

**El templo de Artemisa**  
**Saga de las maravillas del mundo**

**Jesús González Abril**  
**Pedro Villa Navarro**  
**Sergio Lozano Melgar**  
**Mario Gallego Navarro**

Curso 2024-2025

# Índice general

<b>1. Variedades topológicas. Superficies</b>	<b>2</b>
1.1. La topología cociente . . . . .	2
1.2. Ejemplos de espacios cocientes . . . . .	7
1.3. Espacios localmente euclídeos . . . . .	14
1.4. Variedades topológicas . . . . .	14
1.4.1. Ejemplos de superficies . . . . .	17
1.4.2. Propiedades de las variedades topológicas . . . . .	19
1.5. Unión disjunta . . . . .	20
1.6. Suma conexa . . . . .	22
<b>2. Clasificación de superficies compactas</b>	<b>27</b>
2.1. Símplices . . . . .	27
2.2. Complejos simpliciales . . . . .	28
2.3. Triangulaciones . . . . .	29
2.4. Presentación de superficies . . . . .	29
2.5. Teorema de Clasificación . . . . .	33

# Capítulo 1

## Variedades topológicas. Superficies

### 1.1. La topología cociente

#### Definición 1.1.1: Topología final o imagen

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $p : X \rightarrow Y$  una aplicación. Definimos en  $Y$  la topología final o imagen de  $p$  como:

$$\mathcal{T}(p) := \{O \subset Y \mid p^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

#### Afirmación

$\mathcal{T}(p)$  es una topología sobre  $Y$

#### *Demostración*

- (T1)  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \implies \emptyset \in \mathcal{T}(p)$ .  $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T} \implies Y \in \mathcal{T}(p)$ .
- (T2) Si  $U_i \in \mathcal{T}(p) \ \forall i \in I$  entonces  $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in I$ , por tanto  $p^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$  lo que significa que  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(p)$ .
- (T3) Si  $U_i \in \mathcal{T}(p) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , por tanto  $p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$  lo que significa que  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}(p)$ .

**Proposición 1.1.2: Propiedades de la topología final**

1.  $\mathcal{T}(p)$  hace a  $p$  continua y es la topología más fina que lo hace.
2. Sea  $g : (Y, \mathcal{T}(p)) \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  una aplicación.  $g$  es continua si y solo si  $g \circ p$  es continua.
3. Los cerrados de  $\mathcal{T}(p)$  son  $\{C \subset Y \mid p^{-1}(C) \text{ es cerrado en } \mathcal{T}\}$ .

**Demostración**

1. Que  $\mathcal{T}(p)$  hace continua a  $p$  es inmediato por la propia definición de  $\mathcal{T}(p)$ . Además, si  $\mathcal{T}'$  es otra topología cualquiera que hace a  $p$  continua entonces  $\forall U \in \mathcal{T}', p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \implies U \in \mathcal{T}(p)$ , por lo que  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(p)$ , luego la topología final es la más fina.
2. Claramente si  $g$  es continua entonces  $g \circ p$  es continua, puesto que es composición de dos aplicaciones continuas (recordemos que  $p$  es continua como aplicación en  $(Y, \mathcal{T}(p))$ ). Si por el contrario  $g \circ p$  es continua, entonces dado  $U \in \mathcal{T}''$  arbitrario, la preimagen  $(g \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$  es abierta por ser  $g \circ p$  continua, pero entonces por la definición de  $\mathcal{T}(p)$  debe cumplirse  $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}(p)$ , por tanto  $g$  es continua.
3.  $C$  es cerrado en  $\mathcal{T}(p) \iff Y \setminus C \in \mathcal{T}(p) \iff p^{-1}(Y \setminus C) \in \mathcal{T} \iff X \setminus p^{-1}(C) \in \mathcal{T} \iff p^{-1}(C)$  es cerrado en  $\mathcal{T}$ . El tercer  $\iff$  se cumple puesto que  $p^{-1}(Y) = X$ .

**Definición 1.1.3: Identificación**

Sean  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y  $p : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una identificación si  $p$  es sobreyectiva y  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$ .

**Nota**

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación sobreyectiva entonces  $f(f^{-1}(U)) = U$  para cualquier  $U \subset Y$ .

**Proposición 1.1.4: Propiedades de las identificaciones**

1.  $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$  es una identificación si y solo si  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ .
2. Si  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una identificación y  $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  es una aplicación, entonces  $f$  es continua si y solo si  $f \circ p$  es continua.
3. Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua, abierta (o cerrada) y sobreyectiva, entonces  $f$  es una identificación.

**Demostración**

1. Claramente  $Id$  es sobreyectiva (de hecho es biyectiva con inversa  $(Id)^{-1} = Id$ ), por lo que será identificación si y solo si  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(Id)$ . Ahora bien,  $\mathcal{T}(Id) = \{O \subset Y \mid (Id)^{-1}(O) \in \mathcal{T}\} = \{O \subset Y \mid O \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$ , por tanto  $Id$  es identificación si y solo si  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ .
2. Si  $f$  es continua entonces  $f \circ p$  es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Si por el contrario  $f \circ p$  es continua, entonces dado  $U \in \mathcal{T}'$  arbitrario, la preimagen  $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$  es abierta por ser  $f \circ p$  continua, pero entonces, como  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$  al ser  $p$  identificación, debe cumplirse  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$ , por tanto  $f$  es continua.
3. Como  $f$  es sobreyectiva solo necesitamos ver que si es continua y abierta (cerrada) entonces  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$ . Supongamos que  $f$  es continua, en tal caso tenemos garantizado que  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$ .

Si además es abierta entonces dado  $U \in \mathcal{T}(f)$  arbitrario,  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  por la definición de  $\mathcal{T}(f)$ , pero entonces  $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$  al ser  $f$  abierta, y como es sobreyectiva  $f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}'$ , por lo que  $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $f$  es una identificación.

Si  $f$  es cerrada razonamos de manera similar pero con cerrados: dado  $U \in \mathcal{T}(f)$ ,  $C = Y \setminus U$  es cerrado en  $\mathcal{T}(f)$ , por lo que  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $\mathcal{T}^a$ , por tanto  $f(f^{-1}(C)) = C$  es cerrado en  $\mathcal{T}$  al ser  $f$  cerrada, pero entonces  $U = Y \setminus (Y \setminus C) \in \mathcal{T}$ , por tanto  $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $f$  es una identificación.

<sup>a</sup>Por la tercera parte de la Proposición 1.1.2

### Definición 1.1.5: Topología cociente

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico,  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ , y  $p : X \rightarrow X/\sim = \tilde{X}$  la proyección al cociente. La topología cociente sobre  $\tilde{X}$  es la topología final o imagen de  $p$ :

$$\mathcal{T}/\sim = \tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(p) = \{V \subset \tilde{X} \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

El espacio  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) = (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$  se llama espacio cociente.

#### Nota

1. Toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $X$  determina un espacio cociente dado por  $\tilde{X} = X/\sim$ . Recíprocamente, todo espacio final asociado a una aplicación  $p$  es el espacio cociente correspondiente a la relación de equivalencia  $\sim_p$  dada por  $x \sim_p y \iff p(x) = p(y)$ .
2. Al definir un cociente estamos identificando los puntos que están en una misma clase de equivalencia.
3.  $\tilde{\mathcal{T}}$  es la topología más fina sobre  $\tilde{X}$  que hace continua a  $p$ .

**Proposición 1.1.6: Propiedades del espacio cociente**

1.  $V$  es un abierto de  $\tilde{X}$  si y solo si  $\bigcup_{[x] \in V} [x]$  es abierto en  $X$ .
2. Si  $X$  es compacto, entonces  $\tilde{X}$  es compacto.
3. Si  $X$  es conexo (conexo por caminos), entonces  $\tilde{X}$  es conexo (conexo por caminos).
4.  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  es una identificación.
5.  $g : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua si y solo si  $g \circ p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua.

**Demostración**

1.  $V \in \tilde{\mathcal{T}} \iff p^{-1}(V) \in \mathcal{T}$  por definición de la topología cociente, veamos que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$ . Si  $y \in p^{-1}(V) \implies p(y) = [y] \in V$ , por tanto  $[y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ , luego  $y \in [y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ , por lo que  $p^{-1}(V) \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ .  
Por otro lado si  $x \in \bigcup_{[x] \in V} [x]$  entonces  $[x] \in V$ , por tanto  $p(x) = [x] \in V \implies x \in p^{-1}(V)$ , lo que prueba finalmente que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$ .
2. Sabemos que la aplicación  $p$  es continua y la compacidad se preserva por aplicaciones continuas. Como además  $p$  es sobreyectiva entonces  $p(X) = \tilde{X}$ , por tanto si  $X$  es compacto entonces  $p(X) = \tilde{X}$  también lo es.
3. Sabemos que la aplicación  $p$  es continua y tanto la conexión como la arcoconexión se preservan por aplicaciones continuas. Como además  $p$  es sobreyectiva entonces  $p(X) = \tilde{X}$ , por tanto si  $X$  es conexo (conexo por caminos) entonces  $p(X) = \tilde{X}$  también lo es.
4. Es inmediato que  $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}(p)$ , por otro lado dado  $y \in \tilde{\mathcal{T}} \implies y = [x]$  para cierto  $x \in X$ , por tanto  $p(x) = y$ , luego  $p$  es sobreyectiva.
5. Por el apartado 4,  $p$  es una identificación, por tanto basta aplicar la parte 2 de la Proposición 1.1.4

Recordemos ahora que dada una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  cualquiera, podemos definir una relación de equivalencia sobre  $X$  a partir de ella. Denotaremos por  $R_f$  a la relación de equivalencia en  $X$  dada por:

$$xR_fx' \iff f(x) = f(x')$$

**Ejercicio 1.1**

Demostrar que  $R_f$  es una relación de equivalencia.

