1. Seja o problema misto definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com contorno $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\nabla p \quad \text{em} \quad \Omega \\ \text{div}\mathbf{u} &= f \qquad \text{em} \quad \Omega \\ p &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

a) Para apresentar a formulação mista dual para o problema (1), é preciso multiplicar as duas equações que definem o problema por uma função :

$$\mathbf{uv} = -\nabla pv \qquad ,\forall v \in V \tag{2}$$

$$\text{div}\mathbf{u}\text{q} = \text{fq} \qquad ,\forall q \in Q \tag{3}$$

Integrando as duas equações:

$$\int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla pvdx = 0 \qquad ,\forall v \in V \tag{4}$$

$$\int_\Omega divuqdx - \int_\Omega fqdx = 0 \qquad ,\forall q \in Q \tag{5}$$

Aplicando o processo de integração por partes na equação (4), tem-se:

$$\int_\Omega uvdx - \int_\Omega pdivvdx + \int_{\delta\Omega} pvnds = 0 \qquad ,\forall v \in V \tag{6}$$

$$\int_\Omega divuqdx - \int_\Omega fqdx = 0 \qquad ,\forall q \in Q \tag{7}$$

Como a definição do problema descrito em (1), temos que $p = 0$ sobre $\delta\Omega$, podemos aplicar a condição de contorno na formulação, anulando a parcela em que p é integrado no contorno:

$$\int_\Omega uvdx - \int_\Omega pdivvdx = 0 \qquad ,\forall v \in V \tag{8}$$

$$\int_\Omega divuqdx - \int_\Omega fqdx = 0 \qquad ,\forall q \in Q \tag{9}$$

Dada a formulação mista dual descrita nas equações (8) e (9), os espaços são definidos como:

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H(div)\} \\ V &= \{v \in H(div)\} \\ P &= \{p \in L^2(\Omega)\} \\ Q &= \{q \in L^2(\Omega)\} \end{aligned}$$

b) Busca-se escrever o problema nas formas bilineares $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot)$ e lineares $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ para reformulação do problema na forma:

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(p,v) &= g(v) \\ b(q,u) &= f(q) \end{aligned}$$

Dessa forma temos que:

$$a(u,v) = \int_\Omega uvdx \tag{10}$$

$$b(p,v) = -\int_\Omega pdivvdx \tag{11}$$

$$f(q) = -\int_\Omega fqdx \tag{12}$$

$$g(v) = 0 \tag{13}$$

c) Uma forma de resolução desse problema (1) é através da adição de termos de estabilização de mínimos quadrados como:

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u} + \nabla p) \cdot (\mathbf{v} + \nabla q)\, dx$$

para que seja possível modificar os espaços U e Q para que seja possível a resolução do problema.

Dessa forma, as formas bilineares sofrem a seguinte alteração:

$$a(u,v) = \int_\Omega uvdx - \frac{1}{2}\int_\Omega uvdx \tag{14}$$

$$b(p,v) = -\int_\Omega pdivvdx - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla pvdx \tag{15}$$

$$c(p,q) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p \nabla qdx \tag{16}$$

$$f(q) = -\int_\Omega fqdx \tag{17}$$

$$g(v) = 0 \tag{18}$$

Dessa forma, temos que os espaços:

$$\begin{gathered} U = \{u \in H(div)\} \\ V = \{u \in H(div)\} \\ Q = \{q \in H^1(\Omega)\} \\ P = \{p \in H^1(\Omega)\} \end{gathered}$$

Após a estabilização, os espaços U e P são compatíveis, permitindo a utilização de bases de Lagrange para resolução do problema.

d) Restringindo o problema (1) ao caso unidimensional:

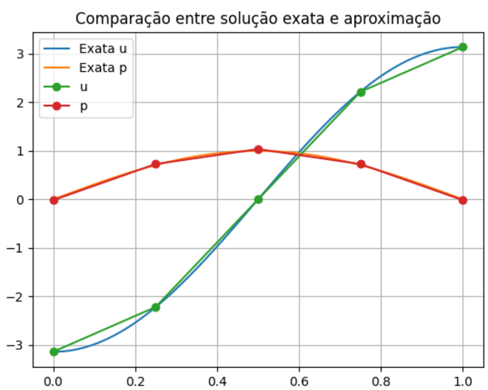
$$\begin{gathered} u = -\frac{dp}{dx} \\ \frac{du}{dx} = f \end{gathered}$$

Tomando a solução exata $p = \sin(\pi x)$ no intervalo $\Omega = [0, 1]$, temos que:

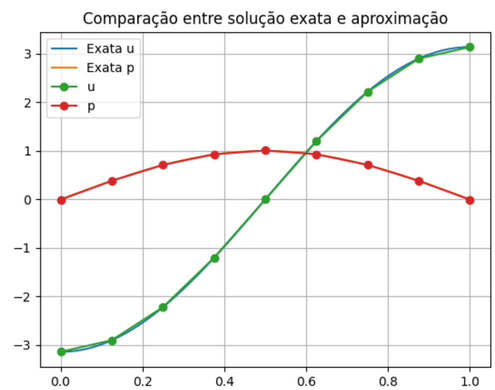
$$u = -\pi cos(\pi x) \tag{19}$$

$$f = \pi^2 sen(\pi x) \tag{20}$$

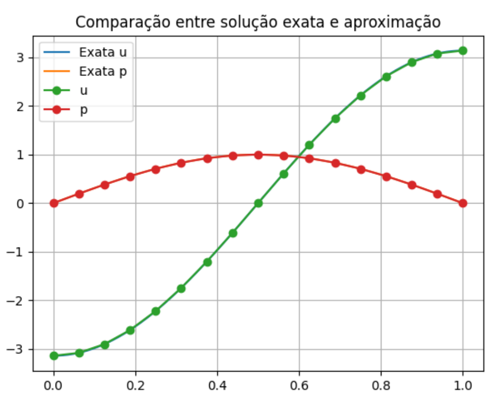
Com isso, é possível implementar a formulação estabilizada obtida no item (c) e comparar a aproximação obtida com a solução exatas para ambas as varíaveis:



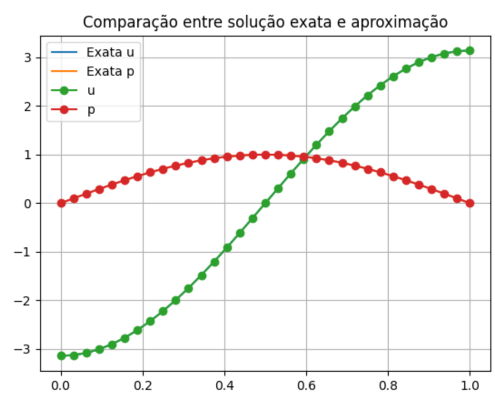
(a)



(b)



(c)



(d)

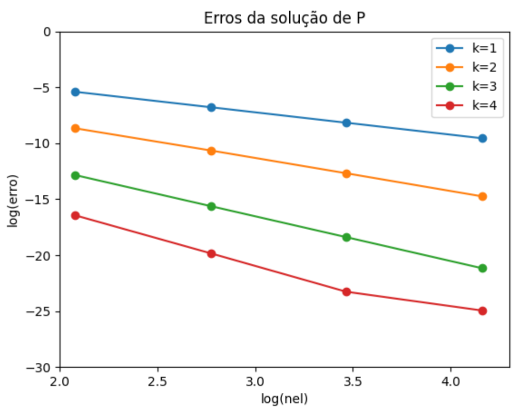
Figura 1: Comparação entre aproximações e soluções exatas para as duas variáveis em estudos com 4(a), 8(b), 16(c) e 32(d) elementos.

e) Calculando o erro da aproximação em relação a solução exata do problema a partir da norma L2, é possível estabelecer taxa de convergência da aproximação a partir da análise do decaimento do erro a medida do aumento do número de elementos utilizados para aproximar a solução.

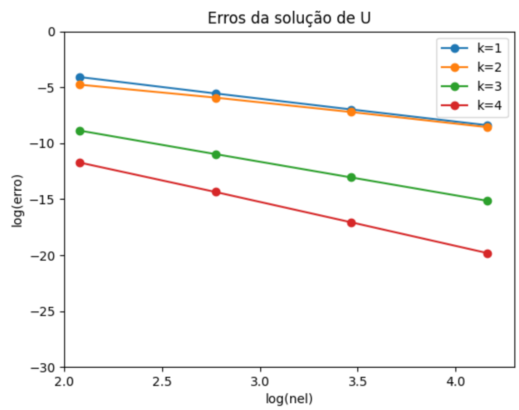
$$taxaconvergencia = \frac{log(erros(nel2) - log(erros(nel1))}{log(nel2) - log(nel1)} \tag{21}$$

Sendo $nel1$ e $nel2$ os números de elementos utilizados em duas execuções da aproximação e $erros(nel1)$ e $erros(nel2)$ os valores de erro na norma de L2 obtidos respectivamente.

Dessa forma, é possível construir um gráfico para demonstrar a convergência da solução:



(a)



(b)

Figura 2: Gráficos demonstrando o decaímento do erro para as aproximações com bases de LaGrange de grau k para as duas variáveis do problema (1)

Nos gráficos obtidos em (3) é possível observar a taxa de convergência calculada em (21) através da inclinação das retas. O valor da taxa de convergência é numéricamente igual a tangente do ângulo das retas com o eixo das abscissas.

