Lucas Marins Ramalho de Lima

1. Seja o problema:

$$u = -\frac{dp}{dx} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx} = f \qquad \text{em} \quad \Omega \tag{2}$$

$$p = g \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \tag{3}$$

onde $\Omega = [a, b]$.

a) É possível definir o problema (1)-(3) em cada elemento k da seguinte forma:

$$u = -\frac{dp}{dx} \tag{4}$$

$$\frac{du}{dx} = f \tag{5}$$

Suplantados por condições de contorno para cada elemento da seguinte forma:

$$p = \lambda, \text{sobre } \delta K \tag{6}$$

Ainda, temos que $\lambda = g$ sobre $\delta\Omega$, para impor a condição de contorno ao problema (1)-(2). Para a definição do problema de maneira descontínua, é necessário suplementá-lo com condições de transmissibilidades entre cada elemento do domínio garantindo que nas interfaces entre elementos:

$$[[p]] = 0 \tag{7}$$

$$[[u]] = 0 \tag{8}$$

Dessa forma, o salto entre elementos é zero para ambas as varíaveis, garantindo a continuidade da solução.

b) Tendo a definição do item a), é possível formular o problema (1)-(3) com λ conhecido.

$$\int_K uv dx + \int_K \frac{dp}{dx} v dx = 0 \tag{9}$$

$$\int_K \frac{du}{dx} q dx = \int_K f q dx \tag{10}$$

Para obter as equações (9) e (10), multiplica-se as equações (1) e (2) por funções v e q, respectivamente, e é aplicada a integral.

O próximo passo é integrar por partes a equação (9), e multiplicar a equação (10) por -1 obtendo:

$$\int_K uv dx - \int_K p \frac{dv}{dx} + \lambda v\Big|_{\delta K} = 0 \tag{11}$$

$$-\int_K \frac{du}{dx} q dx = -\int_K f q dx \tag{12}$$

Observa-se que nessa formulação, temos o multiplicador de Lagrange λ na interface entre os elementos. Sendo o valor dos multiplicadores λ conhecidos, essa não é uma variável do sistema. Porém, para a solução desse problema, é necessária a adição de um termo de penalização:

$$\int_K uv dx - \int_K p \frac{dv}{dx} + \lambda v \Big|_{\delta K} = 0 \tag{13}$$

$$-\int_K \frac{du}{dx} q dx + \beta (p - \lambda) q \Big|_{\delta K} = -\int_K f q dx \tag{14}$$

c) Em um domínio unidimensional $\Omega = [0, 1]$ tendo a solução exata $p = \cos(\pi x)$, é possível apresentar resultados da aproximação formulada em (13)-(14) estabelecendo uma comparação com a solução exata utilizando polinômios lineares.

Estabelecendo $\beta = 10$, temos:

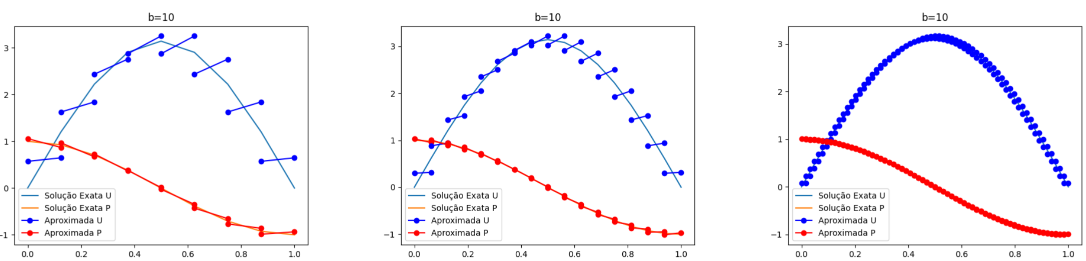

Figura 1: São observadas as aproximações de u e p, comparando com a solução exata, utilizando 8, 16 e 64 elementos respectivamente.

Além comparação entre aproximação e solução exata com β fixo, pode-se fixar o número de elementos, e observar o impacto de β na aproximação na figura 2. É observado, que quando adota-se um valor pequeno para β, a solução se aproxima muito menos da exata, apresentando grandes saltos entre os elementos. Conforme ocorre um aumento do valor de β a aproximação converge melhor para a solução exata.

