Soluciones de los Ejercicios. Geometría lineal

Mario Calvarro Marines

Índice general

Hoja 1

Ejercicio 5

Sea $c_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) : i \in \{1, \ldots, n\}$. Como referencia $\mathcal{R}_c = \{(0, \ldots, 0), c_1, \ldots, c_n\}$ y $c_0 := (0, \ldots, 0)$.

Definimos $f : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$, como $f(c_i) = c_i, \ \forall i$ y $f(0, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n, \ a_1, \ldots, a_n \in K$.

Dado $x \in \mathbb{A}_k^n, \ \exists x_1, \ldots, x_n \in K : x = c_0 + x_1\overrightarrow{c_0c_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{c_0c_n} \Rightarrow$

$$f(x) = f(c_0) + \overrightarrow{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (*)$$

Como:

$$c_i = (0, \ldots, 0) + \overrightarrow{c_0c_i}, \ c_i = f(c_i) = f(0, \ldots, 0) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = (a_1, \ldots, a_n) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{c_0c_i}\right) = c_i - (a_1, \ldots, a_n) = (-a_1, \ldots, 1 - a_i, \ldots, -a_n) \in k^n$$

Entonces,

$$(*) = (a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i(-a_1, \ldots, 1 - a_i, \ldots, -a_n) = (a_1, \ldots, a_n) + x_1(1 - a_1, \ldots, -a_n) + \ldots +$$

$$+x_n(-a_1, \ldots, 1 - a_n) = (a_1 + x_1 - a_1x_1 - \ldots - a_1x_n, \ldots, a_n - a_nx_1 - \ldots - a_nx_n + x_n) =$$

$$= (a_1(1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_1, \ldots, a_n(1 - x_1 - \ldots - x_n) + x_n)$$

Ejercicio 7

Sean las rectas cuya intersección buscamos:

$$\begin{cases} L_1 = \{X_0 - X_1 - X_2 = 0\} \\ L_2 = \{2X_0 + X_1 - 2X_2 = 0\} \end{cases} \subset \mathbb{P}_k^n.$$

Pasamos al dual:

$$L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : -1) \in \mathbb{P}_k^2$$
$$L_2 \leftrightarrow (2 : 1 : -2) \in \mathbb{P}_k^2.$$

Por tanto, la intersección es:

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3U_0 + 3U_2$$

Esta ecuación se corresponde con una recta en el dual, es decir, un punto en el proyectivo:

$$L_3^* = \{3U_0 + 3U_2 = 0\} \leftrightarrow (1:0:1) \in \mathbb{P}_k^2 = L_1 \cap L_2$$

Haciendo la intersección con el punto original nos queda:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X_0 - 3X_1 - X_2 \Rightarrow \{X_0 - 3X_1 - X_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 8

Recta que pasa por $(1:-1:-1), (2:1:-2)$ en el proyectivo:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3X_0 + 3X_2$$

Intersección con $2X_0 + X_1 - X_2 = 0$. Pasamos al dual: ecuación generada por los puntos $(3:0:3)$ y $(2:1:-1)$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 9U_1 + 3U_2$$

los coeficientes coinciden con las coordenadas del punto intersección en el proyectivo:

$$(-3:9:3) = (-1:3:1) \in \mathbb{P}_k^2$$

Ejercicio 9

Construimos la recta L que pasa por A y C:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L := \{-3X_0 + 9X_1 + 2X_2 = 0\}$$

Vemos que $B \notin L$ ya que $-3(-1) + 9(1) + 2(2) \neq 0 \Rightarrow$ <u>NO</u> están alineados.

Ejercicio 10

Pasamos al dual:

$$\begin{cases} X_0 - X_1 + 2X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1:-1:2) \\ (3:2:-1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-3U_0 + 7U_1 + 5U_2 = 0}$$

Ejercicio 11

Calculemos las intersecciones de los siguientes pares de rectas haciendo uso del dual:

$$L_1 = \{X_0 - X_1 + 2X_2 = 0\},\ L_2 = \{3X_0 + 2X_1 - X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 \leftrightarrow (1 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \\ L_2 \leftrightarrow (3 : 2 : -1) \in \mathbb{P}_k^{2^*} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3U_0 + 7U_1 + 5U_2 \to (-3 : 7 : 5) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_1 \cap L_2$.

