

# Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines



# Índice general

---

<b>1. Hoja 1</b>	<b>5</b>
1.1. Ejercicio 5 . . . . .	5
1.2. Ejercicio 7 . . . . .	5
1.3. Ejercicio 8 . . . . .	6
1.4. Ejercicio 9 . . . . .	6
1.5. Ejercicio 10 . . . . .	6
1.6. Ejercicio 11 . . . . .	7
1.7. Ejercicio 12 . . . . .	7
<b>2. Hoja 2</b>	<b>9</b>
2.1. Ejercicio 1 . . . . .	9
2.2. Ejercicio 2 . . . . .	9
2.3. Ejercicio 3 . . . . .	10



# Hoja 1

---

## Ejercicio 5

Sea  $c_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : i \in \{1, \dots, n\}$ . Como referencia  $\mathcal{R}_c = \{(0, \dots, 0), c_1, \dots, c_n\}$  y  $c_0 := (0, \dots, 0)$ .

Definimos  $f : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ , como  $f(c_i) = c_i, \forall i$  y  $f(0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n, a_1, \dots, a_n \in K$ .

Dado  $x \in \mathbb{A}_k^n, \exists x_1, \dots, x_n \in K : x = c_0 + x_1 \overrightarrow{c_0 c_1} + \dots + x_n \overrightarrow{c_0 c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f} \left( \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{c_0 c_i} \right) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \dots, 0) + \overrightarrow{c_0 c_i}, c_i = f(c_i) = f(0, \dots, 0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (a_1, \dots, a_n) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = c_i - (a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) = (a_1, \dots, a_n) + x_1 (1 - a_1, \dots, -a_n) + \dots +$$

$$+ x_n (-a_1, \dots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1 x_1 - \dots - a_1 x_n, \dots, a_n - a_n x_1 - \dots - a_n x_n + x_n) =$$

$$= (a_1 (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_1, \dots, a_n (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_n)$$

## Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}_k^n.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}_k^2$$

$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}_k^2.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

## Ejercicio 8

Recta que pasa por  $(1 : -1 : -1)$ ,  $(2 : 1 : -2)$  en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con  $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$ . Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos  $(3 : 0 : 3)$  y  $(2 : 1 : -1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3 : 9 : 3) = (-1 : 3 : 1) \in \mathbb{P}_k^2$$

## Ejercicio 9

Construimos la recta  $L$  que pasa por  $A$  y  $C$ :

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que  $B \notin L$  ya que  $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{NO}}$  están alineados.

## Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 : -1 : 2) \\ (3 : 2 : -1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

## Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\}, \quad L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \rightarrow (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección  $L_1 \cap L_2$ .

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\}, \quad L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \rightarrow (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección  $L_3 \cap L_4$ .

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección  $(-3 : 7 : 5)$ ,  $(0 : -1 : 2)$ :

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0 (X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1 (3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos  $(4, 5)$  en  $(t_0, t_1)$ .

## Ejercicio 12

a)  $Y = X^2 - X + 2$ .

$$X_0^2 \left[ \left( \frac{X_1}{X_0} \right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2 \right] = 0 \rightarrow X_1^2 - X_1X_0 - X_2X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b)  $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \xrightarrow{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito:  $(0 : 1 : -1)$ ,  $(0 : 1 : 1)$ .

c)  $X^2 + XY + Y^2 = 1$

Homogeneizamos:  $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$

Buscamos soluciones en  $\mathbb{R}$ .

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 0) \notin \mathbb{P}_k^2$$

por lo que no es punto del infinito.

Buscamos soluciones en  $\mathbb{C}$ :

$$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} + 1 + \frac{X_2}{X_1} = 0 \Rightarrow s + 1 + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} X_2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 : \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} : 1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 : \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} : 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Puntos en el infinito.}$$

d)  $Y = X^3$

Homogeneizamos:  $X_0^2X_1 = X_1^3$

Puntos en el infinito  $\Rightarrow X_0 = 0$

$$\Rightarrow X_1^3 = 0, X_2 \text{ libre} \Rightarrow \text{Tomamos } X_2 = 1$$

$$(0 : 0 : 1) \text{ punto en el infinito.}$$

e)  $Y^2 = X^3$

Homogeneizamos:  $X_0X_2^2 = X_1^3$

Punto en el infinito:  $X_0 = 0 \Rightarrow X_1^3 = 0$

$$(0 : 0 : 1) \text{ punto en el infinito.}$$

Esta curva es la misma que la anterior en el proyectivo.



# Hoja 2

---

## Ejercicio 1

$$\begin{cases} X_0 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 - X_2 - X_3 + \lambda(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0$$

contiene a la recta dada.

Si pasa por  $(0 : 1 : 1 : 0) \Rightarrow 0 - 1 - 0 + \lambda(1 - 2 \cdot 1 + 0) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ .

El plano buscado es  $X_0 - X_2 - X_3 - (X_1 - 2X_2 + X_3) = \dots = X_0 - X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$ .

## Ejercicio 2

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots = X_0 + X_1 - X_2 = 0.$$

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \dots = -X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

Fijamos un valor tal que  $X_3 = 1$ ,  $X_0 = \lambda \Rightarrow$

$$\left( \lambda : \frac{-\lambda + 3}{2} : \frac{\lambda + 3}{2} : 1 \right)$$

Damos valores a  $\lambda$ :

- Si  $\lambda = 0$ :

$$\left( 0 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1 \right)$$

- Si  $\lambda = 1$ :

$$(1 : 1 : 2 : 1)$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

$$(t_0, t_1) \mapsto \left( \underbrace{t_0 \cdot 0 + t_1 \cdot 1}_{=x_0} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 1}_{=x_1} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 2}_{=x_2} : \underbrace{t_0 + t_1}_{=x_3} \right).$$

## Ejercicio 3

**Disclaimer:** No he entendido nada, posiblemente este mal copiado.

Tomamos  $\mathbb{P}_k^3$  como  $k^4 / \sim$ .

Identificamos  $r \rightarrow \pi \subset K^4 \{v_0, v_1\}$  y  $r' \rightarrow \{v_2, v_3\}$  que será una base porque si no fuesen linealmente independientes (las siguientes ecuaciones) el determinante de los coeficientes sería 0:

$$r : \begin{cases} \sum a_i x_i = 0 \\ \sum b_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} \sum c_i x_i = 0 \\ \sum d_i x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_j? \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos?

$$\hat{p} = \underbrace{\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1}_{\omega_0} + \underbrace{\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}_{=\omega_1}$$

$$l = \alpha(\omega_0, \omega_1) \Rightarrow \hat{p} = \omega_0 + \omega_1$$