Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines

Índice general

Hoja 1

Ejercicio 5

Sea $c_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) : i \in \{1, \ldots, n\}$. Como referencia $\mathcal{R}_c = \{(0, \ldots, 0), c_1, \ldots, c_n\}$ y $c_0 := (0, \ldots, 0)$.

Definimos $f : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$, como $f(c_i) = c_i,\ \forall i$ y $f(0, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k,\ a_1, \ldots, a_n \in K$.

Dado $x \in \mathbb{A}^n_k,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in K : x = c_0 + x_1\overrightarrow{c_0c_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{c_0c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \ldots, 0) + \overrightarrow{c_0c_i},\ c_i = f(c_i) = f(0, \ldots, 0) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (a_1, \ldots, a_n) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = c_i - (a_1, \ldots, a_n) = (-a_1, \ldots, 1 - a_i, \ldots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i (-a_1, \ldots, 1 - a_i, \ldots, -a_n) = (a_1, \ldots, a_n) + x_1 (1 - a_1, \ldots, -a_n) + \ldots +$$

$$+ x_n (-a_1, \ldots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1x_1 - \ldots - a_1x_n, \ldots, a_n - a_nx_1 - \ldots - a_nx_n + x_n) =$$

$$= (a_1 (1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_1, \ldots, a_n (1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_n)$$

Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}^n_k.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}^2_k$$
$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}^2_k.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1:0:1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 8

Recta que pasa por $(1:-1:-1), (2:1:-2)$ en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos $(3:0:3)$ y $(2:1:-1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3:9:3) = (-1:3:1) \in \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 9

Construimos la recta L que pasa por A y C:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que $B \notin L$ ya que $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow$ <u>NO</u> están alineados.

Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1:-1:2) \\ (3:2:-1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\},\ L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \to (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_1 \cap L_2$.

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\},\ L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \to (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_3 \cap L_4$.

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección $(-3 : 7 : 5)\,,\ (0 : -1 : 2)$:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0\,(X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1\,(3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos $(4, 5)$ en (t_0, t_1).

Ejercicio 12

a) $Y = X^2 - X + 2$.

$$X_0^2\left[\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2\right] = 0 \to X_1^2 - X_1X_0 - X_2X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b) $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \to^{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito: $(0 : 1 : -1)\,,\ (0 : 1 : 1)$.

c) $X^2 + XY + Y^2 = 1$

Homogeneizamos: $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$

Buscamos soluciones en $\mathbb{R}$.

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow (0:0:0) \notin \mathbb{P}_k^2$$

por lo que no es punto del infinito.

Buscamos soluciones en $\mathbb{C}$:

$$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} + 1 + \frac{X_2}{X_1} = 0 \Rightarrow s + 1 + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow\Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} X_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(0 : \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \\ \left(0 : \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \end{cases} \quad \text{Puntos en el infinito.}$$

d) $Y = X^3$

Homogeneizamos: $X_0^2 X_1 = X_1^3$

Puntos en el infinito $\Rightarrow X_0 = 0$

$$\Rightarrow X_1^3 = 0, X_2 \text{ libre} \Rightarrow \text{Tomamos } X_2 = 1$$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

e) $Y^2 = X^3$

Homogeneizamos: $X_0 X_2^2 = X_1^3$

Punto en el infinito: $X_0 = 0 \Rightarrow X_1^3 = 0$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

Esta curva es la misma que la anterior en el proyectivo.

Hoja 2

Ejercicio 1

$$\begin{cases} X_0 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 - X_2 - X_3 + \lambda\left(X_1 - 2X_2 + X_3\right) = 0$$

contiene a la recta dada.

Si pasa por $(0:1:1:0) \Rightarrow 0 - 1 - 0 + \lambda\left(1 - 2\cdot 1 + 0\right) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

El plano buscado es $X_0 - X_2 - X_3 - \left(X_1 - 2X_2 + X_3\right) = \ldots = X_0 - X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$.

Ejercicio 2

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = X_0 + X_1 - X_2 = 0.$$

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

Fijamos un valor tal que $X_3 = 1,\ X_0 = \lambda \Rightarrow$

$$\left(\lambda : \frac{-\lambda + 3}{2} : \frac{\lambda + 3}{2} : 1\right)$$

Damos valores a λ:

- Si $\lambda = 0$:
$$\left(0 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1\right)$$
- Si $\lambda = 1$:
$$(1 : 1 : 2 : 1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}(W) \\ &(t_0, t_1) \mapsto \left(\underbrace{t_0 \cdot 0 + t_1 \cdot 1}_{=x_0} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 1}_{=x_1} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 2}_{=x_2} : \underbrace{t_0 + t_1}_{=x_3} \right). \end{aligned}$$

Ejercicio 3

<u>Disclaimer</u>: No he entendido nada, posiblemente este mal copiado.

Tomamos $\mathbb{P}^3_k$ como $k^4/\sim$.

