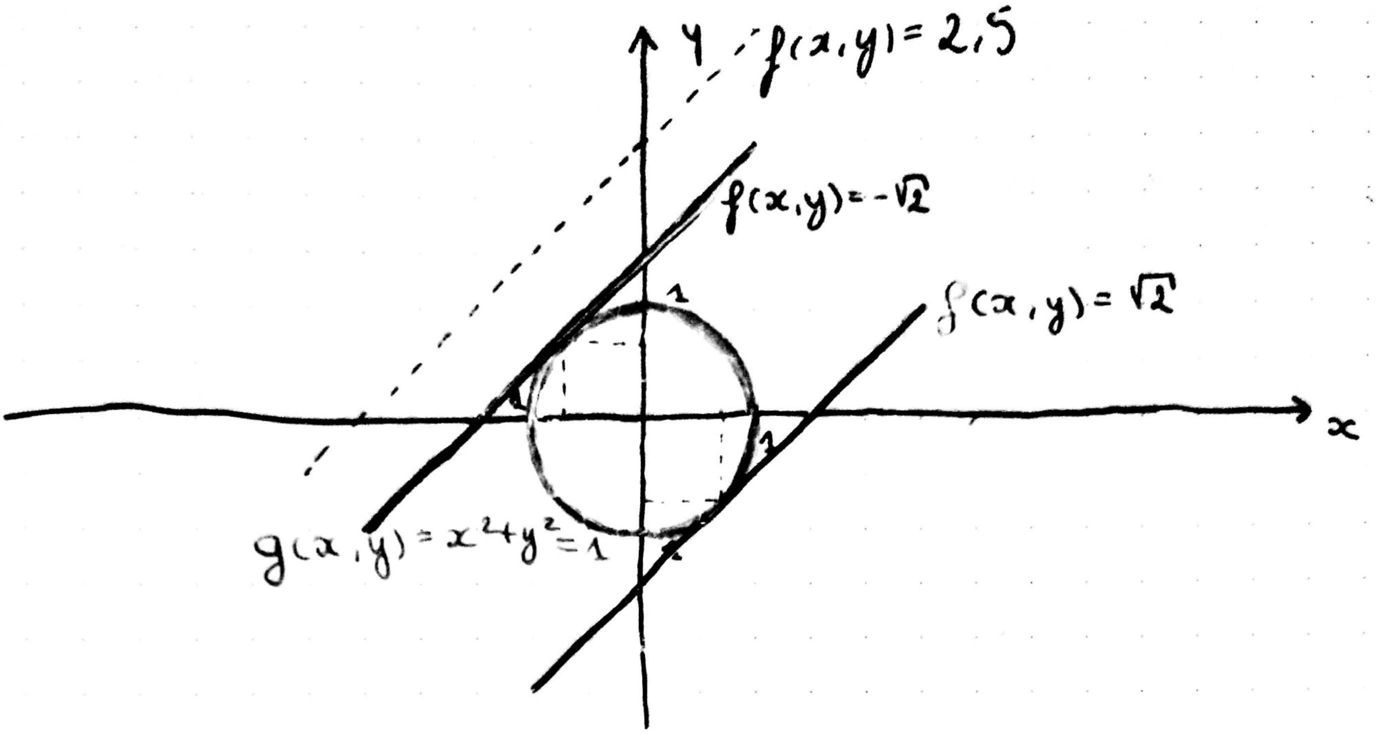
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_\phi L = (x^2+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 = \frac{1}{2\phi^2} \\ \nabla_x L = 1 + 2\phi x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\phi} \\ \nabla_y L = -1 + 2\phi y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\phi} \end{cases}$$

Donc $\nabla L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \pm\sqrt{1/2} \\ x = \mp\sqrt{2}/2 \\ y = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

Pour $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x,y) = -\sqrt{2}$ et $x^2+y^2 = 1$

