

1. Dada a conhecida equação do *Problema de Helmholtz*:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0, \quad p \in \Omega = [a, b] \quad (1)$$

$$p(a) = \alpha \quad \text{e} \quad p(b) = \beta. \quad (2)$$

Problema este que modela uma onda plana, onde p descreve a variação do campo de pressão em um meio acústico em um tempo fixo e o número de onda k contém informações da frequência, medida do domínio e velocidade do som.

O problema em questão é de natureza fortemente oscilatória. Por conta disso, a solução numérica sofre consequências de efeitos de poluição e ressonância numérica. Assim, para assegurar a estabilidade numérica deste problema deve-se respeitar a seguinte relação:

$$kh < 1 \quad (3)$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$p(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad (4)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Os valores de α e β (eq. (2)) são calculados a partir da solução (4).

Considerando apenas a parte real da solução (4) e utilizando uma discretização por diferenças finitas de segunda ordem, é possível apresentar:

- estudos numéricos apresentando gráficos para valores de $k = 10, 100, 1000$ variando o valor de h , de forma a validar a relação (4), em um domínio $\Omega = [0, 1]$;

Para $k = 10$, temos o estudo numérico apresentado nos gráficos seguintes:

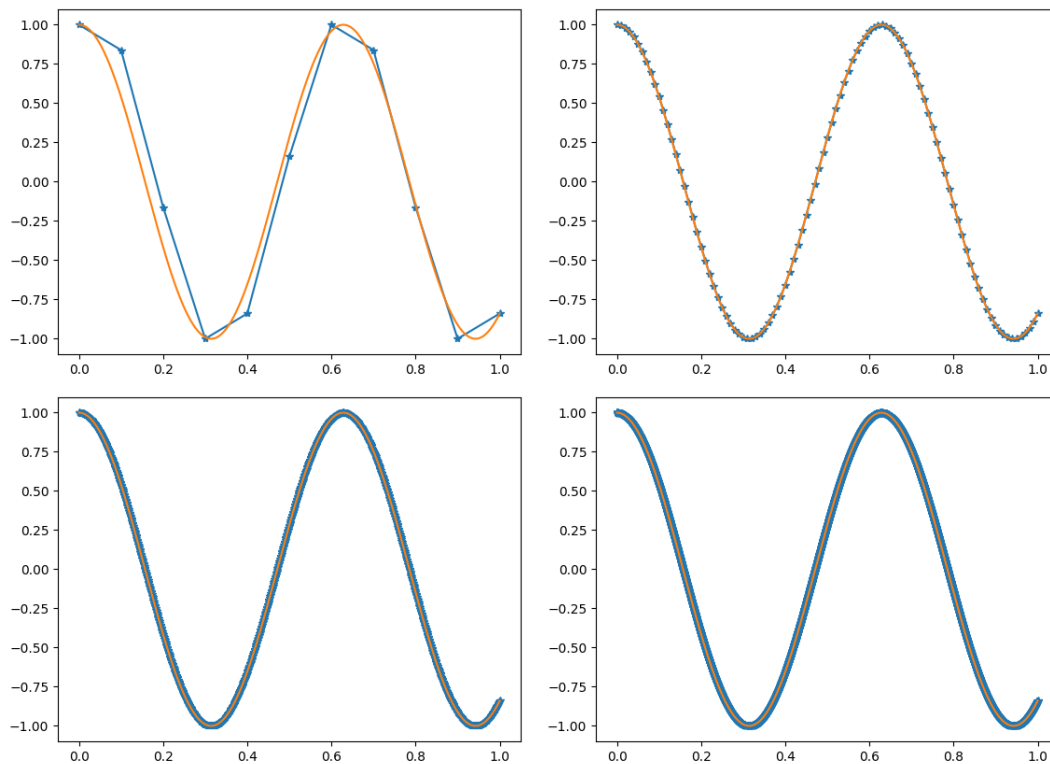


Figura 1: Gráficos com comparação entre a solução exata (em laranja) e a aproximada por (em azul), com $k = 10$, e h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente

Observe que para $k=10$, para que a aproximação seja estável, é necessário satisfazer $h < 0.1$. Porém, apesar de não satisfazer a condição de estabilidade, o primeiro gráfico apresentado acima aparenta convergir a forma da solução exata, porém com um erro bastante elevado ainda ($\tau \approx 0.3$).

Para $k = 100$, temos o estudo:

