

# How non-orthogonal CDMA behaves on a noise affected channel

Mario Pellegrino Ambrosone

December 2024

## Abstract

Il presente lavoro analizza il comportamento del CDMA non ortogonale come tecnica di accesso multiplo per la gestione di canali condivisi in sistemi di comunicazione digitale. Attraverso simulazioni MATLAB, vengono studiate due configurazioni principali: una curva simulata per un sistema PAM con CDMA non ortogonale su canale ideale e una curva simulata per un sistema PAM con CDMA non ortogonale in presenza di rumore. Lo studio si concentra sulla valutazione della relazione tra il numero di utenti e le prestazioni del sistema ma anche sull'impatto della non ortogonalità nella gestione dell'accesso condiviso al canale, fornendo quindi una comprensione dettagliata delle prestazioni e dei limiti di questa tecnica.

# Contents

<b>1</b>	<b>Modello teorico di riferimento</b>	<b>3</b>
1.1	Analisi teorica del 2-PAM su canale ideale . . . . .	3
1.2	Il CDMA non ortogonale: concetti e proprietà . . . . .	3
1.3	Interferenza nel CDMA non ortogonale: analisi statistica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Framework di simulazione MATLAB</b>	<b>7</b>
2.1	Definizione del setup di simulazione . . . . .	7
2.2	Simulazione per un carico medio di utenti . . . . .	8
2.2.1	Prestazioni su canale ideale . . . . .	8
2.2.2	Prestazioni in presenza di rumore AWGN . . . . .	9
2.3	Simulazione per un carico elevato di utenti . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Discussione matematica delle simulazioni</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>13</b>
4.1	Sintesi dei risultati e implicazioni . . . . .	13
4.2	Osservazioni chiave sulle curve simulate . . . . .	13
4.3	Strategie per l'ottimizzazione del CDMA non ortogonale . . . . .	14

# 1 Modello teorico di riferimento

## 1.1 Analisi teorica del 2-PAM su canale ideale

*In questa sezione viene introdotto il modello teorico di un sistema di modulazione PAM (Pulse Amplitude Modulation) operante su un canale ideale, privo di interferenze e rumore. Si forniscono le espressioni analitiche per la probabilità di errore in condizioni ideali, che saranno utilizzate come baseline per il confronto.*

La tecnica di modulazione PAM adottata nella trattazione è di tipo 2-PAM; si tratta quindi di un PAM binario con simboli equiprobabili ad energia  $\varepsilon = 1$ . Ciò vuol dire che sul piano di modulazione i due simboli  $b_0 = 0$  e  $b_1 = 1$  si troveranno nei punti  $\sqrt{\varepsilon} = \pm 1$ .

Sia la probabilità di errore per simbolo di un M-PAM:

$$P_e = 2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right),$$

Allora, per sostituzione con  $M = 2$ ,  $E_b = \varepsilon = 1$  e su canale ideale, la  $P_e$  di un 2-PAM sarà:

$$P_e = Q \left( \sqrt{2E_b} \right) = Q \left( \sqrt{2} \right).$$

La probabilità di errore teorica ricavata sarà indice delle migliori "aspettative" di  $P_e$  del sistema. La curva descritta dalla Qfunc infatti, in assenza di rumore e con così pochi simboli, fungerà da baseline poiché rappresenta non solo il caso ideale ma anche quello più lontano e "semplificato" rispetto alla realtà; il meglio che possiamo aspettarci è pertanto che, in ogni altro caso di trattazione (canale interferente a causa della MU e canale "reale" con rumore e MU), l'andamento delle probabilità di errore simulate segua al più l'andamento esponenziale della Qfunc nella forma appena ottenuta, o che perlomeno tenda ad assomigliarvi il più possibile.

## 1.2 Il CDMA non ortogonale: concetti e proprietà

*Viene descritta la tecnica CDMA non ortogonale, enfatizzando le differenze rispetto al CDMA ortogonale e il suo utilizzo per la gestione di un canale condiviso. Si introducono i concetti chiave, come la sovrapposizione dei segnali utente e il ruolo dei codici non ortogonali nell'accesso multiplo.*

Il vero obiettivo di questo breve documento è la valutazione delle prestazioni del CDMA non ortogonale come metodo di gestione di un canale condiviso, osservando quanto esso influisca sulle performance di un sistema che utilizza la più semplice modulazione e sul numero più piccolo di simboli utilizzabili in una trasmissione digitale. Per questioni di completezza presentiamo brevemente il NON-ORTHOGONAL CDMA, ovvero quella tecnica di accesso al canale condiviso dove la codifica non avviene in frequenza (FDMA) o nel tempo (TDMA) ma mediante specifici segnali detti codici  $c(t)$ . Questi codici sono segnali di durata  $t = L_c$  che possono assumere i valori:

$$c(t) = \pm 1, \quad \forall t \in \{0, \dots, L_c\}$$

Nello specifico possiamo dire che:

$$P[c_i = 1] = P[c_i = -1] = \frac{1}{2}.$$

Ovvero che le singole realizzazioni dell'esperimento di valutazione del valore corrente del codice vanno come variabili aleatorie binarie equiprobabili.

Sia dunque un segnale  $s(t)$  a durata limitata  $T_b$ , allora definiamo  $y(t) = c(t) \cdot s(t)$ . Inoltre, se  $c(t)$  varia per ogni intervallo  $t = T_c \ll T_b$ ,  $y(t)$  avrà banda  $B_{y(t)}$  t.c. :

$$B_{y(t)} = B_{c(t)} = \frac{1}{T_c} > B_{s(t)} = \frac{1}{T_b}.$$

Il segnale  $y(t)$  sarà quindi la versione frequency spread di  $s(t)$ ; quest'ultimo può essere però recuperato moltiplicando il segnale prodotto  $y(t)$  per il medesimo codice  $c(t)$ . Essendo che quest'ultimo varia tra 1 e -1, basterà infatti definire  $y'(t)$  t.c.:

$$y'(t) = y(t) \cdot c(t) = s(t) \cdot c(t) \cdot c(t) = s(t) \cdot c(t)^2;$$

dove per  $c(t)^2 = 1$  ( il prodotto di  $\pm 1$  per sé stesso restituirà sempre 1):

$$y'(t) = s(t) \cdot c(t)^2 = s(t).$$

Deduciamo quindi che tutti gli effetti del frequency spread del codice sul segnale prodotto vengono annullati ed è possibile risalire al segnale originariamente trasmesso  $s(t)$ .

