

1. Seja o problema:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

$$u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2)$$

onde $\Omega = [a, b]$.

- g) Implemente a formulação de Galerkin descontínuo (DG) para o problema (1)-(2) (baseado nos slides da aula) e repita o item (f) comparando os resultados e o custo computacional do método híbrido com o método DG.
- g) Para resolver o problema (1)-(2) utilizando o método de Galerkin Descontínuo (DG), cria-se a formulação:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, \text{ em } K \quad (3)$$

$$u = g, \text{ em } e \in \varepsilon_h^\delta \quad (4)$$

Sendo $K \in \Omega$ cada elemento do domínio, e ε_h^δ o contorno do domínio.

Para finalizar a formulação descontínua para cada elemento K (3)-(4), é necessário impor as condições de interface:

$$[[u]] = 0 \text{ sobre } e \in \varepsilon_h^0 \quad (5)$$

$$[[\nabla v]] = 0 \text{ sobre } e \in \varepsilon_h^0 \quad (6)$$

Multiplicando a formulação (3)-(4) por v e integrando por partes, temos:

$$\int_K \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} dx - \int_{\delta K} \frac{du}{dv} v ds = \int_K f v dx \quad (7)$$

Soma-se então a identidade proposta por Arnold, Brezzi, Cockburn e Marini:

$$\sum_{K \in \tau_h} \int_{\delta K} \frac{du}{dx} v ds = \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{ \{v\} \} [[\frac{du}{dx}]] ds + \sum_{e \in \varepsilon_h^0} \int_e [[v]] \{ \{ \frac{du}{dx} \} \} ds \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), levando em conta que $[[\frac{du}{dx}]] = 0$ e incluindo um termo de simetria, temos:

$$\int_K \frac{du}{dx} - \sum_{e \in \varepsilon_h^0} \int_e [[v]] \{ \{ \frac{du}{dx} \} \} ds + \alpha \sum_{e \in \varepsilon_h^0} \int_e [[u]] \{ \{ \frac{dv}{dx} \} \} = \int_K f v dx \quad (9)$$

Por fim, é adicionado um termo de penalização para forçar que a continuidade entre os elementos seja incluída de forma consistente:

$$\sigma_0 \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e [[u]] [[v]] ds \quad (10)$$

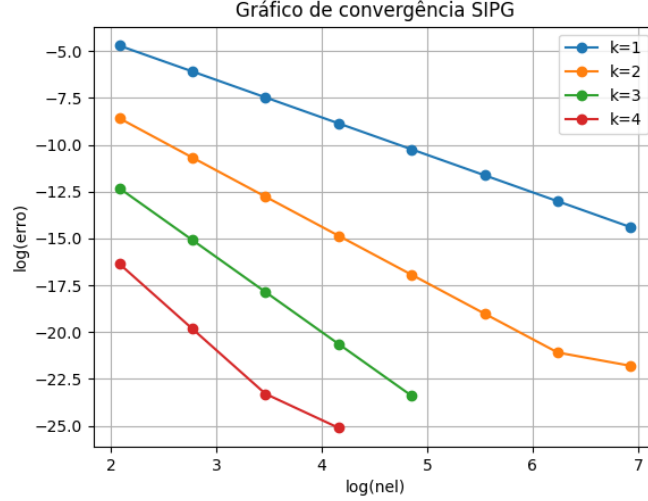


Figura 1: Gráfico de decaimento do erro na norma de L2 entre a aproximação obtida através do método do Galerkin Descontínuo e a solução exata proposta para o problema.

No domínio $\Omega = [0, 1]$ e solução exata $u = \sin(\pi x)$, é possível testar a convergência da formulação desenvolvida $L^2(\Omega)$ para polinômios de ordem $k = 1, 2, 3, 4$. Utilizou-se $\sigma_0 = \frac{10k^2}{h}$.

É observado no gráfico (1) que para o polinômio linear, foi obtido taxa de convergência 2, para o polinômio quadrático, taxa 3, para o polinômio cúbico, taxa 4, e para o polinômio quártico, taxa 5.

Então o Galerkin Descontínuo, assim como o Galerkin Contínuo e o método híbrido utilizando $\alpha = -1$, apresenta taxa ótima de ordem $k + 1$.

O método de Galerkin Descontínuo aplicado para gerar o gráfico (1), utiliza peso $\alpha = -1$ e $\sigma_0 \neq 0$, pode ser chamado, de maneira mais específica, de *symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)*. Também é possível aplicar o método de Galerkin Descontínuo com outros valores de α e σ_0 .

Outra forma, é o *nonsymmetric interior penalty Galerkin (NIPG)*, em que utiliza-se $\alpha = +1$ e $\sigma_0 = 1$.

Nesse método (NIPG), observa-se em (2) um erro maior que o método simétrico estudado em (1). Além disso, para polinômios lineares, cúbicos e quadráticos, é observado taxa de convergência $k + 1$, mas para polinômios quadráticos a taxa é de apenas k .

Também é possível utilizar o método do elemento global, forma pela qual é chamado o método de Galerkin Descontínuo, quando impõe-se $\alpha = -1$ e $\sigma_0 = 0$. Porém, dessa forma, a forma bilinear do método se torna indefinida e conseqüentemente o método não é estável.

