Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Jonatas Dias Machado Costa - 202165077AC
Lucas Marins Ramalho de Lima - 202165555C

1. Seja o problema de valor incial associado a lei de resfriamento de Newton:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -K(\theta - \theta_m) \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad , \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

A solução exata para o problema (1) é dada por:

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_m)e^{-Kt} + \theta_m \tag{2}$$

(a) Apresentação das discretizações por diferenças finitas para aproximar o problema (1):

∗ Euler Explícito:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -k(\theta - \theta_m) \Rightarrow & (3) \\ \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} &= -k(\theta - \theta_m) \Rightarrow & (4) \\ \theta(t+\Delta t) &= -k * \Delta t(\theta - \theta_m) + \theta(t) \Rightarrow & (5) \\ \theta_{i+1} &= -\Delta t * k(\theta_i - \theta_m) + \theta_i & (6) \end{aligned}$$

∗ Euler Implícito:

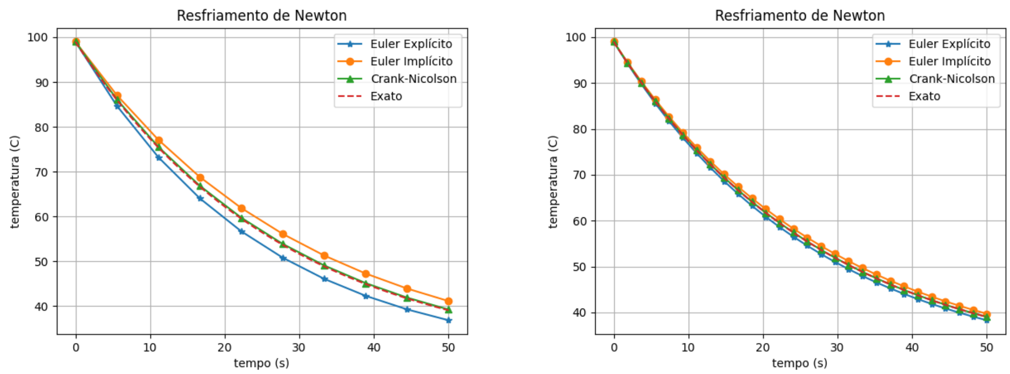
$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= -k * \Delta t(\theta_{i+1} - \theta_m) + \theta_i \Rightarrow & (7) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + k * \Delta t * \theta_m - k * \Delta t * \theta_{i+1} \Rightarrow & (8) \\ \theta_{i+1} + k * \Delta t * \theta_{i+1} &= \theta_i + k * \Delta t * \theta_m \Rightarrow & (9) \\ \theta_{i+1} * (1 + k * \Delta t) &= (\theta_i + k * \Delta t * \theta_m) \Rightarrow & (10) \\ \theta_{i+1} &= \frac{(\theta_i + k * \Delta t * \theta_m)}{(1 + k * \Delta t)} & (11) \\ & & (12) \end{aligned}$$

∗ Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_i}{\frac{\Delta t}{2}} &= -k(\theta_i - \theta_m) \Rightarrow & (13) \\ \frac{2 * (\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta t} &= -k * (\theta_{i+1} + \theta_i - 2 * \theta_m) \Rightarrow & (14) \\ \theta_{i+1} &= \frac{-k * \Delta t * \theta_{i+1}}{2} - \frac{k * \Delta t * \theta_i}{2} + k * \theta_i * \Delta t + \theta_i \Rightarrow & (15) \\ \theta_{i+1} &= (-\frac{k}{2} * \Delta t * (\theta_i - 2\theta_m) + \theta_i)/(1 + \frac{k * \Delta t}{2}) & (16) \end{aligned}$$

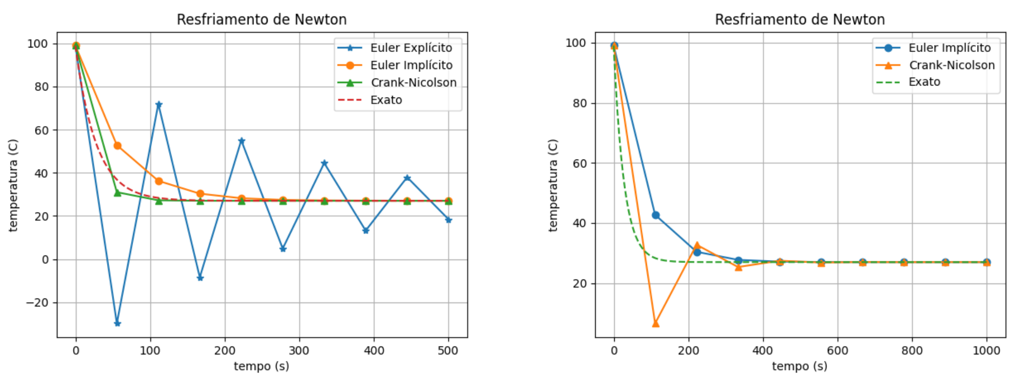
(b) Tomando $K = 0,035871952\ min^{-1}$, $\theta_0 = 99\ ^oC$ e $\theta_m = 27\ ^oC$ é possível construir gráficos comparando a solução exata (2) com a aproximada obtida pelas discretizações do item (a) no intervalo $[0, 50]$, como observado abaixo