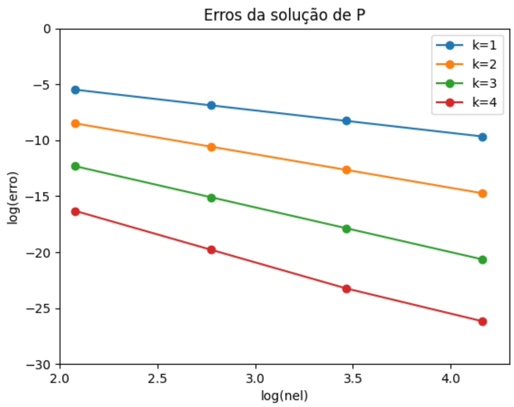
Dessa forma, observa-se que para a solução de p o erro decaí na ordem de $k + 1$, já que para k=1 a taxa obtida foi de 1.99, para k=2 a taxa obtida foi de 2.88, para k=3 a taxa obtida foi de 4.0 e para k=4 a taxa obtida foi de 4.89.

Já para a solução de u observa-se que o erro decaí na ordem de k já que para k=1, a taxa obtida foi de 2.0, para k=2 a taxa foi de 1.67, para k=3 a taxa foi de 3.0 e para k=4 a taxa foi de 3.78. Para k=1, é obtido também taxa ótima como esperado por essa estabilização apesar de não haver comprovação de que isso ocorra sempre.

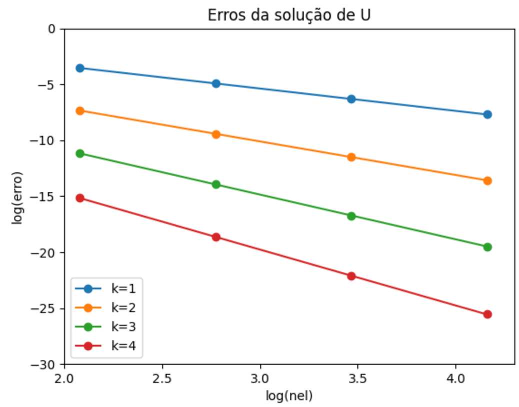
f) O termo de estabilização apresentado no item (e) não é o único que pode ser adicionado para resolução do problema (1). Outra opção, que pode ser adicionada junto ao outro termo de estabilização é:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\frac{du}{dx} - f\right)\frac{dv}{dx}dx$$

Ao adicionar esse segundo termo de estabilização e realizando novamente o estudo de convergência, obtem-se:



(a)



(b)

Figura 3: Gráficos demonstrando o decaímento do erro para as aproximações com bases de LaGrange de grau k para as duas variáveis do problema (1) com os dois termos de estabilização

Observa-se que nesse caso, o erro decai tanto para a variável u quanto para a variável v em taxa ótima k+1.

g) É interessante anular os termos de estabilização incluídos nos itens (c) e (f) para observar os resultados. Porém, ao anular esses termos, o método de elementos finitos não resolve o problema (1).

Isso se deve ao fato, do problema original formulado em (a) possui espaços definidos para V e Q de forma que é necessário satisfazer as seguintes condições:

i) Para todo $v \in V$ e para todo $q \in Q$:

$$\nabla v = q \tag{22}$$

ii) Para todo $q \in Q$ e para todo $v \in V$:

$$\nabla q = v \tag{23}$$

E não é possível satisfazer ambas as condições com bases de aproximação de LaGrange. Ao aplicar termos de estabilização na formulação do problema, o que ocorre é o enfraquecimento dessas condições, tornando possível aproximar o problema utilizando bases de LaGrange.

2. Partindo da formulação mista dual para o problema (1), estabilizada pelos termos

i) $-\frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u} + \nabla p) \cdot (\mathbf{v} + \nabla q) d\mathbf{x}$

ii) $\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u} - f)(\operatorname{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x}$

iii) $\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u})(\nabla \times \mathbf{v}) d\mathbf{x}$

é possível demonstrar a continuidade e a estabilidade pelo Teorema de Babuška.

Segundo o Teorema de Babuška, para assegurar a continuidade das formas $A(X,Y)$ e $F(y)$ é necessário se as hipóteses são satisfeitas:

$$|A(X,Y)| \leq M||X||_U||Y||_V, \qquad \forall [X,Y] \in U \times V \tag{24}$$

Para algum $0 < M < \infty$.

$$|F(Y)| \leq C||Y||_V, \qquad \forall Y \in V \tag{25}$$

Para algum $0 < C < \infty$.

