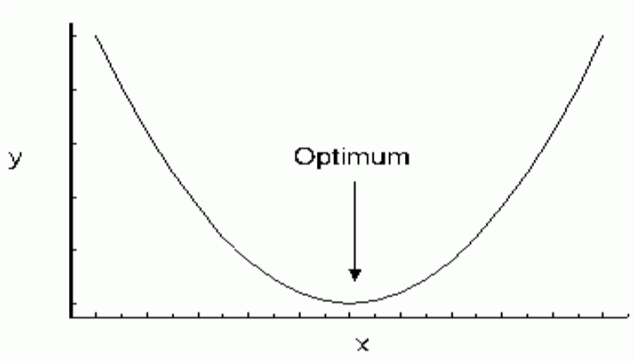
METODE OPTIMIZACIJE
Teorija za I kolokvij

1. **Gdje se sve javljaju optimizacijski problemi?**

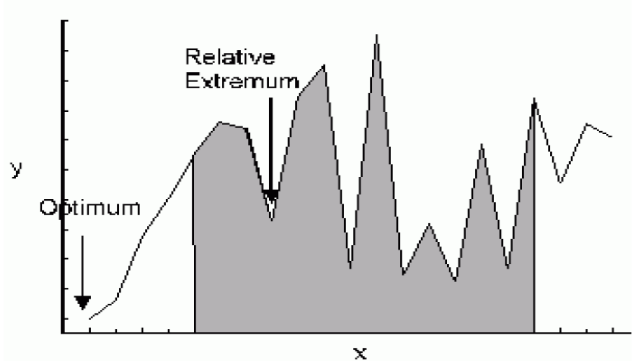
Optimizacija se bavi optimiranjem parametara u često kompleksnim sustavima da bi se našao optimum. Optimum znači da je ciljna funkcija maksimizirana. Optimizacijski problemi se nalaze u poslovnoj matematici, statistici, operacijskim istraživanjima, te svim znanstvenim disciplinama u kojima se koriste nepoznati parametri poput fizike, kemije, meteorologije…



Primjeri problema optimizacije:
- Traženje globalnog vrha ili najniže točke (kada imamo ograničenja)
- Lokalna i globalna optimizacija

2. **Navedite neka područja primjene optimizacijskih problema?**

Područja primjene optimizacijskih problema:



- Poslovna matematika: Cilj funkcije obično predstavlja dobit, odnosno promet kompanije, a parametri su sirovine, rad, korištenje strojeva, cijena… Cilj je funkciju maksimizirati. Uglavnom je to pojednostavljena formalizacija temeljnih problema.
- Područje klime, klimatskih promjena: Klima-modeli su pojednostavljeni modeli stvarnog, brojčano iskazanog hidrodinamičkog procesa u atmosferi, a interakcije unutar rešetki ćelija se aproksimiraju po jednadžbama. U jednadžbi mogu biti osnovni hidrodinamički zakoni, mogu biti izvedene ili empirijske jednadžbe, mogu se koristiti statistički modeli čiji parametri moraju biti optimizirani tako da se dobije klimatski model stvarnog procesa.

3. **Koje uvijete treba zadovoljavati problem linearnog programiranja?**

Problemi koji se mogu predstaviti kao problemi linearnog programiranja i koji se mogu rješavati metodama linearnog programiranja moraju zadovoljavati sljedeće uvijete:
- Jasno definiran cilj koji se žali postići
- Postojanje ograničavajućih činilaca, limitirajućih nedovoljnih resursa
- Postojanje više mogućih rješenja, veći broj ostvarljivih rješenja
- Mogućnost izražavanja međuovisnosti varijabli linearnom vezom

4. **Navesti nekoliko problema koji po definiciji mogu biti problemi linearnog programiranja?**

Mnogi problemi s kojima se susrećemo u ekonomiji obično sadrže zahtjev optimalnog, s raznih aspekata, korištenja ili alokacije sredstva koja su raspoloživa u ograničenim količinama. To su primjerice, zahtjevi da se odredi maksimalna dobit, dohodak, prihod od izvoza, akumulacije, korištenje strojava, zaposlenost radne snage ili minimalni troškovi proizvodnje, transporta, investicijskog zahvata, prehrane i mnogi drugi. Postavljani zahtjev je uvijek vezan za jedan ili više uvjeta kao što su: tehničko-tehnološki, tržišni, planski, organizacijski,

