

# Movimento de projéteis

Universidade de Aveiro

João Figueiredo, José Mota, Orlando Marinheiro



# Movimento de Projéteis

Dept. de Eletrónica, Telecomunicações e Informática  
Universidade de Aveiro

(112930) joaofafigueiredo@ua.pt, (113985) jfteixeiramota@ua.pt, (114060)  
orlandomarinheiro@ua.pt



### **Resumo**

Neste relatório iremos abordar o que foi feito em todas as fases de uma atividade laboratorial realizada no âmbito da cadeira de Mecânica e Campo Eletromagnético. Procedemos ao lançamento de um projétil, com o intuito de determinar a sua velocidade inicial. Posteriormente, repetimos o lançamento, variando o seu ângulo, para observar como tal alteração afeta a distância alcançada pelo projétil. Por fim, efetuamos o lançamento do projétil em direção a um pêndulo, com o objetivo de determinar até que ângulo o pêndulo é deslocado, o que nos permite calcular uma velocidade inicial, que será utilizada para comparação com a obtida anteriormente.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Detalhes experimentais relevantes</b>	<b>2</b>
2.1	Material Utilizado . . . . .	2
2.2	Procedimento e precauções experimentais . . . . .	3
2.2.1	Parte A - Determinação da velocidade inicial . . . . .	3
2.2.2	Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo . .	4
2.2.3	Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determi- nação da velocidade inicial de um projétil . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Análise e discussão</b>	<b>6</b>
3.1	Parte A - Determinação da velocidade inicial . . . . .	6
3.2	Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo . . . . .	6
3.3	Parte C - O Pêndulo Balístico . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Anexos</b>	<b>11</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A atividade laboratorial movimento de projéteis que nos foi proposta envolve a combinação de movimentos horizontais e verticais, o que desafia a nossa compreensão da cinemática e das leis de newton, tendo diversas aplicações em varias áreas da física e engenharia. Nesta atividade, iremos analisar o comportamento de um projétil em termos de altura máxima atingida e alcance horizontal.

## Capítulo 2

# Detalhes experimentais relevantes

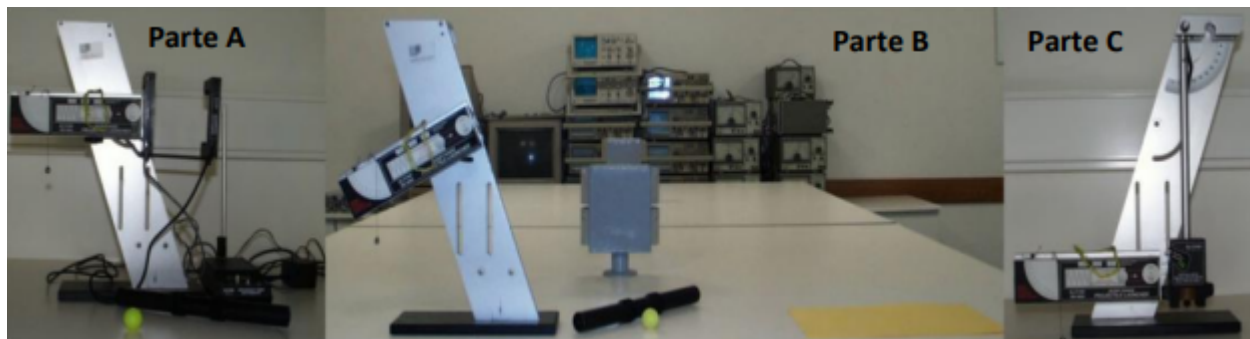


Figura 2.1: As três fases da atividade experimental  
[1]

Neste capítulo, serão demonstrados todos os detalhes experimentais relevantes no âmbito da atividade laboratorial. Descreveremos de forma detalhada todos os passos da montagem da experiência, apresentaremos a lista do material utilizado, o número de medidas a serem efetuadas, bem como as principais precauções a serem tomadas na realização da atividade.

### 2.1 Material Utilizado

Para a realização da atividade experimental foi utilizado o seguinte material:

- Lançador de projéteis;
- Sensores de passagem;

- Sensor de impacto;
- Esfera metálica;
- Papel químico;
- Papel milimétrico;
- Fita métrica.

## 2.2 Procedimento e precauções experimentais

A atividade laboratorial foi subdividida em três fases, sendo a Parte A e Parte B realizadas numa única aula e a Parte C na aula seguinte.

