

1. Será estudado o comportamento da aproximação por diferenças finitas a seguir:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a [(1 - \theta)u^{n+1} + \theta u^n] = 0, \quad (1)$$

para valores de $\theta \in [0, 1]$ com $a > 0$, no problema:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -au, \quad t \in [0, T] \\ u(0) &= b. \end{aligned}$$

Sabendo que a solução exata para este problema é $u(t) = b \exp(-at)$, é possível apresentar:

- (a) tabelas com as condições de estabilidade com θ variando de 0 à 1 de 0.1 em 0.1 e variando o valor de a ;

Para a construção de ambas tabelas dispostas abaixo, foram utilizados os seguintes valores: $b = 1.0$ e $T = 1.0$

θ	Condição de estabilidade
0.0	Não possui
0.1	2.0
0.2	1.0
0.3	0.6666
0.4	0.5
0.5	0.4
0.6	0.3333
0.7	0.2857142857142857
0.8	0.25000000000000006
0.9	0.2222
1.0	0.2

Tabela 1: Tabela comparando condições de estabilidade para diferentes valores de theta e $a = 5.0$

θ	Condição de estabilidade
0.0	Não possui
0.1	5.0
0.2	2.5
0.3	1.6666
0.4	1.25
0.5	1.0
0.6	0.8333
0.7	0.7142857142857143
0.8	0.625
0.9	0.5555
1.0	0.5

Tabela 2: Tabela comparando condições de estabilidade para diferentes valores de theta e $a = 2.0$

O cálculo de condição de estabilidade, é feito a partir da explicitação da expressão da aproximação por diferenças finitas (1) da seguinte forma:

$$u^{n+1} = \frac{u^n(1 - a\theta\Delta t)}{(1 + a\theta\Delta t)} \quad (2)$$

Para que a aproximação seja estável, é preciso satisfazer a seguinte inequação:

$$\Delta t < \frac{1}{a\theta} \quad (3)$$

A partir dos resultados obtidos nas tabelas e a observação da inequação (3), podemos concluir que a condição de estabilidade é mais restrita ao passo que o valor do produto $a\theta$ é maior. Dessa forma, para utilização de intervalos de tempo Δt maiores, é mais adequado valores de θ mais próximos de 0.

- (b) um gráfico com as taxas de convergência comparando os métodos listados na tabela do item (a). Utilizando os valores $T = 1.0$, $a = 2.0$, $b = 1.0$ e $\Delta t = \frac{T}{2^{j+1}-1}$ com $0 < j < 10$.

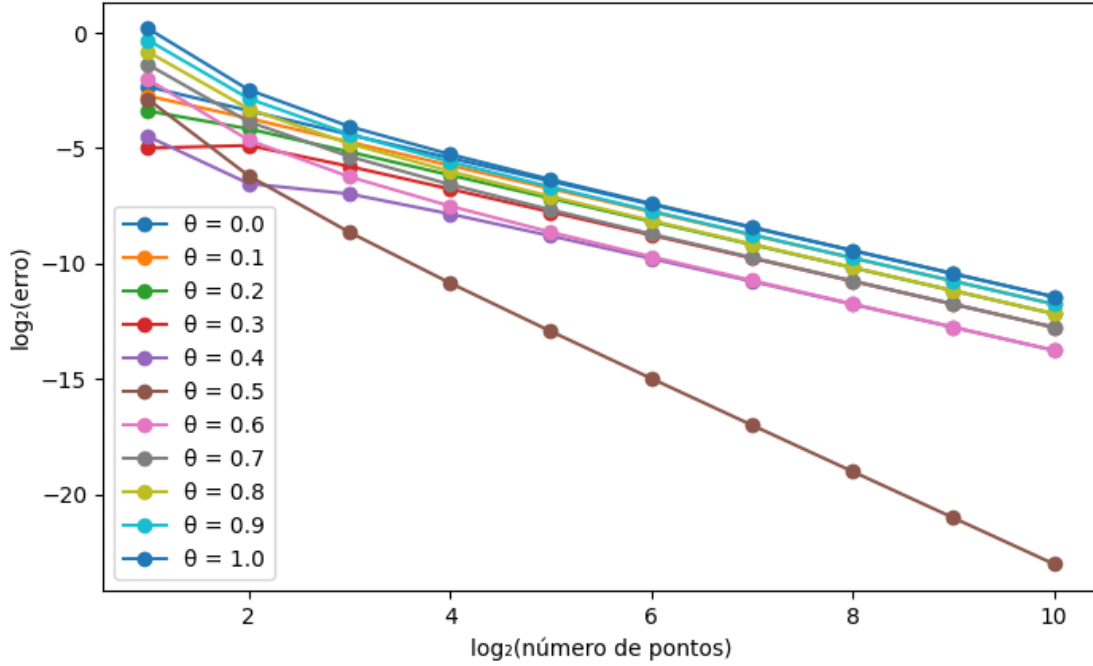


Figura 1: Gráfico relacionando o número de pontos com o erro da aproximação utilizando diferentes valores para θ

