Relatório de Implementação dos Algoritmos Referente ao Problema da Árvore Geradora Mínima

Bruno Ramos Madson Araújo Nemuel Leal
Nilton Vasques

2 de Abril de 2013

1 Definição

Seja G=(V,E) um grafo não direcionado e conexo, G'=(V,E') é chamado de subgrafo gerador se possuí os mesmos vértices de G. Portanto se tivermos em G' uma árvore, então o subgrafo é uma árvore geradora. Quando G é um grafo conexo, em que cada aresta possui um valor ou peso p(e), o peso total da árvore geradora é

$$\sum_{e \in E'} p(e)$$

onde p(e) é uma função que retorna o peso da aresta e. Á árvore geradora mínima é a árvore G' que possui o menor peso total dentre todas as árvores possíveis do grafo G[2]. Podemos enunciar a função para encontrar a árvore geradora mínima como

$$min \sum_{e \in E'} p(e)$$

. A partir dessa noção podemos visualizar que encontrar a árvore geradora mínima não é tão trivial assim. Se propormos uma solução pela força bruta, ou seja, encontrar todas as árvores geradoras e assim então verificar qual a que possui o menor peso total. No pior caso quando temos um grafo completo(em que todos os vértices se ligam uns aos outros) teríamos n^{n-2} árvores geradoras onde n é o número de nós, sendo assim teríamos uma solução em tempo exponencial $O(n^n)$ e inviável . Diante deste cenário alguns matemáticos elaboram soluções para o problema das Árvores Geradoras Mínimas, se utilizando de heurísticas gulosas para encontrar a solução ótima.

No presente artigo abordaremos o Algoritmo de Kruskal e o de Prim, como estudo de caso.

1.1 Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal é um algoritmo guloso, que tem por objetivo encontrar uma árvore geradora mínima para um grafo conexo e valorado (com pesos nas arestas). Vale ressaltar que para árvores não conexas, o algoritmo encontra floresta geradora mínima, ou seja uma árvore geradora mínima para cada componente conexo do grafo. O algoritmo pode ser enunciado nos seguintes passos:

Data: Um grafo Conexo
Result: Uma árvore geradora mínima a partir de um grafo conexo
Criar uma floresta F, onde cada vértice do grafo é uma árvore separada;
Criar um conjunto S contendo todos as arestas do grafo;
while S *é não vazio* **do**
    Remova um aresta e com peso mínimo de S;
    Se e conecta duas diferentes árvores, então adicione e para floresta F;
    Caso contrário, discarte e, ou seja se a escolha de e gera um circuito em F, discarte-a;
end

Algorithm 1: Pseudo Código do algoritmo de Kruskal

1.1.1 Implementação

A implementação foi realizada em Java com uso da estrutura de dados de listas encadeadas para manipular os conjuntos disjuntos. O código fonte está disponível no Apêndice A. A seguir o pseudo código da implementação com as manipulações representadas pelas operações Union-Find :

Data: V, E
Result: A, W
1 W $\leftarrow$ 0; A $\leftarrow$ vazio;
2 **for** $v \in V$ **do**
3 | $a[v] \leftarrow$ **make-set(v)**;
4 **end**
5 $L \leftarrow$ **ordene**(E, w);
6 $k \leftarrow 0$;
7 **while** $k \neq \mid V \mid -1$ **do**
8 | **remove**(L, (u, v));
9 | a[u] $\leftarrow$ **find-set(u)**;
10 | a[v] $\leftarrow$ **find-set(v)**;
11 | **if** $a[u] \neq a[v]$ **then**
12 | | $aceita(u, v)$;
13 | | $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$;
14 | | $W \leftarrow W + w(u, v)$;
15 | | $k \leftarrow k + 1$;
16 | **end**
17 | **union**$(a[u], a[v])$;
18 **end**
19 **retorne**(A, W);

Algorithm 2: Pseudo Código do algoritmo de Kruskal com UnionFind

1.1.2 Análise de Complexidade

A estrutura de dados UnionFind mantém um conjunto de elementos particionados em vários subconjuntos não sobrepostos. O algoritmo que controla essa estrutura possui duas operações principais:

- Find: Determina de qual subconjunto um elemento pertence.
- Union: Faz a união de dois subconjuntos em um só subconjunto.