Por otro lado,

$$L_3 = \{3X_0 - 2X_1 - X_2 = 0\},\ L_4 = \{2X_0 + 2X_1 + X_2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} L_3 \leftrightarrow (3 : -2 : -1) \\ L_4 \leftrightarrow (2 : 2 : 1) \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & U_2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5U_1 + 10U_2 \to (0 : -1 : 2) \in \mathbb{P}_k^2$$

que será el punto de intersección $L_3 \cap L_4$.

Por último, recta que pasa por los dos puntos de intersección $(-3 : 7 : 5)\,,\ (0 : -1 : 2)$:

$$0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{19X_0 + 6X_1 + 3X_2 = 0}$$

Podemos hacerlo de otra manera, parametrizamos el haz de rectas de un par y buscamos la recta que pasa por el otro punto de intersección:

$$(0 : -1 : 2) \in \{t_0\,(X_0 - X_1 + 2X_2) + t_1\,(3X_0 + 2X_1 - X_2) = 0\}$$

$$5t_0 - 4t_1 = 0 \Leftrightarrow (t_0 : t_1) = (4 : 5) \in \mathbb{P}_k^1$$

Y sustituimos $(4, 5)$ en (t_0, t_1).

Ejercicio 12

a) $Y = X^2 - X + 2$.

$$X_0^2 \left[\left(\frac{X_1}{X_0} \right)^2 - \frac{X_1}{X_0} - \frac{X_2}{X_0} + 2 \right] = 0 \to X_1^2 - X_1X_0 - X_2X_0 + 2X_0^2 = 0$$

$$X_0 = 0 \Rightarrow X_1^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow (0 : 0 : 1)$$

Como solo hay un punto en el infinito podemos clasificar la curva como parábola.

b) $X^2 - Y^2 = 1$

$$X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \to^{X_0=0} X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1^2 = X_2^2 \Leftrightarrow X_1 = \pm X_2$$

Puntos en el infinito: $(0 : 1 : -1)\,,\ (0 : 1 : 1)$.

c) $X^2 + XY + Y^2 = 1$

Homogeneizamos: $X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$

Buscamos soluciones en $\mathbb{R}$.

$$X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow (0:0:0) \notin \mathbb{P}_k^2$$

por lo que no es punto del infinito.

Buscamos soluciones en $\mathbb{C}$:

$$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} + 1 + \frac{X_2}{X_1} = 0 \Rightarrow s + 1 + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow\Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} X_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(0 : \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \\ \left(0 : \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} : 1\right) \end{cases} \quad \text{Puntos en el infinito.}$$

d) $Y = X^3$

Homogeneizamos: $X_0^2 X_1 = X_1^3$

Puntos en el infinito $\Rightarrow X_0 = 0$

$$\Rightarrow X_1^3 = 0, X_2 \text{ libre} \Rightarrow \text{Tomamos } X_2 = 1$$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

e) $Y^2 = X^3$

Homogeneizamos: $X_0 X_2^2 = X_1^3$

Punto en el infinito: $X_0 = 0 \Rightarrow X_1^3 = 0$

$$(0:0:1) \text{ punto en el infinito.}$$

Esta curva es la misma que la anterior en el proyectivo.

Hoja 2

Ejercicio 1

$$\begin{cases} X_0 - X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_0 - X_2 - X_3 + \lambda\,(X_1 - 2X_2 + X_3) = 0$$

contiene a la recta dada.

Si pasa por $(0:1:1:0) \Rightarrow 0 - 1 - 0 + \lambda\,(1 - 2\cdot 1 + 0) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

El plano buscado es $X_0 - X_2 - X_3 - (X_1 - 2X_2 + X_3) = \ldots = X_0 - X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$.

Ejercicio 2

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = X_0 + X_1 - X_2 = 0.$$

$$\Pi_1 := 0 = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

Fijamos un valor tal que $X_3 = 1,\ X_0 = \lambda \Rightarrow$

$$\left(\lambda : \frac{-\lambda + 3}{2} : \frac{\lambda + 3}{2} : 1\right)$$

Damos valores a λ:

- Si $\lambda = 0$:

$$\left(0 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1\right)$$

- Si $\lambda = 1$:

$$(1 : 1 : 2 : 1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_k &\to \mathbb{P}(W) \\ (t_0, t_1) &\mapsto \left(\underbrace{t_0 \cdot 0 + t_1 \cdot 1}_{=x_0} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 1}_{=x_1} : \underbrace{t_0 \cdot \frac{3}{2} + t_1 \cdot 2}_{=x_2} : \underbrace{t_0 + t_1}_{=x_3} \right). \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Disclaimer: No he entendido nada, posiblemente este mal copiado.