### 2.2.1 Parte A - Determinação da velocidade inicial

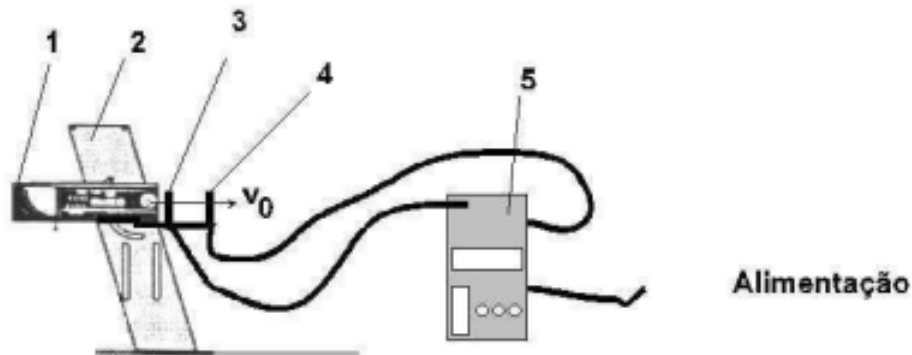


Figura 2.2: Esquema de montagem experimental A

Procedemos à montagem conforme a figura tendo o devido cuidado às seguintes situações:

- fixar a base (2) à mesa com um grampo adequado e colocar o LP (1) na posição horizontal.
- garantir que o sistema de controlo (5) está ligado à fonte de alimentação e que se encontra na posição de desligado (OFF).
- garantir que o sensor (3) está colocado imediatamente à saída do LP (1) e que o sensor (4) está ligado ao sistema de controlo.

Tendo em conta os cuidados mencionados procedemos à medição da distância entre os sensores. O LP foi carregado na posição “SHORT RANGE”. Colocamos a esfera na boca do LP, empurrando-a para o interior com a vareta de carregar (tubo de plástico preto) até o indicador amarelo, no LP, se encontrar na posição pretendida. Procedemos ao posicionamento do sistema de controlo na configuração “TWO GATES” e carregamos em START/STOP. De forma a disparar o LP puxamos o fio do disparador verticalmente e com suavidade, registando o tempo indicado pelo sistema de controlo (5). Todos os passos foram repetidos três vezes, de forma a obter três medidas, tendo sempre o cuidado de verificar a horizontalidade do LP antes de cada lançamento.

### 2.2.2 Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

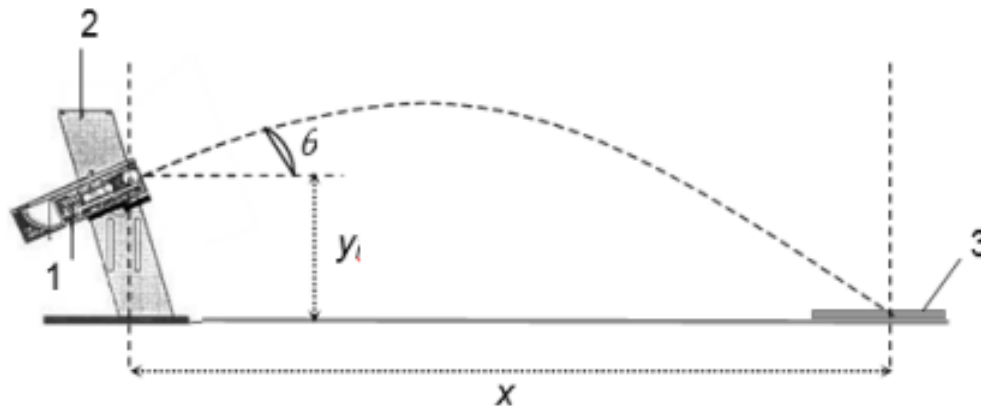


Figura 2.3: Esquema de montagem experimental B

Efetuamos a montagem de acordo com a figura tendo o cuidado de:

- fixar a base (2) à mesa com um grampo adequado e colocar o LP a fazer um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal.