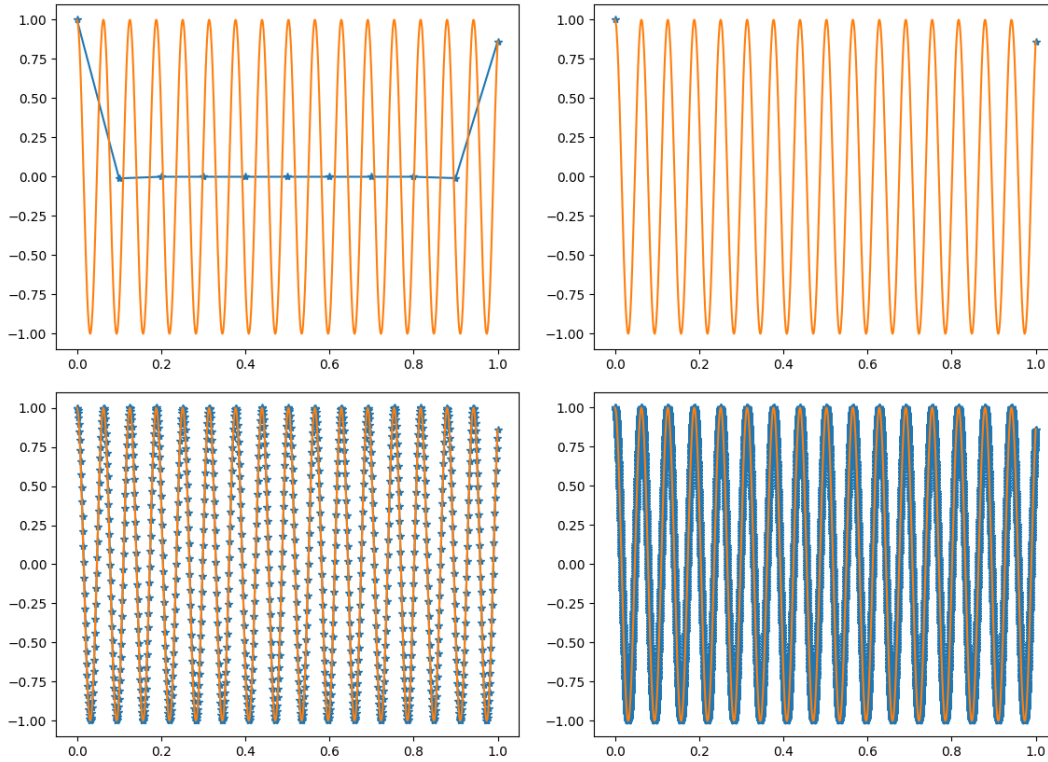


Figura 2: Gráficos com comparação entre a solução exata (em laranja) e a aproximada por (em azul), com $k = 100$, e h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente

Com $k = 100$, a condição de estabilidade para o valor de h é $h < 0.01$. Nos gráficos acima apresentados, é possível observar que para $h = 0.1$ a solução apenas converge nos pontos de contorno informados. Para $h = 0.01$ não foi possível apresentar solução do sistema linear utilizando o algoritmo de Thomas, por apresentar uma divisão por zero. Com $h < 0.01$ a aproximação começa realmente a convergir a solução exata.

Para $k = 1000$, temos o estudo:

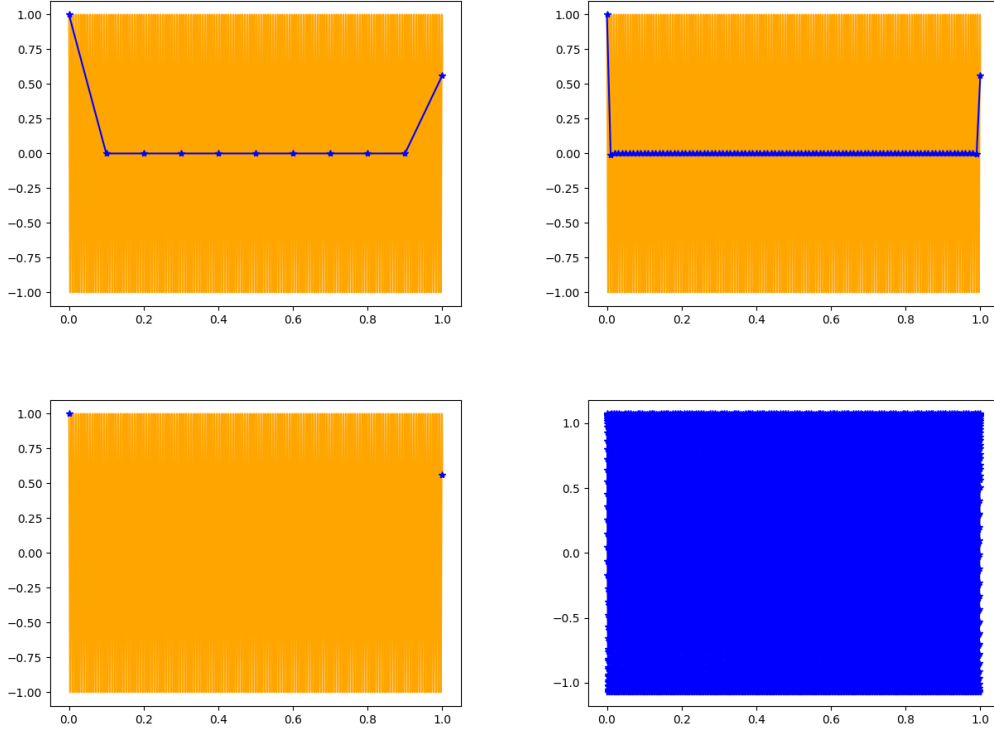


Figura 3: Gráficos com comparação entre a solução exata (em laranja) e a aproximada por (em azul), com $k = 1000$, e h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente

Sendo $k = 1000$, é esperado que a condição de estabilidade para o valor de h seja $h < 0.001$. Nos gráficos acima, essa realidade é apresentada: para $k = 0.1$ e $k = 0.01$, em que as aproximações não convergem para a solução exata exceto nos pontos de contorno informados. Para o valor $k = 0.001$, o algoritmo de Tomas, utilizado para a solução do sistema linear necessário para a aproximação do problema, não pode ser utilizado por apresentar uma divisão por zero no decorrer de sua execução. Dessa forma, o único valor apresentado acima em que ocorre a convergência é $k = 0.0001$. Pelo caráter fortemente oscilatório que a solução exata apresenta, é difícil verificar a convergência no gráfico apresentado acima. Porém, pode-se confirmar essa aproximação analisando um subconjunto de pontos do gráfico:

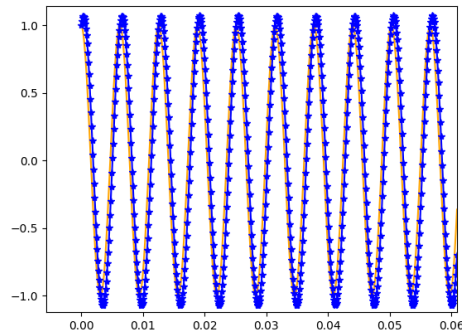


Figura 4: Gráfico comparando a solução exata (em laranja) e a aproximação (em azul) para $k = 1000$ e $h = 0.0001$, no subconjunto de domínio $[0, 0.06]$

- um gráfico que demonstre a ordem de convergência do método utilizado: Para cada estudo supracitado no item anterior, anotou-se o erro para as aproximações que satisfaçam a condição de estabilidade $hk < 1$ que foram dispostas no gráfico a seguir:

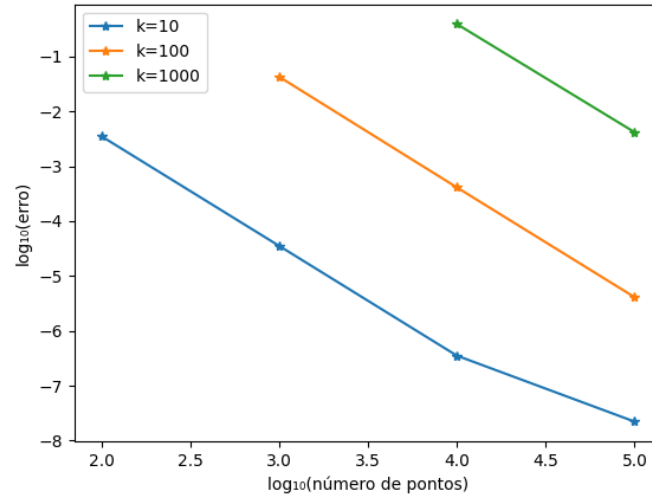


Figura 5: Gráfico dos erros das aproximações para com número de pontos variando de 100 a 100000, e sendo $h = 1/\text{num_pontos}$

A partir do gráfico acima, observa-se que o método empregado possui taxa de convergência 2, ou seja, o método utilizado é um método de segunda ordem.

Além disso, pode-se concluir que a natureza fortemente oscilatória do problema, quando o coeficiente k é grande, o torna cada vez mais caro computacionalmente, visto que para atingir valores mais baixos de erro é necessário um grande refinamento da malha.

2. Seja o problema:

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad u \in \Omega = [0, 1] \quad (5)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \quad (6)$$

cujas solução geral é dada por:

$$u(x) = Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B \quad (7)$$

onde os coeficientes A e B são determinados pelas condições de contorno. Nas simulações computacionais adote $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\kappa = 1$.

- a partir da solução geral (12), deriva-se a solução exata que satisfaz o problema (5)-(6) e obtém-se a solução exata para o problema:

$$\frac{du}{dx}(x) = -\frac{\kappa}{\varepsilon} * Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} \quad (8)$$

Temos a condição de contorno $\frac{du}{dx}(0) = 1$, então:

$$\frac{du}{dx}(0) = 1 = -\frac{\kappa}{\varepsilon} * Ae^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}0} \quad (9)$$

$$A = -\frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (10)$$

Com o valor de A, calcula-se o coeficiente B com a condição de contorno $u(1) = 1$:

$$u(1) = 1 = -\frac{\varepsilon}{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + B \quad (11)$$

$$B = \frac{\varepsilon}{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}x} + 1 \quad (12)$$

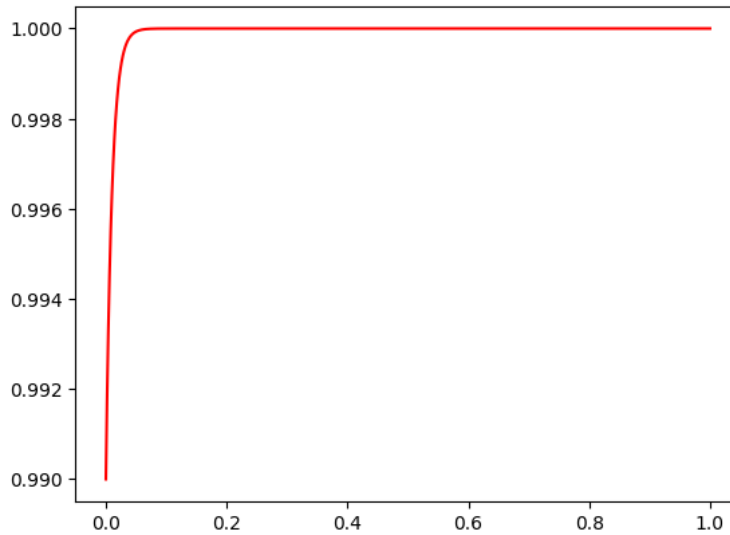


Figura 6: Gráfico da solução exata do problema (5)-(6) com $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\kappa = 1$

É observado no gráfico da solução exata o caráter fortemente convectivo do problema. Esse resultado era esperado visto que $\frac{|\kappa|}{\varepsilon} > 1$, ou seja, o coeficiente convectivo κ é muito maior que o termo difusivo ε .