Diverso è il panorama multi-utente dove, nel segnale aggregato che viaggia sul canale, vi sono molti codici differenti. Si immagini di avere  $N$  utenti con i rispettivi codici associati, allora all' $i$ -esimo utente, a valle della demodulazione e del prodotto con il codice  $c_i(t)$  accordato, il segnale  $y(t)$  sarà la somma tra il segnale a lui indirizzato e tutti i termini dei vari  $N - 1$  segnali, spread out con i rispettivi codici e moltiplicati con il codice  $c_i(t)$ .

Si consideri la trasmissione su un canale ideale di  $N$  utenti il cui accesso al mezzo condiviso è gestito mediante Non-Orthogonal CDMA; sia inoltre  $c_1$  il codice associato al primo utente,  $\varepsilon_s$  l'energia del segnale del primo utente, ottenuta mediante il prodotto con il codice associato, e siano  $s_n$  con  $n \in N$  i segnali destinati ai rispettivi  $N$  utenti, allora per il primo utente il segnale  $y_1$  a valle della demodulazione sarà t.c. :

$$y_1 = \varepsilon_s + \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk}$$

$$\text{con } L_c = \frac{T_b}{T_c}.$$

$y_1$  è quindi un segnale con interferenza MU; nello specifico, a meno dell'energia  $\varepsilon_s$ , tutta l'espressione descrive e rappresenta l'interferenza sul ricevitore, nel nostro caso l'utente 1.

### 1.3 Interferenza nel CDMA non ortogonale: analisi statistica

*Analisi teorica dell'interferenza generata dalla sovrapposizione dei segnali degli utenti in un sistema CDMA non ortogonale al fine di dimostrarne l'approssimazione come variabile aleatoria gaussiana.*

È possibile dimostrare che, assegnando a ogni utente un codice i cui valori sono variabili aleatorie binarie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.), come in effetti presentato nel paragrafo precedente, l'interferenza multi-utente può essere approssimata come una variabile gaussiana a livello del singolo utente grazie al *Teorema del Limite Centrale*. Infatti, l'interferenza percepita da un utente è data dalla somma delle contribuzioni interferenti provenienti dagli altri utenti, ciascuna ponderata dai codici assegnati e dai relativi segnali trasmessi.

Poiché tali contribuzioni possono essere considerate variabili casuali indipendenti, ad esempio nella nostra trattazione sono variabili binarie indipendenti, dato un numero sufficientemente elevato di utenti interferenti, la distribuzione della somma tende a una gaussiana.

Questo risultato, di seguito dimostrato al fine di ottenere i parametri necessari a mappare la detta gaussiana nel codice di simulazione, garantisce una solida base teorica per modellare l'interferenza multi-utente come un processo gaussiano nelle analisi e simulazioni.

Valutiamo, a meno dell'energia del segnale  $s_1$ , ovvero  $\varepsilon_s$ , i termini della seguente uguaglianza la quale descrive il segnale  $y_1$  ricevuto a valle del demodulatore dal primo utente:

$$y_1 = \varepsilon_s + \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk}$$

D'ora in poi, poiché non influente sulla dimostrazione dell'interferenza come fenomeno gaussiano, si escluderà il termine  $\varepsilon_s$  da ogni computazione.

1. *Somma doppia:*

$$\sum_{k=1}^{L_c} \left( c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk} \right).$$

con  $c_{nk}$  e  $s_{nk}$  variabili aleatorie binarie indipendenti, tali che:

$$s_{nk}, c_{nk} \in \{-1, +1\}, \quad \mathbb{P}[x = 1] = \mathbb{P}[x = -1] = \frac{1}{2}.$$

Questa somma è la composizione di due termini; una somma esterna che descrive il frequency spread causato dal codice associato al primo utente ( $c_{1k}$ ) su tutti gli altri  $N - 1$  utenti del sistema e una somma interna.

2. *Somma interna:*

$$\sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk}$$

Ovvero il termine che rappresenta tutta la restante componente di segnale aggregato che non "serve" al ricevitore considerato, nel nostro caso utente 1, poiché porta con sé solo i restanti  $N - 1$  segnali già spread out dai rispettivi codici.

Si noti che, essendo gli  $N$  termini  $s_n$  i segnali trasmessi associati agli  $N$  utenti, ed essendo i  $k$  termini  $c_k$  i "frammenti" di codice le cui realizzazioni  $c_k = \pm 1$  sono da condizioni iniziali definite equiprobabili, allora ogni componente  $s_{nk}$  e  $c_{nk}$  sarà una variabile aleatoria binaria con  $p = \frac{1}{2}$  e il loro prodotto sarà, poiché prodotto di due variabili aleatorie binarie, una variabile aleatoria binaria i.i.d. per fissato valore  $n$ .

### Formalizzazione della distribuzione gaussiana per $y_1$

Sia il termine  $S_k$  definito come segue:

$$S_k = \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk}.$$

Poiché  $s_{nk}$  e  $c_{nk}$  sono variabili binarie indipendenti, la media del prodotto è:

$$\mathbb{E}[s_{nk} c_{nk}] = \mathbb{E}[s_{nk}] \cdot \mathbb{E}[c_{nk}].$$

Dato che  $\mathbb{E}[s_{nk}] = 0$  e  $\mathbb{E}[c_{nk}] = 0$ , si ha:

$$\mathbb{E}[S_k] = \sum_{n \neq 1} \mathbb{E}[s_{nk} c_{nk}] = 0.$$

La varianza di  $S_k$  è:

$$\text{Var}(S_k) = \sum_{n \neq 1} \text{Var}(s_{nk} c_{nk}).$$

Poiché  $s_{nk}$  e  $c_{nk}$  sono indipendenti, abbiamo:

$$\text{Var}(s_{nk} \cdot c_{nk}) = \mathbb{E}[(s_{nk} \cdot c_{nk})^2] - (\mathbb{E}[s_{nk} \cdot c_{nk}])^2.$$

Dato che  $s_{nk}$  e  $c_{nk}$  sono binarie ( $x^2 = 1$ ), risulta:

$$\text{Var}(s_{nk}c_{nk}) = 1 - 0^2 = 1.$$

Pertanto:

$$\text{Var}(S_k) = \sum_{n \neq 1} 1 = (N - 1),$$

dove  $N - 1$  è il numero di termini nella somma ( $n \neq 1$ ).