A taxa de convergência, geometricamente, é igual à tangente do ângulo de inclinação das retas formadas no gráfico da figura (1). Os valores de taxa de convergência da aproximação para cada valor de θ escolhido, pode ser observado na tabela abaixo:

θ	Taxa de convergência
0.0	1.011779793890893
0.1	1.0034488723250539
0.2	0.9766781953659545
0.3	0.863158145638542
0.4	1.030362345133843
0.5	2.2377164912928205
0.6	1.3044521843640045
0.7	1.2651047432244107
0.8	1.2611747452635087
0.9	1.2715265593548675
1.0	1.291469777306724

Tabela 3: Tabela de taxas de convergência para cada valor de θ utilizado nas aproximações

É observado que o valor de θ que produz melhor taxa de convergência, é $\theta = 0.5$, e isso se deve ao fato ao aplicar esse valor na expressão (1) obtém-se a expressão do método de Crank-Nicolson, que é um método de segunda ordem de convergência:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)u^{n+1} + \frac{1}{2}u^n \right] = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}(u^{n+1} + u^n) \quad (4)$$

- (c) outro gráfico comparando os resultados obtidos no item (b) com as taxas de convergência dos métodos de diferença central e Runge-Kutta de segunda ordem;

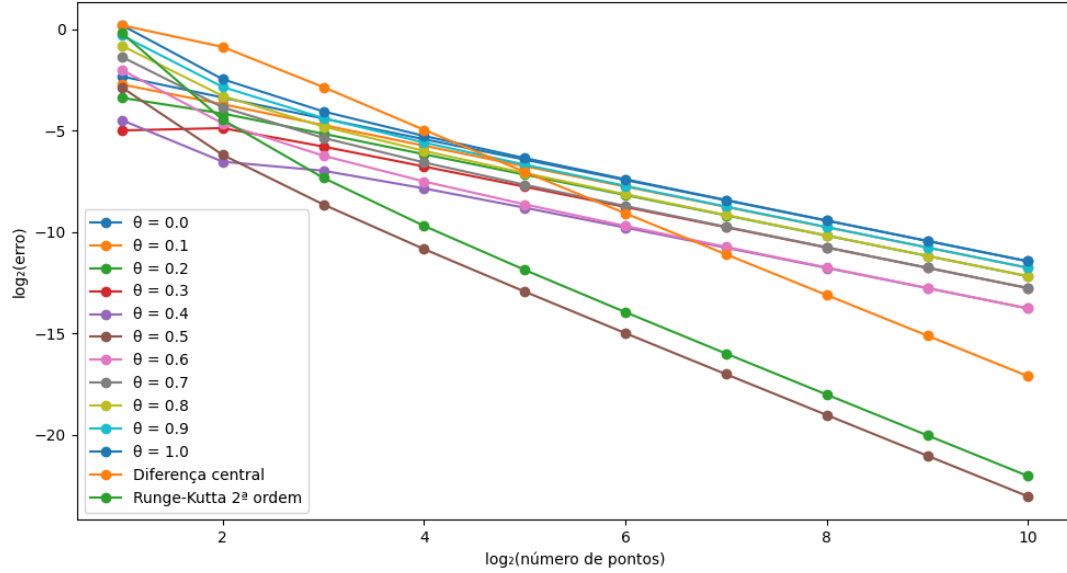


Figura 2: Gráfico comparando as diferentes taxas de convergências obtidas pela variação de θ na equação (1) e pelos métodos de aproximação de diferença central e Runge-Kutta de segunda ordem

É possível notar que o método Crank-Nicolson (aproximação com $\theta = 0.5$), o método da diferença central e o método Runge-Kutta são métodos de segunda ordem. A tabela abaixo mostra os valores de taxa de convergência desses três métodos:

Método de aproximação	Taxa de convergência
Crank-Nicolson ($\theta = 0.5$)	2.2377164912928205
Diferença central	1.9209949471993777
Runge-Kutta	2.4236595414529107

Tabela 4: Tabela de taxas de convergência para diferentes métodos de segunda ordem de convergência

2. Seja o problema de segunda ordem que descreve o movimento de um pêndulo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -\sin(u), \quad t \in [0, T] \\ u(0) &= \alpha \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt}(0) = \beta. \end{aligned}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$$

Adotando $\alpha = 0$ e $\beta = 0.1$ em um domínio $[0, 2\pi]$, resolva o problema acima empregando as seguintes metodologias:

- (a) aproximação de segunda ordem para a derivada no tempo

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = -\sin(u^n) \quad (5)$$

Para a aplicação da metodologia descrita (5) são necessários os dois primeiros valores: $u(0)$ e $u(\Delta t)$. O primeiro é informado no enunciado do problema $u(0) = \alpha$ com α sendo uma constante $\alpha = 0$. O segundo não é informado diretamente, mas pode ser obtido a partir de uma aproximação de $\frac{du}{dt}(0) \approx \beta$:

A aproximação utilizada para a obtenção do ponto $u(\Delta t)$ foi:

$$u^1 = u^0 + \Delta t * b \quad (6)$$

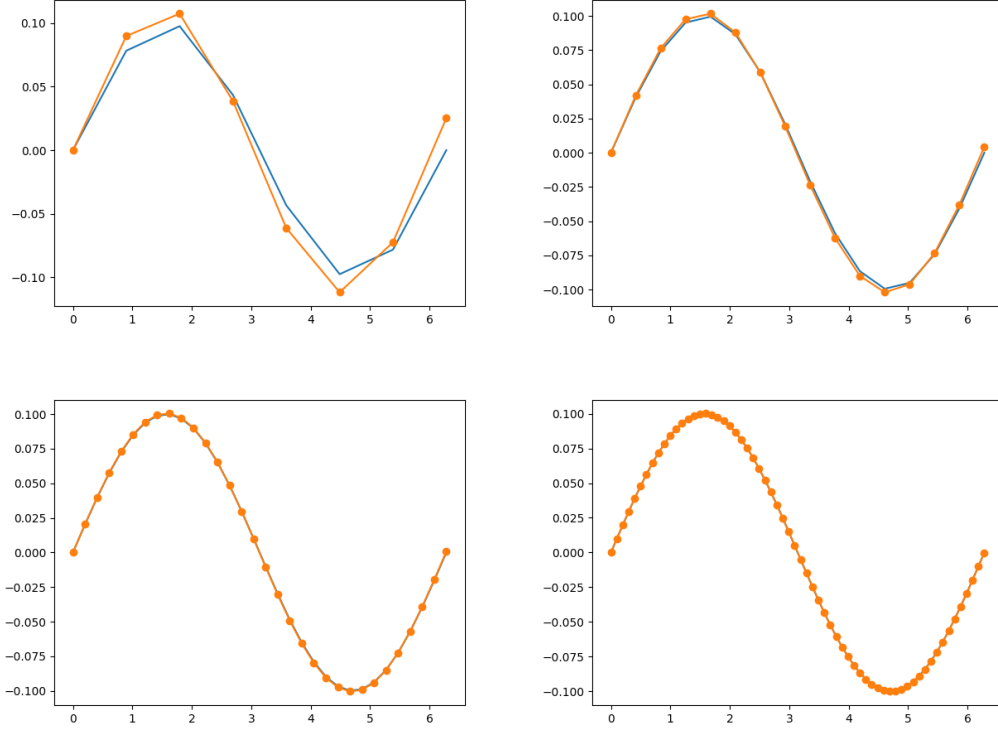


Figura 3: Gráficos com comparação entre a solução exata (em azul) e a aproximada (em laranja), com 8, 16, 32 e 64 pontos respectivamente

Número de pontos	Erro
4	0.8807889596052928
8	0.025229155560945456
16	0.004364628129913211
32	0.0007186088901634385
64	0.00020806373712413395
128	0.00033193898612855245
256	0.0003775812191366742
512	0.0003893203126426371
1024	0.0003922704712384566

Tabela 5: Tabela com valor de erro para aproximação com referentes números de pontos

- (b) fazendo a seguinte troca de variável $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, podemos reescrever o problema do pêndulo como o seguinte sistema:

$$v = \frac{du}{dt} \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\sin(u) \quad (8)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0.1. \quad (9)$$

Aplicando o método de Crank-Nicolson para aproximar a equação (8):

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [F(u^{n+1}) + F(u^n)] \quad (10)$$

Explicitando u^{n+1} e substituindo $F(t) = -\sin(u)$ temos:

$$v^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} [F(u^{n+1}) + F(u^n)] + v^n \quad (11)$$

Dessa forma, pode-se aproximar o valor de v para todos os pontos se soubermos o valor de u^n e u^{n+1} , para calcular esses valores, utiliza-se o método de euler explícito para a aproximação:

$$u^{n+1} = u^n + v^n \Delta t \quad (12)$$

Utilizando essa metodologia, obtemos a aproximação para o problema que é comparada com a solução exata nos gráficos abaixo:

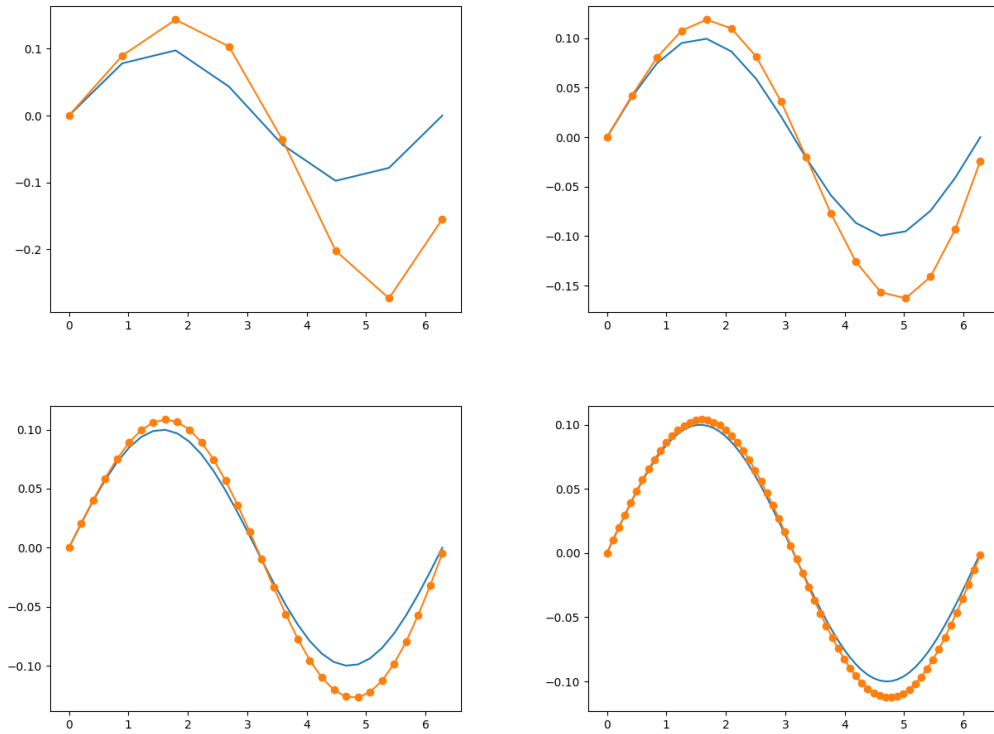


Figura 4: Gráficos com comparação entre a solução exata (em azul) e a aproximada por Crank-Nicolson (em laranja), com 8, 16, 32 e 64 pontos respectivamente

Número de pontos	Erro
4	0.658285850148697
8	0.19498110535328267
16	0.06763958096001646
32	0.028506975308279267
64	0.013057805867482161
128	0.006302198956992702
256	0.0031466717889864354
512	0.001631692847575708
1024	0.0009078286567543309

Tabela 6: Tabela com valor de erro para aproximação com referentes números de pontos

- (c) apresentar um gráfico comparando as taxas de convergência dos métodos desenvolvidos anteriormente (letras (a) e (b)) utilizando a norma do máximo.

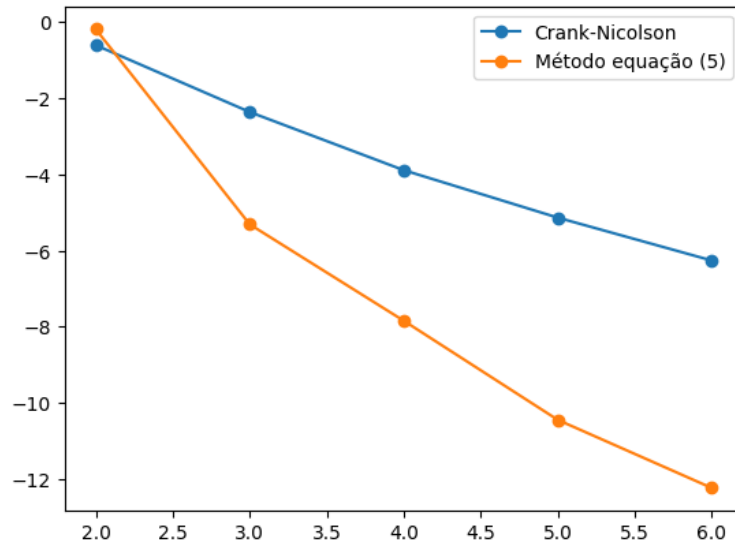


Figura 5: Gráfico comparando as taxas de convergência dos métodos Crank-Nicolson e o método da equação (5)

A taxa de convergência dos métodos representados geometricamente pela tangente do ângulo de inclinação das retas do gráfico (Figura 5). Será apresentado abaixo uma tabela com os valores de taxa de convergência de ambos os métodos:

Método de aproximação	Taxa de convergência
Crank-Nicolson	1.4139324460750957
Método da equação (5)	3.011888781620267