A ordenação na linha 5 tem complexidade $\Theta(\mid E \mid log \mid E \mid)$ e domina a complexidade das demais operações. A repetição das linhas 7-17 será executado $\Theta(\mid E \mid)$ no pior caso. Logo, a complexidade total das linhas 9-10 será $\Theta(\mid E \mid f(\mid V \mid))$, onde $f(\mid V \mid))$ é complexidade da função **find-set**. As linhas de 12 a 15 serão executados $\mid V \mid -1$ vezes no total, pois para um grafo contendo N vértices, precisamos de apenas N-1 arestas para interligar todos os nós e gerar uma árvore geradora mínima. Assim, a complexidade total de execução destas linhas será $\Theta(\mid V \mid .g(\mid V \mid)$ onde $g(\mid V \mid)$ é a complexidade de realizar **union**. A complexidade do algoritmo de Kruskal será então:

$$\Theta(\mid E \mid log \mid E \mid + \mid E \mid .f(\mid V \mid) + \mid V \mid .g(\mid V \mid))$$

A estrutura de dados UnionFind foi implementada na sua forma simples, com o uso de uma lista encadeada. Sendo assim a complexidade da função find é $\omega(n)$, e union tem complexidade $\Theta(n)$ [1]. A complexidade final da implementação foi:

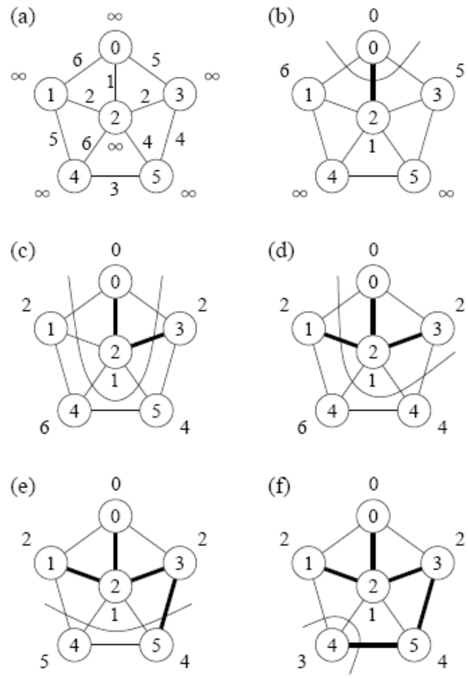
$$\Theta(\mid E \mid log \mid E \mid + \mid E \mid .\Omega(\mid V \mid) + \mid V \mid .\Theta(\mid V \mid))$$

A complexidade pode ser reduzida utilizando de uma estrutura de dados mais refinada para implementar a manipulação dos conjuntos disjuntos, como por exemplo usar uma lista encadeada e *weighted-union heuristic*[1], consegue-se uma complexidade de $\Theta(m+nlogn)$ para realizar as m operações de **make-set**, **find-set** e **union** [1].

1.2 Algoritmo de Prim

Assim como o algoritmo de Kruskal's o algoritmo de Prim utilizada também uma heurística gulosa para solucinar o problema da Àrvore Geradora Mínima. A heurística utilizada é procurar o caminho mais curto, dentre todos os possíveis, de maneira similar ao algoritmo de Djikstra. O algoritmo de Prim's tem uma propriedade de que as arestas em A sempre forma uma árvore simples *Fig.1*.

Fig. 1: Ilustração do Algoritmo de Prim



O algoritmo genérico de Prim procura encontrar o caminho mais curto de um vértice para os vértices vizinhos, até que todos os vértices estejão ligados uns aos outros. O pseudo-código pode ser visualizado logo abaixo:

Data: Um grafo Conexo
Result: Uma árvore geradora mínima a partir de um grafo conexo
Escolha um vértice S para iniciar o subgrafo;
while *há vértices que não estão no subgrafo* **do**
    selecione uma aresta segura;
    insira a aresta segura e seu vértice no subgrafo;
end

Algorithm 3: Pseudo Código do algoritmo de Prim

1.2.1 Implementação

Assim como a implementação anterior o algoritmo de Prim's foi implementado em Java e fez uso da Matriz de Adjacências Binária como estrutura de dados para armazenar os vértices adjacentes de um dado vértice u. O código fonte está disponível no Apêndice A. O pseudo código que foi utilizado para a implementação pode ser visualizado em *Algorithm 4*.