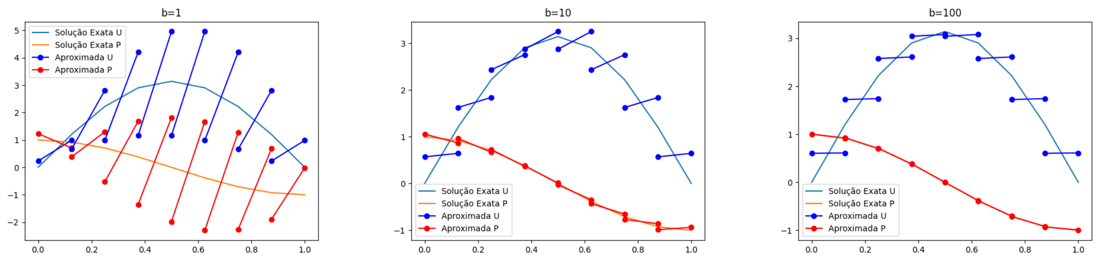

Figura 2: Gráficos das aproximações realizadas com 8 elementos, utilizando $\beta = 1, 10, 100$ respectivamente

d) Incluindo o termo de estabilização

$$-\frac{1}{2}\int_K \left(u + \frac{dp}{dx}\right)\left(v + \frac{dq}{dx}\right) dx, \tag{15}$$

e tomando $\beta = 0$, temos 3:

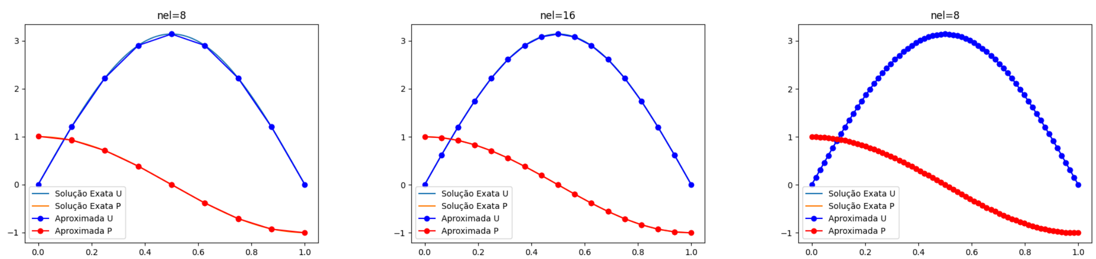

Figura 3: Gráficos comparando a aproximação com o termo de estabilização do item d) para ambas as variáveis utilizando 8, 16 e 64 elementos respectivamente.

Em comparação com as aproximações realizadas no item c), as aproximações com $\beta = 0$ e com o termo de estabilização de mínimos quadrados (15) convergem mais rapidamente e apresentam um salto entre elementos muito menor do que o apresentado anteriormente.

e) Suponha agora que o multiplicador λ é uma incógnita, apresente uma formulação híbrida para o problema (1)-(3), com $\lambda = p$ sobre ∂K.
Tomando como base a formulação (13)-(14), observa-se que o sistema possui duas equações linearmente independentes e três variáveis, tornando-o indeterminado. Dessa forma, é necessário adicionar uma terceira equação, sendo essa a equação do multiplicador.

$$u\mu\Big|_{\delta K} = 0 \tag{16}$$

É necessário também, adicionar a essa equação o termo de penalização:

$$u\mu\Big|_{\delta K} + \beta(p - \lambda)q\Big|_{\delta K} = 0 \tag{17}$$

Dessa forma, temos a formulação para o método híbrido com λ variável:

$$\int_K uvdx - \int_K p\frac{dv}{dx} + \lambda v\Big|_{\delta K} = 0 \tag{18}$$

$$-\int_K \frac{du}{dx}qdx + \beta(p-\lambda)q\Big|_{\delta K} = -\int_K fqdx \tag{19}$$

$$u\mu\Big|_{\delta K} + \beta(p-\lambda)q\Big|_{\delta K} = 0 \tag{20}$$

Para resolver o problema (1)-(3) utilizando a formulação (18)-(20), estrutura-se matricialmente o problema da seguinte forma:

$$a([u_h,p_h],[v_h,q_h]) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u_h v_h dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_h\frac{dv_h}{dx}dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_h\frac{du_h}{dx}dx + \beta p_h q_h\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \tag{21}$$

