Seja o problema:
Encontrar $u(x, y, t) \in \Omega \times \Theta$ *satisfazendo a seguinte equação:*

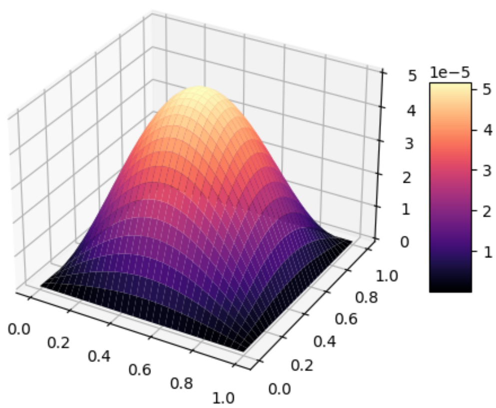
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f(x, y, t) & \text{em} \quad \Omega \times \Theta \\ u(x, y, t) = \overline{u} & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \Theta \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) & \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

1. Supondo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, podemos discretizar o problema (1) pelo método de direções alternadas (ADI) em um código computacional para simular este problema:

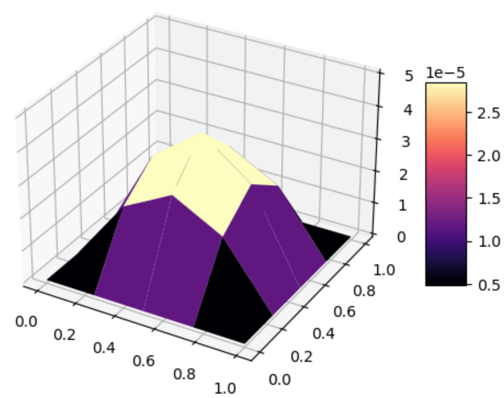
a) Considerando o domínio espacial $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ e temporal $\Theta = [0, 0.5]$ e adotando $\varepsilon = 1$, e validando implementação utilizando a seguinte solução exata:

$$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

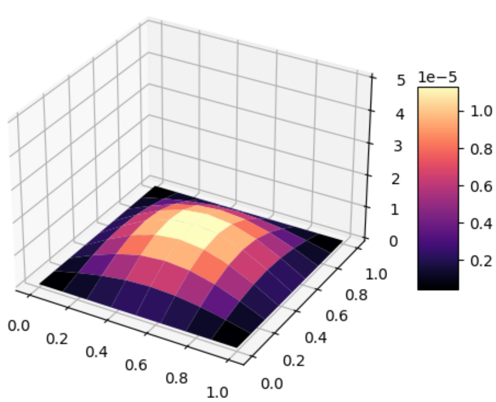
Pode-se plotar a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação:



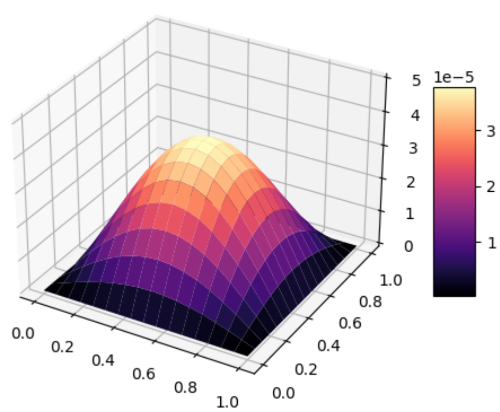
Exata



4x4



8x8



16x16

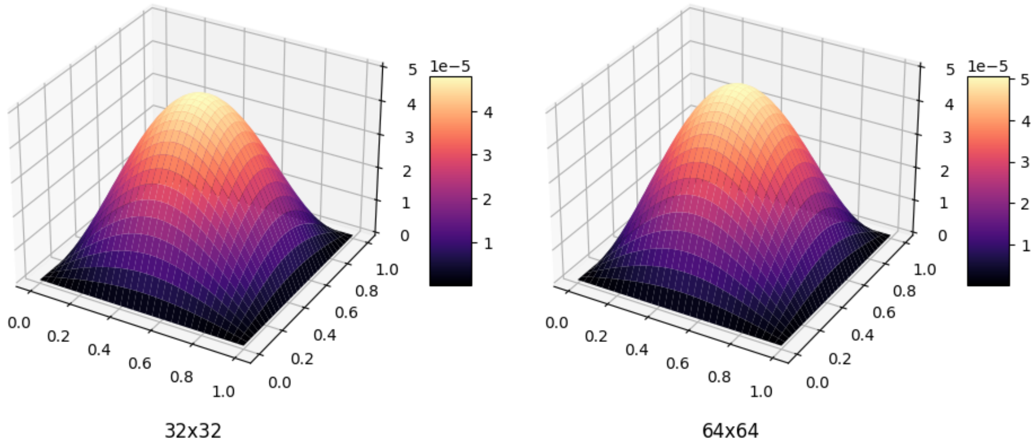


Figura 1: Comparação entre solução exata com aproximação de 4x4, 8x8, 16x16, 32x32 e 64x64 elementos com passo de tempo $\Delta t = \Delta x = \Delta y$

