

1. Seja o problema de valor inicial associado a lei de resfriamento de Newton:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -K(\theta - \theta_m) \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

A solução exata para o problema (1) é dada por:

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_m)e^{-Kt} + \theta_m \quad (2)$$

(a) Apresentação das discretizações por diferenças finitas para aproximar o problema (1):

\* Euler Explícito:

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_m) \Rightarrow \quad (3)$$

$$\frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\delta t} = -k(\theta - \theta_m) \Rightarrow \quad (4)$$

$$\theta(t + \Delta t) = -k * \Delta t(\theta - \theta_m) + \theta(t) \Rightarrow \quad (5)$$

$$\theta_{i+1} = \Delta t * k(\theta_i - \theta_m) + \theta_i \quad (6)$$

\* Euler Implícito:

$$\theta_{i+1} = k * \Delta t(\theta_{i+1} - \theta_m) + \theta_i \Rightarrow \quad (7)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i - k * \Delta t * \theta_m + k * \Delta t * \theta_{i+1} \Rightarrow \quad (8)$$

$$\theta_{i+1} - k * \Delta t * \theta_{i+1} = \theta_i - k * \Delta t * \theta_m \Rightarrow \quad (9)$$

$$\theta_{i+1} * (1 - k * \Delta t) = (\theta_i - k * \Delta t * \theta_m) \Rightarrow \quad (10)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{(\theta_i - k * \Delta t * \theta_m)}{(1 - k * \Delta t)} \quad (11)$$

$$(12)$$

\* Crank-Nicolson:

$$\frac{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_i}{\frac{\Delta t}{2}} = -k(\theta_i - \theta_m) \Rightarrow \quad (13)$$

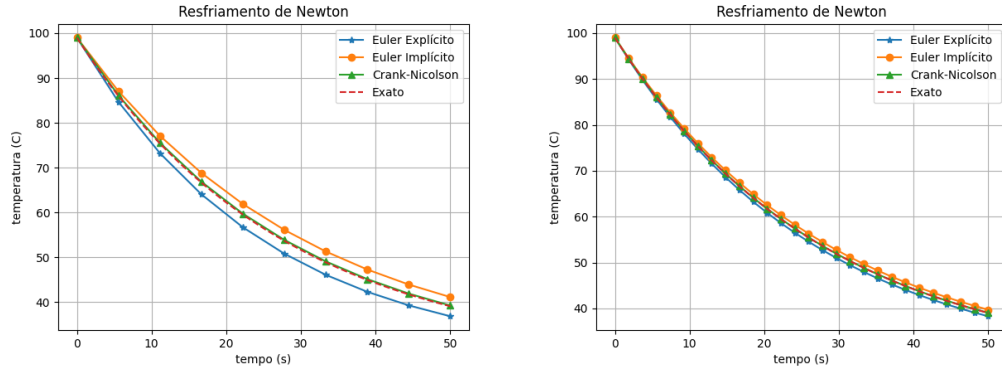
$$\frac{2 * (\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta t} = -k * (\theta_{i+1} + \theta_i - 2 * \theta_m) \Rightarrow \quad (14)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{-k * \Delta t * \theta_{i+1}}{2} - \frac{k * \Delta t * \theta_i}{2} + k * \theta_i * \Delta t + \theta_i \Rightarrow \quad (15)$$

$$\theta_{i+1} = (-\frac{k}{2} * \Delta t * (\theta_i - 2\theta_m) + \theta_i) / (1 + \frac{k * \Delta t}{2}) \quad (16)$$

- (b) Tomando  $K = 0,035871952 \text{ min}^{-1}$ ,  $\theta_0 = 99 \text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $\theta_m = 27 \text{ }^{\circ}\text{C}$  é possível construir gráficos comparando a solução exata (2) com a aproximada obtida pelas discretizações do item (a) no intervalo  $[0, 50]$ , como observado abaixo

Figura 1: Comparativo dos métodos de aproximação com a resposta exata



- **Obs.:** A escolha do  $\Delta t$  foi sempre obedecendo o mesmo princípio para os três métodos, para que fosse possível fazer a observação do comportamento de cada método e de suas condições de estabilidade. O  $\Delta t$  sempre é calculado a partir da divisão linear do tempo de experimento pelo número de pontos, e o que varia no experimento em questão é o número de pontos, que varia de acordo com o refinamento do cálculo. Isso implica, que no primeiro refinamento foi possível observar oscilações, porque o método de Euler explícito possui condição de estabilidade e, para alguns casos, não havia sido satisfeita.

- (c) A partir da escolha de um único  $\Delta t$  que cumpre ao mesmo tempo a condição de estabilidade dos 3 métodos, foi calculado o erro entre a solução exata e a aproximada na norma do máximo  $\|\theta(t_n) - \theta^n\|_{\infty}$ .

Euler Explícito: 0.2953981326511468039

Euler Implícito: 0.289990023693066451

Crank-Nicolson: 0.0021919746887888238995

Esse erro foi obtido após 4 (quatro) refinamentos através do cálculo supracitado. A partir dos resultados, é possível observar que a precisão da aproximação do método Crank-Nicolson é bastante superior, já que a grandeza de seu erro é  $\log(e) = -3$ , enquanto as demais possuem  $\log(e) = -1$ . Dentre o euler explícito e implícito, nota-se uma pequena diferença já na segunda casa decimal.

- (d) Os resultados dos itens (b) e (c) podem variar adotando precisão simples ou dupla na declaração das variáveis, isso se deve ao erro de variação de ponto flutuante intrínseco da expressão de números reais em computadores. A estrutura de uma variável de precisão simples é diferente da de precisão dupla, o que causa uma pequena diferença nas últimas casas decimais que, em grande escala, pode acarretar imprecisões maiores. No cálculo em questão, as diferenças foram representadas na tabela a seguir:

Tabela 1: Comparação de precisão dos dados

Precisão	Exata	Euler Explícito	Euler Implícito	Crank-Nicolson
float32	56.419746	48.97845120331945	61.36333933123038	57.66649059227325
float64	56.41974710214109	48.978449999999995	61.36333861311712	57.66648980695312