5. Kako se može definirati model linearnog programiranja s matematičkog gledišta?

Model linearnog programiranja sastoji se od funkcije cilja (kriterija) i ograničenja. Funkcija cilja je matematički izraz cilja (zahtjeva) problema. To je linearna funkcija. Ograničenja definiraju skup mogućih rješenja i dana su skupom linearnih nejednadžbi i jednadžbi. Ako veličine što se pojavljuju u problemu označimo sa:

x_i – varijable
c_j – parametri u funkciji cilja (kriterija)
z – funkcija cilja
a_{ij} – parametri ograničenja
b_i – slobodni članovi (ne)jednadžbi ograničenja
gdje je $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ i $j = 1, 2, 3, \ldots, k$, model linearnog programiranja možemo formulirati ovako:

Treba odrediti vrijednosti varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tako da funkcija cilja

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k$$

uz ekstremnu vrijednost i odgovarajućim uvjetima

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \gtreqless b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \gtreqless b_k \end{array}$$

uz $x_i \geq 0, \; z = 1, 2, \ldots, k$

Pojednostavljeno, funkcija cilja je

$$z = \sum_{j=1}^{k} c_j\, x_j$$

uz maksimalnu vrijednost i odgovarajuće uvijete

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

Napisat ćemo definirani linearni model još i u vektorskom obliku. Ako uzmemo da u općem slučaju matrica *A* ima *n* stupaca, možemo pisati:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{bmatrix}$$

Tada je funkcija cilja

$$z = cx$$

uz maksimalnu vrijednost i odgovarajuće uvijete

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b$$

$$x \geq 0$$

6. Što znači riješiti model linearnog programiranja?

Riješiti model linearnog programiranja znači iz skupa mogućih rješenja, to jest iz svih bazičnih mogućih rješenja pronaći ono (ili ona) koje je optimalno. Od svih poznatim metoda možemo spomenuti:

- Grafičku metodu
- Simpleks-metodu

7. Kako se može opisati grafička metoda?

Model linearnog programiranja koji ima, najviše dvije varijable (ako isključimo prostije modele sa tri varijable), može se rješavati grafičkom metodom. Ova metoda se sastoji od grafičkog prikaza cijelog modela, uvjeta i funkcije cilja u dvodimenzionalnom pravokutnom koordinatnom sustavu. Uvjetne jednadžbe su predstavljene pravcima, a uvjetne nejednadžbe poluravninama. Funkcija kriterija je predstavljena jednoparametarskom familijom pravaca.

Kao slika uvjeta je mnogokutnik i neograničena poluravnina, optimalno rješenje se nalazi u jednom (ili dva i duljini koja ih spaja) kutu mnogokutnika. To su koordinate onog kuta za koje funkcija cilja uzima vrijednost:

- Ako je cilj maksimalna vrijednost, to je kut (ili dva) u kojem pravac familije funkcije cilja što je najudaljenija od koordinatnog početka ima točku u mnogokutniku; ekstrema točke koja daje najveću vrijednost funkciji cilja
- Ako je cilj minimalna vrijednost, riječ je o kutu (ili dva) u kojem pravac familije funkcije cilja što je najbliži koordinatnom početku ima točku u mnogokutniku ili neograničenoj ravnini; ekstremna točka kojoj rezultira najmanja vrijednost funkcije cilja.

8. Koja je temeljna osobina simpleks-metode?

Simpleks-metoda je univerzalna i svaki model linearnog programiranja koji ima rješenje može se riješiti primjenom simpleks algoritma. Inače, ona operira s bazičnim mogućim rješenjima. Istražuje koje od bazičnih mogućih rješenja je optimalno. Kako je to iterativna metoda, znači da se sastoji od konačnog broja iteracija, najviše onoliko koliko ima bazično mogućih rješenja.

9. Koje uvjete treba zadovoljavati model linearnog programiranja za primjenu simpeks-metode?

Da bi se mogli koristiti simpleks metodom, moramo imati prilagođeni model, model definiran relacijama

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b$$
$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

10. U čemu je bit simpleks metode?

Rješavanje modela bez upotrebe računala lakše je simpleks-tablicom, te je njena prednost što računanje možemo započeti od bilo koje iteracije. Simpleks-metodom dakle utvrđujemo u kojoj ekstremnoj točki je optimalno rješenje. Od svih mogućih rješenja istražujemo samo određeni broj bazičnih mogućih rješenja.

