Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
PPGMC
Lucas Marins Ramalho de Lima 202165555C

1. Dado o problema forte:

$$-\Delta = f \text{em } \Omega \tag{1}$$

$$u = g \text{ sobre } \delta\Omega_D \tag{2}$$

$$\nabla u.n = h \text{ sobre } \delta\Omega_N \tag{3}$$

onde $\delta\Omega = \delta\Omega_D \cup \delta\Omega_N$ e $\delta\Omega_D \cap \delta\Omega_N = \emptyset$.

Para resolvê-lo através do método contínuo de Galerkin, é necessário enfraquecê-lo. Nesse caso em específico, o problema será aproximado em apenas uma dimensão, supondo $\Omega = [0, 1.5]$, e os parâmetros f, g e h serão definidos a partir da imposição da solução exata dada por $u = sen(\pi x)$, $\delta\Omega_N = 0$ e $\delta\Omega_D = 1.5$.

Dessa forma, reescrevendo o problema forte para uma única dimensão e obedecendo a solução exata proposta e o domínio imposto:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \pi^2 sen(\pi x) \text{ ,em } \Omega = [0, 1.5] \tag{4}$$

$$u(1.5) = sen(\frac{3}{2}\pi) \tag{5}$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \pi \tag{6}$$

Para aplicação do método de Galerkin Contínuo, busca-se a representação do problema em uma formulação variacional. Para isso, multiplica-se a equação 4 por uma função v e integramos:

$$-\int_\Omega \frac{d^2u}{dx^2}.vdx = \int_\Omega \pi^2 sen(\pi x) v dx, \, \forall v \in V \tag{7}$$

Através da aplicação do método de integração por partes, tem-se:

$$-\int_\Omega \frac{dudv}{dxdx}dx + \frac{du}{dx}v\Big|_0^{1.5} = \int \pi^2 sen(\pi x) v dx, \, \forall v \in V \tag{8}$$

Sabemos que o valor de $u(1.5) = sen(\frac{3}{2}\pi)$ e que $\frac{du}{dx}(0) = \pi$, dessa forma, a formulação variacional do problema é

$$-\int_\Omega \frac{dudv}{dxdx}dx + \pi = \int \pi^2 sen(\pi x) v dx, \, \forall v \in V \tag{9}$$

Em que $u \in U = \{u \in H^1(\Omega) | u(1.5) = sen(\frac{3}{2}\pi)\}$ e $v \in V = \{v \in H^1(\Omega) | v(1.5) = 0\}$.

Resolvendo o problema computacionalmente, com malhas de 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos e utilizando polinômios de interpolação nos elementos de grau k = 1 obtem-se o seguinte resultado:

Para demonstrar que a taxa de convergência $O(h^{k+1})$ na norma de $L^2(\Omega)$ realiza-se o mesmo experimento demonstrado na figura 1 com polinômios de grau k= 1, 2, 3 e 4 e anota-se o erro obtido entre a aproximação e a solução exata para a construção do gráfico 2 no qual é possível observar que a taxa de convergência é igual ao grau do polinômio utilizado para aproximar o problema.

