

El templo de Artemisa
Saga de las maravillas del mundo

Jesús González Abril
Pedro Villa Navarro
Sergio Lozano Melgar
Mario Gallego Navarro

Curso 2024-2025

Índice general

1. Variedades topológicas. Superficies	2
1.1. La topología cociente	2
1.2. Ejemplos de espacios cocientes	7
1.3. Espacios localmente euclídeos	11
1.4. Variedades topológicas	11
1.5. Ejemplos de superficies	13
1.6. Unión disjunta	15
1.7. Suma conexa	16
2. Examples	20
2.1. Theorem System	20
2.2. Pictures	22

Capítulo 1

Variedades topológicas. Superficies

1.1. La topología cociente

Definición 1.1.1: Topología final o imagen

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, Y un conjunto y $p : X \rightarrow Y$ una aplicación. Definimos en Y la topología final o imagen de p como:

$$\mathcal{T}(p) := \{O \subset Y \mid p^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

Afirmación

$\mathcal{T}(p)$ es una topología sobre Y

Demostración

- (T1) $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \implies \emptyset \in \mathcal{T}(p)$. $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T} \implies Y \in \mathcal{T}(p)$.
- (T2) Si $U_i \in \mathcal{T}(p) \forall i \in I$ entonces $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \forall i \in I$, por tanto $p^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$ lo que significa que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(p)$.
- (T3) Si $U_i \in \mathcal{T}(p) \forall i \in \{1, \dots, n\}$ entonces $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \forall i \in \{1, \dots, n\}$, por tanto $p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$ lo que significa que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}(p)$.

Proposición 1.1.2: Propiedades de la topología final

1. $\mathcal{T}(p)$ hace a p continua y es la topología más fina que lo hace.
2. Sea $g : (Y, \mathcal{T}(p)) \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ una aplicación. g es continua si y solo si $g \circ p$ es continua.
3. Los cerrados de $\mathcal{T}(p)$ son $\{C \subset Y \mid p^{-1}(C) \text{ es cerrado en } \mathcal{T}\}$.

Demostración

1. Que $\mathcal{T}(p)$ hace continua a p es inmediato por la propia definición de $\mathcal{T}(p)$. Además, si \mathcal{T}' es otra topología cualquiera que hace a p continua entonces $\forall U \in \mathcal{T}', p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \implies U \in \mathcal{T}(p)$, por lo que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(p)$, luego la topología final es la más fina.
2. Claramente si g es continua entonces $g \circ p$ es continua, puesto que es composición de dos aplicaciones continuas (recordemos que p es continua como aplicación en $(Y, \mathcal{T}(p))$). Si por el contrario $g \circ p$ es continua, entonces dado $U \in \mathcal{T}''$ arbitrario, la preimagen $(g \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ es abierta por ser $g \circ p$ continua, pero entonces por la definición de $\mathcal{T}(p)$ debe cumplirse $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}(p)$, por tanto g es continua.
3. C es cerrado en $\mathcal{T}(p) \iff Y \setminus C \in \mathcal{T}(p) \iff p^{-1}(Y \setminus C) \in \mathcal{T} \iff X \setminus p^{-1}(C) \in \mathcal{T} \iff p^{-1}(C)$ es cerrado en \mathcal{T} . El tercer \iff se cumple puesto que $p^{-1}(Y) = X$.

Definición 1.1.3: Identificación

Sean (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}') espacios topológicos, y $p : X \rightarrow Y$ una aplicación. Decimos que $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación si p es sobreyectiva y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$.

Nota

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación sobreyectiva entonces $f(f^{-1}(U)) = U$ para cualquier $U \subset Y$.

Proposición 1.1.4: Propiedades de las identificaciones

1. $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ es una identificación si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
2. Si $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación y $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ es una aplicación, entonces f es continua si y solo si $f \circ p$ es continua.
3. Si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua, abierta (o cerrada) y sobreyectiva, entonces f es una identificación.

Demostración

1. Claramente Id es sobreyectiva (de hecho es biyectiva con inversa $(Id)^{-1} = Id$), por lo que será identificación si y solo si $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(Id)$. Ahora bien, $\mathcal{T}(Id) = \{O \subset Y \mid (Id)^{-1}(O) \in \mathcal{T}\} = \{O \subset Y \mid O \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$, por tanto Id es identificación si y solo si $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.
2. Si f es continua entonces $f \circ p$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Si por el contrario $f \circ p$ es continua, entonces dado $U \in \mathcal{T}'$ arbitrario, la preimagen $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ es abierta por ser $f \circ p$ continua, pero entonces, como $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$ al ser p identificación, debe cumplirse $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$, por tanto f es continua.
3. Como f es sobreyectiva solo necesitamos ver que si es continua y abierta (cerrada) entonces $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$. Supongamos que f es continua, en tal caso tenemos garantizado que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$.