Porém, para esse problema foi possível aplicar esse método e a aproximação apresentou taxa ótima na ordem de $k + 1$ para todos os graus de polinômios testados. Além disso, como observado em (3), comparando com os demais gráficos de convergências, esse método apresentou erros semelhantes ao SIPG, e menores que o NIPG.

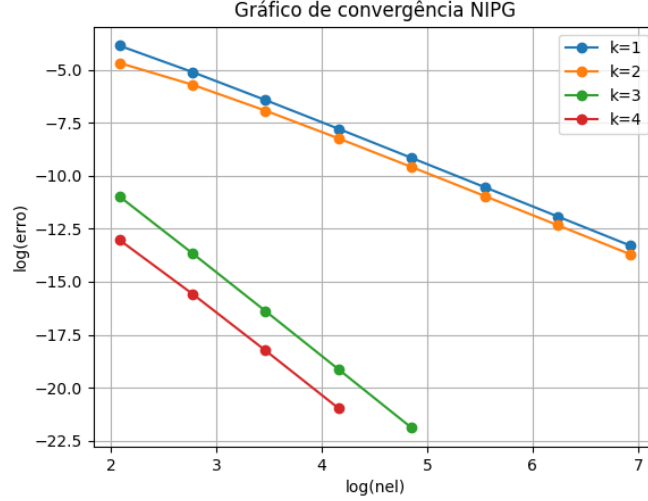


Figura 2: Gráfico de decaimento do erro na norma de L2 entre a aproximação obtida através do método do Galerkin Descontínuo NIPG e a solução exata proposta para o problema.

Outra análise interessante para se realizar é sobre a performance do método em comparação com o Galerkin Contínuo e o método híbrido. Para tal, fixou-se o mesmo problema (1)-(2) com a mesma solução exata $u = \sin(\pi x)$ aproximada em 512 elementos utilizando polinômios de 4 grau.

Para o método de Galerkin Contínuo realizar a aproximação, foram necessários 21,4 segundos e obteve um erro de $1,77 \cdot 10^{-11}$. Para o método híbrido, foram necessários 0,505 segundos, e obteve-se um erro de $2,08 \cdot 10^{-11}$. Por fim, para o método de Galerkin Descontínuo (SIPG), foram necessários 41,6 segundos e obteve erro $7,74 \cdot 10^{-10}$.

Dessa forma, pode-se concluir que o método de Galerkin Descontínuo é o mais lento comparado com os demais. Isso deve-se a dimensão da matriz gerada para resolução do sistema linear de cada método, sendo que para o método de Galerkin Contínuo, temos uma matriz de ordem $(nen - 1) * nel + 1 = 2049$, para o método híbrido temos $nel + 1 = 513$ e para o Galerkin Descontínuo temos $nen * nel = 2.560$.

Além do tamanho do sistema linear, é importante observar a natureza da matriz de rigidez. Nesse caso, ao aplicar o método de Galerkin Clássico a matriz é penta-diagonal, enquanto a matriz do multiplicador no método híbrido é tri-diagonal, permitindo inclusive a utilização de métodos de resolução de sistemas lineares mais rápidos como o Algoritmo de Thomas (que não foi aplicado nesse estudo). Por fim, a matriz gerada pelo Galerkin Descontínuo nesse caso é deca-diagonal (10 elementos na diagonal), tornando-a ainda mais lenta de resolver. Todos os sistemas lineares foram resolvidos por decomposição LU com pivoteamento parcial.

Como conclusão, para esse problema, tira-se que a aplicação do método do Galerkin Descontínuo torna-se interessante apenas através de paralelização, visto que é um método mais facilmente paralelizável que o Galerkin Contínuo por exemplo. Porém, em comparação ao método híbrido, o Galerkin Descontínuo aparenta ser menos viável em qualquer ocasião, visto que o método híbrido

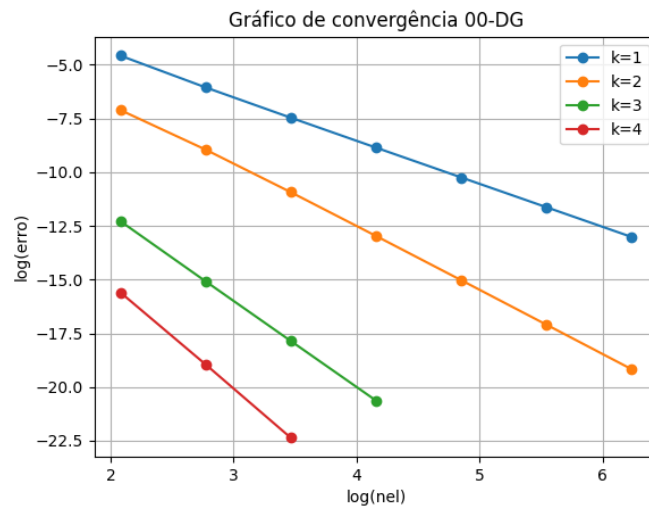


Figura 3: Gráfico de decaimento do erro na norma de L2 entre a aproximação obtida através do método do elemento global e a solução exata proposta para o problema.

pode ser muito paralelizado (tornando-o ainda mais rápido).