

1. Seja o problema:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

$$u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2)$$

onde $\Omega = [a, b]$.

a) Dado o problema (1), é possível apresentar uma formulação aplicando o método de Nitsche para a imposição de condições de contorno (2):

Multiplicando (1) por função v e integrando, temos:

$$-\int_{\Omega} \frac{d^2u}{dx^2} v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{V} \quad (3)$$

Aplicando o método de integração por partes, temos:

$$\int_{\Omega} \frac{dudv}{dx dx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_a^b = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{V} \quad (4)$$

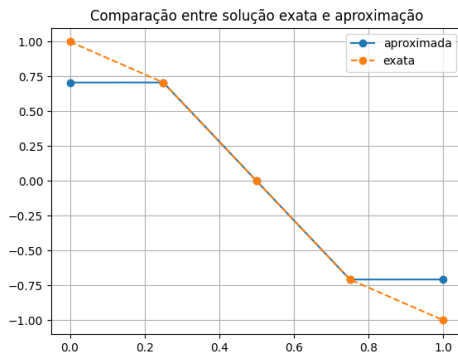
Para forçar a imposição da condição de contorno de acordo com o método de Nitsche soma-se os termos:

$$\int_{\Omega} \frac{dudv}{dx dx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_a^b + \alpha \frac{dv}{dx} (u - g) \Big|_a^b \beta (u - g) v \Big|_a^b = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{V} \quad (5)$$

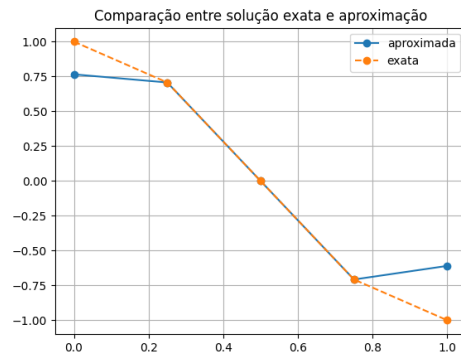
Dessa forma, para a validade da formulação (5) define-se $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{H}^1(\Omega)$

b) Supondo $\Omega = [0, 1]$ e a solução exata $u = \cos(\pi x)$, é possível apresentar resultados comparando a solução exata e aproximada para diferentes valores de β ($\beta = 0, 1, 10, 100$) e α ($\alpha = -1, 0, 1$) utilizando polinômios lineares:

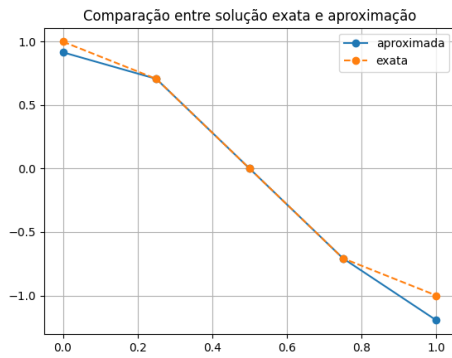
Utilizando $\alpha = -1$, temos:



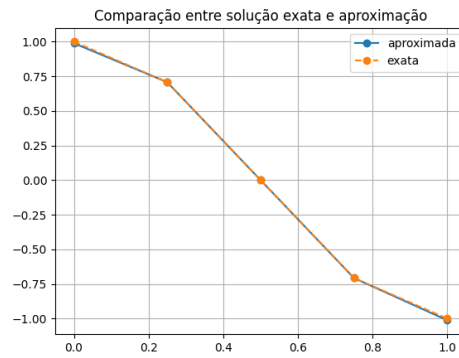
(a) $\beta = 0$



(b) $\beta = 1$

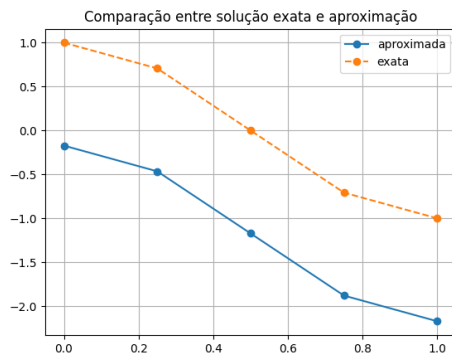


(a) $\beta = 10$

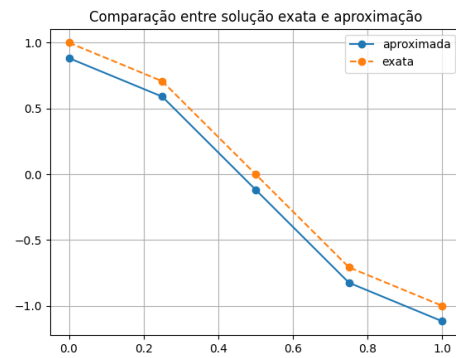


(b) $\beta = 100$

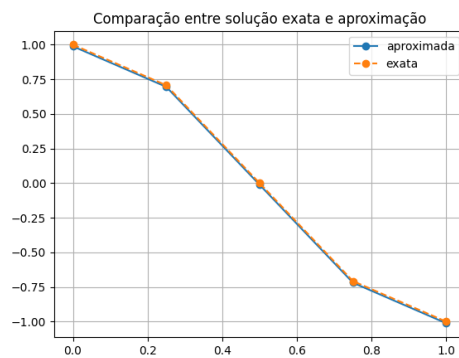
Para $\alpha = 0$, temos:



(a) $\beta = 1$



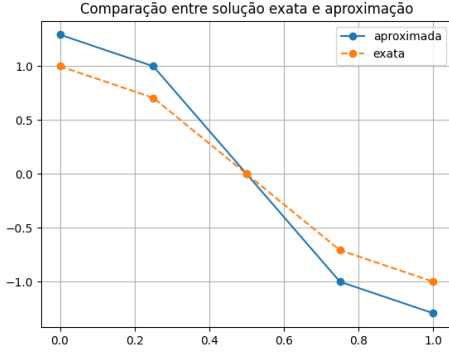
(b) $\beta = 10$



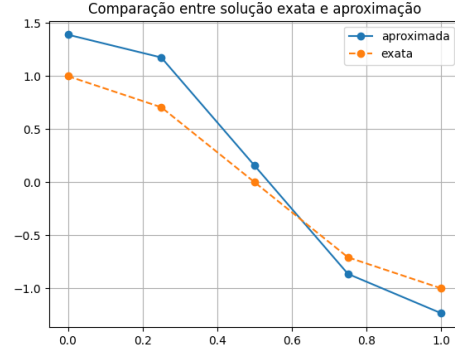
(c) $\beta = 100$

Dessa forma, fica claro que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ resultam na não imposição da condição de contorno, o que faz com que o problema permaneça indefinido.

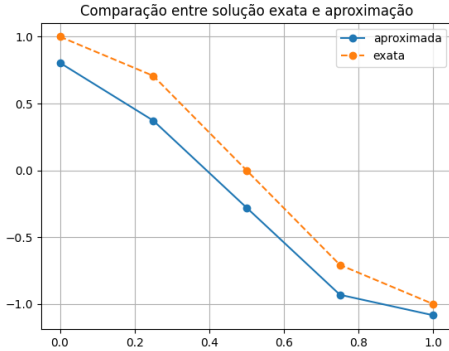
Para $\alpha = 1$, temos:



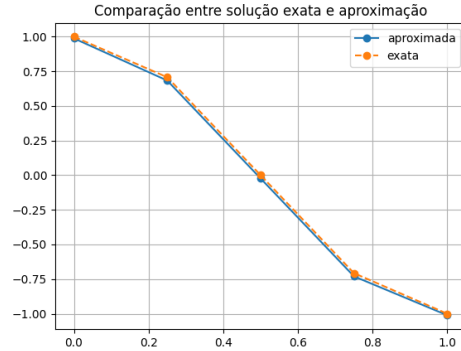
(a) $\beta = 0$



(b) $\beta = 1$



(c) $\beta = 10$



(d) $\beta = 100$

- c) Com o fim de propor uma formulação descontínua definida em cada elemento onde as condições de transmissão são impostas por um multiplicador de Lagrange λ , lida-se com o cálculo de cada elemento separadamente aplicando o método de Nitsche em cada um deles.