Applicando quindi il Teorema del Limite Centrale (CLT), per  $N \rightarrow \infty$ , la distribuzione di  $S_k$  tende a:

$$S_k \sim \mathcal{N}(0, N - 1).$$

### Valutazione della somma esterna

Ora consideriamo la somma esterna:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} S_k.$$

Sostituendo  $S_k$ , abbiamo:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \mathcal{N}(0, N - 1).$$

Poiché  $c_{1k}$  è una variabile binaria indipendente con  $\mathbb{E}[c_{1k}] = 0$ , allora:

$$\mathbb{E}[y_1] = \sum_{k=1}^{L_c} \mathbb{E}[c_{1k}] \cdot \mathbb{E}[S_k] = 0.$$

La varianza totale è:

$$\text{Var}(y_1) = \sum_{k=1}^{L_c} \text{Var}(c_{1k} S_k).$$

Poiché  $c_{1k}$  è binario ( $\text{Var}(c_{1k}) = 1$ ) e indipendente da  $S_k$ , abbiamo:

$$\text{Var}(y_1) = \sum_{k=1}^{L_c} \text{Var}(S_k).$$

Sostituendo  $\text{Var}(S_k) = N - 1$ , otteniamo:

$$\text{Var}(y_1) = \sum_{k=1}^{L_c} (N - 1) = L_c (N - 1).$$

### C v d

Possiamo quindi dire che i contributi dei codici  $c$  e dei segnali  $s$ , che costituiscono i termini del segnale aggregato ricevuto dal destinatario a valle della demodulazione, vanno per  $N$  sufficientemente grande come una gaussiana di varianza  $L_c \cdot (N - 1)$ .

Per essere precisi, alla valutazione della somma più esterna, il segnale ricevuto a destinazione sarà pari proprio al segnale trasmesso in origine traslato di un fattore pari a  $\sum_{k=1}^{L_c} c_{1k}$  volte la gaussiana dell'interferenza, ovvero una gaussiana :  $\sim \mathcal{N}(0, L_c \cdot (N - 1))$ .

## 2 Framework di simulazione MATLAB

### 2.1 Definizione del setup di simulazione

*Descrizione dettagliata del framework di simulazione sviluppato in MATLAB. Si specificano i parametri del sistema, tra cui numero di utenti, lunghezza dei codici, rapporto segnale-rumore (SNR), configurazione del canale e Montecarlo.*

Il framework sviluppato simula il comportamento di un sistema di telecomunicazione che sfrutta un PAM binario su mezzo condiviso con gestione degli accessi mediante CDMA non ortogonale. I parametri caratterizzanti i test sono:

- Parametri di input:
  1.  $N$ , numero utenti del canale;
  2. SNRdB, intervallo di rapporto segnale rumore di interesse;
  3.  $T_b$ , durata del simbolo trasmesso da ogni utente (tempo di bit);
  4.  $T_c$ , durata di un chip del codice;
  5. MonteCarlo, numero totale di simulazioni di trasmissione per singolo SNR;
- Parametri interni al framework:
  1.  $L_c$ , numero di chip necessari per trasmettere un singolo segnale, nel nostro caso un singolo bit;
  2.  $A$ , matrice dei simboli trasmissibili, nel nostro caso 1 e -1;

#### Studio dei casi di test

Definiamo i casi di test fornendo anzitutto il valore di alcuni parametri di input, che chiameremo invarianti, i quali definiscono sommariamente alcune caratteristiche del framework e del sistema considerato.

Saranno invarianti:

- SNRdB = [0dB, ..., 10dB] ;
- $T_b = 2 \cdot 10^{-6}$ s;
- $T_c = 1 \cdot 10^{-6}$ s;
- MonteCarlo =  $1 \cdot 10^6$  .

Varierà invece il numero di utenti  $N$  al fine di valutare gli effetti dell'interferenza all'aumentare dell'utenza mediante l'osservazione dell'andamento delle  $Pe$ .

Sia la struttura di un qualsiasi input al codice definita come segue:

main( $N$ , SNRdB,  $T_b$ ,  $T_c$ , Montecarlo);

allora stabiliamo i seguenti due casi di test:

a. main(10, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);

b. main(100, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);

## 2.2 Simulazione per un carico medio di utenti

Presentazione ed analisi dei risultati della simulazione per un sistema a 10 utenti con PAM e CDMA non ortogonale operante su un canale con e senza rumore. Viene analizzata la distribuzione della probabilità di errore in funzione del numero ridotto di utenti, valutando il fenomeno dell'interferenza e l'influenza del rumore su di esso.