Colocamos o alvo (conjunto de papel químico + papel milimétrico) a uma distância tal que a esfera metálica caia sobre a sua superfície, onde a distância foi determinada por tentativa e erro. O LP foi carregado na posição “SHORT RANGE” com a esfera e de seguida fizemos um disparo com o LP, registando o alcance,  $x$ , e o ângulo de lançamento,  $\theta$ , tendo o cuidado de verificar se o ângulo de lançamento se mantém constante. Todos os passos anteriores foram repetidos para ângulos de  $34^\circ$ ,  $38^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $43^\circ$ , três vezes para cada um. Por último, medimos a altura ( $y_l$ ) em relação à bancada, a que a esfera metálica é lançada.



### 2.2.3 Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da velocidade inicial de um projétil

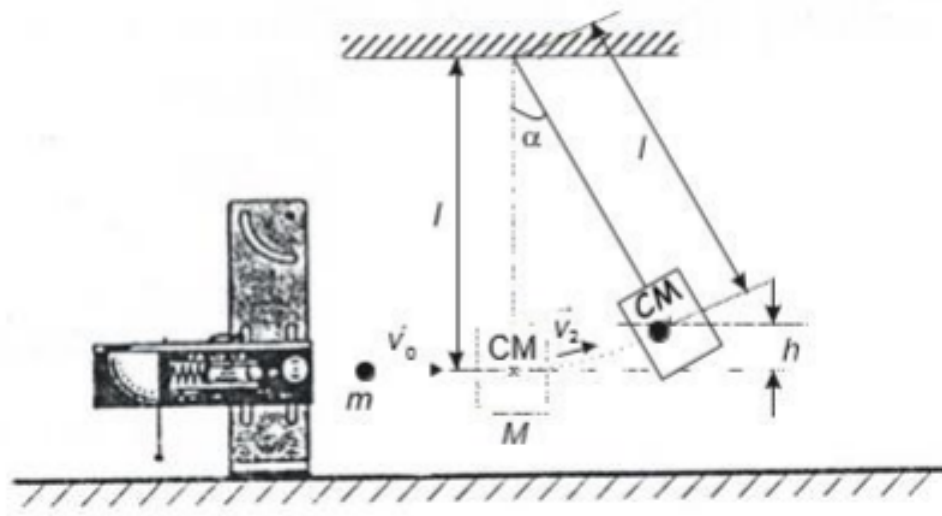


Figura 2.4: Esquema de montagem experimental B

Para a última parte da experiência medimos as as massas do projétil,  $m$ , e do pêndulo,  $M$ , bem como o seu comprimento,  $l$ . Carregamos o LP na posição "SHORT RANGE" e efetuamos um disparo, medindo o ângulo máximo,  $\theta$ , descrito pelo pêndulo. Na totalidade, todos os passos anteriores foram repetidos três vezes.

## Capítulo 3

# Análise e discussão

Neste capítulo serão mostrados todos os cálculos efetuados e todos os dados coletados no âmbito da atividade laboratorial. Para além será feita uma discussão dos resultados obtidos, bem como uma comparação dos resultados experimentais com as expectativas teóricas.

### 3.1 Parte A - Determinação da velocidade inicial

Começamos por contabilizar o tempo de passagem da bola entre as duas células. Foram feitas três medidas e de seguida uma média aritmética entre elas, sendo o seu respetivo erro de 0,0001s.

$$\Delta t = \frac{0.0416 + 0.0418 + 0.0419}{3} \approx 0.0417667$$

Como a distância medida entre as duas células foi de 10 cm, a velocidade inicial  $v_0$  pode ser calculada da seguinte forma:

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{Fórmula Original})$$

$$v_0 = \frac{0.1 \text{ m}}{0.0418 \text{ s}} \quad (\text{Substituição de Valores})$$

$$v_0 \approx 2.3923 \text{ m/s} \quad (\text{Resultado Aproximado})$$

### 3.2 Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Iniciamos esta fase realizando uma média aritmética das três medidas dos alcances para cada ângulo:

- $30^\circ$

$$\theta = \frac{72.1 + 80 + 72.5}{3} \approx 74.86667$$

- 34°

$$\theta = \frac{81.7 + 81.4 + 81.4}{3} \approx 81.5$$

- 38°

$$\theta = \frac{80.7 + 81.1 + 81.4}{3} \approx 81.06667$$

- 40°

$$\theta = \frac{80.4 + 80.3 + 80.3}{3} \approx 80.33333$$

- 43°

$$\theta = \frac{78.4 + 78.4 + 79.6}{3} \approx 78.8$$

Tendo em conta as médias dos alcances apresentadas anteriormente, podemos chegar à conclusão de que o alcance aumentou entre os ângulos de 30° e 34° e desceu entre os ângulos de 38° e 43°.