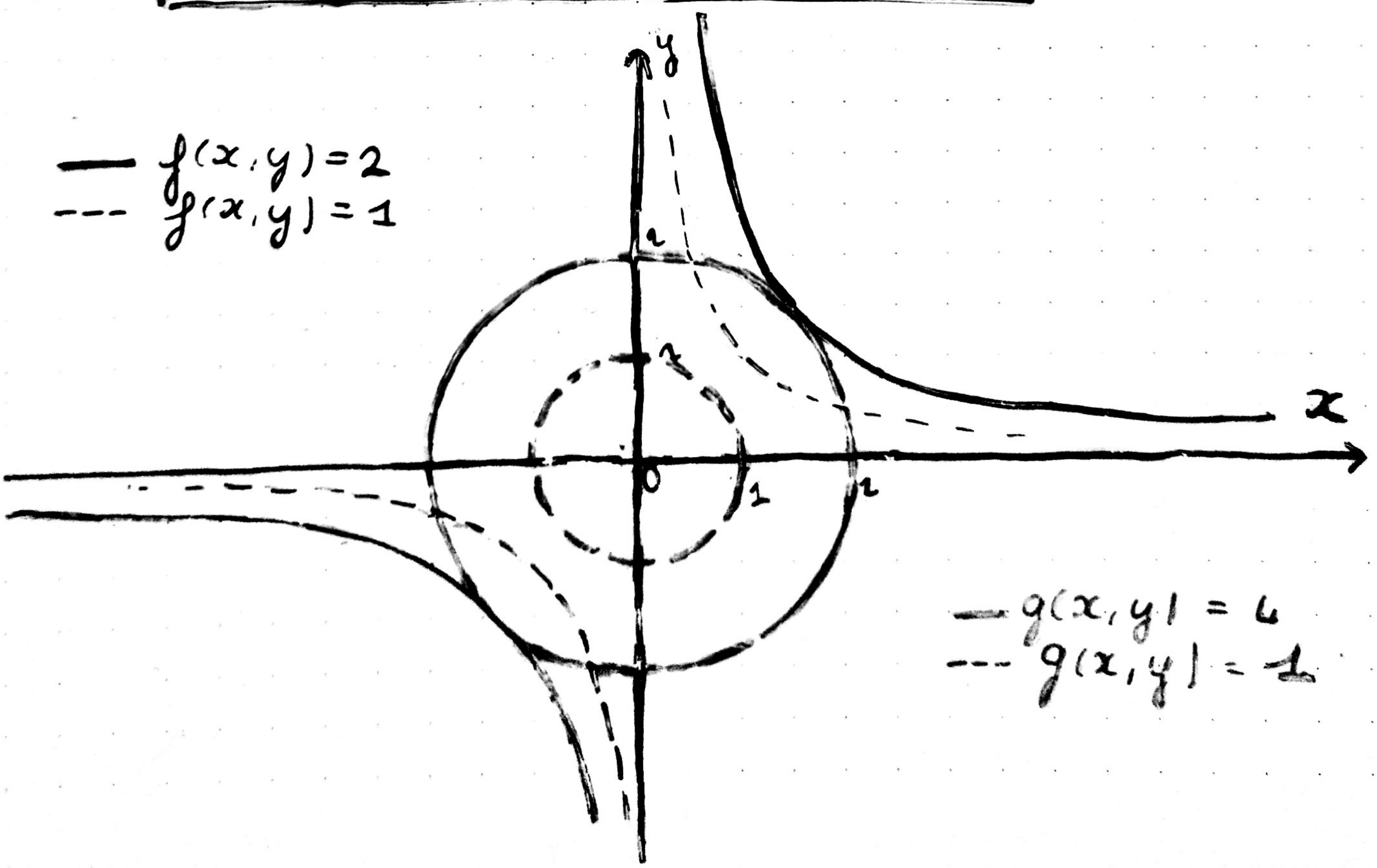
Pour $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x,y) = \sqrt{2}$ et $x^2+y^2 = 1$