**Teorema 1.1.7: Proposición 4.1**

Dados  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos y  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  el espacio cociente dado por  $R_f$ , existe una aplicación  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) & & \end{array}$$

Además,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es una identificación si y solo si  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es un homeomorfismo.

<sup>a</sup>Que el diagrama sea conmutativo quiere decir que "da igual que camino de flechitas sigamos", es decir,  $\tilde{f} \circ p = f$ .

**Demostración.** Si pretendemos que el diagrama sea conmutativo debe cumplirse

$$\tilde{f}(p(x)) = f(x) \iff \tilde{f}([x]) = f(x)$$

por tanto definimos  $\tilde{f}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}'), \quad \tilde{f}([x]) = f(x).$$

Ahora solo necesitamos ver que la aplicación está bien definida. En efecto si  $x, y \in X$  son dos representantes de la misma clase de equivalencia  $[x]$  entonces  $x R_f y$ , por tanto se cumple  $f(x) = f(y)$ , luego

$$\tilde{f}([x]) = f(x) = f(y) = \tilde{f}([y])$$

por lo que la aplicación está bien definida<sup>1</sup>.

Para la segunda parte, si suponemos que  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo entonces  $f = \tilde{f} \circ p$  es continua por ser composición de funciones continuas, y es sobreyectiva por serlo  $\tilde{f}$  y  $p$ . Además, si  $U \in \mathcal{T}(f)$  entonces  $f^{-1}(U) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ , por tanto  $\tilde{f}^{-1}(U) \in \tilde{\mathcal{T}}$ , y al ser  $\tilde{f}$  abierta y biyectiva  $U = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$ , lo que prueba que  $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$  y por tanto  $f$  es una identificación.

Si por el contrario suponemos que  $f$  es una identificación entonces  $f$  es sobreyectiva y  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$ , por tanto  $f$  es continua y al ser  $p$  identificación también lo es  $\tilde{f}$  (apartado 2 de la Proposición 1.1.4). Que  $\tilde{f}$  es inyectiva es inmediato por la propia definición de  $\tilde{f}$ . Para ver que es sobreyectiva, dado  $y \in Y$  por ser  $f$  sobreyectiva existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ , por tanto  $\exists z = [x] \in \tilde{X}$  tal que  $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$ . Veamos que  $\tilde{f}$  es abierta: dado  $U \in \tilde{\mathcal{T}}$  entonces  $f^{-1}(\tilde{f}(U)) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(U))) = p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  por ser  $p$  continua, por lo tanto  $\tilde{f}(U) \in \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo.  $\square$

<sup>1</sup>Está bien definida ya que hemos visto que la imagen de una clase de equivalencia no depende del representante escogido.

## 1.2. Ejemplos de espacios cocientes

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios cociente y la posibilidad de establecer homeomorfismos entre estos espacios cociente y otros espacios topológicos de interés. En estos primeros ejemplos haremos uso del Teorema 1.1.7 para encontrar tales homeomorfismos.

### Ejemplo

Para el intervalo  $I = [0, 1]$ , consideramos la partición:

$$\tilde{I} = \{\{0, 1\}\} \cup \{\{x\} : x \in (0, 1)\}.$$

El espacio cociente  $(\tilde{I}, \tilde{\mathcal{T}})$  es homeomorfo a la circunferencia unidad  $\mathbb{S}^1$ .

**Demostración.** Probemos que la relación  $\sim$  dada por la partición  $\tilde{I}$  coincide con la relación dada por la aplicación  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1, f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ . Para ello, dados  $x, y \in I$

$$xR_f y \iff f(x) = f(y) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

Para que se den estas igualdades entre cosenos y senos hay varias opciones: si  $x, y \in (0, 1)$  entonces debe cumplirse  $x = y$ ; si  $x, y \in \{0, 1\}$  entonces o bien  $x = y$ , o bien  $x = 0, y = 1$ , o bien  $x = 1, y = 0$ . En resumen:

$$xR_f y \iff x = y \text{ o } x = 1, y = 0 \text{ o } x = 0, y = 1 \iff x \sim y$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{I}$  y  $\mathbb{S}^1$ .

En primer lugar,  $f$  es continua por ser restricción de una aplicación continua (basta considerarla como aplicación de  $I$  a  $\mathbb{R}^2$ ), además es cerrada puesto que  $I$  es compacto y  $\mathbb{S}^2$  es Hausdorff (Ver Ejercicio 1.2). Por último dado  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ , denotemos por  $\alpha = \text{ang}((x, y))$  al ángulo en radianes que forma el punto  $(x, y)$  con la horizontal, con  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Es sencillo comprobar que  $f(\frac{\alpha}{2\pi}) = (x, y)$ , por tanto  $f$  es sobreyectiva, lo que según la Proposición 1.1.4 apartado 3 garantiza que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{I}$  y  $\mathbb{S}^1$   $\square$

### Ejercicio 1.2

Probar que si  $X$  es compacto,  $Y$  es Hausdorff y  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua entonces  $f$  es cerrada.



**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cilindro.

**Demostración.** Consideremos el cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ , probaremos que la relación  $\sim$  coincide con la relación dada por la aplicación  $f : X \rightarrow C, f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s)$ . Para ello, dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x_1) = \cos(2\pi x_2) \\ \sin(2\pi x_1) = \sin(2\pi x_2) \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Dejamos como un sencillo ejercicio comprobar que para que se den estas igualdades entre cosenos y senos debe darse  $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ . En resumen:

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{X}$  y  $C$ .

En primer lugar,  $f$  es continua y cerrada por un argumento similar al del ejemplo anterior. Para ver que es sobreyectiva basta tomar  $p = (x, y, z) \in C$ , y denotemos por  $\alpha = \text{ang}((x, y))$  al ángulo en radianes que forma el punto  $(x, y)$  con la horizontal si consideramos a  $(x, y)$  como punto de  $\mathbb{S}^1$ , con  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Entonces  $f(\frac{\alpha}{2\pi}, z) = (x, y, z) = p$ , por lo que  $f$  es sobreyectiva y por tanto identificación.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una banda de Möbius.

**Demostración.** Llamaremos  $M$  a la banda de Möbius.  $M$  será la imagen de la función

$$F : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(u, v) = ((2 - v \sin(\frac{u}{2})) \sin(u), (2 - v \sin(\frac{u}{2})) \cos(u), v \cos(\frac{u}{2}))$$

es decir,  $M = F([0, 2\pi] \times [-1, 1])$ .

Probaremos ahora que la función  $f : I \times I \rightarrow M$  dada por  $f(t, s) = F(2\pi t, 2s - 1)$  define la misma relación que  $\sim$  y además es una identificación. La aplicación  $f$  es claramente continua, cerrada por ir de un compacto a un  $T_2$  y sobreyectiva por definición (ya que  $M = F([0, 2\pi] \times [-1, 1]) = f(I \times I)$ ).

En cuanto a la relación, dados  $(x, y), (a, b) \in I \times I$

$$(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2) \iff f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2 - (2y_1 - 1) \sin(\pi x_1)) \sin(2\pi x_1) = (2 - (2y_2 - 1) \sin(\pi x_2)) \sin(2\pi x_2) \\ (2 - (2y_1 - 1) \sin(\pi x_1)) \cos(2\pi x_1) = (2 - (2y_2 - 1) \sin(\pi x_2)) \cos(2\pi x_2) \\ (2y_1 - 1) \cos(\pi x_1) = (2y_2 - 1) \cos(\pi x_2) \end{cases}$$

claramente si  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  o  $[x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2]$  entonces se dan las igualdades y  $(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2)$ . Por el contrario, si  $(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2)$  dejamos la comprobación de que debe cumplirse  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  o  $[x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2]$  como ejercicio (o castigo) al lector.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un toro.

**Demostración.** En primer lugar notemos que la relación de equivalencia consiste en identificar los lados del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  según la siguiente figura



En cuanto al toro  $\mathbb{T}$ , lo consideraremos como el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente forma

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

Si definimos la función

$$\begin{aligned} F &: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T} \\ F(u, v) &= (\cos u(\cos v + 2), \sin u(\cos v + 2), \sin v) \end{aligned}$$

basta comprobar que

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}, \quad f(t, s) = F(2\pi t, 2\pi s)$$

induce la misma relación de equivalencia que  $\sim$ , y además es continua, sobreyectiva y cerrada (por ir de un compacto a un Hausdorff). Todas estas comprobaciones, muy similares a las de los anteriores ejemplos, quedan como un sencillo ejercicio para el lector.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } [x_1 = x_2 \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}] \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una botella de Klein.

