PROBLEMAS DE GEOMETRIA LINEAL (dobles grados)

Curso 2022/23, hoja 1

1) Demostrar que son equivalentes las siguientes definiciones de espacio afín $\mathbb{A}$ con espacio vectorial asociado V:

a) Existe una aplicación $\varphi : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ (se suele escribir $\varphi(p, v) = p + v$) tal que:

(i) $(p + v) + v' = p + (v + v')$ para todo $p \in \mathbb{A}$ y $v, v' \in V$.

(ii) Para todo $p \in \mathbb{A}$, la aplicación $\varphi_p : V \to \mathbb{A}$ dada por $\varphi_p(v) = p + v$ es una biyección.

b) Existe una aplicación $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ (se suele escribir $\phi(p, q) = \overrightarrow{pq}$) tal que:

(i) $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$ para cualesquiera $p, q, r \in \mathbb{A}$.

(ii) Para todo $p \in \mathbb{A}$, la aplicación $\phi_p : \mathbb{A} \to V$ dada por $\varphi_p(q) = \overrightarrow{pq}$ es una biyección.

2) Demostrar que, dado un espacio vectorial V, la aplicación $\varphi : V \times V \to V$ definida por $\varphi(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ dota a V de estructura de espacio afín.

3) Si llamamos aplicación afín entre dos espacios afines a una aplicación $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tal que existe una aplicación lineal $\vec{f} : V \to V'$ entre los respectivos espacios vectoriales asociados tales que, para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{A}$ se satisface $\overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} = \vec{f}(\overrightarrow{p_1p_2})$, demostrar:

(i) f es biyectiva si y sólo si $\vec{f}$ es biyectiva (en tal caso, se dice que f es una afinidad).

(ii) Para cada $v \in V$, la traslación $\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definida por $\tau_v(p) = p + v$ es una afinidad, y se tiene que $\vec{\tau}_v$ es la identidad.

(iii) Cualquier afinidad $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\vec{f}$ es la identidad es una traslación.

4) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín con espacio vectorial asociado V y determinado por $\varphi : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$. Fijado $\lambda \in k \setminus \{0\}$, demostrar:

(i) Existe un espacio afín $\mathbb{A}_\lambda$ cuyo conjunto de puntos es el mismo que $\mathbb{A}$ y el espacio vectorial asociado también es V, pero para el que la estructura de espacio afín viene dada por la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & \mathbb{A}_\lambda \times V & \to & \mathbb{A}_\lambda \\ & (p, v) & \mapsto & p + \lambda v \end{array}$$

(en otras palabras, el vector $\overrightarrow{pq}$ en $\mathbb{A}_\lambda$ está definido como λ veces el vector $\overrightarrow{pq}$ de $\mathbb{A}$).

(ii) La identidad conjuntista $\mathbb{A}_\lambda \to \mathbb{A}$ es una afinidad, tomando como aplicación lineal asociada la multiplicación por λ en V.

(*)**5)** Demostrar que las aplicaciones afines de $\mathbb{A}^n_k$ en sí mismo que mandan los puntos coordenados $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$ en sí mismos son las aplicaciones de la forma

$$\begin{array}{rcc} f:\mathbb{A}^n_k & \to & \mathbb{A}^n_k \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \big(a_1+(1-a_1)x_1,\ldots,a_n+(1-a_n)x_n\big) \end{array}$$

con $a_1,\ldots,a_n \in k$.

6) Demostrar que, dada una referencia afín $\mathcal{R}=\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$ de un espacio afín $\mathbb{A}$, la aplicación $f_{\mathcal{R}}:\mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}$ definida por

$$f_{\mathcal{R}}(x_1,\ldots,x_n)=p_0+x_1\overrightarrow{p_0p_1}+\ldots+x_n\overrightarrow{p_0p_n}$$

es una afinidad, y su matriz respecto de $\mathcal{R}_c$ (referencia canónica de $\mathbb{A}^n_k$) y $\mathcal{R}$ es la matriz identidad. Además, p_0 es imagen de $(0,\ldots,0)$, mientras que, si $i=1,\ldots,n$, entonces p_i es la imagen del i-ésimo punto coordenado. También, $\vec{f}$ manda la base canónica de k^n a la base $\{\overrightarrow{p_0p_1},\ldots,\overrightarrow{p_0p_n}\}$ del espacio vectorial asociado de $\mathbb{A}$.

(*)**7)** Encontrar la ecuación de la recta proyectiva que pasa por el punto $(2:1:-1)$ y por el punto de intersección de las rectas $X_0-X_1-X_2=0$ y $2X_0+X_1-2X_2=0$.

(*)**8)** Encontrar el punto de intersección de la recta $2X_0+X_1-X_2=0$ y la recta determinada por los puntos $(1:-1:-1)$ y $(2:1:-2)$.

(*)**9)** Determinar si los puntos $(2:0:3)$, $(-1:1:2)$ y $(3:1:0)$ están alineados.

(*)**10)** Calcular la ecuación implícita (en las coordenadas u_0,u_1,u_2 del plano dual) del haz de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $X_0-X_1+2X_2=0$ y $3X_0+2X_1-X_2=0$.

(*)**11)** Calcular la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $X_0-X_1+2X_2=0$ y $3X_0+2X_1-X_2=0$ y por el punto de intersección de intersección de las rectas $3X_0-2X_1-X_2=0$ y $2X_0+2X_1+X_2=0$.

12) Encontrar los puntos del infinito de las curvas siguientes:

(*)a) $Y=X^2-X+2$

(*)b) $X^2-Y^2=1$

(*)c) $X^2+XY+Y^2=1$

(*)d) $Y=X^3$

e) $Y^2=X^3$