

# Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines



# Índice general

---

<b>1. Hoja 1</b>	<b>5</b>
1.1. Ejercicio 5 . . . . .	5
1.2. Ejercicio 7 . . . . .	5
1.3. Ejercicio 8 . . . . .	6
1.4. Ejercicio 9 . . . . .	6
1.5. Ejercicio 10 . . . . .	6
1.6. Ejercicio 11 . . . . .	7
1.7. Ejercicio 12 . . . . .	7



# Hoja 1

---

## Ejercicio 5

Sea  $c_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : i \in \{1, \dots, n\}$ . Como referencia  $\mathcal{R}_c = \{(0, \dots, 0), c_1, \dots, c_n\}$  y  $c_0 := (0, \dots, 0)$ .

Definimos  $f : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ , como  $f(c_i) = c_i, \forall i$  y  $f(0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n, a_1, \dots, a_n \in K$ .

Dado  $x \in \mathbb{A}_k^n, \exists x_1, \dots, x_n \in K : x = c_0 + x_1 \overrightarrow{c_0 c_1} + \dots + x_n \overrightarrow{c_0 c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f} \left( \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{c_0 c_i} \right) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \dots, 0) + \overrightarrow{c_0 c_i}, c_i = f(c_i) = f(0, \dots, 0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = (a_1, \dots, a_n) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{c_0 c_i}) = c_i - (a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n x_i (-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_n) = (a_1, \dots, a_n) + x_1 (1 - a_1, \dots, -a_n) + \dots +$$

$$+ x_n (-a_1, \dots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1 x_1 - \dots - a_1 x_n, \dots, a_n - a_n x_1 - \dots - a_n x_n + x_n) =$$

$$= (a_1 (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_1, \dots, a_n (1 - x_1 - \dots - x_n) + x_n)$$

## Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}_k^n.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}_k^2$$

$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}_k^2.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

## Ejercicio 8

Recta que pasa por  $(1 : -1 : -1)$ ,  $(2 : 1 : -2)$  en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con  $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$ . Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos  $(3 : 0 : 3)$  y  $(2 : 1 : -1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3 : 9 : 3) = (-1 : 3 : 1) \in \mathbb{P}_k^2$$

## Ejercicio 9

Construimos la recta  $L$  que pasa por  $A$  y  $C$ :

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que  $B \notin L$  ya que  $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{NO}}$  están alineados.

## Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 : -1 : 2) \\ (3 : 2 : -1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

## Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\}, L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \rightarrow (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección  $L_1 \cap L_2$ .

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\}, L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \rightarrow (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección  $L_3 \cap L_4$ .

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección  $(-3 : 7 : 5), (0 : -1 : 2)$ :

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0(X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1(3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos  $(4, 5)$  en  $(t_0, t_1)$ .

## Ejercicio 12

a)  $Y = X^2 - X + 2.$

$$X_0^2 \left[ \left( \frac{X_1}{X_0} \right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2 \right] = 0 \rightarrow X_1^2 - X_1X_0 - X_2X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b)  $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \xrightarrow{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito:  $(0 : 1 : -1), (0 : 1 : 1).$