Observe que a solução aparenta convergir a medida que o número de elementos da malha aumenta a partir de 8x8 elementos. Na questão seguinte, será feito um estudo sobre a taxa de convergência da aproximação aplicada.

b) Para determinar a ordem de convergência do método ADI na norma do máximo utiliza-se as seguintes malhas $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64$, $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, calculada no tempo final $T = 0.5$:

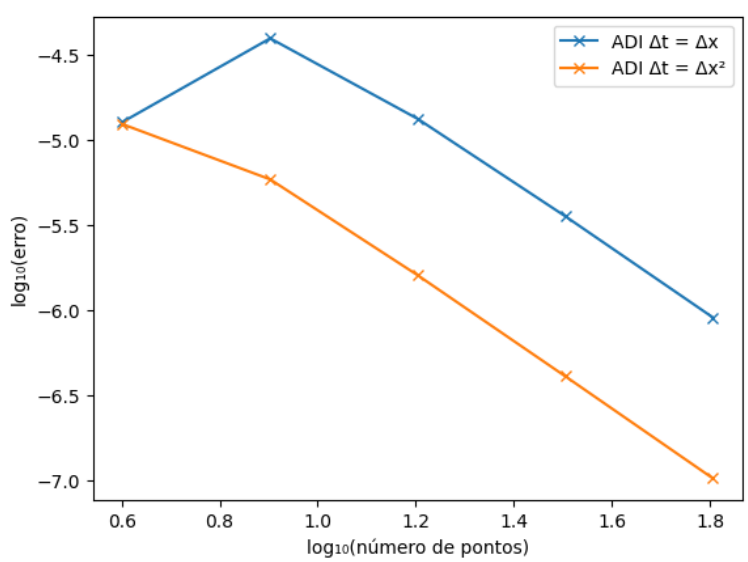


Figura 2: Taxa de convergência do método com discretização do passo de tempo com $\Delta t = \Delta x$ e $\Delta t = \Delta x^2$

Apesar de os dois estudos terem apresentado taxas de convergência muito semelhantes (1.97), observa-se que com $\Delta t = \Delta x^2$ a solução apresenta um erro menor já com uma malha de 8x8 elementos.

Observa-se essa taxa de convergência para ambas descritizações de passo de tempo, porque o termo difusivo é aproximado por um método de diferenças finitas de segunda ordem:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2} \tag{2}$$

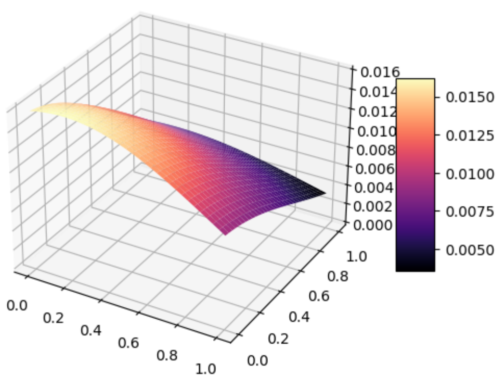
2. Para incluir o termo convectivo do problema, discretizaremos o termo convectivo utilizando um esquema upwind generalizado (que é capaz de identificar o sinal de $\mathbf{b}$ e escolher corretamente a discretização) utilizando a metodologia ADI.

a) É possível validar o código através da solução exata com os parâmetros descritos abaixo:

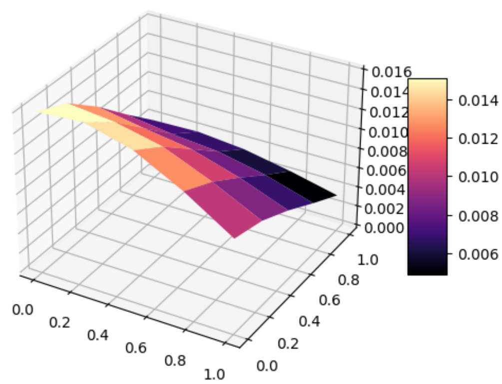
$$u(x,y,t) = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + 4\varepsilon t} \exp\left(- \frac{(\overline{x} - x_c)^2 + (\overline{y} - y_c)^2}{2\gamma^2 + 4\varepsilon t} \right)$$

* $\overline{x} = x\cos(4t) + y\sin(4t)$ e $\overline{y} = -x\sin(4t) + y\cos(4t)$
* $x_c = 0.2$, $y_c = 0$, $\gamma = 0.1$ e $\varepsilon = 0.01$
* $\mathbf{b} = (-4y, 4x)$ e $f(x,y,t) = 0$
* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ e $\Theta = [0,3]$