$$b(\lambda_h,[v_h,q_h]) = \lambda_h v_h\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \beta\lambda_h q_h\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \tag{22}$$

$$c(\lambda_h,\mu_h) = \beta\lambda_h\mu_h\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \tag{23}$$

$$f([v_h,q_h]) = -\int_{x_k}^{x_{k+1}} fq_h dx \tag{24}$$

Após definir as matrizes, busca-se resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \\ \mathcal{B}_k^T & \mathcal{C}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_k \\ \Lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Aplicando a condensação estática a esse sistema, chaga-se ao seguinte sistema:

$$(\mathcal{B}_k^T\mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{B}_k - C_k)\Lambda = \mathcal{B}_k^T\mathcal{A}_k^{-1}\mathcal{F}_k \tag{26}$$

Dessa forma, para calcular o valor do multiplicador de Lagrange λ basta resolver o sistema linear (26). Com o valor calculado para o multiplicador, é resolvido o problema (1)-(3) da mesma forma que no item c), porém utilizando os valores de λ calculados no lugar da solução exata.

f) Simulando a formulação do item (e) com $\beta = \dfrac{\beta_0 k^2}{h}$, é possível apresentar um teste de convergência tanto para u quanto para p utilizando polinômios de ordem k = 1, 2, 3, 4.

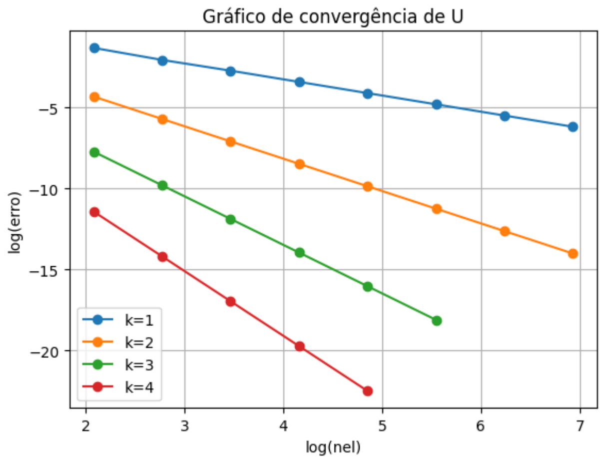

Figura 4: Gráfico do teste de convergência para a variável u, utilizando valor de $\beta_0 = 10$. Observa-se que as taxas de convergência é igual a 1 para polinômio linear, 2 para polinômio quadrático, 3 para polinômio cúbico e 4 para polinômio quártico.

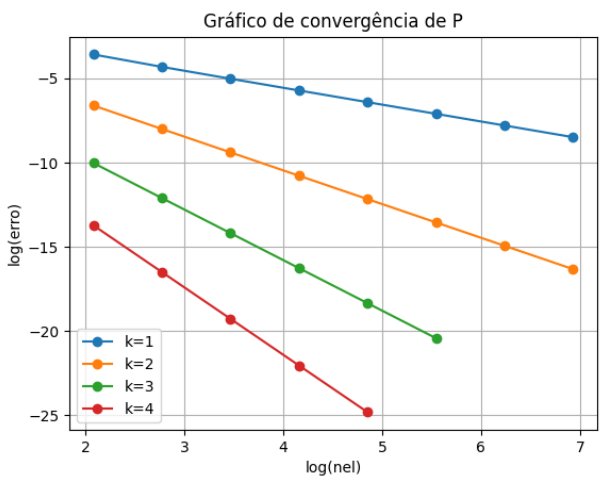

Figura 5: Gráfico do teste de convergência para a variável p, utilizando o valor de $\beta_0 = 10$. Observa se que a taxa de convergência é igual a um para o polinômio linear, 2 para o polinômio quadrático, 3 para o polinômio cúbico e 4 para o polinômio quártico.

Utilizando o $\beta_0 = 10$, observa-se que tanto para a variável u quanto para a variável p temos uma taxa de convergência subótima de ordem k.