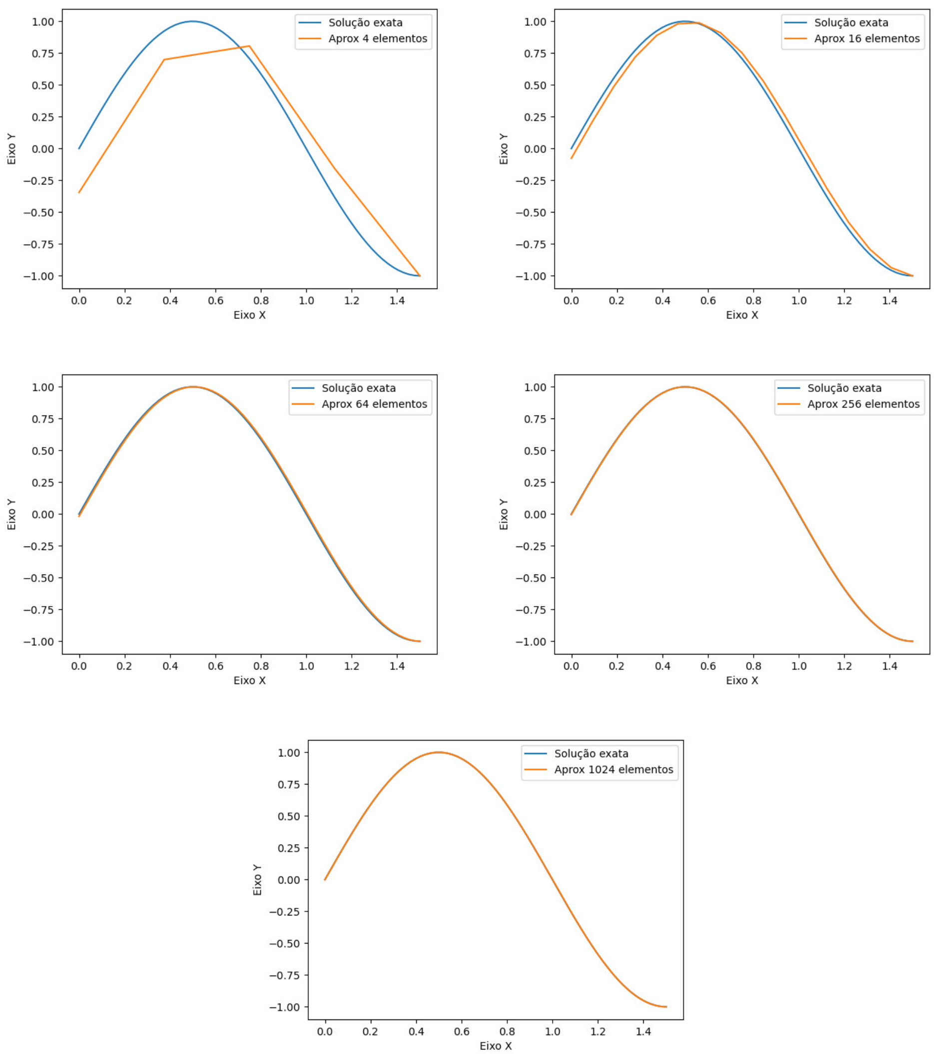

Figura 1: Gráficos comparando a solução exata do problema 4 (em azul) com a solução proximada em diferentes número de elementos utilizando polinômio de primeiro grau ($k = 1$)para interpolação.

2. Seja o problema de difusão-reação:

$$-\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + u = 1,\, x \in \Omega = [0,1] \tag{10}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{11}$$

Levando em conta que a solução exata para o problema 10 é:

$$u(x) = c_1 e^{\frac{-x}{\sqrt{\epsilon}}} + c_2 e^{\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}} + 1 \tag{12}$$

onde $c_1 = -1 - c_2$ e $c_2 = \frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{\epsilon}}} - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} - e^{\frac{-1}{\sqrt{\epsilon}}}}$, é possível apresentar uma formulação variacional ao integrar a equação e multiplicar por uma função v:

$$\int_\Omega -\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega v dx,\, \forall v \in V \tag{13}$$

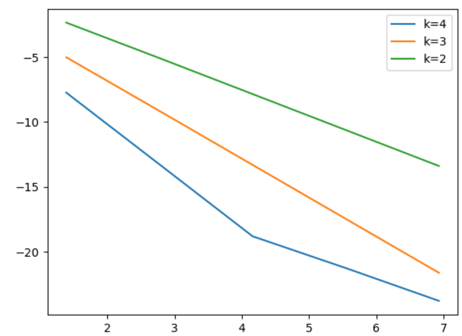

Figura 2: Gráfico demonstrando o decaimento do erro para aproximações utilizando polinômio de grau k.

$$-\epsilon \int_{\Omega} \frac{dudv}{dxdx} dx + \frac{\epsilon du}{dx} v \Big|_0^1 + \int_{\Omega} uvdx = \int_{\Omega} vdx, \, \forall v \in V \tag{14}$$

Como $u(0) = u(1) = 0$, temos que:

$$-\epsilon \int_{\Omega} \frac{dudv}{dxdx} dx + \int_{\Omega} uvdx = \int_{\Omega} vdx, \, \forall v \in V \tag{15}$$

Dessa forma, é apresentada na equação 15 a formulação variacional do problema 10 nos espaços $U = \left\{ u \in H^1(\Omega) | u(0) = u(1) = 0 \right\}$ e $V = \left\{ v \in H^1(\Omega) | v(0) = v(1) = 0 \right\}$

Utilizando essa formulação para aproximar o problema quando $\varepsilon = 10^{-3}$, é possível observar uma instabilidade nas regiões de alto crescimento e alto decaimento da solução na figura 3.

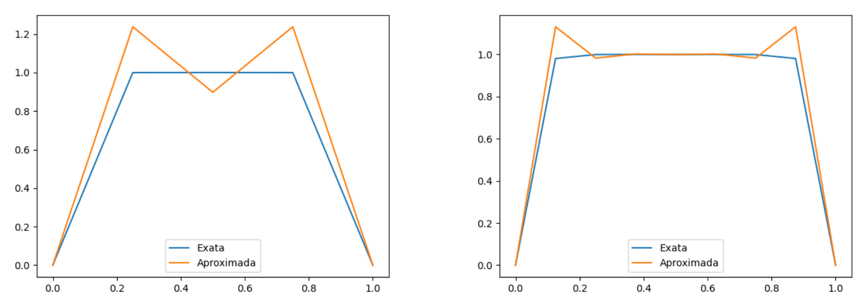

Figura 3: Comparação entre solução exata (em azul) e aproximação com método de elementos finitos utilizando 4 e 8 elementos respectivamente, ambos aproximados por polinômios de grau $k = 1$

De forma semelhante, utiliza-se para aproximar o problema quando $\varepsilon = 10^{-4}$ 16 e 32 elementos, e nesses casos também é apresentada a instabilidade nas áreas em que a variação da função é mais alta, como demonstrado na figura 4.