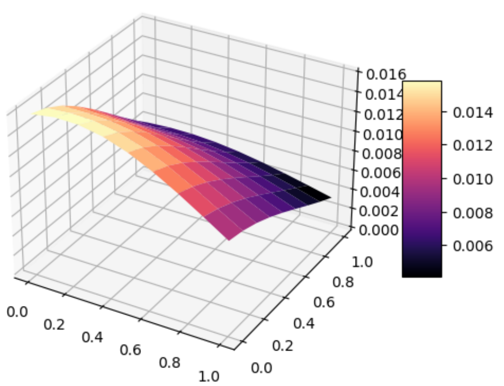
Pode-se plotar a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação:



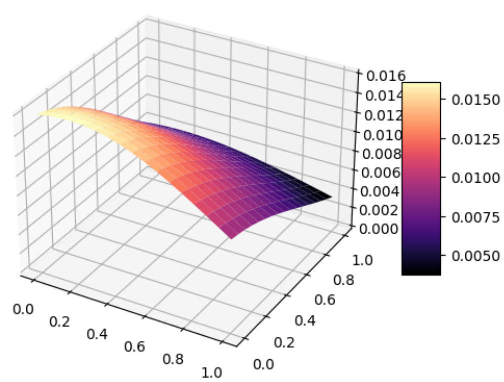
Exata



4x4



8x8



16x16

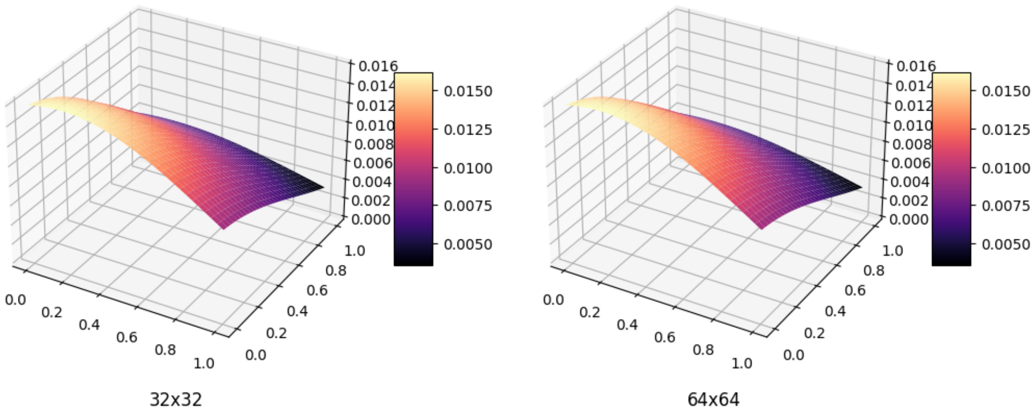


Figura 3: Comparação entre solução exata com aproximação de 4x4, 8x8, 16x16, 32x32 e 64x64 elementos com passo de tempo $\Delta t = \Delta x = \Delta y$ no tempo final T = 3

b) Determine a ordem de convergência do método na norma do máximo utilizando as seguintes malhas $8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128$ e $\Delta t = h$, calculada no tempo final $T = 3$.

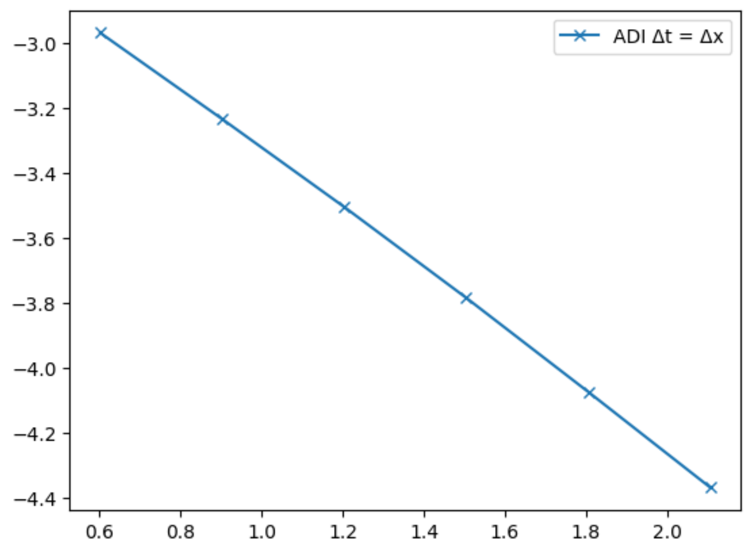


Figura 4: Gráfico com decaimento do erro da aproximação

A taxa de convergência da aproximação é de 0.98. Esse valor de taxa de convergência se deve ao termo convectivo que é aproximado por Upwind, que é um método de primeira ordem.