* diferença central (aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann);

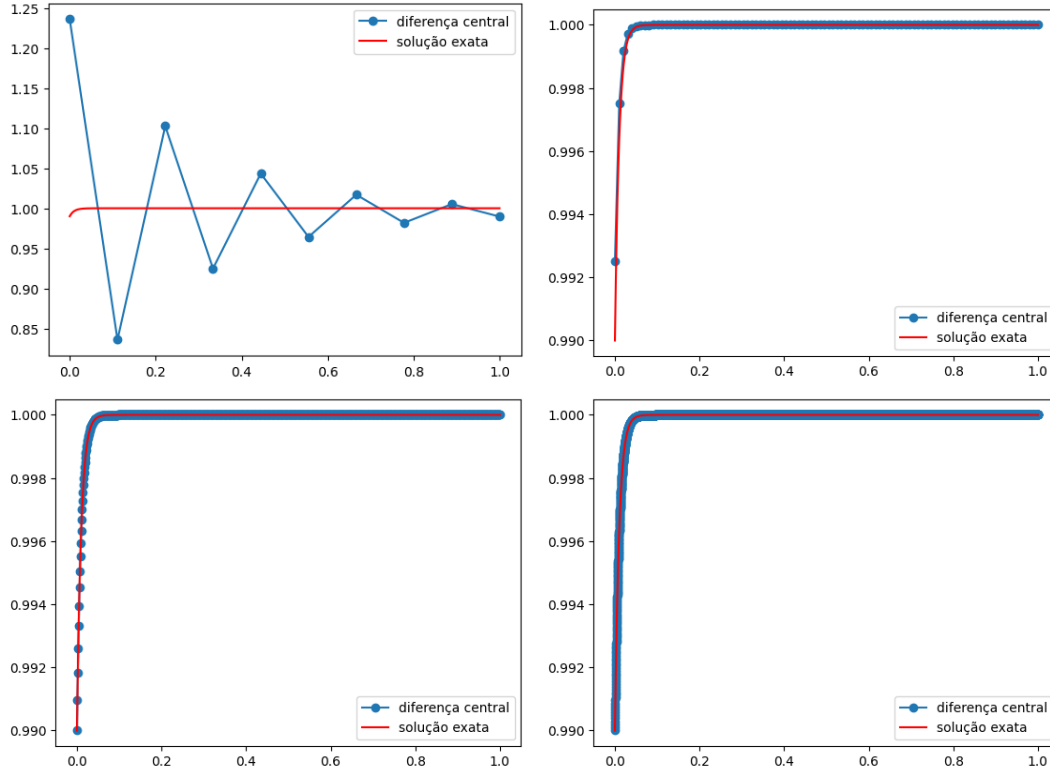


Figura 7: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada por (em azul), com h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente utilizando diferença central para aproximação do termo convectivo

Observa-se que com um refinamento com $h = 0.1$, a aproximação oscila. Isso se deve ao não cumprimento da condição de estabilidade do método:

$$h \leq 2 * \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (13)$$

Segundo essa condição, aplicando-a no problema atual, temos que o maior valor para h é $h = 0.02$.