### 2.2.1 Prestazioni su canale ideale

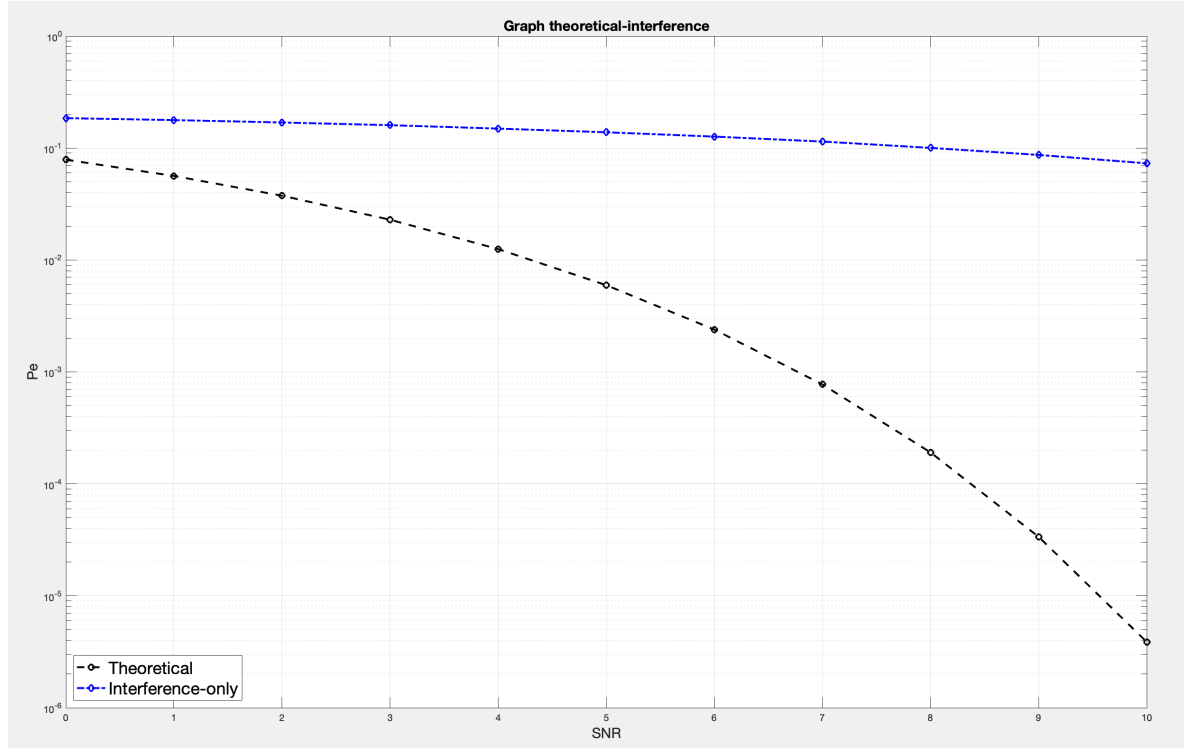


Figure 1: Simulazione a. - main(10, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);

L'output in figura mostra l'andamento delle probabilità di errore mediate sulle MonteCarlo realizzazioni per singolo valore di SNRdB. Nello specifico, la curva nera mostra l'andamento della  $Pe$  teorica del 2-PAM, già descritta in Sec. 1.1, mentre la curva blu mostra l'andamento della  $Pe$  simulata con interferenza MU. Sia detto  $IntPe \approx 10^{-1}$  il valore della curva blu in SNRdB=10 e  $ThPe \approx 10^{-5}$  il valore della curva nera nel medesimo punto, allora il deterioramento percentuale delle prestazioni  $\Delta$  sarà pari a  $\Delta \approx \frac{IntPe - ThPe}{ThPe} \cdot 100 = 999900\%$ . Nonostante ciò, è da considerare che la curva teorica fa riferimento ad un PAM binario senza multiutenza o gestione degli accessi al canale.

Il risultato ottenuto quindi non è pessimo, poiché l'andamento della curva suggerisce comunque una legge di decadimento esponenziale delle  $Pe$  all'aumento dell'SNR, seppur sia molto lento. Ciò che è infine necessario dire è che detta curva, leggendata come *Interference-only*, rappresenterà d'ora in avanti la nuova migliore aspettativa teorica, poiché unico risultato su canale ideale se si considerano gli effetti della scelta di un Non-Orthogonal CDMA. Ciò che ci aspettiamo infatti di vedere nei successivi output, ove la trasmissione è affetta da rumore termico AWGN sul destinatario, o più semplicemente su un canale rumoroso, è non solo un generico peggioramento delle  $Pe$  ma anche e soprattutto un andamento non più di tipo esponenziale decrescente.