Si además es abierta entonces dado $U \in \mathcal{T}(f)$ arbitrario, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ por la definición de $\mathcal{T}(f)$, pero entonces $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$ al ser f abierta, y como es sobreyectiva $f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}'$, por lo que $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$, luego f es una identificación.

Si f es cerrada razonamos de manera similar pero con cerrados: dado $U \in \mathcal{T}(f)$, $C = Y \setminus U$ es cerrado en $\mathcal{T}(f)$, por lo que $f^{-1}(C)$ es cerrado en \mathcal{T}^a , por tanto $f(f^{-1}(C)) = C$ es cerrado en \mathcal{T} al ser f cerrada, pero entonces $U = Y \setminus (Y \setminus C) \in \mathcal{T}$, por tanto $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$, luego f es una identificación.

^aPor la tercera parte de la Proposición 1.1.2

Definición 1.1.5: Topología cociente

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X , y $p : X \rightarrow X/\sim = \tilde{X}$ la proyección al cociente. La topología cociente sobre \tilde{X} es la topología final o imagen de p :

$$\mathcal{T}/\sim = \tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(p) = \{V \subset \tilde{X} \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

El espacio $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) = (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ se llama espacio cociente.

Nota

1. Toda relación de equivalencia \sim sobre X determina un espacio cociente dado por $\tilde{X} = X/\sim$. Recíprocamente, todo espacio final asociado a una aplicación p es el espacio cociente correspondiente a la relación de equivalencia \sim_p dada por $x \sim_p y \iff p(x) = p(y)$.
2. Al definir un cociente estamos identificando los puntos que están en una misma clase de equivalencia.
3. $\tilde{\mathcal{T}}$ es la topología más fina sobre \tilde{X} que hace continua a p .

Proposición 1.1.6: Propiedades del espacio cociente

1. V es un abierto de \tilde{X} si y solo si $\bigcup_{[x] \in V} [x]$ es abierto en X .
2. Si X es compacto, entonces \tilde{X} es compacto.
3. Si X es conexo (conexo por caminos), entonces \tilde{X} es conexo (conexo por caminos).
4. $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ es una identificación.
5. $g : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y solo si $g \circ p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua.

Demostración

1. $V \in \tilde{\mathcal{T}} \iff p^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ por definición de la topología cociente, veamos que $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$. Si $y \in p^{-1}(V) \implies p(y) = [y] \in V$, por tanto $[y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$, luego $y \in [y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$, por lo que $p^{-1}(V) \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$.
Por otro lado si $x \in \bigcup_{[x] \in V} [x]$ entonces $[x] \in V$, por tanto $p(x) = [x] \in V \implies x \in p^{-1}(V)$, lo que prueba finalmente que $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$.
2. Sabemos que la aplicación p es continua y la compacidad se preserva por aplicaciones continuas. Como además p es sobreyectiva entonces $p(X) = \tilde{X}$, por tanto si X es compacto entonces $p(X) = \tilde{X}$ también lo es.
3. Sabemos que la aplicación p es continua y tanto la conexión como la arcoconexión se preservan por aplicaciones continuas. Como además p es sobreyectiva entonces $p(X) = \tilde{X}$, por tanto si X es conexo (conexo por caminos) entonces $p(X) = \tilde{X}$ también lo es.
4. Es inmediato que $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}(p)$, por otro lado dado $y \in \tilde{\mathcal{T}} \implies y = [x]$ para cierto $x \in X$, por tanto $p(x) = y$, luego p es sobreyectiva.
5. Por el apartado 4, p es una identificación, por tanto basta aplicar la parte 2 de la Proposición 1.1.4

Recordemos ahora que dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ cualquiera, podemos definir una relación de equivalencia sobre X a partir de ella. Denotaremos por R_f a la relación de equivalencia en X dada por:

$$xR_fx' \iff f(x) = f(x')$$

Ejercicio 1.1

Demostrar que R_f es una relación de equivalencia.

Teorema 1.1.7: Proposición 4.1

Dados (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{T}') espacios topológicos y $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ el espacio cociente dado por R_f , existe una aplicación $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo^a

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) & & \end{array}$$

Además, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ es una identificación si y solo si $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo.

^aQue el diagrama sea conmutativo quiere decir que "da igual que camino de flechitas sigamos", es decir, $\tilde{f} \circ p = f$.

Demostración. Si pretendemos que el diagrama sea conmutativo debe cumplirse

$$\tilde{f}(p(x)) = f(x) \iff \tilde{f}([x]) = f(x)$$

por tanto definimos \tilde{f} de la siguiente manera:

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}'), \quad \tilde{f}([x]) = f(x).$$

Ahora solo necesitamos ver que la aplicación está bien definida. En efecto si $x, y \in X$ son dos representantes de la misma clase de equivalencia $[x]$ entonces $x R_f y$, por tanto se cumple $f(x) = f(y)$, luego

$$\tilde{f}([x]) = f(x) = f(y) = \tilde{f}([y])$$

por lo que la aplicación está bien definida¹.