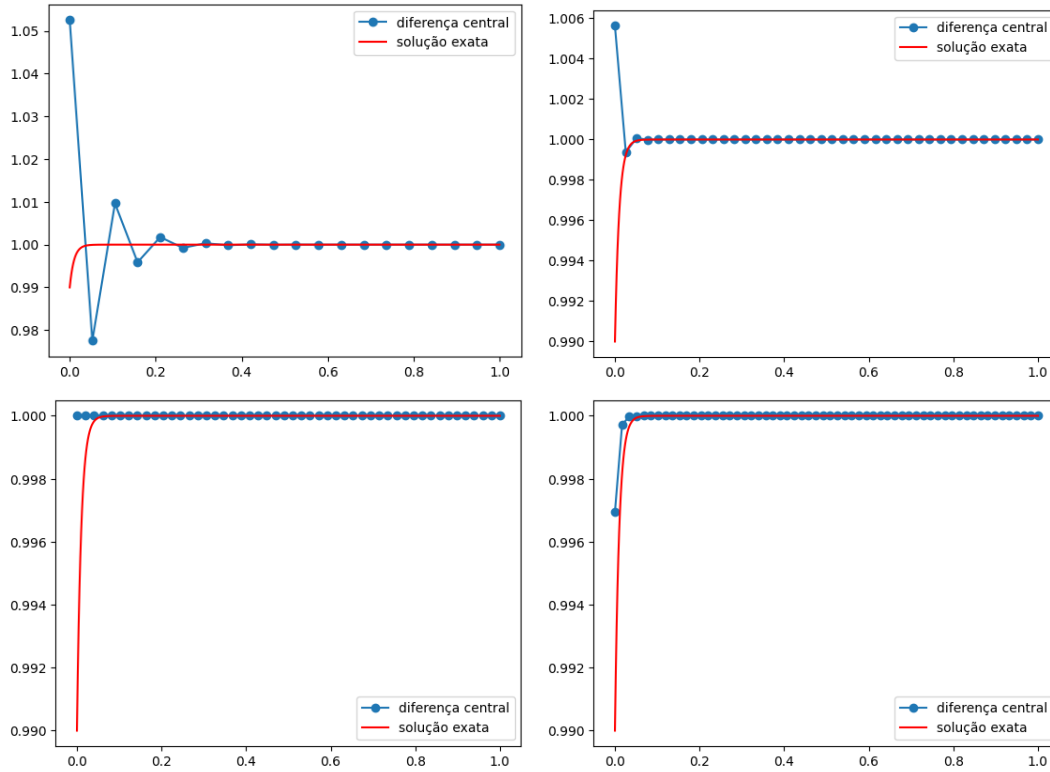


Figura 8: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada por (em azul), com h sendo igual a 0.05, 0.025, 0.02, 0.016 respectivamente utilizando diferença central para aproximação do termo convectivo

Observa-se que a aproximação deixa de ser oscilatória com $h = 0.02$, conforme esperado pelo cálculo de condição de estabilidade.

Apesar de não ser oscilatória, a aproximação ainda não se aproxima perfeitamente do início da solução exata. Isso é ocasionado pelo forte caráter convectivo do problema (razão pelo rápido crescimento da solução exata, entre $x = 0$ e $x = 0.05$) e pelo refinamento grosseiro entregue pelos valores de h utilizados nesse estudo da Figura 8.

* diferença regressiva;

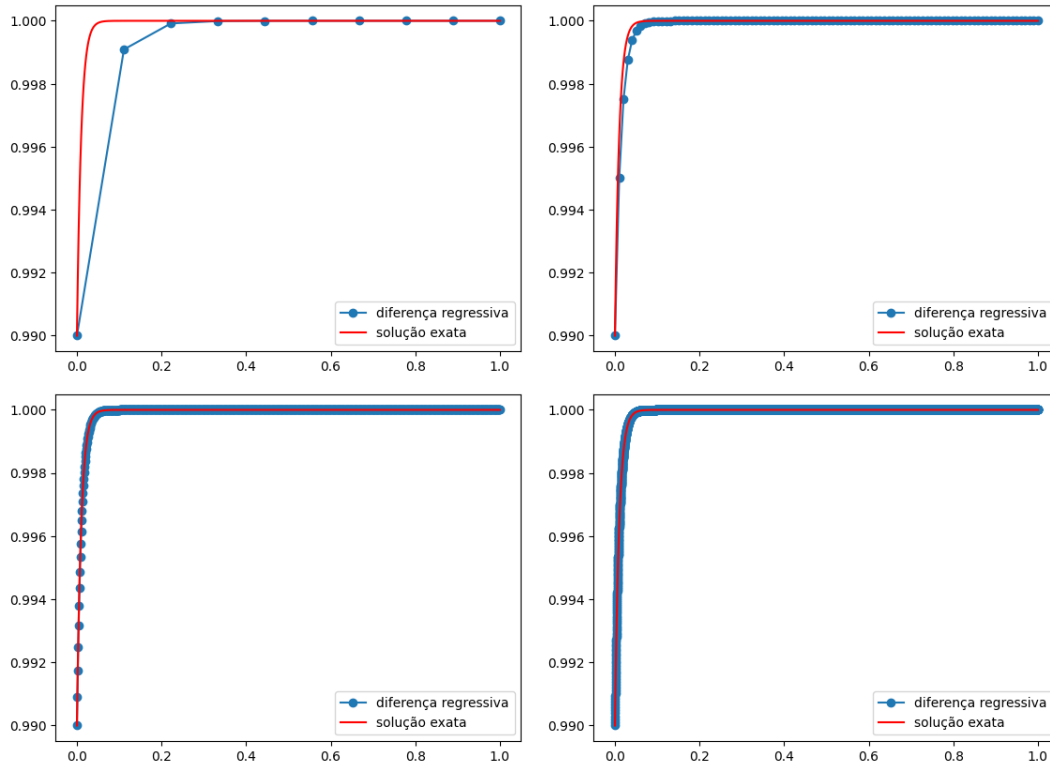


Figura 9: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada por (em azul), com h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente utilizando diferença regressiva para aproximação do termo convectivo

Observa-se que com diferença regressiva, a aproximação não oscila nem mesmo com o $h = 0.1$. Isso se deve ao fato de que o método não possui condição de estabilidade, em outras palavras, é incondicionalmente estável.

Isso possibilita que seja possível fazer aproximações mais grosseiras, com valores de h mais altos, sem que a aproximação apresente oscilações. Porém, mais pra frente no estudo, será visto que a diferença central é um método de segunda ordem, enquanto a diferença regressiva é de primeira ordem.