Data: V, E
Result: A, W
dist[r] $\leftarrow$ 0; Q $\leftarrow$ V;
for $v \in V - \{r\}$ **do**
    $dist[r] \leftarrow \infty$;
end
$pred[r] \leftarrow NULL$;
$A \leftarrow \emptyset$;
$W \leftarrow 0$;
while *Q não for vazio* **do**
    remover de Q o vértice u com menor valor em dist;
    $W \leftarrow W + dist[u]$;
    if $pred[u] \neq null$ **then**
        $A \leftarrow A \cup \{(pred[u], u\}$;
    end
    for $v \in Adj[u]$ **do**
        if $v \in Q$ *and* $dist[v] > w[u, v]$ **then**
            $dist[v] \leftarrow w[u, v]$;
            $pred[v] \leftarrow u$;
        end
    end
end
retorne(A, W);

Algorithm 4: Pseudo Código do algoritmo de Prim

1.2.2 Ánalise de Complexidade

A complexidade do algoritmo de Prim está diretamente ligada a maneira de como é implementada a estrutura de dados em Q. Uma simples implementação utilizando matrizes de adjacência vai requerer complexidade $\Theta(\mid V \mid^2)$ e foi a estrutura de dados utilizada neste trabalho. Utilizando de uma heap binária a complexidade cai para $\Theta(\mid E \mid log \mid V \mid)$, ainda assim é possível decrescer ainda mais a complexidade utilizando como estrutura de dados uma Fibonacci Heap com complexidade $\Theta(\mid E \mid + \mid V \mid log \mid V \mid)$ [1].

A
Algoritmos Implementados no Projeto

```java
public class Kruskal implements GraphAlgorithm{
    private Graph mGraph;
    private int edges[];
    private int edgeIndex = 0;

    public Kruskal(Graph grafo) {
        mGraph = grafo;
    }

    @Override
    public void init(){
        edgeIndex = 0;
        for (int i = 0; i < mGraph.getVerticesCount() ; i++) {
            Vertice vertice = mGraph.getVertices()[i];
            UnionFind.makeSet(vertice);
        }
        edges = new int[mGraph.getArestasCount()];
        for( int i = 0; i < edges.length; edges[i] = i++);
        qsort(0, edges.length -1);
    }
    @Override
    public boolean performStep() {
        if( edgeIndex >= edges.length )
            return true;
        Aresta aresta   = mGraph.getArestas()[ edges[edgeIndex]];
        if( aresta.status == Status.WAITING ){
            aresta.status = Status.PROCESSING;
            return false;
        }
        edgeIndex++;
        UnionElement u  = aresta.u;
        UnionElement v  = aresta.v;
        if( !UnionFind.find(u).equals(UnionFind.find(v)) ){
            aresta.status = Status.TAKED;
            UnionFind.union(u, v);
```

```
        }else{
            aresta.status = Status.DISCARDED;
        }
        return false;
    }
}
```

Implementação do Algoritmo de Kruskal em Java

```
public class Prim implements GraphAlgorithm{
    private Graph mGraph;
    private AdjacencyMatrix verticesMatrix;
    private AdjacencyMatrix matrix;
    private boolean processing = false;

    public Prim( Graph graph) {
        mGraph = graph;
    }
    @Override
    public void init() {
        processing = false;
        verticesMatrix = new AdjacencyMatrix(mGraph.getVerticesCount());
        verticesMatrix.makeAdjacency(0, 0);
        matrix = mGraph.createAdjacencyMatrix();
    }

    @Override
    public boolean performStep() {
        Aresta bestChoice   = null;
        int bestVertice     = -1;
        int vertices[] = verticesMatrix.getAdjacencys(0);
        for( int v = 0; v < vertices.length; v++){
            if( vertices[v] == 1){
                int adjacencys[] = matrix.getAdjacencys(v);
                for( int i = 0; i < adjacencys.length; i++){
                    if(adjacencys[i] == 1){
                        Aresta aresta = mGraph.getAresta(i, v);
                        if( aresta != null){
                            if( !processing ){
```

```
                                aresta.status = Status.PROCESSING;
                            }else if ( bestChoice != null ){
                                if( bestChoice.weight > aresta.weight ){
                                    bestChoice  = aresta;
                                    bestVertice = i;
                                }
                            }else{
                                bestChoice = aresta;
                                bestVertice = i;
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
        if(!processing){
            processing = true;
            return false;
        }
        boolean finish = true;
        if( bestVertice != -1 ){
            bestChoice.status = Status.TAKED;
            for(int i = 0; i < vertices.length; i++){
                if( vertices[i] == 1){
                    matrix.removeAdjacency(i, bestVertice);
                }else{
                    finish = false;
                }
            }
            processing = false;
            verticesMatrix.makeAdjacency(0, bestVertice);
        }
        return finish;
    }