Tomamos $\mathbb{P}^3_k$ como $k^4 / \sim$.

Identificamos $r \to \pi \subset K^4 \; \{v_0, v_1\}$ y $r' \to \{v_2, v_3\}$ que será una base porque si no fuesen linealmente independientes (las siguientes ecuaciones) el determinante de los coeficientes sería 0:

$$r : \begin{cases} \sum a_i x_i = 0 \\ \sum b_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} \sum c_i x_i = 0 \\ \sum d_i x_i = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_j? \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos?

$$\hat{p} = \underbrace{\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1}_{\omega_0} + \underbrace{\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}_{=\omega_1}$$

$$l = \alpha(\omega_0, \omega_1) \Rightarrow \hat{p} = \omega_0 + \omega_1$$

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_0 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} v_0 = (1, 0, 1, 0) \\ v_1 = (1, 0, 0, -1) \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_0 - X_3 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} v_2 = (1, 0, 0, 1) \\ v_3 = (1, 1, 0, 1) \end{cases}$$

Que son base.

$$p = \left[\underbrace{(0, 1, -1, 1)}_{\overrightarrow{p}} \right] ; \; \overrightarrow{p} = \underbrace{-v_0}_{\in r} + \underbrace{v_3}_{\in r'}$$

$$l = \alpha(v_0, v_3) \to l = \{\lambda(v_0) + \mu v_3 | \, (\lambda, \mu) \in k^2\} \to$$

Vamos de k^4 al proyectivo:

$$\{(\lambda + \mu : \mu : \lambda : \mu) \, | \, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_k\}$$

Parametrización de la recta.

<u>Geométricamente</u>:

La recta solución l debe estar contenida en el plano π formado por la recta r y el punto P. Este plano se cortará con p' en otro punto que también estará contenido en l por lo que tenemos dos puntos, distintos, contenidos en la recta $\Rightarrow l = \langle p, p' \rangle \subset \pi$.

Ejercicio 5

Recordamos que $\mathbb{P}_k^2 = \mathbb{A}_k^2 \cup \mathbb{P}_k^1$ y $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{(0:1)\}$. Tenemos que $|\mathbb{A}_k^2| = p$ y $|\mathbb{A}_k^2| = p^2 \Rightarrow$

$$|\mathbb{P}_k^2| = p^2 + p + 1$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^2 &\to^{\Omega} \mathbb{P}_k^{2^*} \\ \Lambda &\mapsto \Omega(\Lambda). \end{aligned}$$

Con Ω biyección y $\Omega\left(\mathbb{P}_k^2\right) = \mathbb{P}_k^{2^*}$

(Ejemplo 2,11)

$$\overline{L} \subset \mathbb{P}_k^2 \quad \overline{L} \to \mathbb{P}_k^1$$

$(L \subset \mathbb{A}_k^2)$ Parametrización de L, biyección $\Rightarrow$ en cada recta $\overline{L} \subset \mathbb{P}_k^2$ hay $p+1$ puntos.

Otra cosa,

$$U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$$

- $X_0 = 0 \Rightarrow U_1X_1 + U_2X_2 = 0$ $(U_1$ ó $U_2 \neq 0)$.

$$X_2 = -\frac{U_1}{U_2}X_1 \Rightarrow \left(0 : X_1 : -\frac{u_1}{u_2}X_1\right), \ \left(0 : 1 : -\frac{U_1}{U_2}\right) \in \mathbb{P}_k^2$$

- $X_0 \neq 0\,(X_0 = 1) \Rightarrow U_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$:

$$X_2 = -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_2} \Rightarrow \left(1 : X_1 : -\frac{(U_0 + U_1X_1)}{U_1}\right)$$

Ejercicio 7

(Hemos cambiado C y D)

L_∞ será aquella formada por los dos puntos en el infinito que surgen de la intersección de las rectas paralelas del paralelogramo.

