Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines

Índice general

Hoja 1

Ejercicio 5

Sea $c_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : i \in \{1, \dots, n\}$. Como referencia $\mathcal{R}_c = \{(0, \dots, 0), c_1, \dots, c_n\}$ y $c_0 := (0, \dots, 0)$.

Definimos $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$, como $f(c_i) = c_i, \ \forall i$ y $f(0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k, \ a_1, \dots, a_n \in K$.

Dado $x \in \mathbb{A}^n_k, \ \exists x_1, \dots, x_n \in K : x = c_0 + x_1 \overrightarrow{c_0 c_1} + \dots + x_n \overrightarrow{c_0 c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{c_0 c_i}\right) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0 c_i}\right) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \dots, 0) + \overrightarrow{c_0 c_i}, \ c_i = f(c_i) = f(0, \dots, 0) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0 c_i}\right) = (a_1, \dots, a_n) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0 c_i}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0 c_i}\right) = c_i - (a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) = (a_1, \dots, a_n) + x_1 (1 - a_1, \dots, -a_n) + \dots +$$

$$+ x_n (-a_1, \dots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1 x_1 - \dots - a_1 x_n, \dots, a_n - a_n x_1 - \dots - a_n x_n + x_n) =$$

$$= (a_1 (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_1, \dots, a_n (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_n)$$

Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}^n_k.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}^2_k$$
$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}^2_k.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1:0:1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 8

Recta que pasa por $(1:-1:-1), (2:1:-2)$ en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos $(3:0:3)$ y $(2:1:-1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3:9:3) = (-1:3:1) \in \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 9

Construimos la recta L que pasa por A y C:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que $B \notin L$ ya que $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow$ <u>NO</u> están alineados.

Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1:-1:2) \\ (3:2:-1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\},\ L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \to (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_1 \cap L_2$.

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\},\ L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \to (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_3 \cap L_4$.

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección $(-3 : 7 : 5)\,,\ (0 : -1 : 2)$:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0\,(X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1\,(3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos $(4, 5)$ en (t_0, t_1).

Ejercicio 12

a) $Y = X^2 - X + 2$.

$$X_0^2 \left[\left(\frac{X_1}{X_0} \right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2 \right] = 0 \to X_1^2 - X_1X_0 - X_2X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b) $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \to^{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito: $(0 : 1 : -1)\,,\ (0 : 1 : 1)$.

c) $X^2 + XY + Y^2 = 1$

Homogeneizamos: $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$

Buscamos soluciones en $\mathbb{R}$.

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow (0:0:0) \notin \mathbb{P}_k^2$$

por lo que no es punto del infinito.

Buscamos soluciones en $\mathbb{C}$:

$$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} + 1 + \frac{X_2}{X_1} = 0 \Rightarrow s + 1 + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow\Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} X_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(0 : \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \\ \left(0 : \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \end{cases} \quad \text{Puntos en el infinito.}$$

d) $Y = X^3$

Homogeneizamos: $X_0^2 X_1 = X_1^3$

Puntos en el infinito $\Rightarrow X_0 = 0$

$$\Rightarrow X_1^3 = 0, X_2 \text{ libre} \Rightarrow \text{Tomamos } X_2 = 1$$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

e) $Y^2 = X^3$

Homogeneizamos: $X_0 X_2^2 = X_1^3$

Punto en el infinito: $X_0 = 0 \Rightarrow X_1^3 = 0$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

Esta curva es la misma que la anterior en el proyectivo.