Para la segunda parte, si suponemos que \tilde{f} es un homeomorfismo entonces $f = \tilde{f} \circ p$ es continua por ser composición de funciones continuas, y es sobreyectiva por serlo \tilde{f} y p . Además, si $U \in \mathcal{T}(f)$ entonces $f^{-1}(U) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$, por tanto $\tilde{f}^{-1}(U) \in \tilde{\mathcal{T}}$, y al ser \tilde{f} abierta y biyectiva $U = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$, lo que prueba que $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ y por tanto f es una identificación.

Si por el contrario suponemos que f es una identificación entonces f es sobreyectiva y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$, por tanto f es continua y al ser p identificación también lo es \tilde{f} (apartado 2 de la Proposición 1.1.4). Que \tilde{f} es inyectiva es inmediato por la propia definición de \tilde{f} . Para ver que es sobreyectiva, dado $y \in Y$ por ser f sobreyectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, por tanto $\exists z = [x] \in \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$. Veamos que \tilde{f} es abierta: dado $U \in \tilde{\mathcal{T}}$ entonces $f^{-1}(\tilde{f}(U)) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(U))) = p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ por ser p continua, por lo tanto $\tilde{f}(U) \in \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$, luego \tilde{f} es un homeomorfismo. \square

¹Está bien definida ya que hemos visto que la imagen de una clase de equivalencia no depende del representante escogido.

1.2. Ejemplos de espacios cocientes

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios cociente y su utilidad para encontrar homeomorfismos entre espacios topológicos. En estos primeros ejemplos haremos uso del Teorema 1.1.7 para encontrar un homeomorfismo.

Ejemplo

Para el intervalo $I = [0, 1]$, consideramos la partición:

$$\tilde{I} = \{\{0, 1\}\} \cup \{\{x\} : x \in (0, 1)\}.$$

El espacio cociente $(\tilde{I}, \tilde{\mathcal{T}})$ es homeomorfo a la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 .

Demostración. Probemos que la relación \sim dada por la partición \tilde{I} coincide con la relación dada por la aplicación $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1, f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Para ello, dados $x, y \in I$

$$xR_f y \iff f(x) = f(y) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

Para que se den estas igualdades entre cosenos y senos hay varias opciones: si $x, y \in (0, 1)$ entonces debe cumplirse $x = y$; si $x, y \in \{0, 1\}$ entonces o bien $x = y$, o bien $x = 0, y = 1$, o bien $x = 1, y = 0$. En resumen:

$$xR_f y \iff x = y \text{ o } x = 1, y = 0 \text{ o } x = 0, y = 1 \iff x \sim y$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que f es una identificación, y por tanto $\exists \tilde{f}$ homeomorfismo entre \tilde{I} y \mathbb{S}^1 .

En primer lugar, f es continua por ser restricción de una aplicación continua (basta considerarla como aplicación de I a \mathbb{R}^2), además es cerrada puesto que I es compacto y \mathbb{S}^2 es Hausdorff (Ver Ejercicio 1.2). Por último dado $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, denotemos por $\alpha = \text{ang}((x, y))$ al ángulo en radianes que forma el punto (x, y) con la horizontal, con $\alpha \in [0, 2\pi)$. Es sencillo comprobar que $f(\frac{\alpha}{2\pi}) = (x, y)$, por tanto f es sobreyectiva, lo que según la Proposición 1.1.4 apartado 3 garantiza que f es una identificación, y por tanto $\exists \tilde{f}$ homeomorfismo entre \tilde{I} y \mathbb{S}^1 \square

Ejercicio 1.2

Probar que si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua entonces f es cerrada.

Ejemplo

Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cilindro.

Demostración. Consideremos el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$, probaremos que la relación \sim coincide con la relación dada por la aplicación $f : X \rightarrow C, f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s)$. Para ello, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x_1) = \cos(2\pi x_2) \\ \sin(2\pi x_1) = \sin(2\pi x_2) \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Dejamos como un sencillo ejercicio comprobar que para que se den estas igualdades entre cosenos y senos debe darse $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$. En resumen:

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que f es una identificación, y por tanto $\exists \tilde{f}$ homeomorfismo entre \tilde{X} y C .

En primer lugar, f es continua y cerrada por un argumento similar al del ejemplo anterior. Para ver que es sobreyectiva basta tomar $p = (x, y, z) \in C$, y denotemos por $\alpha = \text{ang}((x, y))$ al ángulo en radianes que forma el punto (x, y) con la horizontal si consideramos a (x, y) como punto de \mathbb{S}^1 , con $\alpha \in [0, 2\pi)$. Entonces $f(\frac{\alpha}{2\pi}, z) = (x, y, z) = p$, por lo que f es sobreyectiva y por tanto identificación. \square

Ejemplo

Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una banda de Möbius.