Tenemos $A = (1:0:1)\,, B = (1:-1:0)\,, C = (0:2:1)\,, D = (0:0:1)$.

$$\begin{cases} \overline{AB} &= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = X_1 - X_2 + X_0 = 0 \\ \overline{CD} &= 2X_0 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0 \end{cases}.$$

Lo que nos da:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & m_2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow P = (0:1:1)$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} \overline{AC} &= 2X_2 - 2X_0 - X_1 = 0 \\ \overline{BD} &= X_0 + X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P' = (2:-2:1)\,.$$

En consiguiente:

$$L_\infty = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3X_0 + 2X_1 - 2X_2 = 0$$

Ejercicio 8

Ni idea de este.

Sea

$$\overline{f} : \mathbb{A}_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{A}_{\mathbb{R}^3}$$

(*Foto composición*) $f \circ L_2 = L_3 \circ \overline{f}$.

$$L_2(x,y) = (1 : x : y)$$
$$L_3(x,y,z) = (1 : x : y : z).$$

Por tanto,

- $f(1:1:0) = (1:1:0:2)$
- $f(1:1:2) = (1:0:1:1)$
- $f(1:2:0) = (1:2:0:0)$
- $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{f(P)\, f(Q)}$.
- $\overrightarrow{f}(0,2) = (-1,1,-1) \Rightarrow f$
- $\overrightarrow{f}(1,0) = (1,0,-2)$

Por tanto?

$$M\left(\overline{f}, R, R_{CAR^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Como $f(0) = (0,0,4) \Rightarrow$

$$M\left(f, R_{CAR^2}, R_{CAR^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

Tenemos:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 = 1 \to^f X^2 + Y^2 - 2X - 2Y &= 2 \\ X^2 - 2Y + 1 + Y^2 - 2Y + 1 &= 4 \\ (X-1)^2 + (Y-1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Por tanto, $f =$ (translacción de $(1,1)$) $\circ$ (homotecia de razón 2).

Es decir,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que, A matriz de la aplicación asociada $\overrightarrow{f}$.

$$A^t A = \lambda I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

Tenemos $P = (1:0:0)\,, Q = (0:0:1)\,, R = (1:0:1)\,, \alpha = x_0 + x_1 + x_2 = 0$

Por tanto,

$$\text{Recta } PQ = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Dibujo

$//$Corte PQ con $\alpha_\infty = \mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_2$. PQ por $S = x_0 + x_2 = 0$.

Corte PS con $\alpha_\infty = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_0 = 0$

$a \Rightarrow //PS$ por $Q : x_0 + x_1 = 0$. S' : corte a y $PS : \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_0 = g\,(s)$.

$SR : x_0 - x_2 = 0$ corte SR con $\alpha_\infty : \mathcal{U}_0 - 2\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$

$b \Rightarrow //SR$ por $S' : 3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$. Corte b y $PQ : 3\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_0 \to R' = (-1:0:3)$.

Ejercicio 11

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la b.c de k^3 y $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ la de k^4.

- Dado $\varphi : \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^3_k$ aplicación proyectiva tal que:

$$\begin{aligned} \varphi\,(1:0:0) &= (1:0:0:0) \\ \varphi\,(0:1:0) &= (0:1:0:0) \\ \varphi\,(0:0:1) &= (0:0:1:0) \end{aligned}.$$

  entonces $\exists f : k^3 \dashrightarrow k^4$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi\,(1:0:0) &= [f\,(e_1)] = [\lambda_1 c_1] \\ \varphi\,(0:1:0) &= [f\,(e_2)] = [\lambda_2 c_2] \\ \varphi\,(0:0:1) &= [f\,(e_3)] = [\lambda_3 c_3] \end{aligned}.$$

  entonces:

$$f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i \neq \lambda c_4,\ \lambda \neq 0$$

  ya que es base, luego $\varphi\,(1:1:1) \neq (0:0:0:1)$.

- Sea $Q\,(\varphi) := \varphi$ es una proyectividad de $\mathbb{P}^2_k$ y $\mathbb{P}^3_k$.

$$\begin{gathered} P\,(\varphi) := Q\,(\varphi) \wedge \varphi\,(1:0:0) = \\ = (1:0) \wedge \varphi\,(0:1:0) = (0:1) \wedge \varphi\,(0:0:1) = (1:1) \wedge \varphi\,(1:1:1) = (1:1)\,. \end{gathered}$$

Sea $\Omega = \{\varphi : P(\varphi)\}$.