### 2.2.2 Prestazioni in presenza di rumore AWGN

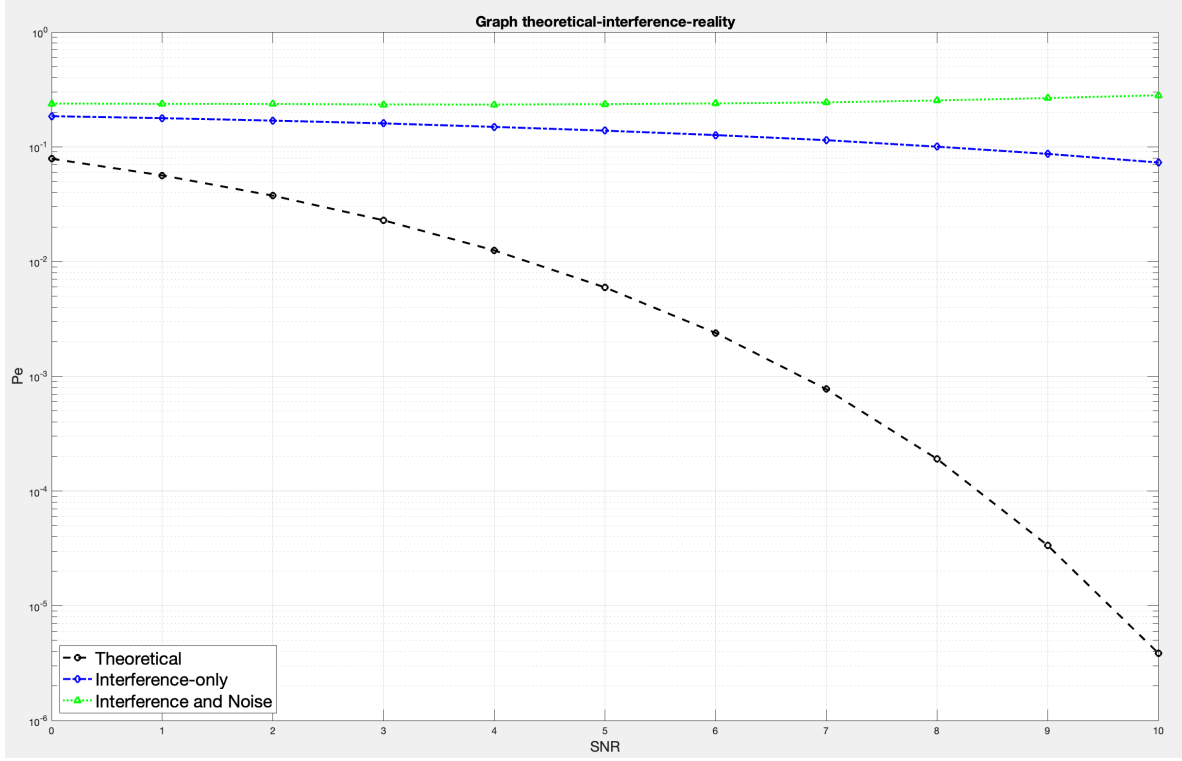


Figure 2: Simulazione a. - `main(10, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);`

La figura ha ora tre curve e mostra con chiarezza gli effetti che un canale non ideale ha sulle prestazioni del sistema. Osservando la nuova curva di colore verde, legdata *Interference and Noise*, possiamo infatti vedere con chiarezza la correttezza delle nostre aspettative. Abbiamo difatti non solo un ulteriore peggioramento delle prestazioni ma, cosa ben più importante, un andamento addirittura basso polinomiale-logaritmico crescente. Per SNR medi infatti, dove per medi si fa riferimento ad un intervallo che copra da un segnale esattamente pari al rumore ad un segnale 20dB più forte del rumore, e quindi a circa 10dB, l'andamento delle  $Pe$  sembra accennare addirittura una crescita. In maniera piuttosto controintuitiva infatti sembrerebbe che all'aumentare del rapporto segnale-rumore, il che in un certo senso equivale a dire a riduzione del rumore, le probabilità di errore aumentino. Ciò potrebbe essere dovuto al fatto che, con un numero non eccessivamente elevato di utenti, gli effetti logoranti dell'interferenza vengano notevolmente amplificati da quelli del rumore generando "peggioramenti" tanto evidenti quanti meno utenti si hanno sul canale. Potremmo valutare la correttezza d'ipotesi simulando per un numero di utenti minimo, ad esempio  $N = 2$  (vedi Figure 3.), ignorando che l'ipotesi d'interferenza come fenomeno gaussiano non sarebbe più così solida con pochi utenti. Se l'ipotesi fosse vera allora vorrebbe dire che all'aumento degli utenti la curva delle probabilità tenderebbe ad una crescita sub-lineare. Utilizziamo la simulazione b. (vedi Figure 4.) per valutare anche questa seconda ipotesi.

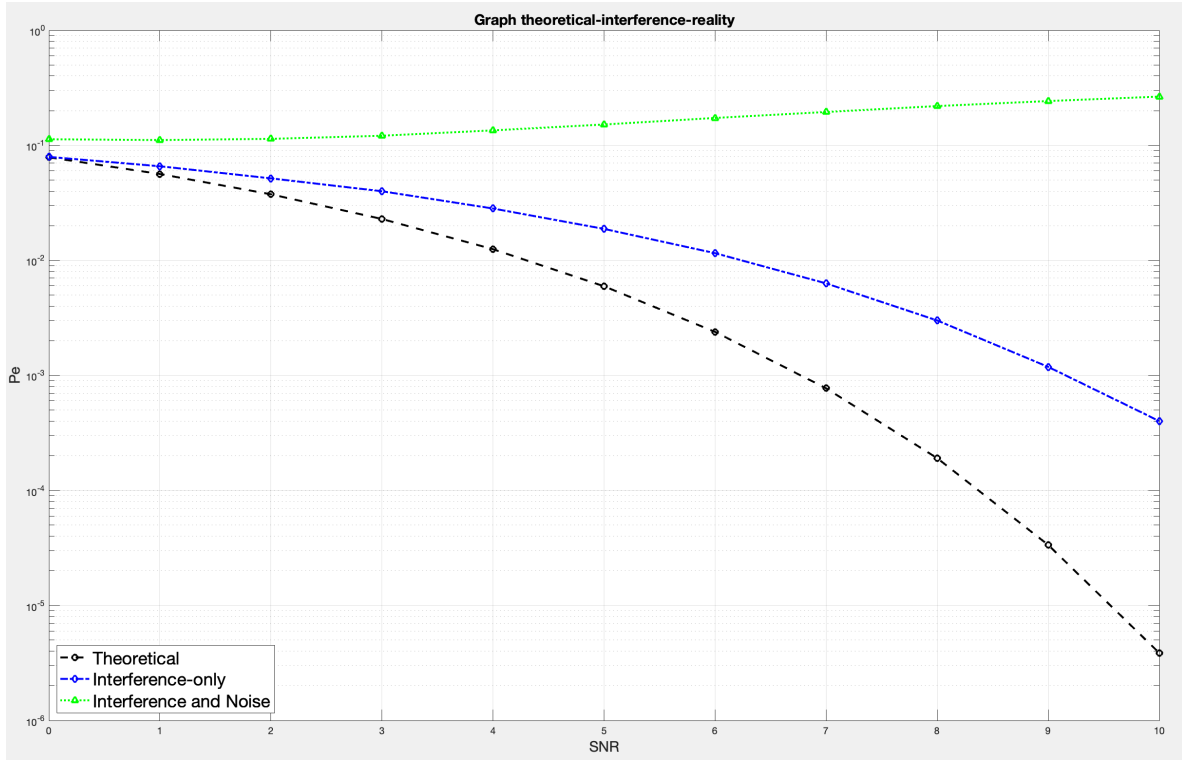


Figure 3: Simulazione a.bis - `main(2, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);`

Possiamo subito da questa figura constatare la correttezza della nostra ipotesi.