Ejemplo

Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un toro.

Ejemplo

Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } [x_1 = x_2 \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}] \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una botella de Klein.

Ejemplo

Sea $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } y_1 = y_2 = 0 \text{ o } (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cono.

Ejemplo

Sea $X = \mathbb{S}^2$ con la relación de equivalencia:

$$p \sim q \iff p = \pm q.$$

El espacio cociente es homeomorfo al plano proyectivo \mathbb{RP}^2 .

Ejemplo

En el disco cerrado $D(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , consideramos la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 = \pm x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente $D(0, 1)/\sim$ es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 .

Ejercicio 1.3

Dado (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $K \subset X$, definimos la relación

$$x \sim y \iff \begin{cases} x, y \in K \\ x = y \end{cases}$$

y llamemos al espacio cociente $(X/K, \mathcal{T}/K) := (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$.

- Demostrar que $p|_{X \setminus K} : X \rightarrow X/K$ restringida a $p(X \setminus K)$ es una biyección.
- Demostrar que $p|_{X \setminus K}$ es un homeomorfismo si K es abierto o cerrado.

Solución:

Para simplificar la notación llamemos $f := p|_{X \setminus K}$, y notemos que $\forall x \in X \setminus K, f(x) = [x]$, pero por la manera en la que está definida la relación de equivalencia, es inmediato ver que $[x] = \{x\}$, ya que el único elemento relacionado con x es el propio x (recordemos que $x \notin K$).

Por tanto la inversa de f es $f^{-1}([x]) = x$, ya que $f(f^{-1}([x])) = f(x) = [x]$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}([x]) = x$ lo que prueba que f es una biyección.

¿El apartado b) no es inmediato?

1.3. Espacios localmente euclídeos

Definición 1.3.1: Espacio localmente euclídeo

Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice que es localmente euclídeo de dimensión n si todo punto p de X tiene un entorno U homeomorfo a una bola abierta B de \mathbb{R}^n . Si $\varphi : U \subset X \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ es tal homeomorfismo, (U, φ) se llama carta en X alrededor de $p \in U$.

Nota

1. Por ser X localmente euclídeo, este hereda las propiedades locales de \mathbb{R}^n .
2. Podemos sustituir la bola abierta en la definición anterior por un entorno abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.3.2: Bola euclídea

Diremos que $B' \subset X$ es una bola euclídea si B' es homeomorfo a una bola abierta $B(0, r)$ de \mathbb{R}^n .

Definición 1.3.3: Bola regular euclídea

Diremos que $B \subset X$ es una bola regular euclídea si:

- Existe una bola euclídea B' tal que $\overline{B} \subset B'$.
- Existe $r > 0$ y una carta $\varphi : B' \rightarrow B^n(0, 2r)$ tal que $\varphi(\overline{B}) = B^n(0, r)$.

1.4. Variedades topológicas

Definición 1.4.1: Variedad topológica

Una variedad topológica M es un espacio topológico T_2 y $2AN$ que es localmente euclídeo. La dimensión de M es el número natural n . También se denomina n -variedad (topológica).

Definición 1.4.2: Superficie topológica

Una superficie topológica S es una variedad topológica de dimensión dos o 2-variedad.

Definición 1.4.3: Variedad con borde

Si en la definición de variedad cambiamos el espacio modelo \mathbb{R}^n por el semiespacio superior $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$, obtenemos el concepto de variedad con borde.

Proposición 1.4.4: Observaciones sobre variedades topológicas

1. Toda variedad topológica es localmente conexa por caminos (y localmente conexa).
2. Las componentes conexas y las componentes conexas por caminos coinciden en una variedad.
3. Una variedad es conexa si y solo si es conexa por caminos.
4. Toda variedad es localmente compacta.
5. Si una variedad no es compacta, siempre podremos compactificarla añadiendo un solo punto.

Demostración

Sea M es una n -variedad. Notemos en primer lugar que dado $x \in M, V \in \mathcal{E}(x)$, como M es una variedad existe un entorno $U \in \mathcal{E}(x)$ homeomorfo a una bola $B(0, r) = \varphi(U)$ de \mathbb{R}^n (además, podemos suponer que $\varphi(x) = 0$), y de hecho siempre podemos elegir $U \subset V$ puesto que si $U \not\subset V$, entonces basta tomar $B'(0, r') \subset B(0, r)$ lo suficientemente pequeña para que $U' = \varphi^{-1}(B'(0, r')) \subset U \cap V$ y claramente U' también es homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^n .