**Demostración.** Definiremos la botella de Klein  $K$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  dado por la imagen de la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow K \subset \mathbb{R}^4 \\ f(t, s) &= ((2 + \cos(2\pi t)) \cos(2\pi s), \\ &\quad (2 + \cos(2\pi t)) \sin(2\pi s), \\ &\quad \sin(2\pi t) \cos(\pi s), \\ &\quad \sin(2\pi t) \sin(\pi s)) \end{aligned}$$

Claramente  $f$  es continua, sobreyectiva (por la propia definición de  $K$ ) y cerrada (por ir de un compacto a un  $T2$ ). Además, se puede comprobar que determina la misma relación de equivalencia que  $\sim$ , por lo que en virtud de la Proposición 4.1 existe un homeomorfismo entre  $\tilde{X}$  y la botella de Klein.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } y_1 = y_2 = 0 \text{ o } (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cono.

**Demostración.** Definamos el cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]\}$$

y tomemos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\rightarrow C \\ f(\theta, t) &= (t\theta_x, t\theta_y, t), \quad \theta = (\theta_x, \theta_y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

es inmediato ver que la función es continua, sobreyectiva y cerrada por argumentos como los del resto de ejemplos. Por otro lado

$$(\theta, t) R_f (\theta', t') \iff t = t', t\theta = t'\theta' \iff t = t' = 0 \quad \text{ó} \quad (\theta, t) = (\theta', t') \iff (\theta, t) \sim (\theta', t')$$

Por tanto existe un homeomorfismo entre  $C$  y  $\tilde{X}$ . □

**Ejemplo**

Sea  $X = \mathbb{S}^2$  con la relación de equivalencia:

$$p \sim q \iff p = \pm q.$$

El espacio cociente es homeomorfo al plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ .

**Ejemplo**

En el disco cerrado  $D(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , consideramos la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 = \pm x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente  $D(0, 1)/\sim$  es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

**Ejercicio 1.3**

Dado  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $K \subset X$ , definimos la relación

$$x \sim y \iff \begin{cases} x, y \in K \\ x = y \end{cases}$$

y llamemos al espacio cociente  $(X/K, \mathcal{T}/K) := (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ .

- a) Demostrar que  $p|_{X \setminus K} : X \rightarrow p(X \setminus K)$  es una biyección.
- b) Demostrar que  $p|_{X \setminus K}$  es un homeomorfismo si  $K$  es abierto o cerrado.

**Solución:**

Para el apartado a) notemos que

$$\forall x \in X \setminus K, \quad p|_{X \setminus K}(x) = [x]$$

pero por la manera en la que está definida la relación de equivalencia, es inmediato ver que  $[x] = \{x\}$ , ya que el único elemento relacionado con  $x$  es el propio  $x$  (recordemos que  $x \notin K$ ). Por tanto  $p|_{X \setminus K}$  es inyectiva ya que

$$p|_{X \setminus K}(x) = p|_{X \setminus K}(y) \implies [x] = [y] \implies \{x\} = \{y\} \implies x = y$$

y además es sobreyectiva por estar definida en su imagen. Por tanto  $p|_{X \setminus K}$  es una biyección.

Para el apartado b) notemos en primer lugar que  $p$  es continua, por lo que  $p|_{X \setminus K}$  también lo será por ser su restricción a  $X \setminus K$ .

Haremos el caso  $K$  cerrado, cuando  $K$  es abierto hay que razonar de manera idéntica pero con cerrados teniendo en cuenta la parte 3 de la Proposición 1.1.2.

Si  $K$  es cerrado entonces  $X \setminus K$  es abierto, ahora si tomamos  $U \in \mathcal{T}|_{X \setminus K}$  entonces  $U = \tilde{U} \cap (X \setminus K)$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ . Pero como  $X \setminus K$  es abierto entonces de hecho  $U \in \mathcal{T}$  y por tanto

$$p^{-1}(p(U)) = (p|_{X \setminus K})^{-1}(p|_{X \setminus K}(U)) = U \in \mathcal{T}$$

(recordemos que  $p|_{X \setminus K}$  es una biyección y por tanto tiene inversa). Finalmente por la definición de topología cociente debe de ser  $p(U) \in \mathcal{T}/K$ , pero como además  $p|_{X \setminus K} = p(U) = p(U) \cap p(X \setminus K)$  deducimos que  $p|_{X \setminus K}(U) \in \mathcal{T}/K|_{p(X \setminus K)}$ , lo que prueba que  $p|_{X \setminus K}$  es abierta y por tanto un homeomorfismo.

### 1.3. Espacios localmente euclídeos

#### Definición 1.3.1: Espacio localmente euclídeo

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice que es localmente euclídeo de dimensión  $n$  si todo punto  $p$  de  $X$  tiene un entorno  $U$  homeomorfo a una bola abierta  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\varphi : U \subset X \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$  es tal homeomorfismo,  $(U, \varphi)$  se llama carta en  $X$  alrededor de  $p \in U$ .

#### Nota

1. Por ser  $X$  localmente euclídeo, este hereda las propiedades locales de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Podemos sustituir la bola abierta en la definición anterior por un entorno abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición 1.3.2: Bola euclídea

Diremos que  $B' \subset X$  es una bola euclídea si  $B'$  es homeomorfo a una bola abierta  $B(0, r)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición 1.3.3: Bola regular euclídea

Diremos que  $B \subset X$  es una bola regular euclídea si:

- Existe una bola euclídea  $B'$  tal que  $\overline{B} \subset B'$ .
- Existe  $r > 0$  y una carta  $\varphi : B' \rightarrow B^n(0, 2r)$  tal que  $\varphi(\overline{B}) = \overline{B^n(0, r)}$ .

### 1.4. Variedades topológicas

#### Definición 1.4.1: Variedad topológica

Una variedad topológica  $M$  es un espacio topológico  $T_2$  y  $2AN$  que es localmente euclídeo. La dimensión de  $M$  es el número natural  $n$ . También se denomina  $n$ -variedad (topológica).

#### Definición 1.4.2: Superficie topológica

Una superficie topológica  $S$  es una variedad topológica de dimensión dos o 2-variedad.

**Nota**

En ocasiones podemos referirnos a las superficies topológicas como superficies, o en general a las  $n$ -variedades topológicas como  $n$ -variedades (o incluso variedades si se sobreentiende su dimensión). Cabe destacar que en otro contextos la palabra superficie puede referirse a un concepto distinto, como el de superficie parametrizada o el de variedad diferenciable de dimensión 2 (superficie regular).

**Definición 1.4.3: Variedad con borde**

Si en la definición de variedad cambiamos el espacio modelo  $\mathbb{R}^n$  por el semiespacio superior  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ , obtenemos el concepto de variedad con borde.

**Proposición 1.4.4: Observaciones sobre variedades topológicas**

1. Toda variedad topológica es localmente conexa por caminos (y localmente conexa).
2. Las componentes conexas y las componentes conexas por caminos coinciden en una variedad.
3. Una variedad es conexa si y solo si es conexa por caminos.
4. Toda variedad es localmente compacta.
5. Si una variedad no es compacta, siempre podremos compactificarla añadiendo un solo punto.

**Demostración**

Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Notemos en primer lugar la siguiente afirmación que usaremos para probar el punto 4:

**Afirmación**

Dado  $x \in M$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x)$  homeomorfo a una bola  $B(0, r) = \varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $\varphi(x) = 0$ .

**Demostración**

Sabemos por ser  $M$  variedad que existe un entorno  $U' \in \mathcal{E}(x)$  y un homeomorfismo  $\psi : U' \rightarrow B$  con  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\psi(x) = 0$  ya hemos acabado, si  $\psi(x) \neq 0$  entonces podemos elegir una bola centrada en  $\psi(x)$  de radio  $r'$  lo suficientemente pequeño de manera que  $B(\psi(x), r') \subset B \implies A = \psi^{-1}(B(\psi(x), r')) \subset \psi^{-1}(B) = U$ , y  $A \in \mathcal{E}(x)$ . Finalmente la aplicación  $\phi : B(\psi(x), r') \rightarrow B(0, r')$ ,  $\phi(s) = s - \psi(x)$  es un homeomorfismo, por lo que  $\varphi = \phi \circ \psi|_A : A \rightarrow B(0, r')$  es el homeomorfismo buscado.

De hecho dado cualquier  $V \in \mathcal{E}(x)$  siempre podemos elegir el entorno homeomorfo a una bola de manera que  $U \subset V$  puesto que si  $U \not\subset V$ , entonces basta tomar  $B'(0, r') \subset$



$B(0, r)$  lo suficientemente pequeña para que  $U' = \varphi^{-1}(B'(0, r')) \subset U \cap V$  y claramente  $U'$  también es homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Sean  $x \in M, V \in \mathcal{E}(x)$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x), U \subset V$  homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto localmente conexo por caminos. Como  $U$  es localmente conexo por caminos  $\exists U' \subset U$  un entorno de  $x$  conexo por caminos. Por último notemos que  $U' \subset U \subset V \implies U' \subset V$ , luego  $U'$  es un entorno de  $x$  conexo por caminos contenido en  $V$ , lo que prueba que  $M$  es localmente conexa por caminos. Que es localmente conexa es inmediato puesto que localmente conexo por caminos implica localmente conexo.
2. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
3. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
4. Sea  $x \in M$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x)$  homeomorfo a una bola  $B(0, r)$  mediante un homeomorfismo  $\varphi : B(0, r) \rightarrow U$  con  $\varphi(0) = x$ . Puesto que  $\overline{B(0, \frac{r}{2})}$  es compacto y  $\varphi$  es continua,  $\varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})})$  es un compacto. Además  $\varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})}) \subset \varphi(B(0, r)) = U$  por lo que si tomamos  $C = \varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})})$  como compacto y  $U$  como entorno se verifica que  $x \in C \subset U$ , por lo que  $M$  es localmente compacta en  $x$ , como el punto elegido era arbitrario  $M$  es localmente compacta.
5. Como cualquier variedad es  $T_2$  y localmente compacta el Teorema de Alexandroff nos asegura que podemos compactificarla por un punto.