Ipotizzando che l'interferenza sia come il rumore termico sempre un fenomeno di tipo gaussiano e che si stia valutando un canale rumoroso, a prescindere dal numero di utenti sul canale, allora minore sarà il numero di utenti tanto più ripida sarà la curva dell'andamento delle  $Pe$ , suggerendo una crescita polinomiale di basso ordine.

Seppur come appena detto con pochi utenti la gaussiana dell'interferenza è più che altro un'assunzione per descrivere quanto osserviamo, è comunque importante tenere in considerazione che l'andamento della curva *Interference-only* non è "casuale". Si intende con ciò che la curva simulata, per questioni di scrittura del codice, assume a priori l'interferenza approssimata ad una gaussiana  $\mathcal{N}(0, Lc \cdot (N - 1))$ , e quindi l'andamento che essa restituisce è un indice della forte dipendenza dal numero di utenti. Infatti, poiché in questo caso ( $N = 2$ ) abbiamo una  $IntPe \approx 10^{-3}$  in SNRdB=10, contro il suo precedente valore, per  $N = 10$ ,  $IntPe \approx 10^{-1}$ , ci aspettiamo di vedere in simulazione b. una molto più elevata  $IntPe$ , a fissato SNRdB ed un andamento di *Interference and Noise* si crescente, ma molto più lento.

## 2.3 Simulazione per un carico elevato di utenti

*Presentazione ed analisi dei risultati della simulazione con lo stesso sistema ma un numero molto maggiore di utenti e solo su canale rumoroso. Viene valutata la robustezza del sistema rispetto al rumore e confrontate le curve di probabilità con quelle precedentemente ottenute.*

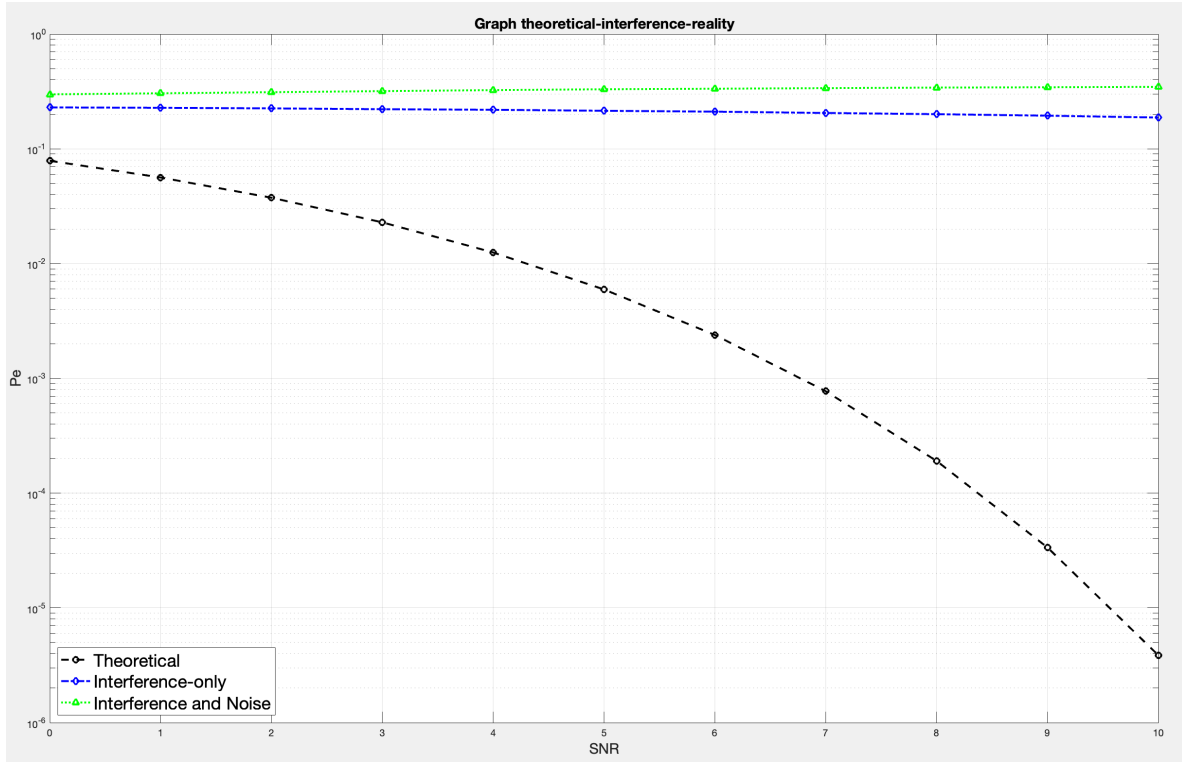


Figure 4: Simulazione b. - main(100, [0:10], 2e-6, 1e-6, 1e6);

Quanto osserviamo in figura ci permette di confermare ancora una volta tutte le nostre ipotesi. Ad essere precisi, per quanto concerne la valutazione su canale rumoroso, ciò che osserviamo è un andamento di *Interference and Noise* praticamente logaritmico costante/**molto lentamente** crescente.

Il risultato è molto interessante poiché quasi controintuitivo. Ciò che le nostre simulazioni mostrano infatti, quando confrontate, è un miglioramento dell'**andamento** delle  $Pe$  ma con un peggioramento drastico dei **singoli valori** di  $Pe$  all'aumentare degli utenti. In sostanza sembrerebbe che quando vi è sia rumore che MU, seppur il sistema con  $N < 100$  utenti abbia probabilità di errore minori per fissato SNRdB, la corrente sia la configurazione migliore. Poiché in ognuna delle simulazioni condotte  $Pe \approx \{10^{-1}, \dots, 5 \cdot 10^{-1}\}$  sulla curva *Interference and Noise*, risulta più conveniente avere un andamento sub-lineare o logaritmico costante-lentamente crescente rispetto agli andamenti polinomiali precedentemente ottenuti. L'aspetto controintuitivo della questione è che il rumore è sempre una gaussiana la cui varianza è affetta solo dal SNR e che interagisce con il segnale aggregato sempre nella stessa randomica maniera ovvero mediante una relazione di somma, mentre la varianza dell'interferenza cresce linearmente con l'aumento degli utenti; ciò vuol dire che nonostante vi siano più utenti e una maggiore interferenza su ognuno di essi, in contesti più vicini alla realtà, e quindi con rumore termico al destinatario, per  $N \rightarrow \infty$  l'effetto singolo dell'interferenza può essere trascurato rispetto a quello combinato rumore-MU.

