

Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines

Índice general

1. Hoja 1	5
1.1. Ejercicio 5	5
1.2. Ejercicio 7	5
1.3. Ejercicio 8	6
1.4. Ejercicio 9	6
1.5. Ejercicio 10	6
1.6. Ejercicio 11	7
1.7. Ejercicio 12	7
2. Hoja 2	9
2.1. Ejercicio 1	9
2.2. Ejercicio 2	9
2.3. Ejercicio 3	10
2.4. Ejercicio 5	11
2.5. Ejercicio 7	11
2.6. Ejercicio 8	12
2.7. Ejercicio 9	12
2.8. Ejercicio 10	13
2.9. Ejercicio 11	13
2.10. Ejercicio 12	14
2.11. Ejercicio 14	15
3. Hoja 3	17
3.1. Ejercicio 1	17
3.2. Ejercicio 2	17
3.3. Ejercicio 3	19

3.4. Ejercicio 7	19
3.5. Ejercicio 9	20
3.6. Ejercicio 10	21
3.7. Ejercicio 11	21
3.8. Ejercicio 15	22
4. Hoja 4	25
4.1. Ejercicio 1	25
4.2. Ejercicio 2	25
4.3. Ejercicio 4	26
4.4. Ejercicio 9	27
4.5. Ejercicio 11	27
4.6. Ejercicio 12	28
4.7. Ejercicio 13	28
4.8. Ejercicio 14	29
4.9. Ejercicio 17	29
4.10. Ejercicio 18	29
4.11. Ejercicio 19	30

Hoja 1

Ejercicio 5

Sea $c_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : i \in \{1, \dots, n\}$. Como referencia $\mathcal{R}_c = \{(0, \dots, 0), c_1, \dots, c_n\}$ y $c_0 := (0, \dots, 0)$.

Definimos $f : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$, como $f(c_i) = c_i, \forall i$ y $f(0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n, a_1, \dots, a_n \in K$.

Dado $x \in \mathbb{A}_k^n, \exists x_1, \dots, x_n \in K : x = c_0 + x_1 \overrightarrow{c_0 c_1} + \dots + x_n \overrightarrow{c_0 c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f} \left(\sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{c_0 c_i} \right) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \dots, 0) + \overrightarrow{c_0 c_i}, c_i = f(c_i) = f(0, \dots, 0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (a_1, \dots, a_n) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = c_i - (a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) = (a_1, \dots, a_n) + x_1 (1 - a_1, \dots, -a_n) + \dots +$$

$$+ x_n (-a_1, \dots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1 x_1 - \dots - a_1 x_n, \dots, a_n - a_n x_1 - \dots - a_n x_n + x_n) =$$

$$= (a_1 (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_1, \dots, a_n (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_n)$$

Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}_k^n.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}_k^2$$

$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}_k^2.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 8

Recta que pasa por $(1 : -1 : -1)$, $(2 : 1 : -2)$ en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos $(3 : 0 : 3)$ y $(2 : 1 : -1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3 : 9 : 3) = (-1 : 3 : 1) \in \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 9

Construimos la recta L que pasa por A y C :

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que $B \notin L$ ya que $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{NO}}$ están alineados.

Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 : -1 : 2) \\ (3 : 2 : -1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\}, \quad L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \rightarrow (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_1 \cap L_2$.

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\}, \quad L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \rightarrow (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_3 \cap L_4$.

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección $(-3 : 7 : 5), (0 : -1 : 2)$:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0 (X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1 (3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos $(4, 5)$ en (t_0, t_1) .

Ejercicio 12

a) $Y = X^2 - X + 2$.

$$X_0^2 \left[\left(\frac{X_1}{X_0} \right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2 \right] = 0 \rightarrow X_1^2 - X_1 X_0 - X_2 X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b) $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \xrightarrow{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito: $(0 : 1 : -1), (0 : 1 : 1)$.

c) $X^2 + XY + Y^2 = 1$

Homogeneizamos: $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$

Buscamos soluciones en \mathbb{R} .

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 0) \notin \mathbb{P}_k^2$$

por lo que no es punto del infinito.

Buscamos soluciones en \mathbb{C} :

$$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} + 1 + \frac{X_2}{X_1} = 0 \Rightarrow s + 1 + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} X_2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 : \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} : 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 : \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} : 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Puntos en el infinito.}$$

d) $Y = X^3$

Homogeneizamos: $X_0^2X_1 = X_1^3$

Puntos en el infinito $\Rightarrow X_0 = 0$

$$\Rightarrow X_1^3 = 0, X_2 \text{ libre} \Rightarrow \text{Tomamos } X_2 = 1$$

$$(0 : 0 : 1) \text{ punto en el infinito.}$$

e) $Y^2 = X^3$

Homogeneizamos: $X_0X_2^2 = X_1^3$

Punto en el infinito: $X_0 = 0 \Rightarrow X_1^3 = 0$

$$(0 : 0 : 1) \text{ punto en el infinito.}$$

Esta curva es la misma que la anterior en el proyectivo.

Hoja 2

Ejercicio 1

$$\begin{cases} X_0 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 - X_2 - X_3 + \lambda(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0$$

contiene a la recta dada.

Si pasa por $(0 : 1 : 1 : 0) \Rightarrow 0 - 1 - 0 + \lambda(1 - 2 \cdot 1 + 0) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

El plano buscado es $X_0 - X_2 - X_3 - (X_1 - 2X_2 + X_3) = \dots = X_0 - X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$.