1. Sean $x \in M, V \in \mathcal{E}(x)$, como M es una variedad existe un entorno $U \in \mathcal{E}(x), U \subset V$ homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^n , y por tanto localmente conexo por caminos. Como U es localmente conexo por caminos $\exists U' \subset U$ un entorno de x conexo por caminos. Por último notemos que $U' \subset V$ es un entorno de x conexo por caminos contenido en V , lo que prueba que M es localmente conexa por caminos. Que es localmente conexa es inmediato puesto que localmente conexo por caminos implica localmente conexo.
2. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
3. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
4. Sean $x \in M, V \in \mathcal{E}(x)$, como M es una variedad existe un entorno $U \in \mathcal{E}(x), U \subset V$ homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^n , y por tanto localmente compacto. Como U es localmente compacto existen C compacto y $U' \in \mathcal{E}(x)$ tales que $C \subset U' \subset U \subset V$, lo que prueba que M es localmente compacta.
5. Como cualquier variedad es T_2 y localmente compacta el Teorema de Alexandroff nos asegura que podemos compactificarla por un punto.

1.5. Ejemplos de superficies

En todos los ejemplos siguientes consideramos subespacios de algún \mathbb{R}^m , por tanto todos los espacios son T_2 y $2AN$ (recordemos que estas propiedades se heredan al considerar las topologías relativas). Solo necesitamos probar que cada uno de estos espacios son localmente euclídeos.

Ejemplo

La esfera \mathbb{S}^2 es una superficie topológica.

Solución:

Sea $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ y supongamos que $z > 0$, en tal caso el entorno $U = \mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$ es homeomorfo a la bola $B^2((0, 0), 1)$ mediante el homeomorfismo

$$\varphi : B^2((0, 0), 1) \rightarrow U, \quad \varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

En efecto es una homeomorfismo pues es abierta, continua y biyectiva, con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y).$$

Para el resto de puntos sabemos que alguna de las tres componentes x, y, z debe ser no nula, por lo que podemos hacer un procedimiento similar, tarea que encomendamos al lector.

Ejemplo

El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una superficie topológica.

Ejemplo

El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es una superficie topológica.

Ejemplo

El hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es una superficie topológica.

Ejemplo

El hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ es una superficie topológica.

Ejemplo

El paraboloide de revolución $x^2 + y^2 - z = 0$ es una superficie topológica.

Proposición 1.5.1: Espacio proyectivo real

El espacio proyectivo real \mathbb{RP}^n es una variedad topológica de dimensión n .

Demostración

Pendiente.

Lema 1.5.2: Lema técnico

Existe $0 < \epsilon \leq 1$ tal que para todo $q \in B^n(0, \epsilon)$ existe un homeomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $F(0) = q$ y $F|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)}$ es la identidad.

Demostración. La idea es construirse una función auxiliar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = p$, para $p \in B(0, \epsilon)$, $f(q) = 0$, para $q \in B^n \setminus B(0, 2)$, y que en el resto de puntos sea diferenciable. Una vez construida esta f , aplicando composiciones se llega a la forma de F . \square

Teorema 1.5.3: Proposición 4.2 - Homogeneidad

Sea X una variedad topológica conexa de dimensión n y $p, q \in X$. Entonces existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ tal que $f(p) = q$.

Demostración. Sea la relación de equivalencia en X dada por

$$p \sim q \iff \exists f : X \rightarrow X \text{ homeomorfismo tal que } f(p) = q.$$

Vamos a ver que $p^{-1}([p]) = U(p)$ es abierta y cerrada en X , y por tanto, es todo X/\sim .

Para ver que es abierto, sea B una bola regular euclídea centrada en p . Por definición, existe $B' \subset X$ bola euclídea y $\varphi : B' \rightarrow B^n(0, 3) \subset \mathbb{R}^n$ con:

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0 \iff \varphi^{-1}(0) = p, \\ \overline{B} \subset B', \\ \varphi(\overline{B}) = B^n(0, 3/2). \end{cases}$$

Por el lema anterior, existe $\epsilon \in (0, 1]$ tal que $\forall x \in B(0, \epsilon)$, existe $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo con $F_x(0) = x$ y $F_x|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)} = \text{Id}$.

Denotamos $B_0 = \varphi^{-1}(B^n(0, \epsilon))$ y consideramos $G = \varphi^{-1} \circ F|_{B(0, 3)} \circ \varphi : B' \rightarrow B'$. G está bien definida porque $F|_{B(0, 3)}$ es un homeomorfismo de $B(0, 3)$. Ahora, $G(p) = \varphi^{-1}(F(\varphi^{-1}(0))) = \varphi^{-1}(F(0)) = \varphi^{-1}(x)$.

Por el lema, G se puede extender a $G : X \rightarrow X$ por la identidad y así obtener un homeomorfismo de X . Por tanto, $p \in B_0 \subset U(p)$, con B_0 abierto, y por tanto $U(p)$ es abierto.