### 1.4.1. Ejemplos de superficies

En todos los ejemplos siguientes consideramos subespacios de algún  $\mathbb{R}^m$ , por tanto todos los espacios son  $T_2$  y  $2AN$  (recordemos que estas propiedades se heredan al considerar las topologías relativas). Solo necesitamos probar que cada uno de estos espacios son localmente euclídeos.

#### Ejemplo

La esfera  $\mathbb{S}^2$  es una superficie topológica.

#### Solución:

Sea  $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  y supongamos que  $z > 0$ , en tal caso el entorno  $U = \mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$  es homeomorfo a la bola  $B^2((0, 0), 1)$  mediante el homeomorfismo

$$\varphi : B^2((0, 0), 1) \rightarrow U, \quad \varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

En efecto es una homeomorfismo pues es abierta, continua y biyectiva, con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y).$$

Para el resto de puntos sabemos que alguna de las tres componentes  $x, y, z$  debe ser no nula, por lo que podemos hacer un procedimiento similar, tarea que encomendamos al lector.

#### Ejemplo

El toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es una superficie topológica.

#### Ejemplo

El cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  es una superficie topológica.

#### Ejemplo

El hiperboloide de una hoja  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  es una superficie topológica.

#### Ejemplo

El hiperboloide de dos hojas  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  es una superficie topológica.

#### Ejemplo

El paraboloide de revolución  $x^2 + y^2 - z = 0$  es una superficie topológica.

**Proposición 1.4.5: Espacio proyectivo real**

El espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^n$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ .

**Demostración**

Veamos en primer lugar qué tipo de espacio topológico es  $\mathbb{RP}^n$ . Para ello, notemos que está definido por la relación de equivalencia sobre  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  dada por

$$x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0.$$

Podemos dar una expresión explícita de las clases de equivalencia en  $\mathbb{RP}^n$  como

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x_{i_0} \neq 0\}$$

en cuyo caso la proyección al cociente viene dada por

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

Veamos que  $\mathbb{RP}^n$  es localmente euclídeo. Sea  $p = [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$ , por definición de  $\mathbb{RP}^n$  sabemos que existe un  $i_0$  tal que  $x_{i_0} \neq 0$ , definimos el siguiente entorno  $U_p = \{[y_1, \dots, y_{n+1}] : y_{i_0} \neq 0\}$  que contiene a  $p$  y es abierto puesto que la topología sobre  $\mathbb{RP}^n$  es precisamente la topología final de  $\pi$  y se tiene  $\pi^{-1}(U_p) = V_p$  donde

$$V_p = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) : y_{i_0} \neq 0\}$$

que es abierto puesto que su complementario

$$[\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}] \setminus V_p = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) : y_{i_0} = 0\}$$

es cerrado. Por tanto  $U_p$  es abierto (recuérdese la definición de topología final), y la siguiente aplicación

$$\varphi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left( \frac{x_1}{x_{i_0}}, \dots, \frac{x_{i_0-1}}{x_{i_0}}, \frac{x_{i_0+1}}{x_{i_0}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_{i_0}} \right)$$

es un homeomorfismo. Omitiremos ver que  $\varphi$  está bien definida y es un homeomorfismo. ■

### 1.4.2. Propiedades de las variedades topológicas

#### Lema 1.4.6: Lema técnico

Existe  $0 < \epsilon \leq 1$  tal que para todo  $q \in B^n(0, \epsilon)$  existe un homeomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $F(0) = q$  y  $F|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)}$  es la identidad.

**Demostración.** La idea es construirse una función auxiliar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = q$ , para  $x \in B(0, \epsilon)$ ,  $f(x) = 0$ , para  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$ , y que en el resto de puntos sea diferenciable. Una vez construida esta  $f$ , definimos  $F$  como  $F(x) = f(x) + x$  que es homeomorfismo por ser suma de homeomorfismos. y verifica que  $F(0) = q$  y  $F|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)}$  es la identidad.  $\square$

#### Teorema 1.4.7: Proposición 4.2 - Homogeneidad

Sea  $X$  una variedad topológica conexa de dimensión  $n$  y  $p, q \in X$ . Entonces existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(p) = q$ .

**Demostración.** Sea la relación de equivalencia en  $X$  dada por

$$p \sim q \iff \exists f : X \rightarrow X \text{ homeomorfismo tal que } f(p) = q.$$

Vamos a ver que  $p^{-1}([p]) = U(p)$  es abierta y cerrada en  $X$ , y por tanto, es todo  $X/\sim$ .

Para ver que es abierto, sea  $B$  una bola regular euclídea centrada en  $p$ . Por definición, existe  $B' \subset X$  bola euclídea y  $\varphi : B' \rightarrow B^n(0, 3) \subset \mathbb{R}^n$  con:

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0 \iff \varphi^{-1}(0) = p, \\ \overline{B} \subset B', \\ \varphi(\overline{B}) = B^n(0, 3/2). \end{cases}$$

Por el lema anterior, existe  $\epsilon \in (0, 1]$  tal que  $\forall x \in B(0, \epsilon)$ , existe  $F_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfismo con  $F_x(0) = x$  y  $F_x|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0, 2)} = \text{Id}$ .

Denotamos  $B_0 = \varphi^{-1}(B^n(0, \epsilon))$  y consideramos  $G = \varphi^{-1} \circ F|_{B(0, 3)} \circ \varphi : B' \rightarrow B'$ .  $G$  está bien definida porque  $F|_{B(0, 3)}$  es un homeomorfismo de  $B(0, 3)$ . Ahora,  $G(p) = \varphi^{-1}(F(\varphi(\varphi^{-1}(0)))) = \varphi^{-1}(F(0)) = \varphi^{-1}(x)$ .

Por el lema,  $G$  se puede extender a  $G : X \rightarrow X$  por la identidad y así obtener un homeomorfismo de  $X$ . Por tanto,  $p \in B_0 \subset U(p)$ , con  $B_0$  abierto, y por tanto  $U(p)$  es abierto.

Hemos visto que  $[p]$  es abierto. Por tanto,  $\tilde{X}/[p] = \bigcup_{q \neq p} [q]$ , porque las las clases de equivalencia son disjuntas. Al ser unión arbitraria de abiertos es abierto, luego el complementario  $[p]$  es cerrado.  $\square$

## 1.5. Unión disjunta

### Definición 1.5.1: Unión disjunta

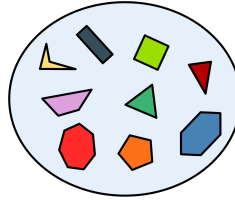
Sea  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  una familia indexada de espacios topológicos. Definimos su unión disjunta como:

$$\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha, \alpha \in J\}.$$

Consideramos las inyecciones canónicas  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ , dadas por  $\iota_\alpha(x) = (x, \alpha)$ .

### Nota

Para entender la unión disjunta podemos pensar en el siguiente contexto. Supongamos que los espacios topológicos son subconjuntos acotados del plano (por ejemplo polígonos), su unión disjunta consistirá en disponer estos subconjuntos de tal manera que no se solapen unos con otros. Un ejemplo sería la imagen siguiente



Otra manera de imaginar la unión disjunta es considerar que ponemos cada subconjunto del plano en una copia distinta de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, tendremos cada espacio topológico (figura) en un plano y la unión disjunta será la unión de esas "hojas".

### Proposición 1.5.2: Topología unión disjunta

La familia de subconjuntos  $B = \{\iota_\alpha(U) : U \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in J\}$  es una base para una topología  $\mathcal{T}$  sobre  $\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  que recibe el nombre de topología unión disjunta.

### Demostración

Sea  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  una familia de espacios topológicos.

(B1) Para todo  $(x, \alpha) \in \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  se tiene  $x \in X_\alpha$ , y como  $X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ , deducimos que  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(X_\alpha) \in B$ .

(B2) Si  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\beta(U_2)$  necesariamente  $\alpha = \beta$  puesto que en otro caso

$$\iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\beta(U_2) = \emptyset$$

que es una contradicción con que  $x$  está en la intersección. Entonces  $x \in U_1 \cap U_2$  y existe  $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_\alpha$  (que es abierto puesto que  $U_1, U_2$  lo son) con  $x \in V \subset U_1 \cap U_2$ , por lo que  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(V) \subset \iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\beta(U_2)$ . La última inclusión es fácil de comprobar y se deja como un sencillo ejercicio. ■

**Proposición 1.5.3: Propiedades de la unión disjunta**

1. Cada inclusión  $\iota_\alpha$  es un embebimiento, por lo que podemos identificar  $X_\alpha \equiv \iota_\alpha(X_\alpha) \subset \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ .
2. Un subconjunto es abierto en  $\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  si y solo si su intersección con cada  $X_\alpha$  es un abierto en  $X_\alpha$ .
3. Una aplicación  $f : \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow Y$  es continua si y solo si  $f|_{X_\alpha}$  es continua, para todo  $\alpha \in J$ .
4. Si todos los espacios  $X_\alpha$  son  $T_2$  (resp.  $1A\mathbb{N}$ ), la unión disjunta también es  $T_2$  (resp.  $1A\mathbb{N}$ ).
5. Si todos los espacios  $X_\alpha$  son  $2A\mathbb{N}$  y  $J$  es numerable, entonces la unión disjunta también es  $2A\mathbb{N}$ .
6. La unión disjunta de una cantidad numerable de  $n$ -variedades es una  $n$ -variedad.