Sendo cada elemento do domínio $K = [x_k, x_{k+1}]$ temos a formulação fraca do problema (1) para cada elemento em uma única dimensão:

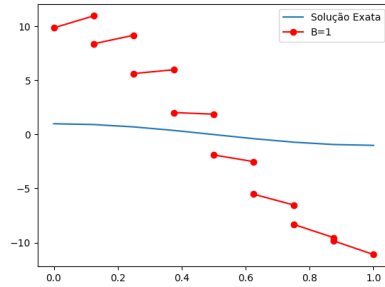
$$\int_K \frac{dudv}{dxdx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \alpha \frac{dv}{dx} u \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \beta uv \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f v dx + \alpha \frac{dv}{dx} \lambda \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \beta \lambda v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (6)$$

Com $\forall v \in \mathcal{V}$.

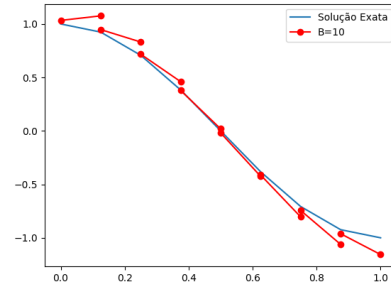
A partir dessa formulação (6), é possível trabalhar com λ sendo a solução exata para o problema nos pontos de interface entre elementos.

d) A partir da implementação da formulação apresentada no item c), é possível comparar a solução exata do problema com a aproximação formulada utilizando polinômios lineares de interpolação.

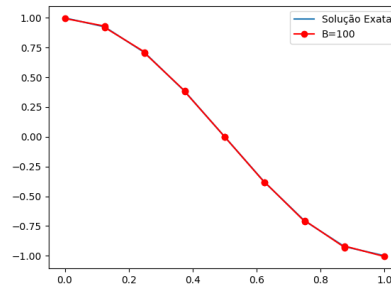
A princípio é apresentada o resultado obtido para $\alpha = -1$:



(a) $\beta = 1$

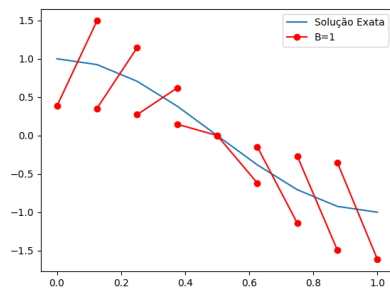


(b) $\beta = 10$

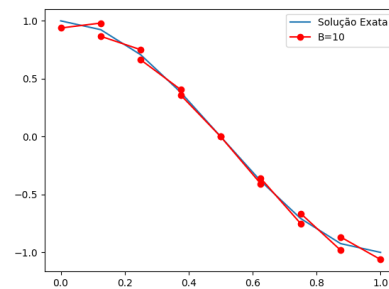


(c) $\beta = 100$

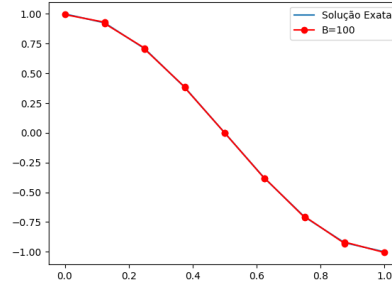
Para $\alpha = 0$, temos as aproximações:



(a) $\beta = 1$

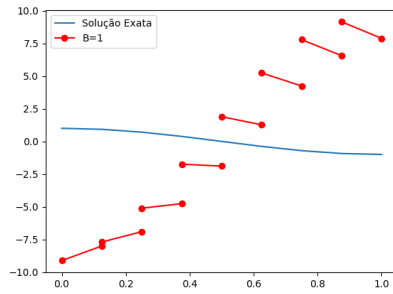


(b) $\beta = 10$

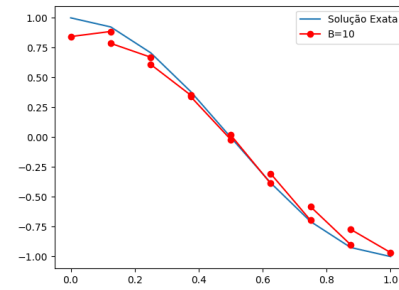


(a) $\beta = 100$

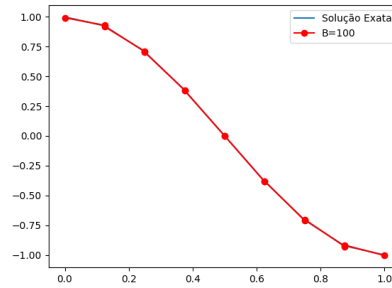
Para $a = 1$, temos as aproximações:



(a) $\beta = 1$



(b) $\beta = 10$



(c) $\beta = 100$

Vale ressaltar que, independente do valor de α para $\beta = 0$, o problema fica indefinido pois não impõe condição de contorno tanto no domínio do problema, como em cada elemento separadamente.

- e) Para o caso do multiplicador de Lagrange como uma variável, precisamos definir uma segunda equação para a solução do sistema, pois da forma descrita no item c) com λ como uma variável,

o sistema está "aberto", com duas incógnitas e uma única equação.

A segunda equação serve para impor fracamente que o salto da derivada de u entre um elemento e outro seja zero. Aproximando a continuidade da solução geral. Dessa forma, o sistema fica:

$$\int_K \frac{dudv}{dxdx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \alpha \frac{dv}{dx} u \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \beta uv \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f v dx + \alpha \frac{dv}{dx} \lambda \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \beta \lambda v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (7)$$

Com $\forall v \in \mathcal{V}$.

$$\int_{\delta K} \frac{du}{dx} \mu ds - \beta \int_{\delta K} (u - \lambda) \mu ds = 0 \quad (8)$$

Com $\forall \mu \in \bar{\mathcal{M}}$.

Os espaços do multiplicador em uma dimensão são:

$$M = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda(a) = \lambda(b) = g\} \quad (9)$$

$$\bar{M} = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu(a) = \mu(b) = 0\} \quad (10)$$

A resolução do método, consiste em encontrar $u \in \mathcal{U}$ e $\lambda \in \mathcal{M}$, tal que:

$$a(u, v) + b(\lambda, v) = f(v), \forall v \in \mathcal{V} \quad (11)$$

$$\sum_K d(u, \mu) + \sum_K c(\lambda, \mu) = 0, \forall \mu \in \bar{\mathcal{M}} \quad (12)$$

Sendo as matrizes a, b, c, d, f definidas como:

$$a(u, v) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dudv}{dxdx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \alpha \frac{dv}{dx} u \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \beta uv \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (13)$$

$$b(\lambda, v) = -\alpha \frac{dv}{dx} \lambda \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \beta \lambda v \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (14)$$

$$c(\lambda, \mu) = \beta \lambda \mu \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (15)$$

$$d(u, \mu) = \frac{du}{dx} \mu \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \beta \mu u \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \quad (16)$$

$$f(v) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f v dx \quad (17)$$

Com as matrizes definidas, origina-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{D} & \mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Escrevendo o problema para cada elemento, temos:

$$A_K U_K + B_K \Lambda = F_K \quad (19)$$

$$\sum_K D_k U_k + \sum_K C_K \Lambda = 0 \quad (20)$$

Isolando o U na equação (19), temos:

$$U_K - A_K^{-1}(F_k - B_K \Lambda) \quad (21)$$

Substituindo (21) em (20), temos:

$$\sum_K (D_K A_K^{-1} B_K - C_K) \Lambda = \sum_K D_K A_K^{-1} F_K \quad (22)$$

Para cada elemento, de acordo com (22), é gerada uma contribuição local para o sistema linear geral do cálculo do multiplicador.