Hemos visto que $[p]$ es abierto. Por tanto, $\tilde{X}/[p] = \bigcup_{q \neq p} [q]$, porque las las clases de equivalencia son disjuntas. Al ser unión arbitraria de abiertos es abierto, luego el complementario $[p]$ es cerrado. \square

1.6. Unión disjunta

Definición 1.6.1: Unión disjunta

Sea $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. Definimos su unión disjunta como:

$$\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha, \alpha \in J\}.$$

Consideramos las inyecciones canónicas $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, dadas por $\iota_\alpha(x) = (x, \alpha)$.

Proposición 1.6.2: Topología unión disjunta

La familia de subconjuntos $B = \{\iota_\alpha(U) : U \in T_\alpha, \alpha \in J\}$ es una base para una topología T sobre $\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ que recibe el nombre de topología unión disjunta.

Demostración

Pendiente

Proposición 1.6.3: Propiedades de la unión disjunta

1. Cada inclusión ι_α es un embebimiento, por lo que podemos identificar $X_\alpha \equiv \iota_\alpha(X_\alpha) \subset \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$.
2. Un subconjunto es abierto en $\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ si y solo si su intersección con cada X_α es un abierto en X_α .
3. Una aplicación $f : \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow Y$ es continua si y solo si $f|_{X_\alpha}$ es continua, para todo $\alpha \in J$.
4. Si todos los espacios X_α son T_2 (resp. $1AN$), la unión disjunta también es T_2 (resp. $1AN$).
5. Si todos los espacios X_α son $2AN$ y J es numerable, entonces la unión disjunta también es $2AN$.
6. La unión disjunta de una cantidad numerable de n -variedades es una n -variedad.

Demostración

Pendiente.

1.7. Suma conexa

Definición 1.7.1: Suma conexa

Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas y sean D_1 y D_2 discos regulares euclídeos. Sea $\varphi : \partial D_1 \rightarrow D_2$ un homeomorfismo y denotemos por $S'_i := S_i \setminus D_i$, $i = 1, 2$. Definimos en $S'_1 \sqcup S'_2$ la menor relación de equivalencia que contiene a $x \sim \varphi(x)$ para todo $x \in \partial D_1$. Entonces el cociente $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$ es un espacio topológico.

A continuación se enuncian un par de lemas que serán útiles para la demostración de la Proposición 1.7.4. El primero es una generalización del conocido Teorema de la Curva de Jordan, el cual se enuncia sin demostración. El segundo es un lema técnico, que sí demostraremos.

Lema 1.7.2: Teorema de Jordan - Schönflies

Sean C y C' dos curvas cerradas simples de \mathbb{R}^2 , y $f : C \rightarrow C'$ un homeomorfismo. Entonces existe un homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F|_C = f$ y fuera de un compacto $K \supseteq C$ es la identidad.

Lema 1.7.3: Extensión de homeomorfismos de \mathbb{S}^1

Sean C_1, C_2 homeomorfos a \mathbb{S}^1 , $h : C_1 \rightarrow C_2$ un homeomorfismo y $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $U \cong \mathbb{R}^2$, con $C_1 \cup C_2 \subseteq U$. Entonces existe un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H|_{C_1} = h$ y $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$.

Demostración. Sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo y $\tilde{C}_1 = g(C_1)$, $\hat{h} = g \circ h \circ g^{-1} : \tilde{C}_1 \rightarrow C_2$. Por el Teorema de Jordan-Schönflies existe un homeomorfismo $\hat{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\hat{H}|_{\tilde{C}_1} = \hat{h}$ y \hat{H} es la identidad fuera de un compacto $K \supseteq \tilde{C}_1$. Sea $H = g^{-1} \circ \hat{H} \circ g$, entonces H es el homeomorfismo buscado. \square

Teorema 1.7.4: Proposición 4.3

Si S_1 y S_2 son dos superficies topológicas conexas, entonces, salvo homeomorfismo, el espacio $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$ no depende de los discos regulares euclídeos ni del homeomorfismo φ .

Demostración. Veremos la demostración en 3 pasos:

1. El tamaño del disco no importa.

Sean D_1 y D_3 discos regulares y euclídeos centrados en $p \in S_1$, y supongamos que $\overline{D_1} \subset D_3$ sin pérdida de generalidad. Veamos que $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$.

Sea D'_3 otro disco euclídeo con $\overline{D_3} \subseteq D'_3$, y $\psi : D'_3 \rightarrow \overline{B}(0, 2)$ un homeomorfismo verificando $\psi(\overline{D_3}) = B^2(0, 1)$.

Aplicamos el lema anterior a $U = B(0, 3/2)$, $C_1 = \psi(\partial D_1)$, $C_2 = \psi(\partial D_3)$ y $h : C_1 \rightarrow C_2$ un homeomorfismo cualquiera. Obtenemos que existe $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que $H|_{C_1} = h$ y $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$.