Identificamos $r \to \pi \subset K^4$ $\{v_0, v_1\}$ y $r' \to \{v_2, v_3\}$ que será una base porque si no fuesen linealmente independientes (las siguientes ecuaciones) el determinante de los coeficientes sería 0:

$$r : \begin{cases} \sum a_i x_i = 0 \\ \sum b_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} \sum c_i x_i = 0 \\ \sum d_i x_i = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_j ? \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos?

$$\hat{p} = \underbrace{\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1}_{\omega_0} + \underbrace{\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}_{=\omega_1}$$

$$l = \alpha(\omega_0, \omega_1) \Rightarrow \hat{p} = \omega_0 + \omega_1$$

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_0 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} v_0 = (1, 0, 1, 0) \\ v_1 = (1, 0, 0, -1) \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 - X_3 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} v_2 = (1, 0, 0, 1) \\ v_3 = (1, 1, 0, 1) \end{cases}$$

Que son base.

$$p = \left[\underbrace{(0, 1, -1, 1)}_{\overrightarrow{p}} \right] ; \ \overrightarrow{p} = \underbrace{-v_0}_{\in r} + \underbrace{v_3}_{\in r'}$$

$$l = \alpha(v_0, v_3) \to l = \{\lambda(v_0) + \mu v_3 | (\lambda, \mu) \in k^2\} \to$$

Vamos de k^4 al proyectivo:

$$\{(\lambda + \mu : \mu : \lambda : \mu) \,|\, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_k\}$$

Parametrización de la recta.

<u>Geométricamente</u>:

La recta solución l debe estar contenida en el plano π formado por la recta r y el punto P. Este plano se cortará con p' en otro punto que también estará contenido en l por lo que tenemos dos puntos, distintos, contenidos en la recta $\Rightarrow l = \langle p, p' \rangle \subset \pi$.

Ejercicio 5

Recordamos que $\mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \cup \mathbb{P}^1_k$ y $\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1_k \cup \{(0:1)\}$. Tenemos que $|\mathbb{A}^2_k| = p$ y $|\mathbb{A}^2_k| = p^2 \Rightarrow$

$$|\mathbb{P}^2_k| = p^2 + p + 1$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2_k &\to^{\Omega} \mathbb{P}^{2^*}_k \\ \Lambda &\mapsto \Omega(\Lambda). \end{aligned}$$

Con Ω biyección y $\Omega\left(\mathbb{P}^2_k\right) = \mathbb{P}^{2^*}_k$

(Ejemplo 2,11)

$$\overline{L} \subset \mathbb{P}^2_k \quad \overline{L} \to \mathbb{P}^1_k$$

$(L \subset \mathbb{A}^2_k)$ Parametrización de L, biyección $\Rightarrow$ en cada recta $\overline{L} \subset \mathbb{P}^2_k$ hay $p+1$ puntos.

Otra cosa,

$$U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$$

- $X_0 = 0 \Rightarrow U_1X_1 + U_2X_2 = 0$ (U_1 ó $U_2 \neq 0$).
$$X_2 = -\frac{U_1}{U_2}X_1 \Rightarrow \left(0 : X_1 : -\frac{u_1}{u_2}X_1\right), \ \left(0 : 1 : -\frac{U_1}{U_2}\right) \in \mathbb{P}^2_k$$
- $X_0 \neq 0\,(X_0 = 1) \Rightarrow U_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$:
$$X_2 = -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_2} \Rightarrow \left(1 : X_1 : -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_1}\right)$$

Ejercicio 7

(Hemos cambiado C y D)

L_∞ será aquella formada por los dos puntos en el infinito que surgen de la intersección de las rectas paralelas del paralelogramo.

Tenemos $A = (1:0:1)\,, B = (1:-1:0)\,, C = (0:2:1)\,, D = (0:0:1)$.

$$\begin{cases} \overline{AB} &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = X_1 - X_2 + X_0 = 0 \\ \overline{CD} &= 2X_0 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0 \end{cases}.$$

Lo que nos da:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & m_2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow P = (0:1:1)$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} \overline{AC} &= 2X_2 - 2X_0 - X_1 = 0 \\ \overline{BD} &= X_0 + X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P' = (2:-2:1)\,.$$

En consiguiente:

$$L_\infty = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3X_0 + 2X_1 - 2X_2 = 0$$

Ejercicio 8

Ni idea de este.

Sea

$$\overline{f} : \mathbb{A}_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{A}_{\mathbb{R}^3}$$

(*Foto composición*) $f \circ L_2 = L_3 \circ \overline{f}$.

$$\begin{aligned} L_2(x,y) &= (1 : x : y) \\ L_3(x,y,z) &= (1 : x : y : z)\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

- $f(1:1:0) = (1:1:0:2)$
- $f(1:1:2) = (1:0:1:1)$
- $f(1:2:0) = (1:2:0:0)$
- $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{f(P)\,f(Q)}$.
- $\overrightarrow{f}(0,2) = (-1,1,-1) \Rightarrow f$
- $\overrightarrow{f}(1,0) = (1,0,-2)$

Por tanto?

$$M\left(\overline{f}, R, R_{CAR^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Como $f(0) = (0,0,4) \Rightarrow$

$$M\left(f, R_{CAR^2}, R_{CAR^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Tenemos:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 = 1 \to^f X^2 + Y^2 - 2X - 2Y &= 2 \\ X^2 - 2Y + 1 + Y^2 - 2Y + 1 &= 4 \\ (X-1)^2 + (Y-1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Por tanto, $f =$ (translacción de $(1,1)$) $\circ$ (homotecia de razón 2).

Es decir,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que, A matriz de la aplicación asociada $\overrightarrow{f}$.

$$A^t A = \lambda I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix}$$