***Demostración***

■ Pendiente. ■

## 1.6. Suma conexa

### Definición 1.6.1: Suma conexa

Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies conexas y sean  $D_1$  y  $D_2$  discos regulares euclídeos. Sea  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  un homeomorfismo y denotemos por  $S'_i := S_i \setminus D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Definimos en  $S'_1 \sqcup S'_2$  la menor relación de equivalencia que contiene a  $x \sim \varphi(x)$  para todo  $x \in \partial D_1$ . Entonces el cociente  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  es un espacio topológico.

#### Nota

El homeomorfismo  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  existe siempre puesto que las fronteras de los discos son homeomorfas a las fronteras de alguna bola euclídea, y por tanto ambas fronteras son homeomorfas a la circunferencia unidad

$$\partial D_1 \cong \mathbb{S}^1 \cong \partial D_2.$$

A continuación se enuncian un par de lemas que serán útiles para la demostración de la Proposición 1.7.4. El primero es una generalización del conocido Teorema de la Curva de Jordan, el cual se enuncia sin demostración. El segundo es un lema técnico, que sí demostraremos.

### Lema 1.6.2: Teorema de Jordan - Schönflies

Sean  $C$  y  $C'$  dos curvas cerradas simples de  $\mathbb{R}^2$ , y  $f : C \rightarrow C'$  un homeomorfismo. Entonces existe un homeomorfismo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F|_C = f$  y fuera de un compacto  $K \supseteq C$  es la identidad.

### Lema 1.6.3: Extensión de homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$

Sean  $C_1, C_2$  homeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ ,  $h : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo y  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto,  $U \cong \mathbb{R}^2$ , con  $C_1 \cup C_2 \subseteq U$ . Entonces existe un homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $H|_{C_1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

#### Demostración

Sea  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  el homeomorfismo dado por la hipótesis  $U \cong \mathbb{R}^2$  y sean  $\tilde{C}_1 = g(C_1)$ ,  $\tilde{C}_2 = g(C_2)$ , definamos la aplicación

$$\hat{h} = (g \circ h \circ g^{-1})|_{\tilde{C}_1} : \tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}_2.$$

que es claramente un homeomorfismo. Por el Teorema de Jordan-Schönflies existe un homeomorfismo  $\hat{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\hat{H}|_{\tilde{C}_1} = \hat{h}$  y  $\hat{H}$  es la identidad fuera de un compacto  $K \supseteq \tilde{C}_1$ . Sea  $H = g^{-1} \circ \hat{H} \circ g$ , entonces  $H$  es el homeomorfismo buscado puesto que para

todo  $x \in C_1$

$$\begin{aligned} H|_{C_1}(x) &= (g^{-1} \circ \hat{H} \circ g)|_{C_1}(x) = (g^{-1} \circ \hat{H}|_{\tilde{C}_1})(g(x)) = (g^{-1} \circ \hat{h})(g(x)) = \\ &= (g^{-1} \circ g \circ h \circ g^{-1})(g(x)) = h(x) \implies H|_{C_1} = h \end{aligned}$$

Además, si  $K \subset U$  entonces claramente  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ , y siempre podemos suponer que  $K \subset U$  porque  $U$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . ■

### Proposición 1.6.4: Invarianza del cociente $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$

Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies topológicas conexas, entonces, salvo homeomorfismo, el espacio  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  no depende de los discos regulares euclídeos ni del homeomorfismo  $\varphi$ .

#### Demostración

Veremos la demostración en 3 pasos:

##### 1. El tamaño del disco no importa.

Sean  $D_1$  y  $D_3$  discos regulares y euclídeos centrados en  $p \in S_1$ , y supongamos que  $\overline{D_1} \subset D_3$  sin pérdida de generalidad. Veamos que  $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$ .

Sea  $D'_3$  otro disco euclídeo con  $\overline{D_3} \subseteq D'_3$ , y  $\psi : D'_3 \rightarrow B(0, 2)$  un homeomorfismo verificando  $\psi(\overline{D_3}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Aplicamos el Lema 1.7.3 a  $U = B(0, 3/2)$ ,  $C_1 = \psi(\partial D_1)$ ,  $C_2 = \psi(\partial D_3)$  y  $h : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo cualquiera. Obtenemos que existe  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de forma que  $H|_{C_1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

Sea

$$\tilde{H} = \psi^{-1} \circ H \circ \psi : D'_3 \rightarrow D'_3,$$

entonces  $\tilde{H}(D'_3 \setminus D_1) = D'_3 \setminus D_3$ , pues  $\overline{D_1} \subset D_3$  y  $\tilde{H}(\partial D_1) = \partial D_3$ .

Ahora, extendiendo fuera de  $D'_3$  por la identidad obtenemos el homeomorfismo buscado.

##### 2. El punto donde centremos el disco no importa.

Sea  $D_1$  un disco regular euclídeo centrado en  $p \in S_1$  y  $D_3$  disco regular euclídeo centrado en  $q \in S_1$ . Veamos que  $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$  haciendo una construcción similar al caso anterior, pero haciendo también uso de la homogeneidad.

Sea  $F : S_1 \rightarrow S_1$  un homeomorfismo verificando  $F(p) = q$ . Sea  $D'_3$  disco regular con  $\overline{D_3} \subseteq D'_3$ . Sea  $\psi : D'_3 \rightarrow B(0, 2)$  el homeomorfismo que cumple que  $\psi(\overline{D_3}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Sea ahora  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de forma que  $\overline{F(D_4)} \subseteq D_1$ , donde  $D_4 = \psi^{-1}(B(0, \varepsilon))$ . Como  $\overline{D_4} \subseteq D_3$ , por el paso 1) obtenemos  $S_1 \setminus D_4 \cong S_1 \setminus D_3$ , y de la misma forma  $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_1$ .

Pero como  $F$  es un homeomorfismo,  $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_4$ , concluyendo así el paso 2.



### 3. No influye el homeomorfismo que elijamos.

Consideramos  $\varphi, \sigma : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$  y veamos que

$$S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi \cong S'_1 \sqcup S'_2 / R_\sigma.$$

Sea  $D'_2$  disco regular euclídeo con  $\overline{D_2} \subseteq D'_2$  y  $\psi_2 : D'_2 \rightarrow B(0, 2)$  homeomorfismo, con  $\psi_2(\overline{D_2}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Aplicamos el lema 1.7.3 a las curvas  $C_1 = C_2 = \mathbb{S}^1$ ,  $h = \psi_2 \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  y  $U = B(0, 3/2)$ . Obtenemos un homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $H|_{\mathbb{S}^1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

Definimos  $F : D'_2 \rightarrow D'_2$  como  $F = \psi_2^{-1} \circ H|_{B(0, 2)} \circ \psi_2$ , verificando  $F(D'_2 \setminus D_2) = D'_2 \setminus D_2$ .

Ahora, extendiendo  $F$  a todo  $S_2$  por la identidad, obtenemos un homeomorfismo  $\hat{F} : S_2 \rightarrow S_2$  definido como la identidad en  $S_1 \setminus D_1$  y como  $F$  en  $S_2 \setminus D_2$ .

Para concluir la prueba basta comprobar que  $\hat{F}$  pasa al cociente. Es decir, queremos ver si a partir de nuestro homeomorfismo

$$\hat{F} : (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2) \rightarrow (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2)$$

podemos definir un homeomorfismo entre los cocientes:

$$\tilde{F} : S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi \rightarrow S'_1 \sqcup S'_2 / R_\sigma.$$

Para que esto ocurra debe verificarse  $x R_\varphi y \implies \hat{F}(x) R_\sigma \hat{F}(y)$ . En nuestro caso,

$$x R_\varphi y \iff y = \varphi(x), \quad x \in \partial D_1, \quad y \in \partial D_2.$$

Pero entonces

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(\varphi(x)) = \psi_2^{-1} \circ \psi_2 \circ \sigma \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_2(\varphi(x)) = \sigma(x) = \sigma(\hat{F}(x)),$$

donde la última igualdad se debe a que  $\hat{F}$  es la identidad en  $\partial D_1$ .

Por tanto,  $\hat{F}(x) \sim \hat{F}(y)$ , y  $\hat{F}$  pasa al cociente como  $\tilde{F}$ , que es continua.

Aplicando la misma construcción a  $\varphi^{-1}$  y  $\sigma^{-1}$  podemos construir  $\tilde{F}^{-1}$ , y por tanto  $\tilde{F}$  es un homeomorfismo, concluyendo así la demostración.

### Definición 1.6.5: Suma conexa de superficies

Al espacio topológico cociente  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  lo denotaremos  $S_1 \# S_2$  y lo llamaremos suma conexa de  $S_1$  y  $S_2$ .

**Proposición 1.6.6: Propiedades heredadas de la suma conexa**

Sean  $S_1, S_2$  superficies. Entonces,  $S_1 \# S_2$  es una superficie. Además:

- Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies conexas, entonces  $S_1 \# S_2$  es una superficie conexa.
- Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies compactas, entonces  $S_1 \# S_2$  es una superficie compacta.