Ejercicio 2

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots = X_0 + X_1 - X_2 = 0.$$

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \dots = -X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

Fijamos un valor tal que $X_3 = 1$, $X_0 = \lambda \Rightarrow$

$$\left(\lambda : \frac{-\lambda + 3}{2} : \frac{\lambda + 3}{2} : 1 \right)$$

Damos valores a λ :

- Si $\lambda = 0$:

$$\left(0 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1 \right)$$

- Si $\lambda = 1$:

$$(1 : 1 : 2 : 1)$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

$$(t_0, t_1) \mapsto \left(\underbrace{t_0 \cdot 0 + t_1 \cdot 1}_{=x_0} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 1}_{=x_1} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 2}_{=x_2} : \underbrace{t_0 + t_1}_{=x_3} \right).$$

Ejercicio 3

Disclaimer: No he entendido nada, posiblemente este mal copiado.

Tomamos \mathbb{P}_k^3 como k^4 / \sim .

Identificamos $r \rightarrow \pi \subset K^4 \{v_0, v_1\}$ y $r' \rightarrow \{v_2, v_3\}$ que será una base porque si no fuesen linealmente independientes (las siguientes ecuaciones) el determinante de los coeficientes sería 0:

$$r : \begin{cases} \sum a_i x_i = 0 \\ \sum b_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} \sum c_i x_i = 0 \\ \sum d_i x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_j? \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos?

$$\hat{p} = \underbrace{\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1}_{\omega_0} + \underbrace{\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}_{\omega_1}$$

$$l = \alpha(\omega_0, \omega_1) \Rightarrow \hat{p} = \omega_0 + \omega_1$$

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_0 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_0 = (1, 0, 1, 0) \\ v_1 = (1, 0, 0, -1) \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 - X_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2 = (1, 0, 0, 1) \\ v_3 = (1, 1, 0, 1) \end{cases}$$

Que son base.

$$p = \left[\underbrace{(0, 1, -1, 1)}_{\vec{p}} \right]; \quad \vec{p} = \underbrace{-v_0}_{\in r} + \underbrace{v_3}_{\in r'}$$

$$l = \alpha(v_0, v_3) \rightarrow l = \{\lambda(v_0) + \mu v_3 \mid (\lambda, \mu) \in k^2\} \rightarrow$$

Vamos de k^4 al proyectivo:

$$\{(\lambda + \mu : \mu : \lambda : \mu) \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_k^1\}$$

Parametrización de la recta.

Geométicamente:

La recta solución l debe estar contenida en el plano π formado por la recta r y el punto P . Este plano se cortará con p' en otro punto que también estará contenido en l por lo que tenemos dos puntos, distintos, contenidos en la recta $\Rightarrow l = \langle p, p' \rangle \subset \pi$.

Ejercicio 5

Recordamos que $\mathbb{P}_k^2 = \mathbb{A}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^1$ y $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{(0:1)\}$. Tenemos que $|\mathbb{A}_k^2| = p$ y $|\mathbb{A}_k^1| = p^2 \Rightarrow$

$$|\mathbb{P}_k^2| = p^2 + p + 1$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^2 &\xrightarrow{\Omega} \mathbb{P}_k^{2*} \\ \Lambda &\mapsto \Omega(\Lambda). \end{aligned}$$

Con Ω biyección y $\Omega(\mathbb{P}_k^2) = \mathbb{P}_k^{2*}$

(Ejemplo 2,11)

$$\bar{L} \subset \mathbb{P}_k^2 \quad \bar{L} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$$

($L \subset \mathbb{A}_k^2$) Parametrización de L , biyección \Rightarrow en cada recta $\bar{L} \subset \mathbb{P}_k^2$ hay $p+1$ puntos.

Otra cosa,

$$U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$$

- $X_0 = 0 \Rightarrow U_1X_1 + U_2X_2 = 0$ (U_1 ó $U_2 \neq 0$).

$$X_2 = -\frac{U_1}{U_2}X_1 \Rightarrow \left(0 : X_1 : -\frac{u_1}{u_2}X_1\right), \left(0 : 1 : -\frac{U_1}{U_2}\right) \in \mathbb{P}_k^2$$

- $X_0 \neq 0$ ($X_0 = 1$) $\Rightarrow U_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$:

$$X_2 = -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_2} \Rightarrow \left(1 : X_1 : -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_1}\right)$$

Ejercicio 7

(Hemos cambiado C y D)

L_∞ será aquella formada por los dos puntos en el infinito que surgen de la intersección de las rectas paralelas del paralelogramo.

Tenemos $A = (1:0:1)$, $B = (1:-1:0)$, $C = (0:2:1)$, $D = (0:0:1)$.

$$\begin{cases} \overline{AB} &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = X_1 - X_2 + X_0 = 0 \\ \overline{CD} &= 2X_0 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0 \end{cases}.$$

Lo que nos da:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & m_2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow P = (0:1:1)$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} \overline{AC} &= 2X_2 - 2X_0 - X_1 = 0 \\ \overline{BD} &= X_0 + X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P' = (2:-2:1).$$

En consiguiente:

$$L_\infty = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3X_0 + 2X_1 - 2X_2 = 0$$

Ejercicio 8

Ni idea de este.