### 3 Discussione matematica delle simulazioni

Cerchiamo ora di approfondire da un punto di vista matematico l'interessantissimo risultato ottenuto analizzando gli output grafici dei due test e delle tre simulazioni effettuate, prima di concludere la trattazione. Concentriamo dunque la nostra attenzione sulla valutazione della crescita delle  $Pe$  all'aumentare di SNR per tutte le curve *Interference and Noise* partendo dalla ridefinizione del concetto di interferenza MU e di rumore.

Il rumore termico AWGN utilizzato in simulazione va come una gaussiana  $\mathcal{W}$  t.c. :

$$\mathcal{W} = \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right),$$

dove  $N_0$  è, in numeri reali, inversamente dipendente dall'SNR corrente:

$$N_0 = \frac{1}{10^{\left(\frac{-\text{SNRdB}}{10}\right)}}.$$

È chiara dunque la coerenza tra la definizione di SNR e la nostra formalizzazione della gaussiana  $\mathcal{W}$ ; al crescere del SNRdB il valore di  $N_0$  decresce, dunque si riduce la varianza di  $\mathcal{W}$  e gli effetti del rumore si affievoliscono rispetto alla potenza del segnale.

Per quanto riguarda l'interferenza, considerandone gli effetti ad esempio sull'utente 1, abbiamo constatato come essa abbia una distribuzione gaussiana del tipo:

$$\sim \mathcal{N}(0, L_c \cdot (N - 1)),$$

come ricavato, a meno di  $\varepsilon_s$ , dalla relazione:

$$y_1 = \varepsilon_s + \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk}.$$

Sappiamo che il rumore AWGN è per definizione additivo e si somma al segnale a valle della demodulazione traslando il segnale ricevuto.

Possiamo quindi dire che per fissato SNRdB:

$$y_1 = \left( \varepsilon_s + \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk} \right) + \mathcal{W},$$

escludendo  $\varepsilon_s$  poiché non importante ai fini della discussione :

$$y_1 = \sum_{k=1}^{L_c} c_{1k} \sum_{n \neq 1} s_{nk} c_{nk} + \mathcal{W},$$

che equivale a:

$$y_1 \sim \mathcal{N}(0, L_c \cdot (N - 1)) + \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

Procedendo come già fatto in Sezione 1.3 valutiamo la media e la varianza di questa nuova variabile aleatoria che sappiamo già essere gaussiana (somma di gaussiane è sempre gaussiana). Dato che la prima delle gaussiane descrive l'interferenza senza alcuna dipendenza dal rumore e che il rumore ha un comportamento piuttosto randomico ed indipendente dai segnali trasmessi, possiamo considerare le due gaussiane incorrelate ed indipendenti.

Ciò vuol dire che la media della somma  $\mathbb{E}[y_1]$  sarà:

$$\mathbb{E}[y_1] = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, L_c \cdot (N - 1))] + \mathbb{E}[\mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)] = 0 + 0 = 0,$$

e la varianza  $\text{Var}[y_1]$  sarà:

$$\text{Var}[y_1] = L_c \cdot (N - 1) + \frac{N_0}{2},$$

che con  $N_0 = \frac{1}{10^{\left(\frac{-\text{SNRdB}}{10}\right)}}$  sarà:

$$\text{Var}[y_1] = L_c \cdot (N - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{\left(\frac{-\text{SNRdB}}{10}\right)}},$$

che, sia  $\text{SNR} = 10^{\left(\frac{-\text{SNR}_{\text{dB}}}{10}\right)}$  :

$$\text{Var}[y_1] = L_c \cdot (N - 1) + \frac{1}{2\text{SNR}},$$

quindi :

$$\text{Var}[y_1] = \frac{2\text{SNR} \cdot L_c \cdot (N - 1) + 1}{2\text{SNR}}.$$

Il risultato ottenuto dimostra quindi come la varianza della distribuzione  $y_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2\text{SNR} \cdot L_c \cdot (N - 1) + 1}{2\text{SNR}}\right)$  sia linearmente dipendente dal valore corrente SNR, dando quindi una spiegazione di tipo analitico all'andamento crescente delle curve *Interference and Noise* simulate.

## 4 Conclusioni

### 4.1 Sintesi dei risultati e implicazioni

L'analisi condotta ha evidenziato come il comportamento di un sistema a CDMA non ortogonale sia profondamente influenzato dalle condizioni del canale e dalle caratteristiche della tecnologia stessa. In uno scenario ideale e con pochissimi utenti, la curva simulata *Interference-only* conferma che la probabilità di errore ( $Pe$ ) diminuisce esponenzialmente con l'aumentare del rapporto segnale-rumore (vedi Figure 3) riflettendo il comportamento atteso per un canale privo di rumore. Tuttavia, per canali non ideali, quindi ove oltre alla MU si considera il rumore termico al destinatario, anche con il minimo valore possibile di utenti  $N = 2$ , il sistema subisce un degrado significativo delle prestazioni.

Ad ogni modo è giusto specificare che simulare la multi-utenza con soli due utenti è una scelta di trattazione per l'esplorazione e la conferma delle nostre ipotesi più che una vera ricerca del comportamento del sistema, ragion per cui il vettore di test associato `main(2, ..., 1e6)` non è stato elencato nella Sezione 2.1. Nonostante questo però i risultati ottenuti sono comunque fondamentali ai fini della comprensione dei limiti tecnologici di un CDMA non ortogonale per fissata lunghezza dei codici.

Così come da nostra configurazione, ogni codice  $c(t)$  è tale che:

$$L_c = \frac{T_b}{T_c} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\text{s}}{1 \cdot 10^{-6}\text{s}} = 2,$$

dunque ogni simbolo, o per meglio dire ogni bit, viene codificato su soli due chip.