11. Koji je razlog postojanja dualnog problema kod linearnog programiranja?

Osobina ekonomskih problema je da se istovremeno mogu promatrati sa stajališta optimizacije iz dva kuta. Npr., kod proizvodnog problema ostvarenju maksimalnog dohotka uz date uvjete odgovara problem koji ima za cilj ostvarenje minimalnih troškova proizvodnje. Toj činjenici rezultira postojanje dualnog modela linearnog programiranja. Naime, svakome modelu linearnog programiranja možemo pridružiti odgovarajući drugi model linearnog programiranja, takav da obe imaju jednake vrijednosti funkcije cilja za optimalna rješenja. Također, na temelju optimalnog rješenja jednog modela možemo saznati optimalno rješenje drugog.

12. Kako se može napisati dualni model linearnog programiranja?

Dualni problem treba odrediti vrijednost varijabli $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tako da funkcija cilja

$$g = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

uz minimalnu vrijednost i da odgovaraju uvjetima

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

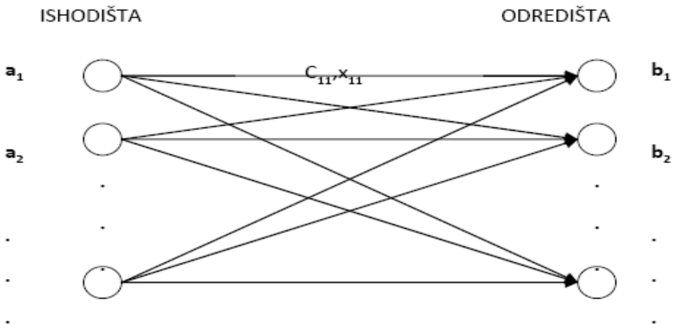
Dualni model možemo napisati i ovako

$$\min g = yb$$
$$yA \geq 0$$
$$y \geq 0$$

gdje je $y = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ vektor dualnih varijabli.

13. Kako se može opisati transportni problem?

	O_1	O_2	. . .	O_n	a_i
I_1	C_{ij} x_{ij}				a_1
I_2					a_2
. . .					. . .
I_m					a_m
b_j	b_1	b_2	. . .	b_n	



Problem polazi od toga da imamo jedno dobro na raspolaganju u poznatim količinama u više ishodišta. Te količine treba transportirati i to izravno u više različitih odredišta. Potražnja odredišta za dobrom je poznata i dana u fiksnim količinama. Troškovi transporta jedinice dobra od svakog izvora do svakog odredišta su poznati, dani fiksnim iznosom. Treba odrediti takav program transporta da se iscrpe sva ishodišta i zadovolji sva odredišta, izvršivši transport cjelokupne količine dobara, a da ukupni troškovi transporta budu minimalni.
Ako bi to izražavali formulom uzmimo da ima m ishodišta i n odredišta. Ishodište *i* raspolaže sa a_i, $i = 1, 2, \dots, m$ količinom dobara, a *j* odredište potražuje b_j, $j = 1, 2, \dots, n$ količinu dobara, pri čemu je $a_i > 0$ i $b_j > 0$. Ako je x_{ij} količina dobara koja se transportira iz i ishodišta u j odredišta, onda su troškovi transporta (funkcija cilja):

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

uz minimalnu vrijednost i odgovarajućim uvjetima

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gdje je $x_{ij} \geq 0$ za svako (i, j)

14. U čemu je specifičnost transportnog problema?

Postoji zainteresiranost za posebno promatranje transportnih problema zbog mogućnosti široke primjene i jednostavnosti problema. Zajednička osobina svih transportnih problema je da se radi o raspodijeli jednog dobra. Rješenje je najpovoljnije sa stajališta svih sudionika uzetih zajedno; optimalno rješenje daje rezultat kojim je na najbolji način zadovoljen opći interes.

U općem slučaju transportnog problema

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j$$

nije nužan uvjet. Transportni model se može napisati u obliku standardnog modela linearnog programiranja. To se može postići jer je transportni problem specijalni slučaj problema linearnog programiranja.