Sea

$$\overline{f} : \mathbb{A}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}^3}$$

(Foto composición) $f \circ L_2 = L_3 \circ \overline{f}$.

$$L_2(x, y) = (1 : x : y)$$

$$L_3(x, y, z) = (1 : x : y : z).$$

Por tanto,

$$\blacksquare f(1 : 1 : 0) = (1 : 1 : 0 : 2)$$

$$\blacksquare f(1 : 1 : 2) = (1 : 0 : 1 : 1)$$

$$\blacksquare f(1 : 2 : 0) = (1 : 2 : 0 : 0)$$

$$\blacksquare \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

$$\blacksquare \overrightarrow{f}(0, 2) = (-1, 1, -1) \Rightarrow f$$

$$\blacksquare \overrightarrow{f}(1, 0) = (1, 0, -2)$$

Por tanto?

$$M(\overline{f}, R, R_{CAR^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Como $f(0) = (0, 0, 4) \Rightarrow$

$$M(f, R_{CAR^2}, R_{CAR^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Tenemos:

$$X^2 + Y^2 = 1 \xrightarrow{f} X^2 + Y^2 - 2X - 2Y = 2$$

$$X^2 - 2X + 1 + Y^2 - 2Y + 1 = 4$$

$$(X - 1)^2 + (Y - 1)^2 = 4.$$

Por tanto, $f = (\text{translación de } (1, 1)) \circ (\text{homotecia de razón } 2)$.

Es decir,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que, A matriz de la aplicación asociada \overrightarrow{f} .

$$A^t A = \lambda I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

Tenemos $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 0 : 1)$, $R = (1 : 0 : 1)$, $\alpha = x_0 + x_1 + x_2 = 0$

Por tanto,

$$\text{Recta } PQ = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Dibujo

//Corte PQ con $\alpha_\infty = \mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_2$. PQ por $S = x_0 + x_2 = 0$.

Corte PS con $\alpha_\infty = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0 = 0$

$a \Rightarrow //PS$ por $Q : x_0 + x_1 = 0$. $S' : \text{corte } a \text{ y } PS : \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_0 = g(s)$.

$SR : x_0 - x_2 = 0$ corte SR con $\alpha_\infty : \mathcal{U}_0 - 2\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$

$b \Rightarrow //SR$ por $S' : 3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$. Corte b y $PQ : 3\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_0 \rightarrow R' = (-1 : 0 : 3)$.

Ejercicio 11

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la b.c de k^3 y $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ la de k^4 .

- Dado $\varphi : \mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^3$ aplicación proyectiva tal que:

$$\varphi(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0 : 0)$$

$$\varphi(0 : 1 : 0) = (0 : 1 : 0 : 0)$$

$$\varphi(0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 1 : 0)$$

.

entonces $\exists f : k^3 \dashrightarrow k^4$ tal que:

$$\varphi(1 : 0 : 0) = [f(e_1)] = [\lambda_1 c_1]$$

$$\varphi(0 : 1 : 0) = [f(e_2)] = [\lambda_2 c_2]$$

$$\varphi(0 : 0 : 1) = [f(e_3)] = [\lambda_3 c_3]$$

.

entonces:

$$f\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i\right) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \neq \lambda c_4, \quad \lambda \neq 0$$

ya que es base, luego $\varphi(1 : 1 : 1) \neq (0 : 0 : 0 : 1)$.

- Sea $Q(\varphi) := \varphi$ es una proyectividad de \mathbb{P}_k^2 y \mathbb{P}_k^3 .

$$\begin{aligned} P(\varphi) &:= Q(\varphi) \wedge \varphi(1 : 0 : 0) = \\ &= (1 : 0) \wedge \varphi(0 : 1 : 0) = (0 : 1) \wedge \varphi(0 : 0 : 1) = (1 : 1) \wedge \varphi(1 : 1 : 1) = (1 : 1). \end{aligned}$$

Sea $\Omega = \{\varphi : P(\varphi)\}$.

Definimos $f : K \setminus \{0, 1, -1\} \rightarrow \Omega$ tal que f_z tiene aplicación lineal asociada $h_z : k^3 \rightarrow k^2$ tal que

$$\begin{aligned} h_z(e_1) &= (-1 + z)c_1 \\ h_z(e_2) &= (-1 - z)c_2 \\ h_z(e_3) &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} f_z(1 : 0 : 0) &= [(-1 + z)c_1] = (1 : 0) \\ f_z(0 : 1 : 0) &= [(-1 - z)c_2] = (0 : 1) \\ f_z(0 : 0 : 1) &= [c_1 + c_2] = (1 : 1) \\ f_z(1 : 1 : 1) &= [ze_1 - ze_2] = (1 : -1) \end{aligned}$$

luego f está bien definida.

$$f_z(1 : 0 : e) = [ze_1 + e_2] = (z : 1)$$

luego f es inyectiva.

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda_1 e_1 \\ f(e_2) &= \lambda_2 e_2 \\ f(e_3) &= \lambda_3 (e_1 + e_2) \\ f\left(\sum e_i\right) &= \lambda_4 (e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Ejercicio 12

Tenemos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_k^1 &\rightarrow \mathbb{P}_k^3 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (t_0 - t_1 : t_1 + 2t_0 : 2t_1 - t_0 : t_0 + t_1). \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{f} : K^2 &\rightarrow K^4 \\ (v_0, v_1) &\mapsto (v_0 - v_1, v_1 + 2v_0, 2v_1 - v_0, v_0 + v_1). \end{aligned}$$

Veamos que $\ker(\vec{f}) = \{0\}$.

$$\begin{cases} v_0 - v_1 = 0 \Rightarrow v_0 = v_1 \\ v_1 + 2v_0 = 0 \\ 2v_1 - v_0 = 0 \\ v_0 + v_1 = 0 \Rightarrow v_0 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \ker(\vec{f}) = 0 \Rightarrow$$

f es inyectiva.