**Demostración**

Las demostraciones de las propiedades de conexidad y compacidad se consideran inmediatas. Nos centramos en demostrar que  $S_1 \# S_2$  es una superficie. Se puede comprobar fácilmente que las propiedades de  $2\mathbb{A}\mathbb{N}$  y  $T_2$  se heredan de  $S_1$  y  $S_2$ . Por tanto, nos queda comprobar que  $S_1 \# S_2$  es localmente euclídeo de dimensión 2.

Usando la notación habitual, sea

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi,$$

con  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  un homeomorfismo. Ya vimos en la proposición ?? que  $S_1 \# S_2$  no depende de la elección de  $D_1, D_2$  ni de  $\varphi$ .

Consideramos la proyección

$$p|_{S'_1 \setminus \partial D_1} \rightarrow S_1 \# S_2,$$

que nos da un homeomorfismo de  $S'_1 \setminus \partial D_1$  sobre su imagen, la cual es un abierto de  $S_1 \# S_2$ . Por tanto,  $S'_1 \setminus \partial D_1$  es localmente euclídeo de dimensión 2. Análogamente,  $S'_2 \setminus \partial D_2$  es localmente euclídeo de dimensión 2.

Falta ver qué ocurre en  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$ . Sean  $D'_1$  y  $D'_2$  discos regulares tales que  $\overline{D_i} \subseteq D'_i$ ,  $i = 1, 2$  y sean  $\psi_i : D'_i \rightarrow B(0, 2)$  homeomorfismos tales que  $\psi_i(\overline{D_i}) = B(0, 1)$ . Introducimos la siguiente notación: si  $J \subseteq [0, +\infty)$  es un intervalo, denotamos

$$A_J = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \in J\}.$$

Se tiene que  $\psi_i(D'_i \setminus D_i) = A_{[1, 2]}$ . Si llamamos  $\beta = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , y

$$\alpha(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot \beta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq (0, 0), \\ (0, 0) & \text{si } x = (0, 0). \end{cases}$$

Se verifica que  $\alpha|_{\mathbb{S}^1} = \beta$  y que  $\alpha \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$ . Por tanto,  $\alpha$  es un homeomorfismo de  $D'_1 \setminus D_1$  sobre  $D'_2 \setminus D_2$ .

Sea ahora

$$I : A_{[1, 2]} \rightarrow A_{(1/2, 1]}, \quad z \mapsto I(z) = \frac{z}{\|z\|^2}.$$

Por último, definimos

$$\Phi : (D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2) \rightarrow A_{(1/2, 2)}$$

mediante

$$\Phi(q) = \begin{cases} I \circ \alpha \circ \psi_1(q) & \text{si } q \in D'_1 \setminus D_1, \\ \psi_2(q) & \text{si } q \in D'_2 \setminus D_2. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$V_0 = p((D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2))$$

es el abierto de  $S_1 \# S_2$  que contiene a  $p(\partial D_1) = p(\partial D_2)$ . Se tiene que

$$(\partial D_1) \cup ((D'_1 \setminus D_1) \cap (S'_1 \setminus \partial D_1)) = \partial D_1 \cup (D'_1 \setminus D_1) = D'_1 \setminus D_1.$$

Veamos que  $\varphi(\partial D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2)$  es abierto en  $S_2$ .

Queda por demostrar que  $\Phi : V_0 \rightarrow A_{(1/2,2)}$  pasa al cociente. Esto ocurre pues se tiene que

$$\psi_2 \circ \varphi = I \circ \alpha \circ \psi_1$$

sobre  $\partial D_1$ . Cabe como ejercicio para el pobre lector comprobar que, dado  $xR_\varphi y$ , se cumple que  $\psi_2(y) = \psi_2(\varphi(x)) = I \circ \alpha \circ \psi_1(x)$ . Una vez hecho esto, la demostración concluye. ■

## Capítulo 2

# Clasificación de superficies compactas

### 2.1. Símplices

#### Definición 2.1.1: Símplice

Dados  $k+1$  puntos  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$  afínmente independientes, el subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  más pequeño que los contiene se conoce como un  $k$ -símplice y se denota por  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ . Los puntos  $v_i$  se llaman los vértices del  $k$ -símplice. Diremos que la dimensión de  $\sigma$  es  $k$ .

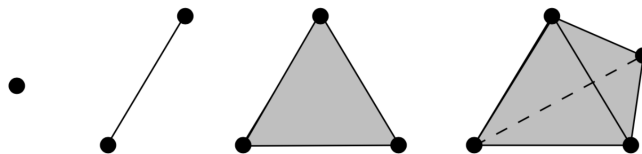
#### Definición 2.1.2: Subsímplices, caras

Si  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$  es un  $k$ -símplice, cualquier subconjunto no vacío de vértices también determina un símplice que llamaremos subsímplice de  $\sigma$ . Si solo se omite un vértice, el subsímplice correspondiente se denomina una cara.

Las caras de  $\sigma$  se denotan:  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ , donde  $\hat{v}_i$  es el vértice omitido.

#### Ejemplo

0-símplice (punto), 1-símplice (segmento de línea), 2-símplice (triángulo) y 3-símplice (tetraedro)



**Definición 2.1.3: Frontera**

Si  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$  es un  $k$ -símplice, la unión de todas sus caras se denomina la frontera de  $\sigma$  y se denota por

$$\partial\sigma = \bigcup_{0 \leq i \leq k} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k].$$

**Definición 2.1.4: Interior**

Si  $\sigma$  es un  $k$ -símplice, el complementario de su frontera se denomina el interior de  $\sigma$ ,

$$\text{int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial\sigma$$

Inmediatamente, se obtiene  $\sigma = \text{int}(\sigma) \cup \partial\sigma$ , donde la unión es disjunta.

**Nota**

La frontera y el interior de un  $k$ -símplice  $\sigma$  son conceptos independientes de la topología tomada sobre  $\mathbb{R}^m$ . Sin embargo, si  $k = m$ , entonces coinciden con la frontera y el interior topológicos de  $\sigma$  en topología usual de  $\mathbb{R}^m$ .

## 2.2. Complejos simpliciales

**Definición 2.2.1: Complejo simplicial**

Un complejo simplicial  $K$  es una colección finita de símlices tal que:

1. Cada cara de cada símplex de  $K$  también está en  $K$ .
2. La intersección de cualesquiera dos símlices de  $K$  es vacía o es un subsímplex de ambos.

La dimensión de  $K$  es la máxima dimensión de sus símlices.

**Definición 2.2.2: Número de Euler**

Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ , si para cada  $0 \leq k \leq n$  denotamos por  $i_k$  el número de  $k$ -símlices de  $K$ , entonces el número (o característica) de Euler de  $K$  es:

$$\chi(K) = i_0 - i_1 + \dots + (-1)^n i_n.$$

**Nota**

Para el caso de un complejo simplicial de dimensión 2, denotando a los vértices  $V = i_0$ , aristas  $E = i_1$  y caras  $F = i_2$ ; la característica de Euler se puede expresar como:

$$\chi = V - E + F$$

**Definición 2.2.3: Poliedro asociado**

Dado un complejo simplicial  $K$ , la unión de todos los símlices de  $K$  con la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^n$  se denomina el poliedro de  $K$  y lo denotamos por  $|K|$ .

**2.3. Triangulaciones****Definición 2.3.1: Triangulación**

Una triangulación de dimensión  $n$  de un espacio topológico  $X$  es un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $n$  de forma que  $|K|$  y  $X$  son homeomorfos. En este caso se dice que  $X$  es triangulable.

Enunciamos el siguiente teorema sin demostración:

**Teorema 2.3.2: Teorema de Radó**

Toda superficie topológica admite una triangulación por un complejo simplicial de dimensión 2. Además cada 1-símplex (arista) es subsímplex de exactamente dos 2-símplexes (cara).

**2.4. Presentación de superficies****Definición 2.4.1: Letras y palabras**

Sea  $A$  un conjunto finito (sus elementos los llamaremos letras). Una palabra  $W$  es una sucesión finita de elementos de la forma  $a$  ó  $a^{-1}$ , con  $a \in A$ , denotada por yuxtaposición.

**Ejemplo**

Consideremos el conjunto  $A = \{a, b, c\}$  formado por tres letras. Algunos ejemplos de palabras son los siguientes:

$$W_1 = cbab^{-1}ca^{-1}, W_2 = caab^{-1}bc^{-1}, W_3 = abb^{-1}a^{-1}.$$

**Definición 2.4.2: Presentación poligonal**

Una presentación poligonal, escrita como  $\mathcal{P} = \langle A | W_1, \dots, W_k \rangle$ , está formada por un conjunto finito de letras  $A$  y una colección finita de palabras  $W_1, \dots, W_k$  que cumplen:

1. Cada letra de  $A$  aparece exactamente dos veces en todo el conjunto de palabras.
2. Cada palabra tiene al menos longitud tres, salvo que haya una sola palabra que podría ser de dos letras.

**Ejemplo**

Algunos ejemplos sencillos de presentaciones poligonales son los siguientes:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a | aa^{-1} \rangle, \mathcal{P}_2 = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

Si consideramos el conjunto de letras y palabras del ejemplo anterior,  $\mathcal{P} = \langle A | W_1 \rangle$  es una representación poligonal, pero  $\mathcal{P}' = \langle A | W_3 \rangle$  no, ya que la letra  $c$  no aparece exactamente dos veces en el conjunto de palabras.