Normalmente é utilizado $\beta_0 = \dfrac{1}{h}$ para definir o valor do peso β de penalização. Refazendo o teste de convergência utilizando essa função para definir β_0, temos:

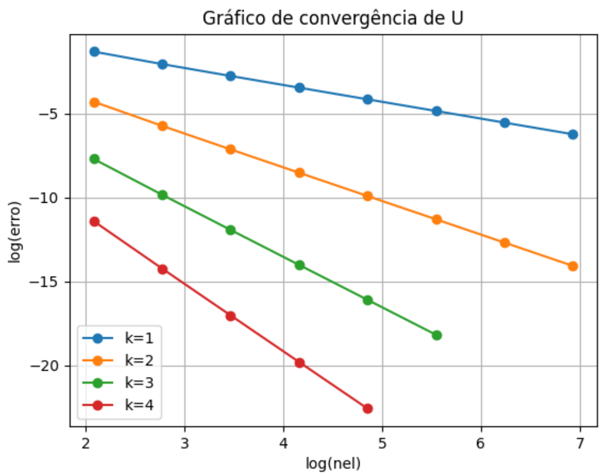

Figura 6: Gráfico do teste de convergência para a variável u, utilizando valor de $\beta_0 = \frac{1}{h}$. Observa-se que as taxas de convergência é igual a 1 para polinômio linear, 2 para polinômio quadrático, 3 para polinômio cúbico e 4 para polinômio quártico.

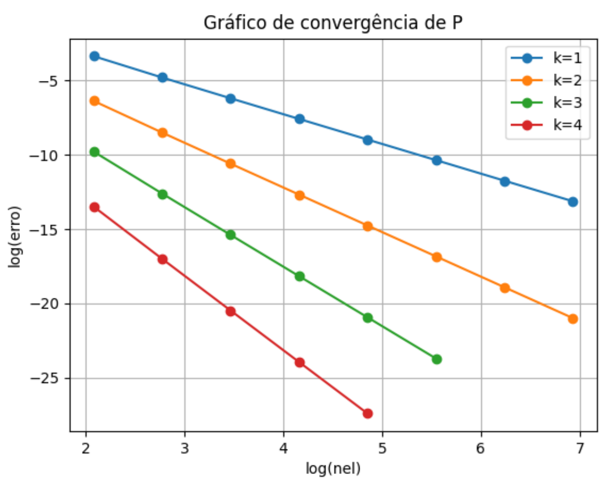

Figura 7: Gráfico do teste de convergência para a variável p, utilizando o valor de $\beta_0 = \frac{1}{h}$. Observa se que a taxa de convergência é igual a 2 para o polinômio linear, 3 para o polinômio quadrático, 4 para o polinômio cúbico e 5 para o polinômio quártico.

Utilizando o $\beta_0 = \dfrac{1}{h}$, observa-se que para a variável u temos taxa de convergência sub-ótima de ordem k, e para a variável p temos taxa ótima de ordem $k+1$.

g) Repetindo o item (f) incluindo o termo de estabilização (15) com $\beta = 0$, temos os testes de convergência:

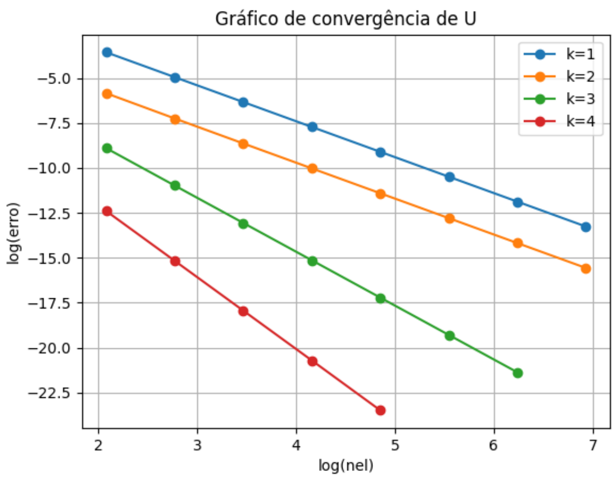

Figura 8: Gráfico do teste de convergência para a variável u, utilizando valor de $\beta_0 = 0$ e o termo de estabilização (15). Observa-se que as taxas de convergência é igual a 2 para polinômio linear, 2 para polinômio quadrático, 3 para polinômio cúbico e 4 para polinômio quártico.