Por otro lado,

$$f(\mathbb{P}^1) \sim \vec{f}(K^2)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \vec{f}(K^2) &= (v_0 - v_1, v_1 + 2v_0, 2v_1 - v_0, v_0 + v_1) = (1, 2, -1, 1)v_0 + (-1, 1, 2, 1)v_1 = \\ &= \langle (1, 2, -1, 1), (-1, 1, 2, 1) \rangle \Rightarrow \\ f(\mathbb{P}_k^1) &= \langle (1 : 2 : -1 : 1), (-1 : 1 : 2 : 1) \rangle. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 &\Leftrightarrow \\ \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow 5X_0 - X_1 + 3X_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow X_0 - 2X_1 + 3X_3 = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 14

Dada una referencia \mathcal{R} de \mathbb{A} la aplicación:

$$\mathbb{A} \rightarrow \{X_0 + \dots + X_n = 1\} \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$$

manda cada punto de \mathbb{A} a sus coordenadas baricéntricas respecto de \mathcal{R} es una afinidad.

($p = p_0 + \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}$). Se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sum \lambda \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hoja 3

Ejercicio 1

Tenemos $r := \{X_0 - X_1 + X_2 = 0\}$:

$$\begin{cases} X_0 = a_0 t_0 + a_1 t_1 \\ X_1 = b_0 t_0 + b_1 t_1 \\ X_2 = c_0 t_0 + c_1 t_1 \end{cases}$$

Cumpliendo:

$$\begin{cases} (1 : 0) \mapsto (2 : 3 : 1) \\ (0 : 1) \mapsto (3 : 5 : 2) \\ (1 : 1) \mapsto (0 : 1 : 1) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = a_0 \\ 3\lambda_1 = b_0 \\ \lambda_1 = c_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 = a_1 \\ 5\lambda_2 = b_1 \\ 2\lambda_2 = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_0 + a_1 \\ \lambda_3 = b_0 + b_1 \\ \lambda = c_0 + c_1 \end{cases}$$

Poniéndolo como matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

con lo que nos queda que $\lambda = (1, -2/3, -1/3)$ y

$$\begin{cases} a = (-6, 6) \\ b = (-9, 10) \\ c = (-4, 4) \end{cases}$$

Ejercicio 2

Primero vamos a ver que $\mathcal{R} = \{(1 : 1 : 0), (2 : 3 : 1), (1 : 0 : -1)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(1 : 0 : 0), (1 : 1 : 1), (1 : -1 : -1)\}$ son referencias proyectivas de las rectas $l : X_0 - X_1 + X_2 = 0$ y $l' : X_1 - X_2 = 0$, respectivamente.

- \mathcal{R} es referencia de l :

Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(2, 3, 1)$ son l.i. Buscamos ahora escalares no nulos $\lambda_0, \lambda_1, \gamma$ tales que:

$$\lambda_0 (1, 1, 0) + \lambda_1 (2, 3, 1) = \gamma (1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 + 2\lambda_1 = \gamma \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 3\gamma \\ \lambda_1 = -\gamma \end{cases}$$

Tomando $\gamma = 1$ tenemos que $\lambda_0 = 3, \lambda_1 = -1$, así que:

$$\mathcal{B} = \{(3, 3, 0), (-2, -3, -1)\}$$

es una base asociada de \mathcal{R} .

■ \mathcal{R}' es referencia de l' :

Los vectores $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ son l.i. Buscamos ahora escalares no nulos β_0, β_1, σ tales que:

$$\beta_0 (1, 0, 0) + \beta_1 (1, 1, 1) = \sigma (1, -1, -1)$$

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = \sigma \\ \beta_1 = -\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 2\sigma \\ \beta_1 = -\sigma \end{cases}$$

Tomando $\sigma = 1$ tenemos que $\beta = 2, \beta_1 = -1$, así que:

$$\mathcal{B}' = \{(2, 0, 0), (-1, -1, -1)\}$$

es una base asociada de \mathcal{R}' .

Ahora con coordenadas en $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$, la aplicación $f : l \rightarrow l'$ es tal que:

$$\begin{aligned} f(1 : 0)_{\mathcal{R}} &= f(1 : 1 : 0) = (1 : 0 : 0) = (1 : 0)_{\mathcal{R}'} \\ f(0 : 1)_{\mathcal{R}} &= f(2 : 3 : 1) = (1 : 1 : 1) = (0 : 1)_{\mathcal{R}'} \\ f(1 : 1)_{\mathcal{R}} &= f(1 : 0 : -1) = (1 : -1 : -1) = (1 : 1)_{\mathcal{R}'} \end{aligned}$$

Es decir, que:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho \neq 0$$

Para hallar las ecuaciones de f parametrizamos:

$$\begin{aligned} l &= (1 : 1 : 0) + (2 : 3 : 1) = (3 : 3 : 0) + (-2 : -3 : -1) = \\ &= \{(3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) ; (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_k^1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= (1 : 0 : 0) + (1 : 1 : 1) = (2 : 0 : 0) + (-1 : -1 : -1) = \\ &= \{(2t_0 - t_1 : -t_1 : -t_1) ; (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_k^1\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) = f(t_0 : t_1)_{\mathcal{R}} = (t_0 : t_1)_{\mathcal{R}'} = (2t_0 - t_1 : -t_0 - t_1)$$