**Definición 2.4.3: Realización geométrica de  $\mathcal{P}$** 

Toda presentación poligonal  $\mathcal{P}$  tiene asociado un espacio topológico  $|\mathcal{P}|$  (realización geométrica de  $\mathcal{P}$ ) construido como sigue:

1. Para cada palabra se considera un polígono con el mismo número de aristas que la longitud de la palabra.
2. Cada arista se etiqueta correlativamente con las letras de la palabra y orientación opuesta si la letra está elevada a -1.
3. Finalmente, se identifican las aristas con el mismo nombre y orientación, mediante la topología cociente.

**Afirmación**

$|\mathcal{P}|$  es un espacio topológico

**Demostración**

Pendiente.

**Proposición 2.4.4: Compacidad y conexión de  $|\mathcal{P}|$** 

Dada una representación poligonal  $\mathcal{P}$ , su realización geométrica,  $|\mathcal{P}|$ , es una superficie compacta. Además si solo tiene una palabra, entonces es conexa.

**Demostración**

Vamos a ver que el espacio topológico cociente  $\tilde{X}$  es:

1. Compacto
2. Superficie  $(T_2, 2\mathbb{A}\mathbb{N}, \text{localmente euclídeo})$

Compacto: Sea  $X$  el polígono en  $\mathbb{R}^2$ , sea  $\sim$  la relación de equivalencia entre las aristas y sea  $\tilde{X}$  el cociente.  $X$  es compacto y  $p : X \rightarrow \tilde{X} = X/\sim$  la proyección al cociente es continua. Por tanto,  $\tilde{X}$  es compacto.

$T_2$ : Puedo tomar discos en  $\mathbb{R}^2$  infinitamente pequeños de forma que separen los puntos en  $X$  y las imágenes por  $p$  separan los puntos de  $\tilde{X}$ .

$2\mathbb{A}\mathbb{N}$ : La proyección es continua, y el polígono es  $2\mathbb{A}\mathbb{N}$ , luego  $\tilde{X}$  también lo es.

Localmente euclídeo: La idea es distinguir 3 casos:

Veamos que  $\mathcal{P}/_R$  es localmente euclídeo. Necesitamos que para cada punto, haya un entorno que sea homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $x \in \mathcal{P}/_R$  y consideramos

$$\pi^{-1}(x) = \begin{cases} p \in \text{int}(\mathcal{P}) \\ \{q_1, q_2\} \in \text{aristas} \\ \{v_1, \dots, v_k\} \in \text{vértices} \end{cases}$$

1.  $\pi^{-1}(x) = p \in \text{int}(\mathcal{P})$ . Entonces,  $\pi|_{\text{int}(\mathcal{P})} : \text{int}(\mathcal{P}) \rightarrow \pi(\text{int}(\mathcal{P}))$  es biyectiva y continua y su inversa también es continua. Por tanto, como  $\text{int}(\mathcal{P})$  es abierto, se tiene que es localmente euclídeo en  $\text{int}(\mathcal{P})$ .
2. Tomamos  $D_i \subset \mathbb{R}^2$  disco centrado en  $q_i$  con  $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$ . Además, tampoco cortan ningún vértice de  $\mathcal{P}$ . Sea  $U_i = D_i \cap \mathcal{P} \equiv$  semidiscos. Sea  $h : a \rightarrow a'$  el homeomorfismo que da la relación de equivalencia (con  $a, a'$  las aristas), es decir,  $h(x) = y, x \in a, y \in a' \iff xRy$ .

Existen homeomorfismos  $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (de hecho aplicaciones afines) tales que:

$$\alpha_1(U_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1, \text{Im}(z) \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < r_1, y \geq 0\}$$

$$\alpha_2(U_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2, \text{Im}(z) \leq 0\}$$

y también que  $\alpha_2 \circ h = \alpha_1|_a$ .

Sea  $r = \min\{r_1, r_2\}$  y llamo  $V_1 = \alpha^{-1}(\{z : |z| < r, \text{Im}(z) \geq 0\})$  y  $V_2 = \alpha^{-1}(\{z : |z| < r, \text{Im}(z) \leq 0\})$ . Lo que hemos llamado  $A = V_1 \cup V_2$  abierto de  $\mathcal{P}$ .  $\alpha : V_1 \cup V_2 \rightarrow B(0, r)$  identificación (continua, cerrada, sobreyectiva) donde  $\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1(x) & x \in V_1 \\ \alpha_2(x) & x \in V_2 \end{cases}$ . Está bien definida y pasa al cociente porque  $xRy, x \in a, y \in a' \implies y = h(x)$  y entonces  $\alpha(y) = \alpha_2(y) = \alpha_2(h(x)) = \alpha_1(x) = \alpha(x)$ .

3. Sea ahora  $\pi^{-1}(x) = \{v_1, \dots, v_k\}, k \in \mathbb{N}$ . Consideramos  $D_i$  disco infinitamente pequeño tal que  $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset, i \neq j$  no contenga puntos de otras aristas, ni vértices. Sea  $U_i = D_i \cap \mathcal{P} \equiv$  sector circular. Supongamos los sectores ordenados de forma que  $b_i \sim a_{i+1}, i = 1, \dots, k$ .



Objetivo:  $V_1 \cup \dots \cup V_k \xrightarrow{\alpha} B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ .

Sea homeomorfismo afín  $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva  $U_i$  en  $\{z : |z| < r_i, \arg(z) \in [\frac{2\pi(i-1)}{k}, \frac{2\pi i}{k}]\}$  para todo  $i = 1, \dots, k$  cumpliendo  $\alpha_{i+1} \circ h_i = \alpha_i|_{b_i}$ , donde  $h_i : b_i \rightarrow a_{i+1}$ .

Finalmente queda construir  $\alpha_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleve  $U_k$  en  $\{z : |z| < r_k, \arg(z) \in [\frac{2\pi(k-1)}{k}, 2\pi]\}$  y que cumpla

$$\begin{cases} \alpha_k \circ h_{k-1} = \alpha_{k-1}|_{b_{k-1}} \\ \alpha_1 \circ h_k = \alpha_k|_{b_k \equiv a_1} \end{cases} \quad (2.1)$$

, con  $h_k : b_k \rightarrow a_1$ .

Para garantizar la existencia de  $\alpha_k$ , podemos construirla en dos pasos, una para llevar a su hueco y otra para garantizar 2.1.

Sea  $r \leq \min r_1, \dots, r_k$  y  $V_i = \alpha_i^{-1}(\{z : |z| < r, \arg(z) \in [\frac{2\pi(i-1)}{k}, \frac{2\pi i}{k}]\})$ . Definimos  $\alpha : V_1 \cup \dots \cup V_k \rightarrow B(0, r)$  como  $\alpha(x) = \alpha_i(x), x \in V_i$ .  $\alpha$  está bien definida pues si  $xRy, x \in b_i, y \in a_{i+1} \implies \alpha(y) = \alpha_{i+1}(h_i(x)) = \alpha_i(x) = \alpha(x), i \neq k$ . Y para  $k$ ,  $y = h_k(x) \in a_1 \rightarrow$  misma cuenta. Luego,  $\alpha$  es identificación (continua, sobreyectiva, cerrada) y  $\tilde{\alpha}$  es homeomorfismo.

### Definición 2.4.5: Presentación de una superficie compacta

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie compacta. Una presentación de  $\mathcal{S}$  es una presentación poligonal  $\mathcal{P}$  tal que  $|\mathcal{P}|$  y  $\mathcal{S}$  son homeomorfas.

### Proposición 2.4.6: Presentación de $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$

Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  dos superficies compactas y conexas presentadas por  $\langle A_1 | W_1 \rangle$  y  $\langle A_2 | W_2 \rangle$ , respectivamente. Entonces,  $\langle A_1 \sqcup A_2 | W_1 W_2 \rangle$  es una presentación de  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ .

#### Demostración

Sea  $\mathcal{P}_1$  polígono asociado a  $W_1$  y sean  $p, q \in \text{int}(\mathcal{P}_1)$  dos puntos distintos y  $v$  vértice de  $\text{partes}_1$ .

$\mathcal{S}_1 = \langle A_1 | W_1 \rangle = \langle A_1 \sqcup a, b, c | W_1 cba = Q_1, abc \rangle$ . Definimos  $\pi' : \mathcal{P}_1 \sqcup Q_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$  y  $\pi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ . Sea entonces  $B_1 = \pi'(\text{int}(Q_1)) \subset \mathcal{S}_1$ . Si probamos que  $B_1$  es homeomorfo a un disco, entonces tendremos que  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$  se puede ver como  $\mathcal{S}_1 \setminus Q_1 \sqcup \mathcal{S}_2 / R_\varphi$ .

Para ver que  $B_1$  es homeomorfo a un disco, hacemos un razonamiento similar al de la proposición anterior tomando como abierto uno de la forma "sector circular con  $p$  y  $q$  dentro del sector y  $v$  el vértice, y hacer el mismo razonamiento con un solo sector.

Así, tendremos que  $\langle A_1 \sqcup \{a, b, c\} | W_1 cba, a^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$  es una presentación de  $\mathcal{S}_1 \setminus \text{int}(Q_1)$ , análogamente  $\langle A_2 \sqcup \{a', b', c'\} | W_2 c'b'a', (a')^{-1}(b')^{-1}(c')^{-1} \rangle$  es presentación de  $\mathcal{S}_2 \setminus \text{int}(Q_2)$ .