* diferença progressiva;

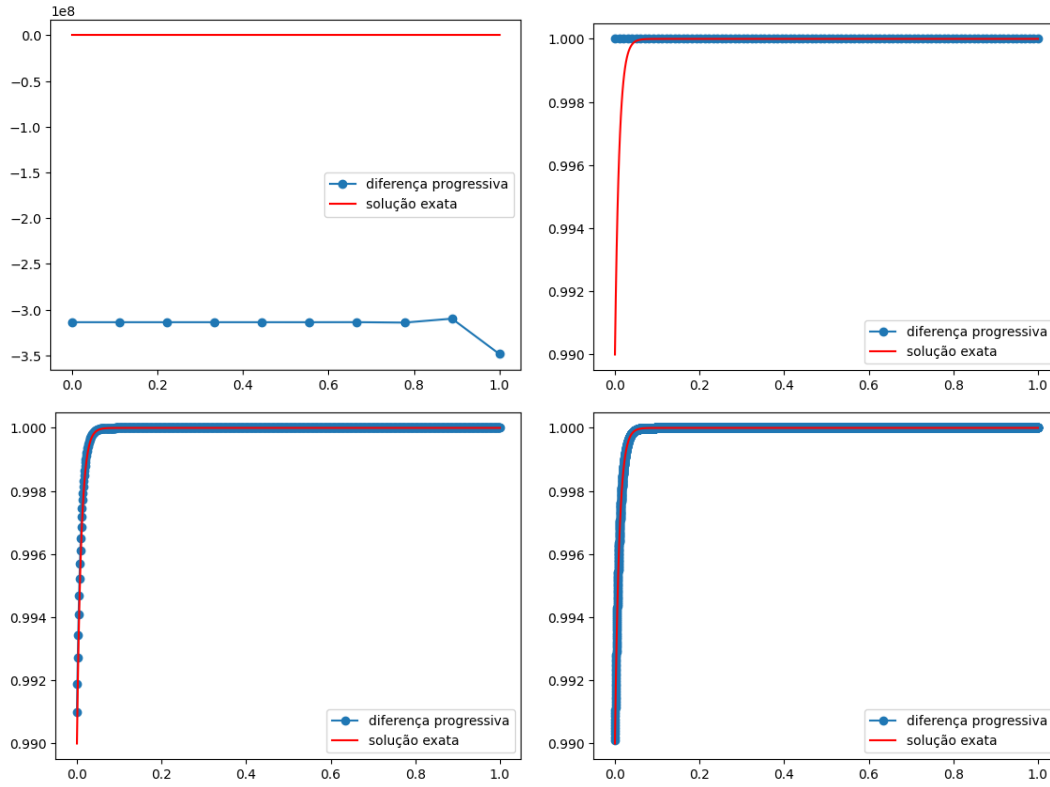


Figura 10: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada por (em azul), com h sendo igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente utilizando diferença progressiva para aproximação do termo convectivo

Com diferença progressiva o método com $h = 0, 1$ não se aproxima da solução exata. Isso se deve ao não cumprimento da condição de estabilidade do método:

$$h \leq \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (14)$$

Segundo essa condição, aplicando-a ao problema atual, tem-se que o maior valor para k é $h = 0.01$.

Observa-se abaixo que a aproximação deixa de ser oscilatória em $h = 0.01$, conforme esperado pelo cálculo de condição de estabilidade.