Si denotamos:

$$\begin{aligned} (y_0 : y_1 : y_2) &= (3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) \\ (y'_0 : y'_1 : y'_2) &= (2t_0 - t_1 : -t_1 : -t_1). \end{aligned}$$

Y tenemos finalmente:

$$Y'_0 = \rho(2/3Y_1 - Y_2), Y'_1 = \rho Y_2, Y'_2 = \rho Y_2, \rho \neq 0$$

Ejercicio 3

Sea $L_\infty = \{X_1 - X_2 = 0\}$. Tenemos la homotecia de centro $(1 : 0 : -1) = P_1$:

$$\begin{aligned} P_2 &= (1 : -1 : 0) \mapsto (0 : 1 : -1) = P_3 \\ \alpha &= \frac{\|1/2(0, 1, -1) - (1, 0, -1)\|}{\|(-1, 1, 0) - (1, 0, -1)\|} = \frac{1}{2} \\ \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\} &= P \\ M(f, \mathcal{R}_c, \mathcal{R}_c) &= M(\vec{f}, B_c, B, c) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Tenemos como referencia proyectiva, $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

Veamos que p_2, p_1 , son l.i:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow l.i$$

Tomamos ahora, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda_0(1, 1, 0) + \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 2) &= \lambda(1, 0, 1) \\ \begin{cases} \lambda_0 = \lambda \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = \lambda \end{cases} &\Rightarrow_{\lambda=1} \begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_2 = -1/2 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow_{\lambda=2} \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \\ (2, 2, 0) + (0, -1, 0) + (0, -1, -2) &= (2, 0, -2) \end{aligned}$$

Con $B = \{(2, 2, 0), (0, -1, 0), (0, -1, -2)\}$.

La matriz será:

$$\begin{aligned} M(B, B_c) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= M(B, B_c) \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= M(B_c, B) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ M(B_c, B) &= M^{-1}(B, B_c) \\ M^{-1}(B, B_c) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $(1 : 1 : 2)$ tendríamos:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 : 1 : -2)_{\mathcal{R}_c} = (1 : 2 : -2)_{\mathcal{R}}$$

y para $(-1 : 1 : 1)$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1 : 1 : 1)_{\mathcal{R}_c} = (-1 : -1 : 1)_{\mathcal{R}}$$

Ejercicio 9

Tenemos dos referencias:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(1 : -1 : 0), (0 : 2 : -1), (1 : -1 : 1), (0 : -1 : 1)\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(1 : 0 : 1), (1 : 1 : 1), (0 : 1 : 1), (2 : 2 : 3)\}. \end{aligned}$$

que denominamos por p_i y p'_i , respectivamente.

En \mathcal{R}_1

$$\begin{aligned} (0, -1, 1) &= \lambda_0 (1, -1, 0) + \lambda_1 (0, 2, -1) + \lambda_2 (1, -1, 1) \\ &\begin{cases} \lambda_0 = -1/2 \\ \lambda_1 = -1/2 \\ \lambda_2 = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

En \mathcal{R}_2 vemos que: $v' + v'_1 + v'_2 = v'_3$ con $[v_i] = p_i$ y $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2 = 1$.

Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{-1/2v_0, -1/2v_1, 1/2v_2\} \\ B_2 &= \{v'_0, v'_1, v'_2\}. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$A = M_{B_1, B_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $L := X_2 - 2X_0 - X_1 = 0$. Tomamos 2 puntos: $(0 : 1 : 1)$, $(-1 : 2 : 0)$ y los pasamos a la otra base:

Aplicando A :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} \\ A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} \end{aligned}$$

En definitiva, vemos la recta que forman en esta nueva base:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{X_0 + X_1 - X_2 = 0}$$

Ejercicio 10

Debemos pasar de:

$$\begin{cases} L_1 : X_2 = X_0 + X_1 \rightarrow L_1^* : (1 : 1 : -1) \\ L_2 : X_0 = X_2 \rightarrow L_2^* : (1 : 0 : -1) \\ L_3 : X_1 = 2X_0 \rightarrow L_3^* : (2 : -1 : 0) \end{cases}$$

a:

$$\begin{cases} L_1 : X'_0 = 0 \rightarrow L_1^* : (1 : 0 : 0) \\ L_2 : X'_1 = 0 \rightarrow L_2^* : (0 : 1 : 0) \\ L_3 : X'_2 = 0 \rightarrow L_3^* : (0 : 0 : 1) \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Con $B^*, \mathcal{R}^*; \{\alpha(1, 1, -1), \beta(1, 0, -1), \gamma(2, -1, 0)\}$.

La matriz de cambio de base:

$$M(B^*, B_c^*) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2\gamma \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}; M(x'_0 x'_1 x'_2) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tomando $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Tenemos también que:

$$M(B^*, B_c^*)^t M(B, B_c) = I$$

Por tanto,

$$M(B, B_c) = \left(M(B^*, B_c^*)^t \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Con lo que nos queda que: $\mathcal{R} = \{(1 : 2 : 1), (-1 : -2 : -3), (1 : 0 : 1), (1 : 0 : -1)\}$.