Para obtener  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$  identificamos  $\varphi : \partial Q_1 \rightarrow \partial Q_2$ , con  $\varphi(a) = a', \varphi(b) = b', \varphi(c) = c'$

y obtenemos  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2 = \langle A_1 \sqcup A_2 \sqcup \{a, b, c\} | W_1 c b a a^{-1} b^{-1} c^{-1} W_2 \rangle = \langle A_1 \sqcup A_2 | W_1 W_2 \rangle$ . ■

## 2.5. Teorema de Clasificación

### Definición 2.5.1: Transformaciones elementales sobre presentaciones poligonales

Dada una presentación poligonal, llamaremos transformaciones elementales a las siguientes operaciones:

- **Renombrado:** Sustituir todas las apariciones de una letra  $a$  por otra letra  $b$  que no estuviera en la presentación.
- **Subdivisión:** Cambiar todas las apariciones de una letra  $a$  por  $ab$ , y todas las apariciones de  $a^{-1}$  por  $b^{-1}a^{-1}$ , donde  $b$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Consolidado:** Dadas dos letras  $a$  y  $b$  que siempre aparezcan juntas de la forma  $ab$  o  $b^{-1}a^{-1}$ , sustituimos todas las apariciones de  $ab$  por  $c$ , y todas las apariciones de  $b^{-1}a^{-1}$  por  $c^{-1}$ , donde  $c$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Reflejo:** Cambiar una palabra de la forma  $a_1 a_2 \dots a_k$  por  $a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ , donde  $a_i$  son letras de la presentación.
- **Rotación:** Cambiar una palabra de la forma  $a_1 a_2 \dots a_k$  por  $a_2 a_3 \dots a_k a_1$ , donde  $a_i$  son letras de la presentación.
- **Corte:** Dada una palabra  $W_1 W_2$ , con  $W_1$  y  $W_2$  no vacías, quitamos  $W_1 W_2$  de la presentación y añadimos  $W_1 a, a^{-1} W_2$  como palabras nuevas, donde  $a$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Pegado** Sustituimos dos palabras de la forma  $W_1 a, a^{-1} W_2$ , con  $W_1$  y  $W_2$  arbitrarias y no vacías, por  $W_1 W_2$ .
- **Plegado** Una palabra de la forma  $W_1 a a^{-1}$  se sustituye por  $W_1$ , donde  $W_1$  tiene al menos longitud 3, salvo que haya una sola palabra, en cuyo caso podría ser de dos letras.
- **Desplegado** Una palabra de la forma  $W_1$  se sustituye por  $W_1 a a^{-1}$ , donde  $W_1$  tiene al menos longitud 3, salvo que haya una sola palabra, en cuyo caso podría ser de dos letras.

### Definición 2.5.2: Presentaciones equivalentes

Dos transformaciones poligonales se dice que son topológicamente equivalentes si sus realizaciones geométricas son homeomorfas.

### Proposición 2.5.3: Equivalencia por transformaciones elementales

Cada una de las transformaciones elementales sobre una presentación poligonal produce otra presentación topológicamente equivalente.

#### Demostración

Pendiente.

### Lema 2.5.4: Equivalencia entre algunos tipos de superficies

1. La botella de Klein y  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  son homeomorfas.
2.  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$  y  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  son homeomorfas.

#### Demostración

El dibujo.

### Teorema 2.5.5: Clasificación de superficies compactas

Sea  $S$  una superficie compacta y conexa, entonces  $S$  es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- la esfera  $\mathbb{S}^2$ .
- una suma conexa de toros  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ .
- una suma conexa de planos proyectivos  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ .

**Demostración.** Sea  $M$  una superficie compacta y conexa y sea  $\mathcal{P}$  una presentación poligonal.

Objetivo: ver que  $\mathcal{P}$  es 
$$\begin{cases} aa^{-1} \\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \\ a_1 a_1 \dots a_n a_n \end{cases}$$

Vamos a llamar aristas complementarias a aquellas que aparece como  $a$  y  $a^{-1}$ . Aristas retorcidas las que aparecen como  $a$  y  $a$  ó  $a^{-1}$  y  $a^{-1}$ .

PASO 1: Podemos suponer que  $\mathcal{P}$  tiene solo una palabra (o que el polígono tiene 1 sola cara). Si dos palabras no tienen letras en común, entonces sus cocientes son desconexos (contradicción con que la superficie original es conexa (redactar mejor la contradicción si se quiere)). Y si tienen letras en común, rotando, reflejando y pegando podemos unir las palabras.

Una cantidad finita de veces de este proceso demuestra el paso 1.

PASO 2: Podemos suponer que no hay pares de aristas complementarias adyacentes ( $W_1 a a^{-1} W_2$ ). Si las hubiera, plegando por ellas desaparecen. Excepto el caso en que solo tengamos ese par ( $W_1, W_2 = \emptyset$ ). Pero entonces la superficie es una esfera.

PASO 3: Podemos suponer que todos los pares de aristas retorcidas son adyacentes ( $V a W a$ , con  $V, W \neq \emptyset$ ). Cortamos por el medio ( $V a b$  y  $b^{-1} W a$ ). Rotamos y pegamos por  $a$  ( $b V a$  y

$a^{-1}W^{-1}b$ ). Entonces llegamos a  $bbVW^{-1}$ .

Una cantidad finita de este proceso demuestra el paso 3.

Nota: Puede ser que tengamos que volver a aplicar el paso 2 ya que tenemos  $W^{-1}$ .

PASO 4: Podemos suponer que el polígono tiene todos sus vértices identificados. Sea  $p : \mathcal{P} \rightarrow M$  la proyección al cociente. Sea  $p(v) = [v]$ . Si todos los vértices no están identificados, existen vértices  $v_1, w$  en  $\mathcal{P}$  y arista  $a$  ( $v_1 \rightarrow w$ ) con  $p(v_1) \neq p(w)$ . La arista que termina en  $v_1$  no puede ser ni  $a$  (porque entonces  $p(v_1) = p(w)$ ) ni  $a^{-1}$  (por los pasos anteriores). Por tanto, la arista es distinta, la llamo  $b$  y el otro vértice  $x$ , esto es que en  $b$  tenemos  $(x \rightarrow v_1)$ . Suponemos que aparece  $b^{-1}$  en otro sitio (si fuese  $b$  sería análogo salvo una rotación en cierto momento). En ese  $b^{-1}$  tendríamos  $(v_1 \rightarrow x)$ . Tenemos entonces  $baXb^{-1}Y$ , con  $X, Y \neq \emptyset$  (si no llegaríamos a alguna de estas igualdades:  $p(v_1) = p(w) = p(x)$ ).

Ahora cortamos por  $c$  ( $w \rightarrow x$ ). Rotando para pegar por  $b$  (y reflejando si en vez de tener  $b^{-1}$  tuviéramos  $b$ ). Pegando llegamos a  $acYc^{-1}X$ , con  $(v_1 \xrightarrow{a} w \xrightarrow{c} x \xrightarrow{Y} x \xrightarrow{c^{-1}} w \xrightarrow{X} v_1)$ .

Por tanto, hemos reducido la cantidad de vértices que se identifican con  $v$  en una unidad.

Una cantidad finita de este proceso demuestra el paso 4.

PASO 5: Se cumple que si aparece un par  $a, a^{-1}$ , entonces hay otro par  $b, b^{-1}$ , es decir, de la forma  $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$ .

Si no fuese así, tendría  $aXa^{-1}Y$ , donde  $X$  e  $Y$  no comparten letras o aristas (por los pasos anteriores). Esto significa que  $X$  e  $Y$  no comparten vértices (alguna de las aristas que sale de ese vértice tendría que estar "allí"), es decir, que los vértices finales de  $a$  y  $a^{-1}$  que solo tocan  $X$  solo pueden identificarse con vértices de  $X$ , y los iniciales solo pueden con  $Y$ .

Como cualquier arista  $c \subset X$  cumple que su identificación también está contenida en  $X$ , entonces todos los vértices que se identifican con  $X$  están en  $X$ . Si otro vértice se identificara con  $x$  y estuviese en  $Y$ , habría una arista a la vez en  $X$  e  $Y$ . Por tanto, tendríamos dos clases de vértices distintos  $p(x) \neq p(y)$ , que es una contradicción con el hecho de que todos los vértices estaban **BLANK** (no lo he escuchado, lo siento).

**¡ATENCIÓN!** El dibujo que hizo en clase con las  $c$ 's es muy instructivo para ver esto. Si alguien lo tiene copiado y lo pone como imagen sería maravilloso (una imagen vale más que mil palabras).

PASO 6: Podemos suponer que los pares de aristas del paso 5 aparecen consecutivos.

$aXbYa^{-1}Zb^{-1}W$ . Cortamos desde el final de  $X$  al final de  $W$ , y llamamos a esa arista  $c$ . Vamos a pegar por  $a$ . Tendremos  $aXcW$  y  $bYa^{-1}Zb^{-1}c^{-1}$ . Rotando de buena manera y pegando se queda  $YXcWzb^{-1}c^{-1}b$ . Ahora cortamos desde el final de  $b^{-1}$  al final de  $c$ , llamando  $d$  a esa arista. Se nos queda  $YXcd^{-1}c^{-1}b$  y  $WZb^{-1}d$ . Rotando y pegando por  $b$  se nos queda  $YXcd^{-1}c^{-1}dWZ$ .

Una cantidad finita de este proceso demuestra el paso 6.

PASO 7: Aplicar  $T^2 \# \mathbb{RP}^2$  y  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

□