De seguida passamos à determinação de  $\theta_{\max}$  correspondente ao maior alcance da seguinte forma (para todos os casos assumimos  $g = 9.804$ ):

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &= \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g\Delta y}{v_0^2}}} \right) && \text{(Fórmula Original)} \\ &= \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9.804 \cdot 0.262}{(2.3943)^2}}} \right) && \text{(Substituições com os Valores)} \\ &\approx 35.98767^\circ && \text{(Resultado)} \end{aligned}$$

### 3.3 Parte C - O Pêndulo Balístico

Nesta última fase da atividade laboratorial, começamos por calcular a média dos ângulos obtidos através dos quatro lançamentos feitos.

**Nota:** A incerteza das medidas da massa é 0.1, pois é a medida da menor escala da balança, que é um aparelho digital.

$$\alpha = \frac{24.5 + 25.5 + 24 + 25}{4} \approx 24.75^\circ$$

Passando ao cálculo do valor da altura  $h$ , temos que:

$$\begin{aligned} h &= L(1 - \cos \alpha) && \text{(Fórmula Original)} \\ &= 0.265(1 - \cos(24.75^\circ)) && \text{(Substituição dos valores } l \text{ e } \alpha) \\ &\approx 0.0243 \text{ m} \\ &= 2.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Já o seu erro  $\Delta h$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta h = \left| \frac{dh}{dL} \right| \Delta L + \left| \frac{dh}{d\alpha} \right| \Delta \alpha$$

$$\Delta h = (1 - \cos(\alpha))\Delta L + (L \cdot \sin(\alpha))\Delta\alpha$$

$$\Delta h = (1 - \cos(24.75^\circ)) \cdot 0.0005 + (0.265 \cdot \sin(24.75^\circ)) \cdot 0.013$$

$$\Delta h = 0.0019 \text{ m}$$

1 - cos a =	0,8996	$\Delta h =$	0,001864
$\Delta l =$	0,0005		
$l * \sin a =$	0,108		
$\Delta a =$	0,75		
$\Delta a \text{ (rad)} =$	0,01309		

Figura 3.1: Tabela com os dados para o cálculo do erro

Posto isto, procedemos ao cálculo do valor da velocidade:

$$\frac{1}{2}v_f^2 = g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 v_0^2 = g \cdot h$$

$$v_0 = \left( \frac{m+M}{m} \right) \sqrt{2gh}$$

Substituindo as variáveis, ficamos com:

$$v_0 = \left( \frac{0.0633 + 0.264}{0.0633} \right) \sqrt{2 \cdot 9.804 \cdot 0.0243}$$

$$v_0 = 3.57 \text{ m/s}$$

O seu erro  $\Delta v$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta v = \left| \frac{dv}{dm} \right| \Delta m + \left| \frac{dv}{dM} \right| \Delta M + \left| \frac{dv}{dh} \right| \Delta h$$

No processo de realização da atividade, é fundamental não apenas calcular os resultados finais, mas também compreender quais são as fontes de erro que podem afetar a precisão desses resultados. Por esse motivo podemos concluir que a principal fonte de erro é o ângulo medido.

Através da seguinte formula é possível comparar a velocidade inicial  $v_0$  da Parte A com a calculada no passo anterior (Parte C):

$$\text{Diferença (\%)} = \left( \frac{V_{\text{Maior}} - V_{\text{Menor}}}{V_{\text{Menor}}} \right) \times 100$$

$$\text{Diferença (\%)} = \left( \frac{3.57 - 2.39}{2.39} \right) \times 100$$

$$\text{Diferença (\%)} = 49.24\%$$

Assim sendo, podemos concluir que  $v_0$  da Parte C é 49.24 % maior que  $v_0$  da Parte A.

## Capítulo 4

### Conclusões

Com a realização desta atividade laboratorial, tivemos a oportunidade de aplicar os princípios teóricos do lançamento de projéteis, permitindo-nos observar de perto os efeitos dos diferentes ângulos de lançamento e da velocidade na trajetória do projétil. Além disso, a prática com os instrumentos de medição permitiu aprimorar a nossa habilidade nessa área. Dessa forma, concluímos que a precisão e a consistência na execução das medições são fundamentais para obter resultados confiáveis e interpretar com precisão os fenômenos estudados. Um ponto que nos saltou bastante à vista foi a grande discrepância entre o cálculo da velocidade inicial  $v_0$  na Parte A e na Parte C, sendo umas das principais razões desse acontecimento o desgaste dos materiais usados nas experiências e troca dos lançadores.