Ejercicio 11

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_k^2 &\rightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ (1 : -1 : 0) &\mapsto (1 : 0 : 1) \\ (0 : 2 : -1) &\mapsto (1 : 1 : 1) \\ (1 : -1 : 1) &\mapsto (0 : 1 : 1) \\ (0 : -1 : 1) &\mapsto (2 : 2 : 3). \end{aligned}$$

Tomamos como referencia proyectiva: $\mathcal{R} = \{(1 : -1 : 0), (0 : 2 : -1), (0 : -1 : 1), (1 : -1 : 1)\}$. La base asociada será, $B = \{(1, -1, 0), (0, 2, -1), (0, -2, 2)\}$.

Debemos comprobar que es referencia haciendo determinantes.

Tomamos ahora otro con las imágenes: $\mathcal{R}' = \{(1 : 0 : 1), (1 : 1 : 1), (2 : 2 : 3), (0 : 1 : 1)\}$. La base asociada será: $B' = \{(-1, 0, -1), (-1, -1, -1), (2, 2, 3)\}$.

Tendremos ahora:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \vec{f}(e_1) - \vec{f}(e_2) = \vec{f}(e_1 - e_2) = -e_1 - e_3 \\ 2\vec{f}(e_2) - \vec{f}(e_3) = \vec{f}(2e_2 - e_3) = -e_1 - e_2 - e_3 \\ -2\vec{f}(e_2) + 2\vec{f}(e_3) = \vec{f}(-2e_2 + 2e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$\begin{cases} \vec{f}(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ \vec{f}(e_2) = \frac{1}{2}e_3 \\ \vec{f}(e_1) = -e_1 - \frac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

Tendremos ahora:

$$M_{B_c B_c}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{R_c R_c}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$\boxed{f(X_0 : X_1 : X_2) = (-2X_0 + 2X_2 : 2X_2 : -X_0 + X_1 + 4X_2)}$$

Ejercicio 15

Sean:

$$\begin{aligned} \Pi_0 : X_0 - X_1 = 0 &\rightarrow (1 : -1 : 0 : 0) \\ \Pi_1 : X_1 - X_2 = 0 &\rightarrow (0 : 1 : -1 : 0) \\ \Pi_2 : X_2 - X_3 = 0 &\rightarrow (0 : 0 : 1 : -1) \\ \Pi_3 : X_0 + X_3 = 0 &\rightarrow (1 : 0 : 0 : 1) \\ \Pi_4 : X_0 = 0 &\rightarrow (1 : 0 : 0 : 0). \end{aligned}$$

La referencia será los primeros puntos con punto fijo el último.

$$\alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1, -1) + \mu(1, 0, 0, 1) = \omega(1, 0, 0, 0)$$

Resolviendo nos queda que $\alpha = \beta = \lambda = \mu$ y $\alpha = \omega/2 \Rightarrow \omega=1$ $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 1/2$.

Debemos ver también que son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2 \neq 0$$

Esta referencia la denotaremos como \mathcal{R}^* .

Por otro lado,

$$L : \begin{cases} X_0 - X_2 = 0 \rightarrow (1 : 0 : -1 : 0) \\ X_1 - X_3 = 0 \rightarrow (0 : 1 : 0 : -1) \end{cases}$$

Entonces tenemos que:

$$L_{\mathcal{R}_c^*} = \langle \overbrace{(1 : 0 : -1 : 0)}^{\langle u_1 \rangle}, \overbrace{(0 : 1 : 0 : -1)}^{\langle u_2 \rangle} \rangle = t_0 u_1 + t_1 u_2 = (t_0 : t_1 : -t_0 : -t_1)$$

La relación entre \mathcal{R}^* y \mathcal{R}_c^* es:

$$M(\mathcal{R}^*, \mathcal{R}_c^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Invertimos } M(\mathcal{R}_c^*, \mathcal{R}^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último,

$$M(\mathcal{R}_c^*, \mathcal{R}^*) \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ -t_0 \\ -t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_0 + t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que es equivalente a:

$$L_{\mathcal{R}^*} : \begin{cases} U_1 = U_0 + U_2 \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

Otra forma sería ver directamente los puntos que salen de L como combinación lineal de los puntos de la referencia:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 : 1 : 0 : 0)_{\mathcal{R}^*} \\ u_2 &= (0 : 1 : 1 : 0)_{\mathcal{R}^*} . \end{aligned}$$

Y la solución sería la recta que forman. Funciona porque la base asociada es igual a los representantes de la referencia.

Hoja 4

Ejercicio 1

Tenemos:

$$C : aX_0^2 + bX_0X_1 + cX_0X_2 + dX_1^2 + eX_1X_2 + fX_2^2 = 0$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}(1 : 0 : 1) \in C &\Rightarrow a + c + f = 0 \\(0 : 0 : 1) \in C &\Rightarrow f = 0 \\(1 : -1 : 1) \in C &\Rightarrow a - b + c + d - e + f = 0 \\(1 : 1 : 2) \in C &\Rightarrow a + b + 2c + d + 2e - 4f = 0 \\(1 : 2 : -1) \in C &\Rightarrow a + 2b - c + 4d - 2e + f = 0.\end{aligned}$$

Lo que nos da un sistema que resolvemos y tenemos:

$$\begin{cases} e = 5 \\ d = 1 \\ b = -4 \\ a = 7 \\ c = -7 \\ f = 0 \end{cases}$$

Por lo que la ecuación final sería:

$$C : 7X_0^2 - 4X_0X_1 - 7X_0X_2 + X_1^2 + 5X_1X_2 = 0$$

Ejercicio 2

Tenemos:

$$\begin{aligned}A : X_0X_2 - X_1^2 &= 0 \\B : X_0X_1 + 2X_0X_2 - X_1^2 - X_1X_2 &= 0.\end{aligned}$$

El haz será: $t_0A + t_1B = 0, (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_k^1$.

En forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_1/2 & -t_0/2 + t_1 \\ t_1/2 & t_0 - t_1 & -t_1/2 \\ -t_0/2 & -t_1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

Imponemos que su determinante sea 0, de esta forma sera degenerada:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & t_1/2 & -t_0/2 + t_1 \\ t_1/2 & t_0 - t_1 & -t_1/2 \\ -t_0/2 & -t_1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

Por tanto,

$$2(-t_0 + 2t_1)(t_1^2 + t_0^2 - 3t_1t_0) = 0$$

Y $2A + B = 0$ y $t_0A + t_1B = 0$.

Ejercicio 4

Tenemos que $f : \mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^{3*}$ y:

$$\begin{cases} (0 : 0 : 0 : 1) & \mapsto X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 0 \leftrightarrow (0 : 1 : 2 : -4) \\ (0 : 1 : 0 : 0) & \mapsto 2X_0 + X_1 - X_3 = 0 \leftrightarrow (1 : 4 : 0 : 3) \\ X_1 = X_3 = 0 & \mapsto 2X_1 - X_2 + 2X_3 = X_0 + 4X_1 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

La recta $r := 2X_1 - X_2 + 2X_3 = X_0 + 4X_1 + 2X_3 = 0$ es la intersección de dos hiperplanos:

$$\begin{cases} H_1 : 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \\ H_2 : X_0 + 4X_1 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el espacio dual de r será:

$$\begin{aligned} r^* &= (H_1 \cap H_2)^* = H_1^* + H_2^* \\ &= \langle (0 : 2 : -1 : 2), (1 : 4 : 0 : 2) \rangle \\ &= \{(t_1 : 2t_0 + 4t_1 : -t_0 : 2t_0 + 2t_1) \mid (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_k^1\}. \end{aligned}$$

Con esto y los datos del enunciado tenemos para la correlación $f : \mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^{3*}$:

$$\begin{aligned} f(0 : 0 : 0 : 1) &= (0 : 1 : 2 : -4), \quad f(0 : 1 : 0 : 0) = (2 : 1 : 0 : -1) \\ f(1 : 0 : 0 : 0) &= (t_1 : 2t_0 + 4t_1 : -t_0 : 2t_0 + 2t_1) \\ f(0 : 0 : 1 : 0) &= (s_1 : 2s_0 + 4s_1 : -s_0 : 2s_0 + 2s_1). \end{aligned}$$

Con esto tenemos que la matriz de f respecto de la referencia canónica es (recordemos que el proyectivo los puntos son representantes de su clase):

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 2a & s_1 & 0 \\ 2t_0 + 4t_1 & a & 2s_0 + 4s_1 & b \\ -t_0 & 0 & -s_0 & 2b \\ 2t_0 + 2t_1 & -a & 2s_0 + 2s_1 & -4b \end{pmatrix}$$

Como sabemos que f es simétrica ($A = A^T$) tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 2a & s_1 & 0 \\ 2t_0 + 4t_1 & a & 2s_0 + 4s_1 & b \\ -t_0 & 0 & -s_0 & 2b \\ 2t_0 + 2t_1 & -a & 2s_0 + 2s_1 & -4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 2t_0 + 4t_1 & -t_0 & 2t_0 + 2t_1 \\ 2a & a & 0 & -a \\ s_1 & 2s_0 + 4s_1 & -s_0 & 2s_0 + 2s_1 \\ 0 & b & 2b & -4b \end{pmatrix}$$

Fijándonos en los 0's observamos que $t_1 = -t_0$ y $s_0 = -2s_1$. Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -t_0 & 2a & s_1 & 0 \\ -2t_0 & a & 0 & b \\ -t_0 & 0 & s_1 & 2b \\ 0 & -a & -2s_1 & -4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_0 & -2t_0 & -t_0 & 0 \\ 2a & a & 0 & -a \\ s_1 & 0 & s_1 & -2s_1 \\ 0 & b & 2b & -4b \end{pmatrix}$$

es decir, $a = -t_0, s_1 = -t_0, b = -a = t_0$ y:

$$A = \begin{pmatrix} -t_0 & -2t_0 & -t_0 & 0 \\ -2t_0 & -t_0 & 0 & t_0 \\ -t_0 & 0 & -2t_0 & 2t_0 \\ 0 & t_0 & 2t_0 & -4t_0 \end{pmatrix} =_{t_0 \neq 0} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

En definitiva:

$$\begin{pmatrix} U'_0 \\ U'_1 \\ U'_2 \\ U'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U'_0 = -X_0 - 2X_1 - X_2 \\ U'_1 = -2X_0 - X_1 + X_3 \\ U'_2 = -X_0 - 2X_2 + 2X_3 \\ U'_3 = X_1 + 2X_2 - 4X_3 \end{cases}.$$

Ejercicio 9

Tenemos:

$$\begin{aligned} Q_1 : X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 &= 0 \\ Q_2 : X_0^2 + 2X_0X_1 + 3X_0X_2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vemos que la segunda es degenerada:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, |A_2| = 0$$

Utilizando la proposición 4.2.3 (esto es posible que este mal):

$$A_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_0 + 2x_2 = 0 \\ 3x_0 + 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} Q_1 \\ x_0 + X_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} Q_1 \\ x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(x_2 + x_1) = 0 \\ x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

“Uniéndolas”:

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

Ejercicio 11

Las rectas tangentes en el primal serán los puntos de intersección de los duales.