La solution pour maximiser $f(x,y)$ selon x,y sous contrainte $x^2+y^2 = 1$ est $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Les lignes de niveau de f sont parallèles entre elles.
tandis que $g(x,y)=1$ correspond à l'équation du cercle unité

2) $$\max_{x,y}\ f(x,y) = xy \quad \text{s.t.}\ g(x,y) = x^2+y^2 < 4 \qquad (2)$$



On écrit le Lagrangien du problème :

$L(x,y,\phi) = f(x,y) + \phi(4 - g(x,y))$ avec $\phi \geq 0$

Vérifions que $f(x,y)$ est concave : $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 0$

Donc L est concave, comme somme de fonctions concaves, ainsi L admet un maximum

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L = y - 2\phi x = 0 & \Leftrightarrow y = 2\phi x \\ \nabla_y L = x - 2\phi y = 0 & \Leftrightarrow x = 2\phi y \\ 4 - g(x,y) \geq 0 \\ \phi \geq 0 \\ \phi(4 - x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow 0 = \phi(1 - \phi^2(x^2+y^2)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - 4\phi^2) = 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{1}{2} \text{ car } \phi \geq 0 \\ \text{ou } y = 0 = x \end{cases} \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ \phi \leq 0 \\ \phi = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

On a donc $\begin{cases} y = x \text{ si } \phi = \frac{1}{2}, \quad x, y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]^2 \\ \text{ou} \\ y = x = 0 \text{ si } \phi = 0. \end{cases}$

cas $\phi = \frac{1}{2}$: $f(x,y) = x^2$ avec $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

cas $\phi = 0$: $f(x,y) = 0$.

Les maximums de $f(x,y)$ sous contrainte $g(x,y) \leq 4$ sont $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3.) $$\boxed{\begin{aligned} &\underset{x,y}{\text{Maximum}} \quad f(x,y) = \ln(x) + y \\ &\quad \text{s.t. } g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 4 \\ &\quad \text{s.t. } h(x,y) = x - y = 0 \end{aligned}} \qquad (3)$$

Le Lagrangien au problème s'écrit :

$$L(x, y, \phi, \psi) = f(x,y) + \phi(4 - x^2 + y^2) + \psi(x - y)$$

L est concave et admet un maximum.

$$\begin{cases} \nabla_x L = \frac{1}{x} + 2\phi x + \psi = 0 & (1) \\ \nabla_y L = 1 + 2\phi y - \psi = 0 & (2) \\ 4 - x^2 + y^2 \geq 0 & (3) \\ x - y = 0 \Leftrightarrow x = y & (4) \\ \phi \geq 0 \quad \text{et} \quad \phi(4 - x^2 + y^2) = 0 & (5) \end{cases}$$

D'après (2) on a $\begin{cases} \phi = 0 \Rightarrow \psi = 1 \\ \phi \neq 0 \Rightarrow y = (\psi - 1)/2\phi \end{cases}$

On utilise (1) si $\phi = 0 \Rightarrow x = -1 = y$ d'après (4)

Si $\phi \neq 0$, d'après (2) et (4) $y = x = (\psi - 1)/2\phi$

et d'après (1) $\Leftrightarrow 1 + 2\phi x^2 + \psi x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\phi + (\psi - 1)^2 + \psi(\psi - 1) = 0 \quad (6)$$

d'après (5), $4 - x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$

donc $\psi = 1 + 2\phi\sqrt{2}$

Resolvons (6) en injectant le resultat precedent :

