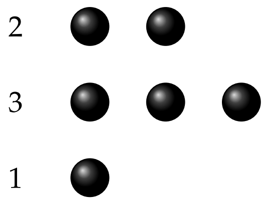
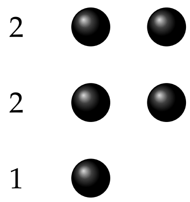
# Nim

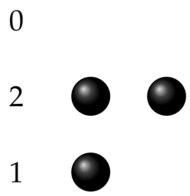
Nim is een spel waarbij het speelbord bestaat uit $N$ rijen met $K_{1,\ldots,N}$ stenen. Twee spelers kiezen om beurt een rij waaruit ze minimaal één steen verwijderen. De speler die de laatste steen verwijdert, verliest.
We tonen een voorbeeld van hoe een Nim spel kan verlopen. Stel dat de begintoestand de volgende is: $N = 3, K_1 = 2, K_2 = 3, K_3 = 1$.



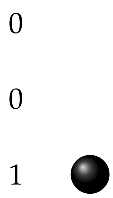

De cijfers links geven aan hoeveel stenen er nog zijn in elke rij. Stel nu dat speler 1 één steen verwijdert uit de tweede rij.




Speler 2 verwijdert alle stenen uit de eerste rij:




Speler 1 ziet zijn kans: hij verwijdert alle stenen uit de tweede rij.




De spelregels eisen dat speler 2 een steen wegneemt. De enige optie die overblijft is om de laatste steen uit de derde rij te verwijderen. Hierdoor verliest speler 2 het spel.

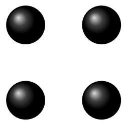
**Formeel uitgedrukt** Een speltoestand kan omschreven worden als een lijst positieve gehele getallen, geschreven $[K_1, K_2, \ldots, K_N]$. Geldige zetten voldoen aan onderstaande regel:

$$[K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_N] \rightarrow [K_1, \ldots, K'_i, \ldots, K_N] \qquad 1 \leq i \leq N, 0 \leq K'_i < K_i$$

**Hopeloze speltoestanden** We noemen een speltoestand *hopeloos* indien, welke zet de speler aan beurt ook maakt, hij zal verliezen indien zijn tegenspeler perfect speelt.
De meest voor de hand liggende hopeloze toestand is

1 

De enige geldige zet is die ene overblijvende steen weghalen, met verlies als gevolg. Een tweede voorbeeld van een hopeloze toestand is

2
2


Er zijn vier mogelijke zetten, maar elke leidt tot verlies:

| | zet huidige speler | | zet tegenspeler | |
|---|---|---|---|---|
| [2,2] | → | [1,2] | → | [1,0] |
| [2,2] | → | [0,2] | → | [0,1] |
| [2,2] | → | [2,1] | → | [0,1] |
| [2,2] | → | [2,0] | → | [1,0] |

**Winnende speltoestanden** We noemen een speltoestand *winnend* indien het geen hopeloze speltoestand is.

**Winnende zet** Kenmerkend voor een winnende toestand is dat er minstens één zet is die leidt tot een hopeloze speltoestand. Voor een hopeloze speltoestand geldt dat elke zet leidt tot een winnende speltoestand.
Dit zorgt ervoor dat indien een speler te maken heeft met een winnende speltoestand tijdens zijn beurt, hij gegarandeerd zal winnen indien hij perfect speelt: hij kan namelijk telkens weer een zet vinden die ervoor zorgt dat zijn tegenspeler een hopeloze toestand voorgeschoteld krijgt. Zo'n zet noemen we een *winnende zet*.

## Opgave

De bedoeling van deze opgave is dat je, gegeven een speltoestand, alle winnende zetten vindt. Bijvoorbeeld, voor $[1,5]$ is er één winnende zet, namelijk

$$[1,5] \rightarrow [1,0]$$

Voor $[7,13,4,3,11]$ zijn er meerdere winnende zetten:

$$\begin{array}{rcl} [7,13,4,3,11] & \rightarrow & [1,13,4,3,11] \\ [7,13,4,3,11] & \rightarrow & [7,11,4,3,11] \\ [7,13,4,3,11] & \rightarrow & [7,13,2,3,11] \end{array}$$

## Invoer

De eerste regel bevat het aantal testgevallen. Per testgeval volgt er één regel bestaande uit door één spatie gescheiden positieve gehele getallen. Het eerste getal $N$ geeft aan dat er nog $N$ getallen $K_{1,\ldots,N}$ volgen. De $K_i$ waarden stellen een speltoestand voor.

VOORBEELDINVOER

```
3
1 1
1 5
3 4 4 4
```

## Uitvoer

Per testgeval moet je alle winnende zetten opsommen. Elke winnende zet voer je uit op een aparte regel. Elke regel bevat de index van het testgeval (beginnend bij 1), gevolgd door één spatie, gevolgd door de speltoestandwaarden gescheiden door één spatie. Indien er geen winnende zetten zijn, moet je `HOPELOOS` afdrukken. Indien er meerdere zetten mogelijk zijn, moeten ze lexicografisch geordend worden: degene met het kleinste $K_1$ komt eerst, en bij gelijke $K_1$ die met de kleinste $K_2$, etc.

VOORBEELDUITVOER

```
1 HOPELOOS
2 1
3 0 4 4
3 4 0 4
3 4 4 0
```