Resolvido o sistema linear do multiplicador, impõe-se os valores de multiplicadores na equação (7) para a obtenção da aproximação do problema.

- f) Resolvendo o problema (1) utilizando o método híbrido com formulação descrita em (7)-(8) no domínio $\Omega = [0, 1]$ e solução exata $u = \sin(\pi x)$, é possível testar a convergência na norma $L^2(\Omega)$ para polinômios de ordem $k = 1, 2, 3, 4$ empregando $\alpha = -1, 0, 1$. São escolhidos valores $\beta = k^2 \frac{\beta_0}{h}$, com $\beta_0 = 10$.

* Para $\alpha = -1$, temos:

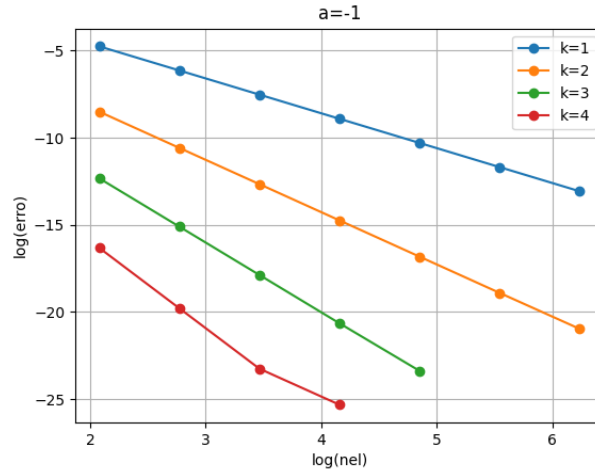


Figura 9: Para $\alpha = -1$, temos a taxa de convergência 1.99 para $k=1$, 2.99 para $k=2$, 3.99 para $k=3$, 4.99 para $k=4$

* Para $\alpha = 0$, temos:

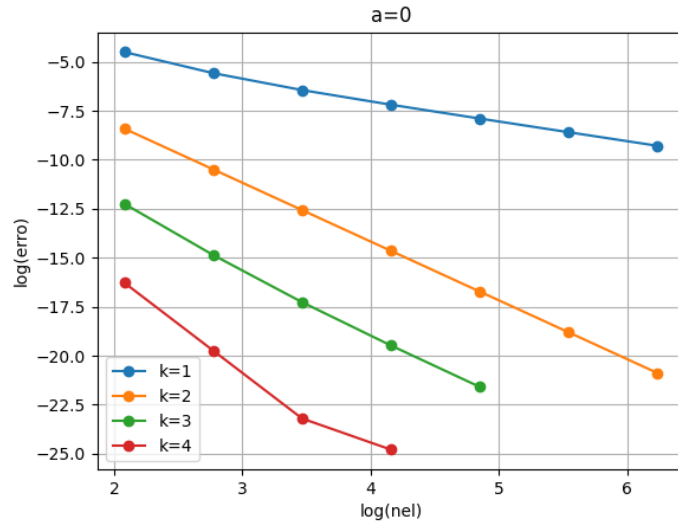


Figura 10: Para $\alpha = 0$, temos a taxa de convergência 1.55 para $k=1$, 2.99 para $k=2$, 3.77 para $k=3$, 4.99 para $k=4$

* Para $\alpha = 1$, temos:

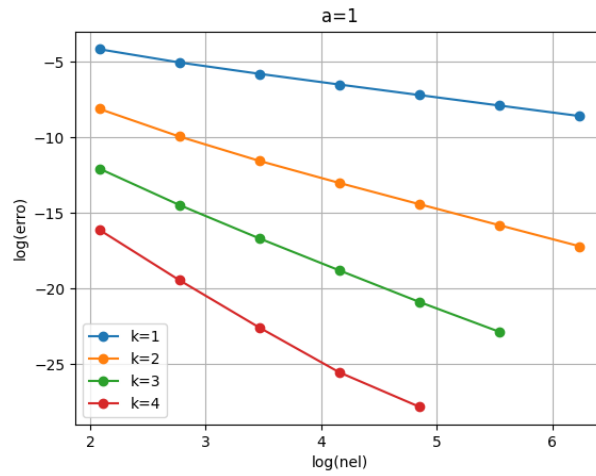


Figura 11: Para $\alpha = 1$, temos a taxa de convergência 1.26 para $k=1$, 2.64 para $k=2$, 3.47 para $k=3$, 4.81 para $k=4$