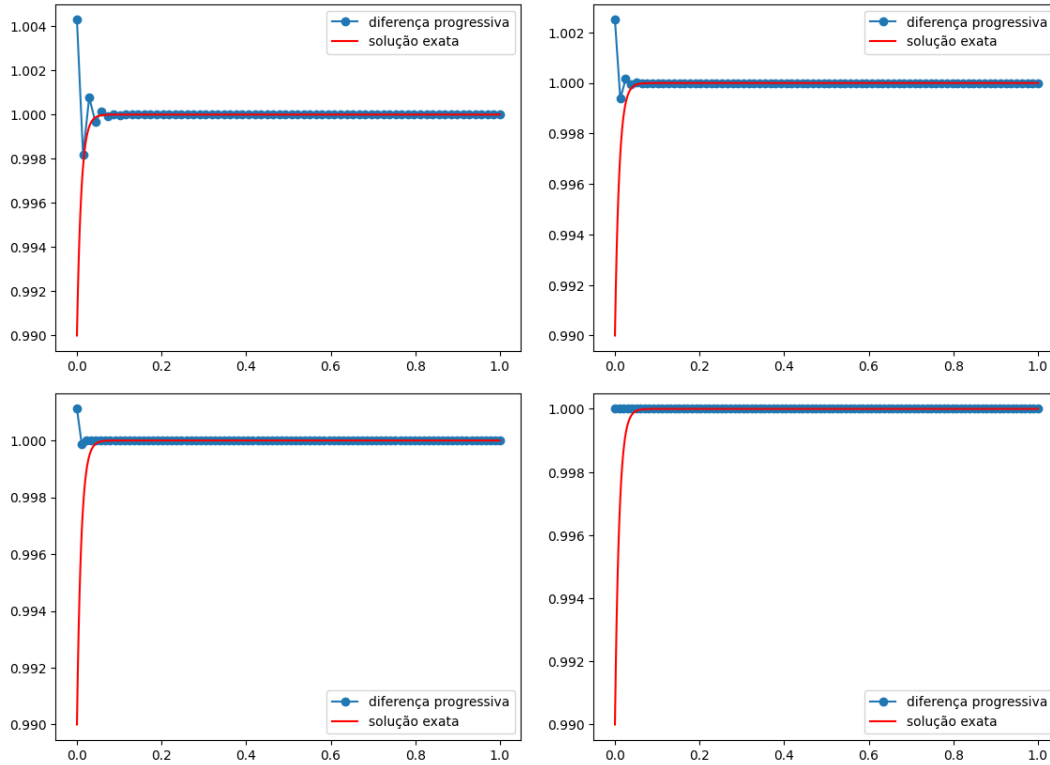


Figura 11: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada por (em azul), com h sendo igual a 0.014, 0.0125, 0.011, 0.01 respectivamente utilizando diferença progressiva para aproximação do termo convectivo

A partir do cálculo do erro de cada solução para cada número de pontos em cada um dos três métodos utilizados, é possível construir um gráfico mostrando o decaimento do erro a partir do aumento do número de pontos da malha

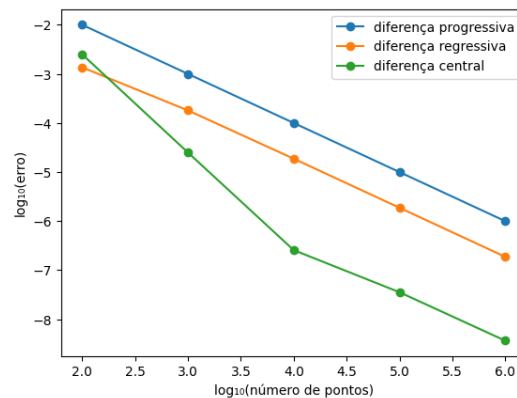


Figura 12: Gráfico de decaimento de erros para os três métodos utilizados

A partir do gráfico de decaimento de erro, é possível observar que para os métodos de diferença progressiva e regressiva a taxa de convergência da aproximação é 1, ou seja são métodos de primeira ordem.

Isso ocorre pela utilização de métodos de primeira ordem (Euler explícito e Euler implícito) para aproximação do termo convectivo. Mesmo o termo de difusão sendo aproximado por um método de segunda ordem (diferença central), a aproximação do problema ocorre com taxa de convergência igual à menor taxa de convergência dentre os métodos utilizados.

Enquanto os primeiros métodos são de primeira ordem, utilizando diferença central para o termo convectivo obtém-se um método de aproximação de segunda ordem. Como explicado anteriormente, a taxa de convergência da aproximação do problema obedece sempre a menor taxa de convergência dentre os métodos utilizados, porém nesse caso são utilizados apenas métodos de segunda ordem, sendo a diferença central tanto para o termo convectivo quanto para o difusivo.

- aplicando o método de estabilização baseado em *difusão artificial* para resolver o problema (5)-(6) adotando a discretização por diferença central para a convecção e aproximação de segunda ordem para a condição de Neumann e mostre graficamente, comparando a solução exata e a aproximada estabilizada e não estabilizada, que a metodologia de estabilização empregada é capaz de impedir as oscilações numéricas inerentes deste problema e comente os resultados.