```

```
}
```

Implementação do Algoritmo de Prims em Java

B
Código Fonte das Estrutura de Dados Implementadas no Projeto

```java
package br.ufba.datastructures;
/**
 * @author niltonvasques
 * UnionFind data structure
 * http://en.wikipedia.org/wiki/Disjoint-set_data_structure
 */
public class UnionFind {

    public interface UnionElement{

        public UnionElement getRoot();
        public UnionElement getParent();
        public void setRoot(UnionElement x);
        public void setParent(UnionElement x);

    }

    public static void makeSet( UnionElement x ){
        x.setParent(x);
    }

    public static UnionElement find( UnionElement x){
        if ( x.getParent() == x )
            return x;
        else
            return find(x.getParent());
    }

    public static void union( UnionElement x, UnionElement y){
        x.setRoot( find(x) );
        y.setRoot( find(y) );
        x.getRoot().setParent( y.getRoot() );
```

```
    }

}
```

Interface Para Operações Union-Find com Lista Encadeada

```
package br.ufba.datastructures;

/**
 * @author niltonvasques
 * http://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_adjac%C3%AAncia
 */
public class AdjacencyMatrix {

    private static final int MEM_BLOCK_SIZE = 32;
    int matrix[];
    int stride;
    public AdjacencyMatrix(int n) {
        stride = n;
        int size = (int)(stride * stride);
        int lenght = 1 + (size/32);
        matrix = new int[ lenght ];
    }

    public void makeAdjacency(int element, int adjacency){
        makeAdjacencyInternal(element, adjacency);
        makeAdjacencyInternal(adjacency, element);
    }

    public void removeAdjacency(int element, int adjacency ){
        removeAdjacencyInternal(element, adjacency);
        removeAdjacencyInternal(adjacency, element);
    }

    private void makeAdjacencyInternal(int element, int adjacency) {
        int bitIndex            = (element*stride+adjacency);
        int index       = (int) (bitIndex/MEM_BLOCK_SIZE);
        int shift       = bitIndex % MEM_BLOCK_SIZE;
```

```
        matrix[index]   |= (0x01 << shift);
    }

    private void removeAdjacencyInternal(int element,
       int adjacency) {
        int bitIndex            = (element*stride+
           adjacency);
        int index       = (int) (bitIndex/MEM_BLOCK_SIZE
           );
        int shift       = bitIndex % MEM_BLOCK_SIZE;
        matrix[index]   &= ~(0x01 << shift);
    }

    public int[] getAdjacencys(int element){
        int adjacencys[] = new int[stride];

        int bitIndex        = (element*stride);
        int bitRemainder    = (bitIndex % MEM_BLOCK_SIZE
           );

        for( int i = 0; i < stride; i++){
            int x = ((bitIndex+i)/MEM_BLOCK_SIZE);
            int y =  bitRemainder + i;

            int ret = (matrix[x] >> y) & 0x01;
            adjacencys[i] = ret;
        }

        return adjacencys;
    }

    public boolean checkAdjacency(int u, int v){

        int bitIndex        = (u*stride);
        int index           = (int) (bitIndex/
           MEM_BLOCK_SIZE);

        int x = (v/MEM_BLOCK_SIZE) + index;
        int y = (bitIndex % MEM_BLOCK_SIZE) + v;

        return ((matrix[x] >> y) & 0x01) == 0x01;
    }
```

```
}
```

Implementação da Matriz de Adjacências Binária

Referências

[1] Thomas H. Cormem, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*, volume ISBN 0-262-03293-7, chapter 21: Data structures for Disjoint Sets, pages 498–524. MIT Press, second edition, 2001.

[2] Fernando Nogueira. Problema da Árvore Gerador Mínima. *UFJF*.

[3] F. Prado, T. Almeida, and V. N. Souza. Introdução ao Estudo sobre Árvore Geradora Mínima em Grafos com Parâmetros Fuzzy. *UNICAMP - Faculdade de Engenharia Elétrica*.