Sea

$$\tilde{H} = \psi^{-1} \circ H \circ \psi : D'_3 \rightarrow D'_3,$$

entonces $\tilde{H}(D'_3 \setminus D_1) = D'_3 \setminus D_3$, pues $\overline{D_1} \subset D_3$ y $\tilde{H}(\partial D_1) = \partial D_3$.

Ahora, extendiendo fuera de D'_3 por la identidad obtenemos el homeomorfismo buscado.

2. El punto donde centremos el disco no importa.

Sea D_1 un disco regular euclídeo centrado en $p \in S_1$ y D_3 disco regular euclídeo centrado en $q \in S_1$. Veamos que $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$ haciendo una construcción similar al caso anterior, pero haciendo también uso de la homogeneidad.

Sea $F : S_1 \rightarrow S_1$ un homeomorfismo verificando $F(p) = q$. Sea D'_3 disco regular con $\overline{D_3} \subseteq D'_3$. Sea $\psi : D'_3 \rightarrow B(0, 2)$ el homeomorfismo que cumple que $\psi(\overline{D_3}) = B(0, 1)$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que $\overline{F(D_4)} \subseteq D_1$, donde $D_4 = \psi^{-1}(B(0, \varepsilon))$. Como $\overline{D_4} \subseteq D_3$, por el paso 1) obtenemos $S_1 \setminus D_4 \cong S_1 \setminus D_3$, y de la misma forma $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_1$.

Pero como F es un homeomorfismo, $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_4$, concluyendo así el paso 2.

3. No influye el homeomorfismo que elijamos.

Consideramos $\varphi, \sigma : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ y veamos que

$$S'_1 \sqcup S'_2 /_{R\varphi} \cong S'_1 \sqcup S'_2 /_{R\sigma}.$$

Sea D'_2 disco regular euclídeo con $\overline{D_2} \subseteq D'_2$ y $\psi_2 : D'_2 \rightarrow B(0, 2)$ homeomorfismo, con $\psi_2(\overline{D_2}) = \overline{B(0, 1)}$.

Aplicamos el lema técnico a las curvas $C_1 = C_2 = \mathbb{S}^1$, $h = \psi_2 \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $U = B(0, 3/2)$. Obtenemos un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H|_{\mathbb{S}^1} = h$ y $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$.

Definimos $F : D'_2 \rightarrow D'_2$ como $F = \psi_2^{-1} \circ H|_{B(0, 2)} \circ \psi_2$, verificando $F(D'_2 \setminus D_2) = D'_2 \setminus D_2$.

Ahora, extendiendo F a todo S_2 por la identidad, obtenemos un homeomorfismo $\hat{F} : S_2 \rightarrow S_2$ definido como la identidad en $S_1 \setminus D_1$ y como F en $S_2 \setminus D_2$.

Para concluir la prueba basta comprobar que \hat{F} pasa al cociente. Es decir, queremos ver si a partir de nuestro homeomorfismo

$$\hat{F} : (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2) \rightarrow (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2)$$

podemos definir un homeomorfismo entre los cocientes:

$$\tilde{F} : S'_1 \sqcup S'_2 /_{R\varphi} \rightarrow S'_1 \sqcup S'_2 /_{R\sigma}.$$

Para que esto ocurra debe verificarse $xR_\varphi y \Rightarrow \hat{F}(x)R_\sigma \hat{F}(y)$. En nuestro caso,

$$xR_\varphi y \iff y = \varphi(x), \quad x \in \partial D_1, \quad y \in \partial D_2.$$

Pero entonces

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(\varphi(x)) = \psi_2^{-1} \circ \psi_2 \circ \sigma \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_2(\varphi(x)) = \sigma(x) = \sigma(\hat{F}(x)),$$

donde la última igualdad se debe a que \hat{F} es la identidad en ∂D_1 .

Por tanto, $\hat{F}(x) \sim \hat{F}(y)$, y \hat{F} pasa al cociente como \tilde{F} , que es continua.

Aplicando la misma construcción a φ^{-1} y σ^{-1} podemos construir \tilde{F}^{-1} , y por tanto \tilde{F} es un homeomorfismo, concluyendo así la demostración.

□

Definición 1.7.5: Suma conexa de superficies

Al espacio topológico cociente $S'_1 \cup S'_2$, lo denotaremos $S_1 \# S_2$ y lo llamaremos suma conexa de S_1 y S_2 .

Teorema 1.7.6: Proposición 4.4

Sean S_1, S_2 superficies. Entonces, $S_1 \# S_2$ es una superficie. Además:

- Si S_1 y S_2 son superficies conexas, entonces $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa.
- Si S_1 y S_2 son superficies compactas, entonces $S_1 \# S_2$ es una superficie compacta.