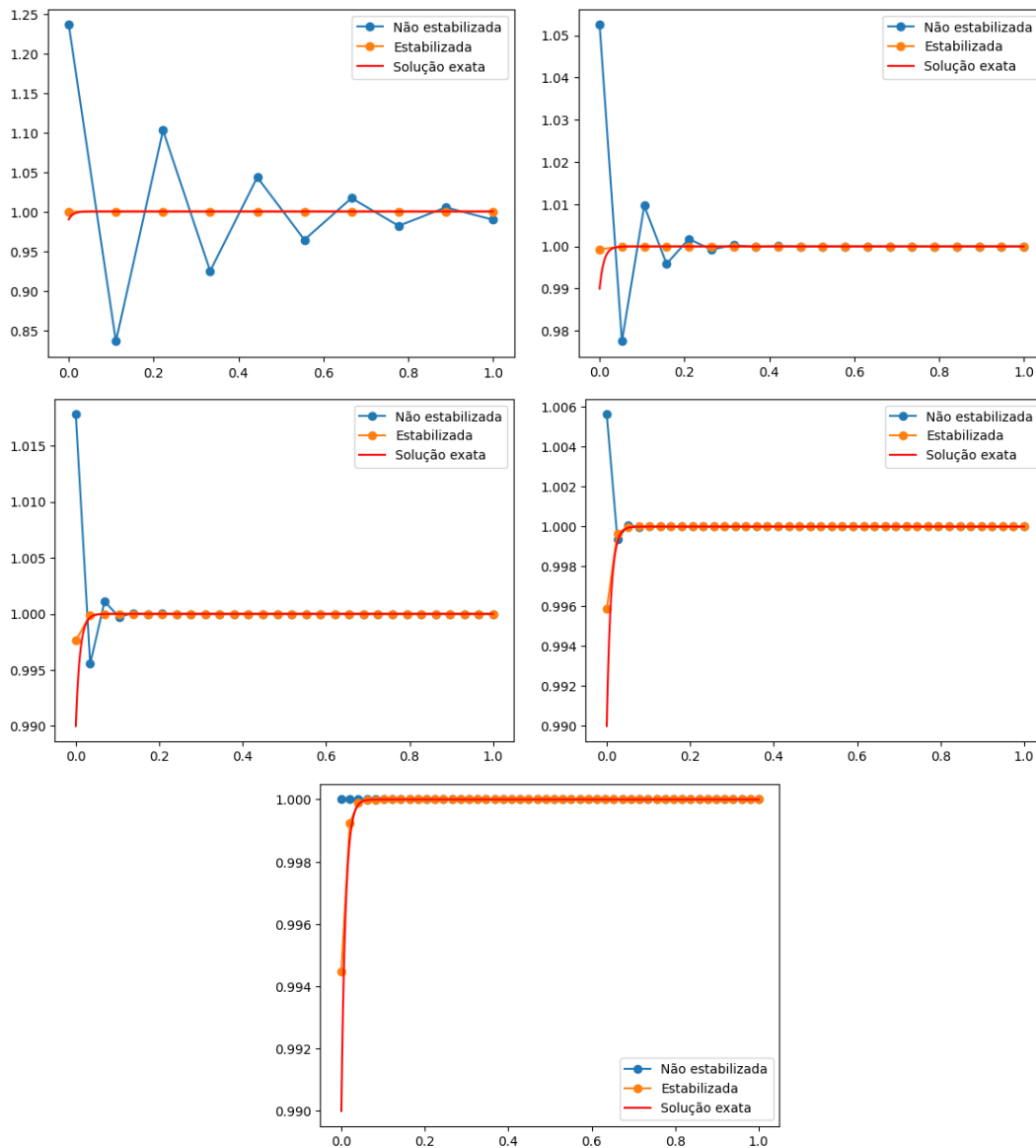


Figura 13: Gráficos com comparação entre a solução exata (em vermelho) e a aproximada estabilizada (em laranja) e a aproximada não estabilizada (em azul), com h sendo igual a 0.1, 0.05, 0.03, 0.025 e 0.02 respectivamente

Como pode ser observado nos gráficos acima, a estabilização por meio de difusão artificial é capaz de impedir as oscilações numéricas do problema. Até $h = 0.024$, a solução não estabilizada oscila pois não satisfaz a condição de estabilidade (13). Enquanto isso, a aproximação estabilizada já se aproxima da solução exata.

A difusão artificial é adicionada pela soma de um valor γ ao termo difusivo:

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = (1 + \gamma * P_{eh}) \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + P_{eh} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h^2} = 0 \quad (15)$$

Substituindo o u_j por $A * e^{-P_{eh}j}$ e isolando o γ , temos a seguinte expressão:

$$\gamma = \frac{e^{-P_{eh}} + 1}{2 * (e^{-P_{eh}} - 1)} + \frac{1}{P_{eh}} \quad (16)$$

Aplicando esse valor de gama, calculado com base nos parâmetros do problema, obtem-se um aumento de difusão que é responsável pela estabilização da aproximação.

Utilizando essa difusão artificial, a aproximação deveria ser nodalmente exata, ou seja, apresentar erro $\tau = 0$ em todos os pontos aproximados. Porém, como visto nos gráficos acima, isso não ocorre.

Isso se deve ao erro sobre a condição de contorno de Neumann. O método apresenta erro ao calcular os pontos próximos a condição de contorno e então a aproximação tende a solução exata conforme se aproxima da condição de contorno de Dirichlet.

Esse comportamento pode ser observado no gráfico abaixo, que mostra o erro de cada ponto aproximado pelo método. Observe que esse erro tende a 0 conforme o método se aproxima de $x = 1$

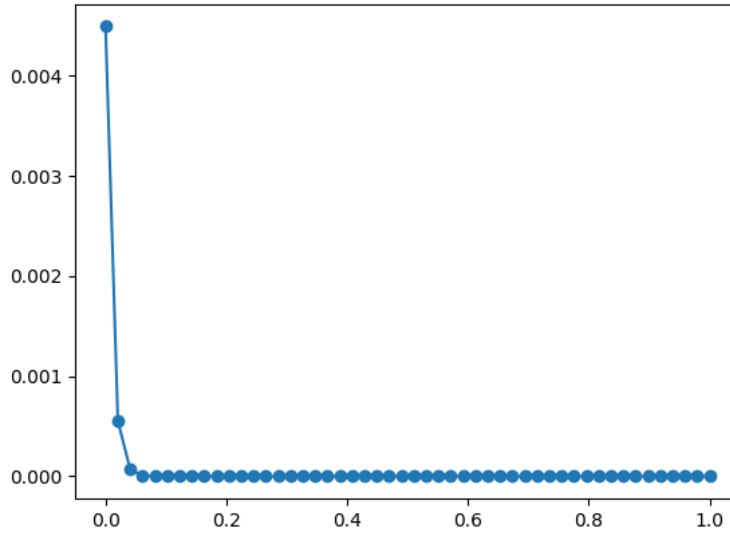


Figura 14: Gráfico que relaciona o erro entre a solução exata e a aproximação utilizando difusão artificial em cada um dos pontos aproximados pelo método. Gráfico com 60 pontos, $h = 0.016$