Definimos $f : K \setminus \{0, 1, -1\} \to \Omega$ tal que f_z tiene aplicación lineal asociada $h_z : k^3 \to k^2$ tal que

$$\begin{aligned} h_z(e_1) &= (-1+z)\, c_1 \\ h_z(e_2) &= (-1-z)\, c_2 \\ h_z(e_3) &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$
.

entonces:

$$\begin{aligned} f_z(1:0:0) &= [(-1+z)\, c_1] = (1:0) \\ f_z(0:1:0) &= [(-1-z)\, c_2] = (0:1) \\ f_z(0:0:1) &= [c_1 + c_2] = (1:1) \\ f_z(1:1:1) &= [ze_1 - ze_2] = (1:-1) \end{aligned}$$
.

luego f está bien definida.

$$f_z(1:0:e) = [ze_1 + e_2] = (z:1)$$

luego f es inyectiva.

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda_1 e_1 \\ f(e_2) &= \lambda_2 e_2 \\ f(e_3) &= \lambda_3 (e_1 + e_2) \\ f\left(\sum e_i\right) &= \lambda_4 (e_1 - e_2)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 12

Tenemos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1_k &\to \mathbb{P}^3_k \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (t_0 - t_1 : t_1 + 2t_0 : 2t_1 - t_0 : t_0 + t_1)\,. \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f} : K^2 &\to K^4 \\ (v_0, v_1) &\mapsto (v_0 - v_1, v_1 + 2v_0, 2v_1 - v_0, v_0 + v_1)\,. \end{aligned}$$

Veamos que $\ker\left(\overrightarrow{f}\right) = \{0\}$.

$$\begin{cases} v_0 - v_1 = 0 \Rightarrow v_0 = v_1 \\ v_1 + 2v_0 = 0 \\ 2v_1 - v_0 = 0 \\ v_0 + v_1 = 0 \Rightarrow v_0 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \ker\left(\overrightarrow{f}\right) = 0 \Rightarrow$$

f es inyectiva.

Por otro lado,

$$f\left(\mathbb{P}^1\right) \sim \overrightarrow{f}\left(K^2\right)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}\left(K^2\right) &= (v_0 - v_1, v_1 + 2v_0, 2v_1 - v_0, v_0 + v_1) = (1, 2, -1, 1)\, v_0 + (-1, 1, 2, 1)\, v_1 = \\ &= \langle (1, 2, -1, 1), (-1, 1, 2, 1) \rangle \Rightarrow \\ f\left(\mathbb{P}^1_k\right) &= \langle (1:2:-1:1), (-1:1:2:1) \rangle. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$rg\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5X_0 - X_1 + 3X_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow X_0 - 2X_1 + 3X_3 = 0.$$

Ejercicio 14

Dada una referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ la aplicación:

$$\mathbb{A} \to \{X_0 + \ldots + X_n = 1\} \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$$

manda cada punto de $\mathbb{A}$ a sus coordenadas baricéntricas respecto de $\mathcal{R}$ es una afinidad.

$(p = p_0 + \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p n})$. Se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sum \lambda \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -1 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hoja 3

Ejercicio 1

Tenemos $r := \{X_0 - X_1 + X_2 = 0\}$:

$$\begin{cases} X_0 = a_0 t_0 + a_1 t_1 \\ X_1 = b_0 t_0 + b_1 t_1 \\ X_2 = c_0 t_0 + c_1 t_1 \end{cases}$$

Cumpliendo:

$$\begin{cases} (1:0) \mapsto (2:3:1) \\ (0:1) \mapsto (3:5:2) \\ (1:1) \mapsto (0:1:1) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & = a_0 \\ 3\lambda_1 & = b_0 \\ \lambda_1 & = c_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 & = a_1 \\ 5\lambda_2 & = b_1 \\ 2\lambda_2 & = c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & = a_0 + a_1 \\ \lambda_3 & = b_0 + b_1 \\ \lambda & = c_0 + c_1 \end{cases}$$

Poniéndolo como matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

con lo que nos queda que $\lambda = (1, -2/3, -1/3)$ y

$$\begin{cases} a = (-6, 6) \\ b = (-9, 10) \\ c = (-4, 4) \end{cases}$$

Ejercicio 2

Primeros vamos a ver que $\mathcal{R} = \{(1:1:0), (2:3:1), (1:0:-1)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(1:0:0), (1:1:1), (1:-1:-1)\}$ son referencias proyectivas de las rectas $l : X_0 - X_1 + X_2 = 0$ y $l' : X_1 - X_2 = 0$, respectivamente.