Demostración. Las demostraciones de las propiedades de conexidad y compacidad se consideran inmediatas. Nos centramos en demostrar que $S_1 \# S_2$ es una superficie. Se puede comprobar fácilmente que las propiedades de $2AN$ y T_2 se heredan de S_1 y S_2 . Por tanto, nos queda comprobar que $S_1 \# S_2$ es localmente euclídeo de dimensión 2.

Usando la notación habitual, sea

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi,$$

con $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ un homeomorfismo. Ya vimos en la proposición 1.7.4 que $S_1 \# S_2$ no depende de la elección de D_1, D_2 ni de φ .

Consideramos la proyección

$$p|_{S'_1 \setminus \partial D_1} \rightarrow S_1 \# S_2,$$

que nos da un homeomorfismo de $S'_1 \setminus \partial D_1$ sobre su imagen, la cual es un abierto de $S_1 \# S_2$. Por tanto, $S'_1 \setminus \partial D_1$ es localmente euclídeo de dimensión 2. Análogamente, $S'_2 \setminus \partial D_2$ es localmente euclídeo de dimensión 2.

Falta ver qué ocurre en ∂D_1 y ∂D_2 . Sean D'_1 y D'_2 discos regulares tales que $\overline{D'_i} \subseteq D'_i$, $i = 1, 2$ y sean $\psi_i : D'_i \rightarrow B(0, 2)$ homeomorfismos tales que $\psi_i(\overline{D'_i}) = B(0, 1)$. Introducimos la siguiente notación: si $J \subseteq [0, +\infty)$ es un intervalo, denotamos

$$A_J = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \in J\}.$$

Se tiene que

$$\psi_i(D'_i \setminus D_i) = A_{[1,2]}.$$

Llamemos

$$\beta = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

y definamos

$$\alpha(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot \beta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } x = (0,0). \end{cases}$$

Se verifica que $\alpha|_{\mathbb{S}^1} = \beta$ y que $\alpha \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$. Por tanto, α es un homeomorfismo de $D'_1 \setminus D_1$ sobre $D'_2 \setminus D_2$.

Sea ahora

$$I : A_{[1,2]} \rightarrow A_{(1/2,1]}, \quad z \mapsto I(z) = \frac{z}{\|z\|^2}.$$

Por último, definimos

$$\Phi : (D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2) \rightarrow A_{(1/2,2)}$$

mediante

$$\Phi(q) = \begin{cases} I \circ \alpha \circ \psi_1(q) & \text{si } q \in D'_1 \setminus D_1, \\ \psi_2(q) & \text{si } q \in D'_2 \setminus D_2. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$V_0 = p((D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2))$$

es el abierto de $S_1 \# S_2$ que contiene a $p(\partial D_1) = p(\partial D_2)$. Se tiene que

$$(\partial D_1) \cup ((D'_1 \setminus D_1) \cap (S'_1 \setminus \partial D_1)) = \partial D_1 \cup (D'_1 \setminus D_1) = D'_1 \setminus D_1.$$

Veamos que $\varphi(\partial D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2)$ es abierto en S_2 .

Queda por demostrar que $\Phi : V_0 \rightarrow A_{(1/2,2)}$ pasa al cociente. Esto ocurre pues se tiene que

$$\psi_2 \circ \varphi = I \circ \alpha \circ \psi_1$$

sobre ∂D_1 . Cabe como ejercicio para el pobre estudiante comprobar que, dado $xR_\varphi y$, se cumple que $\psi_2(y) = \psi_2(\varphi(x)) = I \circ \alpha \circ \psi_1(x)$. Una vez hecho esto, la demostración concluye. \square

Capítulo 2

Examples

2.1. Theorem System

Definición 2.1.1: Definition Name

A definition.

Teorema 2.1.2: Theorem Name

A theorem.

Lema 2.1.3: Lemma Name

A lemma.

Fact 2.1.4

A fact.

Corolario 2.1.5

A corollary.

Proposición 2.1.6

A proposition.

Ejercicio 2.1

Exercise example.

Afirmación

A claim.

Demostración

■ A reference to Theorem 2.1.2 ■

Demostración. Veniam velit incididunt deserunt est proident consectetur non velit ipsum voluptate nulla quis. Ea ullamco consequat non ad amet cupidatat cupidatat aliquip tempor sint ea nisi elit dolore dolore.

Laboris labore magna dolore eiusmod ea ex et eiusmod laboris. Et aliquip cupidatat reprehenderit id officia pariatur. □

Ejemplo

Nostrud esse occaecat Lorem dolore laborum exercitation adipisicing eu sint sunt et. Excepteur voluptate consectetur qui ex amet esse sunt ut nostrud qui proident non. Ipsum nostrud ut elit dolor. Incidunt voluptate esse et est labore cillum proident duis.

Some remark.

Nota

■ Some more remark.

2.2. Pictures



Figura 2.1: Waterloo, ON