Figura 1: Comparativo dos métodos de aproximação com a resposta exata



– **Obs.:** Nos gráficos acima, observa-se duas iterações dos métodos. Nessas iterações, tem-se o valor de $\Delta t = 5.55$s e $\Delta t = 1.85$s respectivamente. Esse valor é calculado a partir da divisão do tempo total de experimento pelo número de pontos a serem calculados em cada iteração menos um. O número de pontos de cada iteração, por sua vez, é calculado a partir da seguinte expressão: $npontos = 3^{it+1} + 1$ sendo it o número da iteração.
Dessa forma, como o valor de Δt é sempre o mesmo a cada iteração em todos os métodos, é possível fazer a observação do comportamento de cada método e de suas condições de estabilidade.
No euler explícito, temos a condição de estabilidade para o $\Delta t < 1/\text{k}$ (no caso estudado atualmente $\Delta t <$ 27,876932931s). O euler implícito é incondicionalmente estável. O Cranck-Nicolson possui condição de estabilidade $\Delta t < 2/\text{K}$ (no atual experimento $\Delta t <$ 55,753865862s).

Figura 2: Métodos Euler Explícito e Cranck Nicolson com condição de estabilidade não satisfeita



– Nos gráficos dispostos acima, observa-se exatamente as condições de estabilidade não sendo satisfeita para o método euler explícito (a esquerda) com $\Delta t = 50$s e para o método do Cranck-Nicolson (a direita) com $\Delta t = 100$s. A obtenção desses valores de Δt foi feita a partir do aumento do tempo total do experimento e mantendo a metodologia de repartição desse tempo em pontos de acordo com o cálculo supracitado.

(c) A partir da escolha de um único Δt que cumpre ao mesmo tempo a condição de estabilidade dos 3 métodos, foi calculado o erro entre a solução exata e a aproximada na norma do máximo $\|\theta(t_n) - \theta^n\|_\infty$ com $\Delta t = 5.55$s e 10 pontos

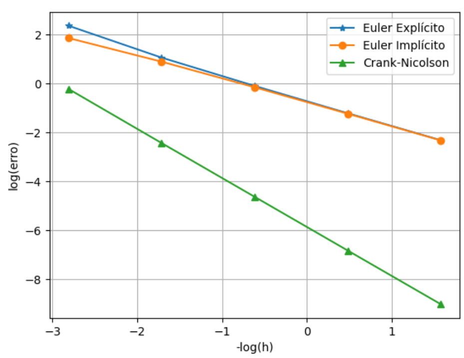
Euler Explícito: 0.2953981326511468039
Euler Implícito: 0.289990023693066451
Cranck-Nicolson: 0.087688514877153588

Esse erro foi obtido após 2 (quatro) refinamentos (10 pontos) através do cálculo supracitado. A partir dos resultados, é possível observar que a precisão da aproximação do método Cranck-Nicolson é bastante superior, já que a grandeza de seu erro é log(e) = -2, enquanto as demais possuem log(e) = -1. Dentre o Euler Explícito e Implícito, nota-se uma pequena diferença já na segunda casa decimal. Essa diferença de aproximação é explicitada ao realizar a análise das taxas de convergência de cada método, representadas pelo cálculo a seguir.

$$tC = \frac{log(erro_j) - log(erro_1)}{log(\Delta T_j) - log(\Delta T_0)} \tag{17}$$

Em que j é o número de refinamentos feitos.
- Os erros e os Δ t obtidos podem ser dispostos no seguinte gráfico de convergência

Figura 3: Curvas de decaimento do erro para os métodos utilizados



- A taxa de convergência de cada método é:
  Euler explícito: 1.0662794820986979563
  Euler implícito: 0.9531305037890677959
  Cranck-Nicolson: 2.0046062353098105333

(d) Os resultados dos itens (b) e (c) podem variar adotando precisão simples ou dupla na declaração das variáveis, isso se deve ao erro de variação de ponto flutuante instrínseco da expressão de números reais em computadores. A estrutura de uma variável de precisão simples é diferente da de precisão dupla, que utiliza mais bits para representar um número, o que causa uma pequena diferença nas últimas casas decimais que, em grande escala, pode acarretar imprecisões maiores. No cálculo em questão, as diferenças foram representadas na tabela a seguir:

Tabela 1: Comparação de precisão dos dados

Precisão	Exata	Euler Explícito	Euler Implícito	Cranck-Nicolson
float32	61.72316	61.6295604683618	61.8160929600658	61.7230449738508
float64	61.7231586208402	61.6295596084914	61.8160921082062	61.7230441179992

- A tabela acima foi construída com os valores calculados para $t = 20,576131687$, sendo esse o $100^{\underline{o}}$ número do cálculo da $4^{\underline{a}}$ iteração dos métodos e indicam a diferença entre as precições de ponto flutuante. A discrepância entre os resultados pode ser observada a partir da $5^{\underline{a}}$ casa decimal no Euler Explícito (overflow) e da $7^{\underline{a}}$ casa decimal no Euler Implícito (overflow) e do Cranck-Nicolson (overflow).