## Capítulo 5

### Anexos

Neste capítulo serão mostradas todas as tabelas onde foram organizados todos os dados experimentais, bem como o gráfico que relaciona o ângulo em que foi feito o disparo com o alcance atingido.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1 lançamento				2 lançamento			3 lançamento					
2													
3	30°				30°	80		30°			media		
4	72,1							72,5			74,86667		
5													
6													
7													
8	34°												
9	1° lançamento			2 lançamento		3 lançamento					media		
10	81,7			81,4		81,4					81,5		
11													
12													
13	38°												
14	1° lançamento		2 lançamento		3° lançamento						media		
15	80,7		81,1		81,4						81,06667		
16													
17													
18	40°												
19	1° lançamento		2° lançamento		3° lançamento						media		
20	80,4		80,3		80,3						80,33333		
21													
22													
23	43°												
24	1° lançamento		2° lançamento		3° lançamento						media		
25	78,4		78,4		79,6						78,8		
26													
27													

Figura 5.1: Tabela com as medidas do alcance para os quatro ângulos e a respetiva média

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
8																			
9	Parte c																		
0																			
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
0																			
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
0																			
1																			
2																			
3																			
4																			

Figura 5.2: Dados para a realização dos cálculos da parte C

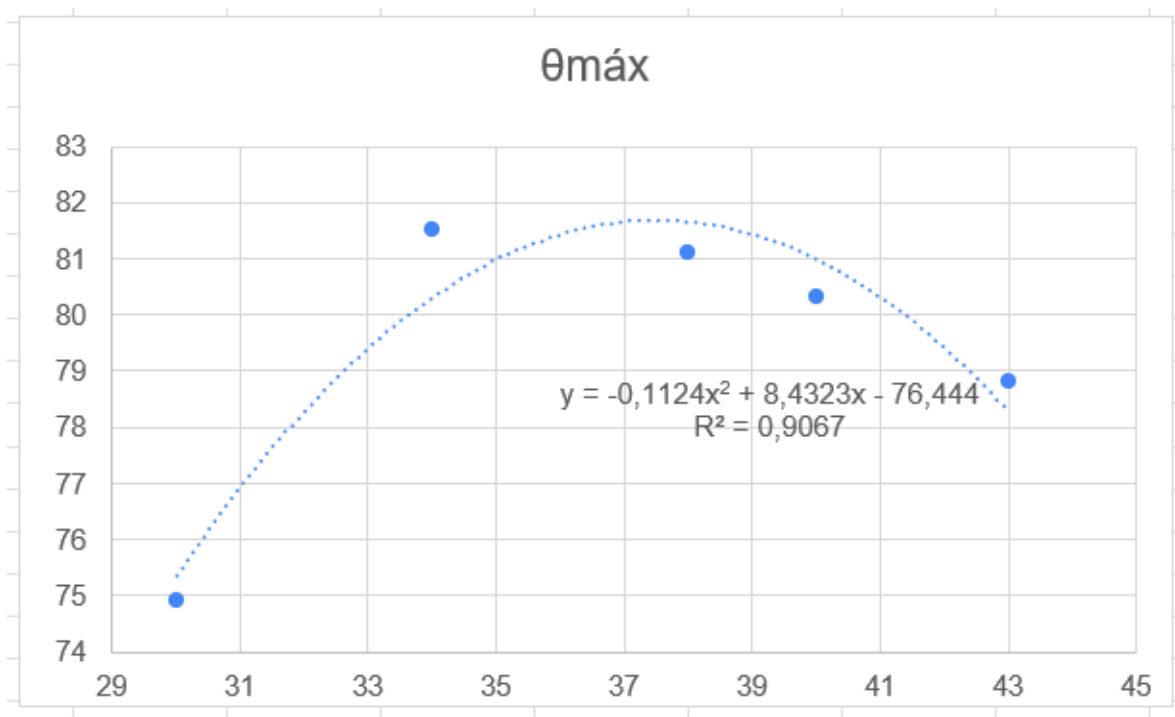


Figura 5.3: Gráfico de relação ângulo do disparo - alcance