Tenemos:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyas ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \dots \\ C_2 &:= \dots \end{aligned}$$

Lo hacemos parametrizando C_2^* y sustituyendo:

1. Tomo $p \in C_2^*, p = (1 : 0 : 0)$.
2. $r : X_0 = 0 \Rightarrow r = \{(0 : t_0 : t_1) : (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_k^1\}$.
3. Para cada $q = (0 : t_0 : t_1) \in r$ definimos $l_q = \langle (1 : 0 : 0), q \rangle = \{(s_0 : s_1 t_0 : s_1 t_1) : (s_0 : s_1) \in \mathbb{P}_k^2\}$.
4. Calculamos $l_q \cap C_2^*$:

$$-(s_1 t_0)^2 + 4s_1 t_1 s_0 = 0 \Rightarrow s_1 (-s_1 t_0^2 + 4s_0 t_1) = 0$$

- Si $s_1 = 0 \Rightarrow p = (1 : 0 : 0)$.
- Si $-s_1 t_0^2 + 4s_0 t_1 = 0 \Rightarrow (s_0 : s_1) = (t_0^2 : 4t_1) \Rightarrow (t_0^2 : 4t_1 t_0 : 4t_1^2)$ que es la parametrización.

Ahora solo queda sustituir la parametrización en la otra ecuación y queda:

$$8t_1^2 t_0 (3t_0 + 4t_1) = 0$$

Cada posibilidad nos da un punto de intersección. Finalmente:

$$C_1^* \cap C_2^* = \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1), (4 : -12 : 9)\}$$

Que pasamos al dual y nos da la solución.

Ejercicio 12

$$\begin{aligned} 3t_0^2 &= -2X_0 - X_1 + 2X_2 \\ 3t_0 t_1 &= X_0 - X_1 + 2X_2 \rightarrow ()^2 = (1) \cdot (2) \\ 3t_1^2 &= -X_0 + X_1 + X_2. \end{aligned}$$

Ejercicio 13

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^1 &\rightarrow \{X_0 X_2 - X_1^2 = 0\} \ni (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2) \\ (1 : 0) &\mapsto (1 : 1 : 1) \\ (0 : 1) &\mapsto (1 : -1 : 1) \\ (1 : 1) &\mapsto (1 : 0 : 0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

$$\begin{cases} X_0 = t_0^2 - t_0 t_1 \\ X_1 = t_0 t_1 - t_1^2 \\ X_2 = t_0 t_1 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} t_0 t_1 = X_2 \\ t_0^2 = X_0 + X_2 \\ t_1^2 = X_2 - X_1 \end{cases} \quad X_2^2 = (X_0 + X_2)(X_2 - X_1)$$

Ejercicio 17

Cónica Q tal que sean tangentes:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 &= 0 \\ x_0 + x_2 &= 0 \\ x_0 + x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_0 + 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

que sea tangente quiere decir que los puntos duales de los hiperplanos pertenezcan al dual de la cónica:

$$Q^* \in \underbrace{(0:0:1), (1:-1:1), (1:0:1), (1:1:2), (1:2:-1)}_{\mathbb{P}^*(V)}.$$

$$a_0 X_0^2 + a_1 X_1 X_0 + a_2 X_0 X_2 + a_3 X_1^2 + a_4 X_1 X_2 + a_5 X_2^2 = 0$$

Sustituimos los valores:

$$\begin{aligned} (0:0:1) \in Q^* &\Rightarrow a_5 = 0 \\ (1:-1:1) \in Q^* &\Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ (1:0:1) \in Q^* &\Rightarrow a_0 + a_2 + a_5 = 0 \\ (1:1:2) \in Q^* &\Rightarrow a_0 + a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + 4a_5 = 0 \\ (1:2:-1) \in Q^* &\Rightarrow a_0 + 2a_1 - a_2 + 4a_3 - 2a_4 + a_5 = 0. \end{aligned}$$

Se soluciona:

$$Q^*: -7x_0^2 + 4X_0X_1 + 7X_0X_2d - X_1^2 - 5X_1X_2 = 0$$

Si A es la matriz asociada a $Q \Rightarrow A^{-1}$ es la asociada a Q^* :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 7/2 \\ 2 & -1 & -3/2 \\ 7/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 6 \\ 35 & 49 & 42 \\ 6 & 42 & -12 \end{pmatrix}$$

Por lo que se tiene Q :

$$Q: \dots$$

Ejercicio 18

Tenemos:

$$\overline{C}: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

A su vez:

$$\overline{C} \cap \{X_0 = 0\} : \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \det = t^2 - 1$$

Que nos da los siguientes casos:

- $|t| < 1, \det < 0$, 2 puntos reales distintos.
- $|t| > 1$, 2 puntos iguales:
 - $t > 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.
 - $t < -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.
- $|t| = \pm 1$, punto doble.

Ejercicio 19

b) Tenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & \boxed{1} & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

Hipérbola

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto -2 + 2X - 2Y = 0 \Leftrightarrow X - Y = 1$$

Y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto 2 + 2X + 4Y = 0 \Leftrightarrow X + 3Y = -1 \text{ asíntota.}$$

Centro es la intersección de las asíntotas.