Esplorare i comportamenti del sistema al variare del tempo di bit  $T_b$ , del tempo di bit  $T_c$  e trovare la migliore combinazione per fissato numero di utenti  $N$  sicuramente potrebbe migliorare le prestazioni medie del sistema ma, per semplicità di trattazione e con l'obiettivo di valutare il solo fenomeno dell'interferenza MU intrinseca nella tecnica CDMA non ortogonale, si è preferito evitare e concentrarsi solo sulla variazione del numero di utenti.

### 4.2 Osservazioni chiave sulle curve simulate

Le simulazioni hanno quindi mostrato come, sia su canale ideale che non ideale e per valori di  $N$  che garantiscano una distribuzione gaussiana d'interferenza multi-utente,  $Pe$  rimanga pressoché costante per bassi valori di  $\text{SNR}$ , suggerendo un completo dominio dell'interferenza nel comportamento del sistema in tali condizioni.

È chiaro come questo fenomeno evidenzi la difficoltà intrinseca nella separazione dei segnali degli utenti, dovuta alla correlazione imperfetta tra i codici utilizzati in un ambiente non ortogonale. Solo quando il  $\text{SNR}$  cresce a valori sufficientemente elevati, l'effetto dell'interferenza diventa meno marcato, e si osserva una diminuzione più netta della probabilità di errore, suggerendo quindi decadimenti esponenziali molto lenti. Ipotesi da non scartare però è che la lentezza dell'esponenziale che descrive la curva *Interference-only*, ad esempio in Figure 1 e Figure 2, potrebbe trovare spiegazione nella ridotta robustezza della tecnica di modulazione utilizzata.

L'introduzione poi del rumore bianco additivo (AWGN) complica lo scenario; in presenza simultanea

di interferenza multi-utente e rumore, il sistema mostra un'ulteriore peggioramento delle prestazioni, con una saturazione di  $Pe$  anche per valori di  $SNR$  elevati. Questo risultato, già ampiamente discusso e formalizzato, sottolinea che, anche in condizioni di buon rapporto segnale-rumore, l'interferenza multi-utente rimane il fattore predominante nel limitare l'efficienza del sistema. La combinazione di interferenza e rumore crea dunque una condizione in cui il miglioramento del  $SNR$  non ha alcun effetto anzi peggiora le prestazioni dell'intero sistema.

Restano però piuttosto interessanti le seguenti due osservazioni ancora non formalizzate:

- il miglioramento dell'andamento di *Interference and Noise* mostrato in Figure 4;
- la differenza di variazione tra le curve *Interference-only* ed *Interference and Noise* per valori di  $N$  crescenti.

Possibile spiegazione potrebbe risiedere nella gaussiana descritta in Sezione 3. Abbiamo detto infatti come  $y_1$  con MU e rumore, a meno dell'energia di simbolo  $\varepsilon_s$ , segua la distribuzione:

$$y_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2SNR \cdot L_c \cdot (N-1) + 1}{2SNR}\right).$$

Quello che possiamo affermare è che per  $N \rightarrow \infty$  il rapporto:

$$\frac{2SNR \cdot L_c \cdot (N-1) + 1}{2SNR}$$

sia tale che  $2SNR \cdot L_c \cdot (N-1) \gg 1$ , dunque:

$$\frac{2SNR \cdot L_c \cdot (N-1) + 1}{2SNR} \approx L_c \cdot (N-1)$$

Ovvero la gaussiana  $y_1$  rientra circa nella forma descritta in Sezione 1.3 mostrando un andamento delle  $Pe$  praticamente identico a quello della curva *Interference-only* a fissato valore  $N$ .

### 4.3 Strategie per l'ottimizzazione del CDMA non ortogonale

L'insieme di questi comportamenti limita drasticamente l'applicabilità del CDMA non ortogonale in contesti ad alta densità di traffico, come le moderne reti mobili. È evidente quindi che, per mitigare tali effetti negativi, siano necessari miglioramenti significativi, sia nel design dei codici sia nelle tecniche di ricezione. Proponiamo quindi, per concludere la trattazione, alcune alternative per affievolire gli effetti dell'interferenza multiutente e migliorare le prestazioni del sistema:

- *Modulazioni alternative*: La modulazione 2-PAM potrebbe essere sostituita da schemi più robusti, come QAM o PSK, che offrono migliori capacità di discriminazione in presenza di interferenza e rumore.
- *Codici di lunghezza maggiore*: Aumentare la lunghezza  $L_c$  dei codici CDMA potrebbe ridurre gli effetti dell'interferenza non ortogonale, favorendo una maggiore separabilità tra gli utenti.
- *Numero di simboli ottimizzato*: L'uso di un numero ottimale di simboli nella modulazione potrebbe mitigare l'interferenza senza introdurre una complessità computazionale eccessiva.
- *Schemi di accesso ibridi*: L'integrazione del CDMA non ortogonale con altre tecniche di accesso, come OFDMA, potrebbe migliorare l'efficienza spettrale e ridurre le  $Pe$  anche in condizioni di elevata multiutenza.

In sintesi, le simulazioni hanno confermato che il CDMA non ortogonale, pur offrendo una certa flessibilità, presenta limitazioni strutturali rilevanti quando applicato in condizioni realistiche. La principale sfida risiede nella gestione dell'interferenza multi-utente, che maschera i benefici di un elevato SNR e ne compromette l'efficienza. Sebbene la configurazione con molti utenti sembri fornire un andamento delle  $Pe$  più favorevole, rimane critico ottimizzare sia i parametri del sistema che gli schemi di accesso al mezzo per garantire una comunicazione affidabile, anche in scenari con interferenza e rumore. Un futuro lavoro potrebbe quindi focalizzarsi su simulazioni con tecniche di codifica avanzate e schemi adattivi per esplorare ulteriormente le potenzialità di miglioramento di tali sistemi, o magari l'implementazione di algoritmi di cancellazione dell'interferenza.