15. Što je definicija otvorenog transportnog modela?

Uvijek je moguće izjednačiti zbroj jednog skupa a_i, $i = 1, 2, ..., m$ sa zbrojem drugog skupa brojeva b_j, $j = 1, 2, ..., n$ kao potražnjom odredišta. Međutim javljaju se problemi u kojima nije potrebna cijela ponuda ili raspoloživa količina ne može podmiriti potražnju odredišta. Modeli takvih problema imaju u uvjetima i nejednadžbe, a nazivaju se otvoreni transportni model. Dakle, ako u modelu vrijedi relacija

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j$$

model je zatvoreni, a ako ne vrijedi tada je otvoreni.

16. Na koji se način otvoreni model transformira u zatvoreni transportni model?

Metode za rješavanje transportnih modela mogu se koristiti isključivo za rješavanje zatvorenog modela. Zbog toga otvoreni transportni model transformiramo u zatvoreni, da bi smo ga mogli riješiti. To činimo ubacivanjem m dopunskih varijabli ako model ima uvjetne nejednadžbe oblika

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

ili n dopunskih varijabli ako su u modelu nejednadžbe oblika

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq b_j$$

čime proširujemo transportnu tablicu jednim novim stupcem ili redom. Dopunskim varijablama odgovaraju koeficijenti koji imaju vrijednost 0.

17. Nabrojati neke transportne metode za pronalaženje početnog rješenja?

Neke od metoda su:

- Metode za pronalaženje početnog mogućeg rješenja (metoda sjeverozapadnog kuta, metoda minimalnih troškova, Vogelova aproksimativna metoda)
- Metoda za pronalaženje optimalnog rješenja (metoda relativnih troškova i MODI metoda)

18. Koje su metode za pronalaženje optimalnog rješenja transportnog modela?

To su:

- Metoda relativnih troškova (Stepping Stone Method)
- MODI (Modified Distribution Method) metoda

19. Kako se može opisati problem raspoređivanja?

Problem raspoređivanja (asignacije) je specifičan problem linearnog programiranja. Sastoji se u sljedećem. Dati broj veličina (osoba, aktivnosti, resursa, …) treba rasporediti na određen broj mjesta (strojeva, radnih mjesta, pogona, lokacija…). Vrijednosti veličina koje se raspoređuju i mjesta je fiksna i iznosi jedan. To znači da su veličine i mjesta nedjeljivi i da se jedna veličina može rasporediti samo na jedno mjesto. Cilj je pronaći program rasporeda veličina na mjesta takav da se postigne najbolja ukupna efikasnost.

20. Što je model raspoređivanja? Napisati ga i reći koje su njegove specifičosti?

K cilju izgradnje modela raspoređivanja (asignacije) uzmimo da m veličina treba rasporediti na n mjesta, pa imamo oznake:

i – redni broj veličine što se raspoređuje ($i = 1, 2, \ldots, m$)

j – redni broj mjesta ($j = 1, 2, \ldots, n$)

c_{ij} – efikasnost veličine i ako je rasporedi na mjesto j

x_{ij} – varijabla koja pokazuje da li je veličina i raspoređena na mjesto j i ima vrijednost

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ako } i \text{ veličina jest dodjeljena } j \text{ mjestu} \\ 0 \text{ ako } i \text{ veličina nije dodjeljena } j \text{ mjestu} \end{cases}$$

Matematička formulacija ovog modela se može iskazati ovako:

Treba odrediti nenegativne vrijednosti varijabli $x_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$ takve da funkcija cilja

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

uzme minimalnu i maksimalnu vrijednost i da odgovaraju uvjetima

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Ovi uvjeti pokazuju da se jedna veličina dodjeljuje samo jednom mjestu, da se svakom mjestu dodjeljuje smo jedna veličina i da varijabla x_{ij} može poprimiti vrijednost 1 ili 0. Model raspoređivanja je zapravo specijalni, pojednostavljeni model transporta. Ako je $n = m$ model raspoređivanja je zatvoreni model. Takav model možemo rješavati metodom raspoređivanja. Ako ne postoji jednak broj veličina i mjesta, to jest ako je $m \neq n$, tada imamo otvoreni model raspoređivanja. On se prevodi u zatvoreni uvođenjem dopunskih varijabli.