- $\mathcal{R}$ es referencia de l:

  Los vectores $(1,1,0)$ y $(2,3,1)$ son l.i. Buscamos ahora escalares no nulos $\lambda_0, \lambda_1, \gamma$ tales que:

  $$\lambda_0 (1,1,0) + \lambda_1 (2,3,1) = \gamma (1,0,-1)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 + 2\lambda_1 = \gamma \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 3\gamma \\ \lambda_1 = -\gamma \end{cases}$$

Tomando $\gamma = 1$ tenemos que $\lambda_0 = 3, \lambda_1 = -1$, así que:

$$\mathcal{B} = \{(3,3,0), (-2,-3,-1)\}$$

es una base asociada de $\mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}'$ es referencia de l':

  Los vectores $(1,0,0)$ y $(1,1,1)$ son l.i. Buscamos ahora escalares no nulos β_0, β_1, σ tales que:

$$\beta_0 (1,0,0) + \beta_1 (1,1,1) = \sigma (1,-1,-1)$$

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = \sigma \\ \beta_1 = -\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 2\sigma \\ \beta_1 = -\sigma \end{cases}$$

  Tomando $\sigma = 1$ tenemos que $\beta = 2, \beta_1 = -1$, así que:

$$\mathcal{B}' = \{(2,0,0), (-1,-1,-1)\}$$

  es una base asociada de $\mathcal{R}'$.

Ahora con coordenadas en $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$, la aplicación $f : l \to l'$ es tal que:

$$\begin{aligned} f(1:0)_{\mathcal{R}} &= f(1:1:0) = (1:0:0) = (1:0)_{\mathcal{R}'} \\ f(0:1)_{\mathcal{R}} &= f(2:3:1) = (1:1:1) = (0:1)_{\mathcal{R}'} \\ f(1:1)_{\mathcal{R}} &= f(1:0:-1) = (1:-1:-1) = (1:1)_{\mathcal{R}'} . \end{aligned}$$

Es decir, que:

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho \neq 0$$

Para hallar las ecuaciones de f parametrizamos:

$$\begin{aligned} l = (1:1:0) + (2:3:1) = (3:3:0) + (-2:-3:-1) = \\ = \{(3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) ; (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1_k\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = (1:0:0) + (1:1:1) = (2:0:0) + (-1:-1:-1) = \\ = \{(2t_0 - t_1 : -t_1 : -t_1) ; (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1_k\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) = f(t_0 : t_1)_{\mathcal{R}} = (t_0 : t_1)_{\mathcal{R}'} = (2t_0 - t_1 : -t_0 - t_1)$$

Si denotamos:

$$\begin{aligned} (y_0 : y_1 : y_2) &= (3t_0 - 2t_1 : 3t_0 - 3t_1 : -t_1) \\ (y_0' : y_1' : y_2') &= (2t_0 - t_1 : -t_1 : -t_1) . \end{aligned}$$

Y tenemos finalmente:

$$Y_0' = \rho (2/3 Y_1 - Y_2), \ Y_1' = \rho Y_2, \ Y_2' = \rho Y_2, \ \rho \neq 0$$

Ejercicio 3

Sea $L_\infty = \{X_1 - X_2 = 0\}$. Tenemos la homotecia de centro $(1:0:-1) = P_1$:

$$P_2 = (1:-1:0) \mapsto (0:1:-1) = P_3$$

$$\alpha = \frac{||\ 1/2\,(0,1,-1) - (1,0,-1)\ ||}{||\ (-1,1,0) - (1,0,-1)\ ||} = \frac{1}{2}$$

$$\{(1,0,0)\,,(0,1,1)\,,(1,0,-1)\} = P$$

$$M\left(f, \mathcal{R}_c, \mathcal{R}_c\right) = M\left(\overrightarrow{f}, B_c, B, c\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Tenemos como referencia proyectiva, $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

Veamos que p_2, p_1, son l.i:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow l.i$$

Tomamos ahora, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_0\,(1,1,0) + \lambda_1\,(0,1,0) + \lambda_2\,(0,1,2) = \lambda\,(1,0,1)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow_{\lambda=1} \begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_2 = -1/2 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow_{\lambda=2} \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$(2,2,0) + (0,-1,0) + (0,-1,-2) = (2,0,-2)$$

Con $B = \{(2,2,0)\,,(0,-1,0)\,,(0,-1,-2)\}$.