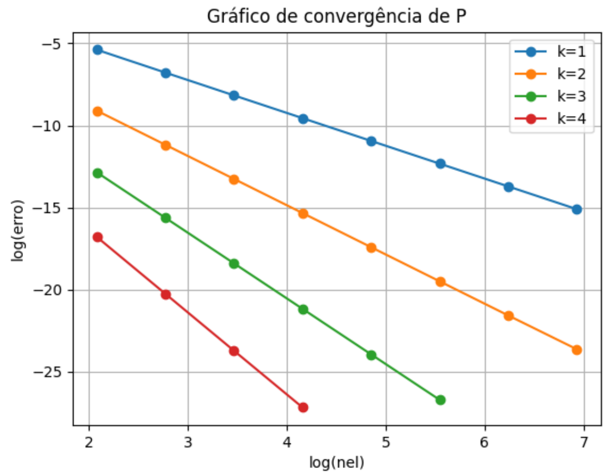

Figura 9: Gráfico do teste de convergência para a variável p, utilizando valor de $\beta_0 = 0$ e o termo de estabilização (15). Observa-se que as taxas de convergência é igual a 2 para polinômio linear, 3 para polinômio quadrático, 4 para polinômio cúbico e 5 para polinômio quártico.

Dessa forma, utilizando o $\beta_0 = 0$ e o termo de estabilização (15), observa-se que para a variável u temos taxa de convergência sub-ótima de ordem k, e para a variável p temos taxa ótima de ordem $k+1$. Porém, também é interessante notar que para o polinômio linear, a taxa de convergência da variável u foi na ordem de $k+1=2$.

h) Repitindo o item (f) incluindo, além do termo (15), o termo de estabilização

$$\frac{1}{2}\int_K \left(\frac{du}{dx} - f\right)\frac{dv}{dx}dx, \tag{27}$$

com $\beta = 0$ temos os testes de convergência:

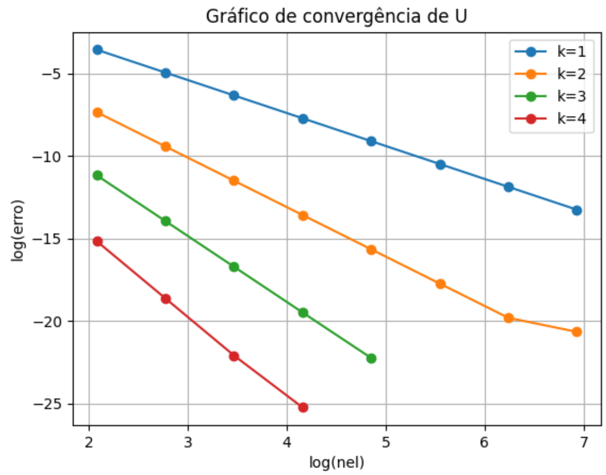

Figura 10: Gráfico do teste de convergência para a variável u, utilizando valor de $\beta_0 = 0$ e os termos de estabilização (15) e (27). Observa-se que as taxas de convergência é igual a 2 para polinômio linear, 3 para polinômio quadrático, 4 para polinômio cúbico e 5 para polinômio quártico.

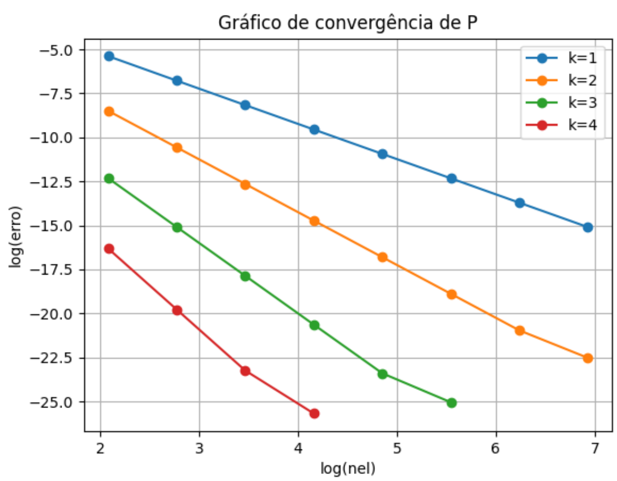

Figura 11: Gráfico do teste de convergência para a variável p, utilizando valor de $\beta_0 = 0$ e os termos de estabilização (15) e (27). Observa-se que as taxas de convergência é igual a 2 para polinômio linear, 3 para polinômio quadrático, 4 para polinômio cúbico e 5 para polinômio quártico.

Dessa forma, observa-se que ao adicionar os termos de estabilização de mínimos quadrados (15) e (27), ambas as variáveis u e p convergem em taxa ótima de ordem $k + 1$.