$$2\phi + (2\phi\sqrt{2})^2 + (1 \pm 2\phi\sqrt{2})(2\phi\sqrt{2}) = 0$$

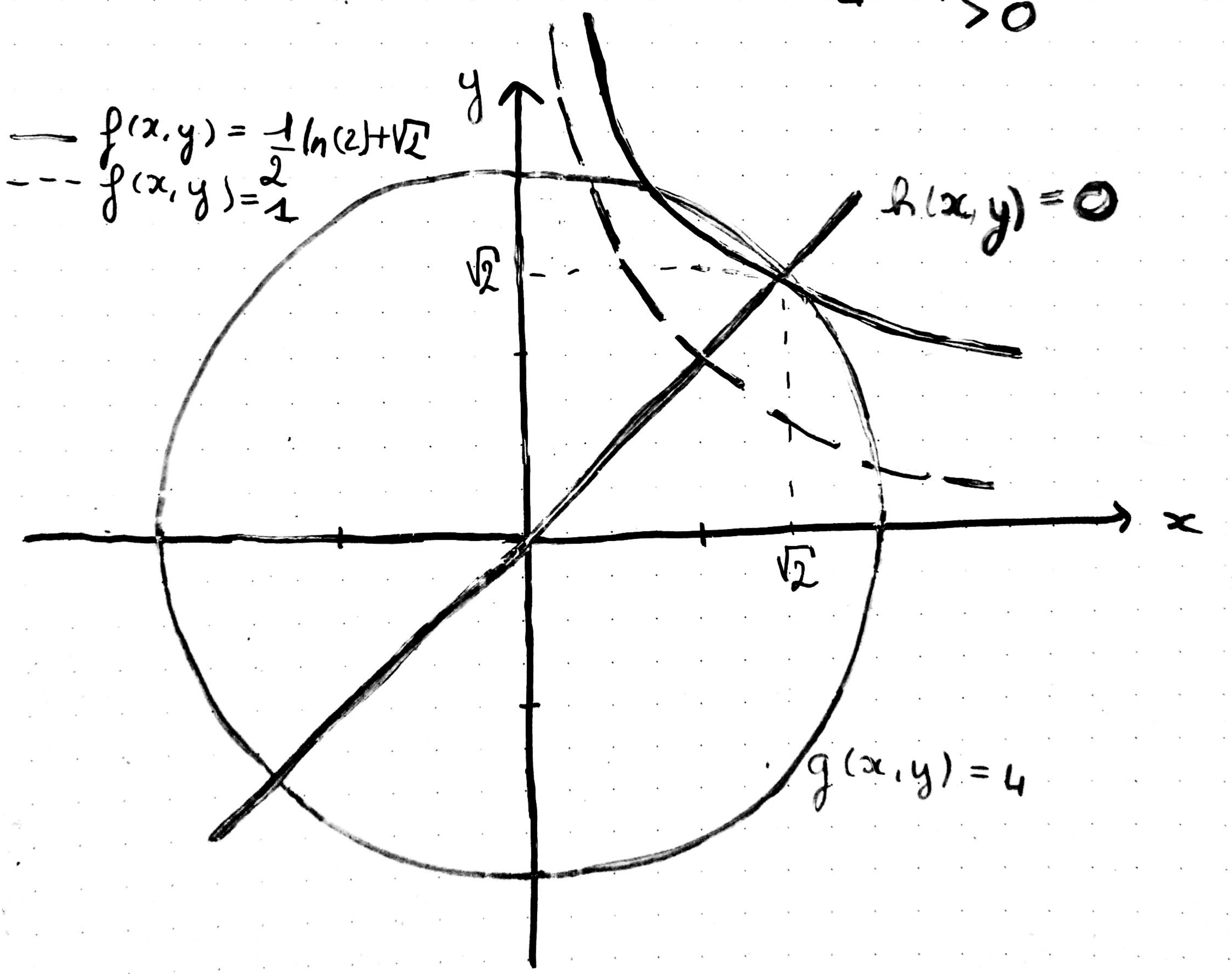
$$\Leftrightarrow \phi(2 + 8\phi + 2\sqrt{2} + 8\phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{-\sqrt{2} - 1}{8}$$

$$\text{donc } \psi = 1 + 2\left(\frac{-\sqrt{2} - 1}{8}\right)\sqrt{2}$$

$$= 1 + \left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$> 0$$



Les conditions sont bien respectées,

la solution du problème est donc $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.