La matriz será:

$$M\left(B, B_c\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M\left(B, B_c\right) \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = M\left(B_c, B\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$M\left(B_c, B\right) = M^{-1}\left(B, B_c\right)$$

$$M^{-1}\left(B, B_c\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $(1:1:2)$ tendríamos:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1:1:-2)_{\mathcal{R}_c} = (1:2:-2)_{\mathcal{R}}$$

y para $(-1:1:1)$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow (-1:1:1)_{\mathcal{R}_c} = (-1:-1:1)_{\mathcal{R}}$$

Ejercicio 9

Tenemos dos referencias:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(1:-1:0)\,,(0:2:-1)\,,(1:-1:1)\,,(0:-1:1)\}\\ \mathcal{R}_2 &= \{(1:0:1)\,,(1:1:1)\,,(0:1:1)\,,(2:2:3)\}.\end{aligned}$$

que denominamos por p_i y p_i', respectivamente.

En $\mathcal{R}_1$

$$(0,-1,1) = \lambda_0\,(1,-1,0) + \lambda_1\,(0,2,-1) + \lambda_2\,(1,-1,1)$$
$$\begin{cases}\lambda_0 = -1/2\\ \lambda_1 = -1/2\\ \lambda_2 = 1/2\end{cases}.$$

En $\mathcal{R}_2$ vemos que: $v' + v_1' + v_2' = v_3'$ con $[v_i] = p_i$ y $\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2' = 1$.

Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned}B_1 &= \{-1/2v_0, -1/2v_1, 1/2v_2\}\\ B_2 &= \{v_0', v_1', v_2'\}.\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$A = M_{B_1,B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 0 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Sea $L := X_2 - 2X_0 - X_1 = 0$. Tomamos 2 puntos: $(0:1:1)\,,(-1:2:0)$ y los pasamos a la otra base:

Aplicando A:

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}_{B_1} &= \begin{pmatrix}5\\ -4\\ 1\end{pmatrix}_{B_2}\\ A\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}_{B_1} &= \begin{pmatrix}7\\ -6\\ 1\end{pmatrix}_{B_2}.\end{aligned}$$

En definitiva, vemos la recta que forman en esta nueva base:

$$\begin{vmatrix}X_0 & X_1 & X_2\\ 5 & -4 & 1\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix} = \boxed{X_0 + X_1 - X_2 = 0}$$

Ejercicio 10

Debemos pasar de:

$$\begin{cases} L_1 : X_2 = X_0 + X_1 \to L_1^* : (1:1:-1) \\ L_2 : X_0 = X_2 \to L_2^* : (1:0:-1) \\ L_3 : X_1 = 2X_0 \to L_3^* : (2:-1:0) \end{cases}$$

a:

$$\begin{cases} L_1 : X_0' = 0 \to L_1'^* : (1:0:0) \\ L_2 : X_1' = 0 \to L_2'^* : (0:1:0) \\ L_3 : X_2' = 0 \to L_3'^* : (0:0:1) \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Con $B^*, \mathcal{R}^*; \{\alpha\,(1,1,-1)\,, \beta\,(1,0,-1)\,, \gamma\,(2,-1,0)\}$.

La matriz de cambio de base:

$$M\left(B^*, B_c^*\right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2\gamma \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}; M\left(x_0' x_1' x_2'\right) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tomando $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Tenemos también que:

$$M\left(B^*, B_c^*\right)^t M\left(B, B_c\right) = I$$

Por tanto,

$$M\left(B, B_c\right) = \left(M\left(B^*, B_c^*\right)^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Con lo que nos queda que: $\mathcal{R} = \{(1:2:1)\,, (-1:-2:-3)\,, (1:0:1)\,, (1:0:-1)\}$.