Através de uma análise da discretização gerada pelo método de elementos finitos obtém-se como condição de estabilidade que $h < \sqrt{6\varepsilon}$, sendo h o tamanho de cada elemento.

Quando realizado o estudo da figura 3, foi utilizado para h valores inferiores a $\sqrt{6\varepsilon}$ Para demonstrar gráficamente essa relação de destabilidade, realiza-se novamente os estudos com outros valores para h.

Nota-se que para o caso da aproximação com 12 elementos, em que $h = 0,83 > \sqrt{6\varepsilon} = 0,077459667$. a condição de estabilidade não é satisfeita, então a aproximação supera o limite máximo da solução exata nas regiões em que a derivada da solução é mais alta.

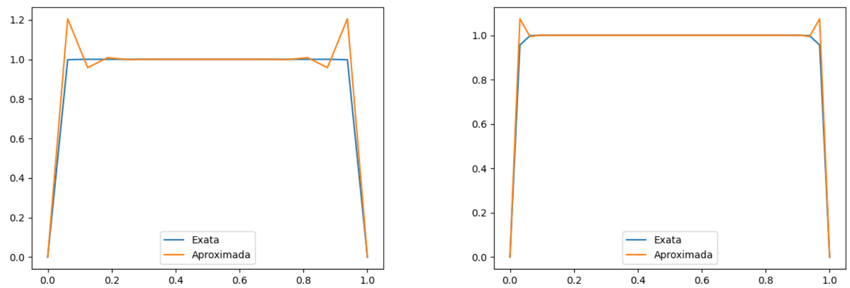

Figura 4: Comparação entre solução exata (em azul) e aproximação com método de elementos finitos utilizando 16 e 32 elementos respectivamente, ambos aproximados por polinômios de grau $k = 1$

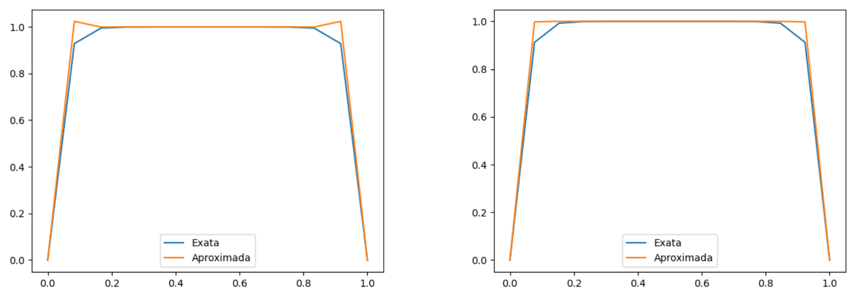

Figura 5: Gráficos de comparação entre solução exata (em azul) com solução aproximada utilizando 12 e 13 elementos de aproximação e com $\varepsilon = 10^{-3}$.

Já na aproximação com 13 elementos, em que $h = 0,76 < \sqrt{6\varepsilon} = 0,077459667$ a condição de estabilidade é satisfeita. No gráfico, é notável que a aproximação não supera o valor máximo da solução exata como nos casos anteriores onde a condição não era respeitada.

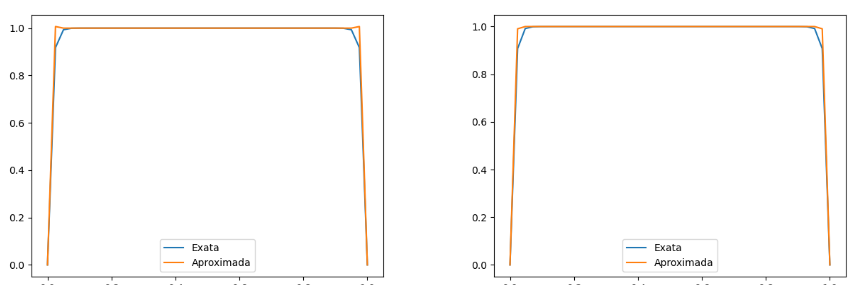

Figura 6: Gráficos de comparação entre solução exata (em azul) com solução aproximada utilizando 40 e 41 elementos de aproximação com $\varepsilon = 10^{-4}$

Com $\varepsilon = 10^{-4}$, a condição de estabilidade imposta é que $h < 0,024494897$. Quando aproxima-se a solução no domínio $\Omega = [0,1]$ com 40 elementos, utiliza-se $h = 0,025$, que não é pequeno o suficiente para satisfazer a condição de estabilidade, provocando a instabilidade nas regiões de maior variação da solução.

Porém, ao aproximar a solução com 41 elementos, a solução é satisfeita em que $h = 0,024390244$. Dessa forma, observa-se que a solução aproximada não supera o valor máximo da solução exata.