Com as taxas de convergência para cada valor de α pode-se observar que o único caso, em que as aproximações obtiveram taxa ótima $taxa = k + 1$ em polinômios de todos os graus testados foi o caso de $\alpha = -1$.

Vale comparar também a taxa de decaimento do erro da aproximação utilizando o método híbrido com a taxa de decaimento obtida com o método de Galerkin Clássico.

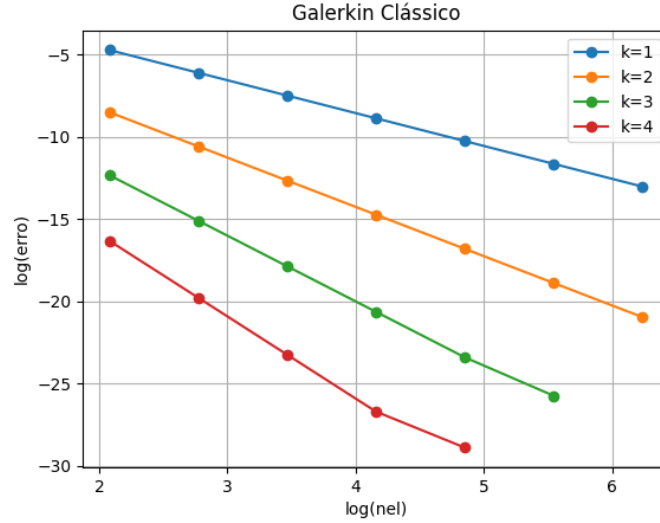


Figura 12: Para o método de Galerkin Clássico, são observadas as taxas de convergência 1.99 para $k=1$, 2.99 para $k=2$, 3.99 para $k=3$ e 4.99 para $k=4$

Dessa forma, pode-se concluir que tanto o método de Galerkin Clássico quanto o método híbrido utilizando valor $\alpha = -1$ possuem taxa de decaimento ótima. Entretanto, é notável a diferença de tempo de execução de ambos os métodos.

Utilizando o método de Galerkin Clássico para resolver o problema com 512 elementos e polinômios de grau $k = 4$ em um código em $C++$ foram necessários 21.4 segundos e é obtido um erro de valor $1.77 \cdot 10^{-11}$.

Em contrapartida, o método híbrido, para resolver o mesmo problema com a mesma discretização e mesmos polinômios de interpolação foram necessários apenas 0.505 segundos obtendo um valor de erro $2.08 \cdot 10^{-11}$.

Considerando a diferença entre os erros dos métodos desprezível, pode-se dizer que o método híbrido foi 42 vezes mais rápido que o método de Galerkin Clássico. Essa grande diferença é justificada pela resolução do grande sistema linear presente no Galerkin Clássico, com 2049 variáveis $(1 + (n_{int} - 1)nel)$, e a resolução dos sistemas lineares do método híbrido com apenas 513 variáveis $(nel + 1)$ e de 4 variáveis para cada elemento.

Além do tamanho do sistema linear, é importante observar a natureza da matriz de rigidez. Nesse caso, ao aplicar o método de Galerkin Clássico a matriz é penta-diagonal, enquanto a matriz do multiplicador no método híbrido é tri-diagonal, permitindo inclusive a utilização de métodos de resolução de sistemas lineares mais rápidos como o Algoritmo de Thomas (que não

foi aplicado nesse estudo). Ambos os sistemas lineares foram resolvidos por decomposição LU com pivoteamento parcial.