Para assegurar a estabilidade, busca-se satisfazer as seguintes hipóteses:

$$\underset{X \in U}{sup} \frac{A(X,y)}{||X||_U} \geq \alpha_1 ||Y||_V, \qquad \forall Y \in Y \times V \tag{26}$$

$$\underset{X \in U}{sup} \frac{A(X,y)}{||Y||_Y} \geq \alpha_1 ||X||_U, \qquad \forall X \in U \tag{27}$$

Para o problema (1) descrito na forma mista dual (9) e com os termos de estabilização i), ii) e iii), busca-se encontrar [u, p] $\in U \times Q$, tal que:

$$A([u,p],[v,q]) = F([v,q]) \qquad , \forall [u,p] \in U \times Q \tag{28}$$

Sendo os espaços:

$$U = Q = H^2(\Omega) \tag{29}$$

E as formas A e F:

$$A([u,p],[v,q]) = \frac{1}{2}(\int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla pvdx + \int_\Omega \nabla qudx - \int_\Omega \nabla p \nabla qdx + \int_\Omega divudivvdx + \int_\Omega roturotv) \tag{30}$$

$$F([v,q]) = -\int_\Omega fqdx + \frac{1}{2}\int_\Omega fdivvdx \tag{31}$$

Além disso, vale anotar que a norma mista associada aos espaços U e V é:

$$||[v,q]||^2_{U \times Q} = ||v||^2_0 + ||divv||^2_0 + ||\nabla q||^2_0 + ||rotv||^2_0 \tag{32}$$

Assim, para comprovar a continuidade da forma A:

$$|A([u,p],[v,q])| \leq \frac{1}{2}(||u||_0||v||_0 + ||\nabla p||_0||v||_0 + ||\nabla q||_0||u||_0 + ||\nabla p||_0||\nabla q||_0 + ||divu||_0||divv||_0 + ||rotu||_0 + ||rotv||_0) \tag{33}$$

Como temos que:

$$||[u,p]||_{U\times Q}||[v,q]||_{U\times Q} = ||u||_0||v||_0 + ||\nabla p||_0||v||_0 + ||\nabla q||_0||u||_0 + ||\nabla p||_0||\nabla q||_0 + ||divu||_0||divv||_0 + ||rotu||_0 + ||rotv||_0 \tag{34}$$

é possível concluir que M = 1/2 satifaz a condição de continuidade para a forma A.

Fazendo a análise da continuidade da forma F:

$$|F(v,q)| = |||f||_0||q||_0 + \frac{1}{2}||f||_0||divv||_0 dx| \leq |||f||_0||q|| + \frac{1}{2}||f||_0||divv||_0 \tag{35}$$

$$|||f||_0||q|| + \frac{1}{2}||f||_0||divv||_0 \leq ||f||_0(||q||_0 + ||divv||_0) \leq C||[v,q]||_{U\times Q} \tag{36}$$

Dessa forma, é possível afirmar que a forma F é contínua, já que $C = ||f||_0$ satisfaz a condição de Babuška como demonstado em (36).

Para atestar a estabilidade da forma A, de acordo com o Teorema descrito em (26) temos:

$$\underset{X\in U}{sup} \frac{|A([u,p],[v,q])|}{||[v,q]||_{U\times Q}} \geq \frac{|A([u,p],[u,-p])|}{||[u,-p]||_{U\times Q}} \tag{37}$$

$$\frac{|A([u,p],[u,-p])|}{||[u,-p]||_{U\times Q}} = \frac{1}{2}\frac{|\int_\Omega u^2dx + \int_\Omega pdivudx - \int_\Omega p.divudx + \int_\Omega \nabla p\nabla pdx + \int_\Omega divudivudx + \int_\Omega roturotudx|}{||[u,p]||_{U\times Q}} \tag{38}$$

$$\frac{|A([u,p],[u,-p])|}{||[u,-p]||_{U\times Q}} = \frac{1}{2}\frac{|\int_\Omega u^2dx + \int_\Omega \nabla p\nabla pdx + \int_\Omega divudivudx + \int_\Omega roturotudx|}{||[u,p]||_{U\times Q}} \tag{39}$$

$$\frac{|A([u,p],[u,-p])|}{||[u,-p]||_{U\times Q}} = \frac{1}{2}\frac{||[u,p]||^2_{U\times Q}}{||[u,p]||_{U\times Q}} \tag{40}$$

$$\frac{|A([u,p],[u,-p])|}{||[u,-p]||_{U\times Q}} = \frac{1}{2}||[u,p]||^2_{U\times Q} \tag{41}$$

Assim, relacionando a equação (41) e (37) com o teorema (26) é possível afirmar que o problema é estável com o coeficiente $\alpha = \frac{1}{2}$, logo a estabilização é contínua e estável, possuindo então apenas uma solução.