Soluciones de los Ejercicios, MARP I

Mario Calvarro Marines

Índice general

Hoja 1

Ejercicio 1. (Iker Muñoz)

No será coste constante amortizado. Contraejemplo:

```
fun multiapilar (p: pila , k: nat)
    mientras k > 0 hacer
        apilar (p)
        k = k − 1
    fmientras
ffun
```

Coste $O(k)$. Si consideramos la secuencia de n llamadas a multiapilar tendremos:

$$\hat{c_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k = k.$$

Ejercicio 2. (Sergio García)

Sí:

$$\underbrace{1\ldots\underbrace{10\ldots0}_{k-1}}_{n} \to^{\text{incrementar}} \underbrace{1\ldots\underbrace{01\ldots1}_{k-1}}_{n} \to^{\text{decrementar}} \underbrace{1\ldots\underbrace{10\ldots0}_{k-1}}_{n} \to \ldots n \text{ operaciones.}$$

Incrementar y decrementar: $O(k) \Rightarrow n$ operaciones $O(nk)$.

Ejercicio 3. (Alba Bautista)

Hemos de calcular $\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{j}$. Lo hacemos primero para $j = 2^n$.

Consideramos $C_{in} = \{2^i : 0 \leq i \leq n\}$ y $\overline{C}_{in} = (1, \ldots, 2^n)\ \ C_n$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i = \sum_{i\in C_n} C_i + \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i + \sum_{i\in C_n} 1 = 2^{n+1} - 1 + \mid \overline{C}_n \mid\mid \overline{C}_n \mid = \mid 1\ldots 2^n \mid - \mid C_n \mid =$$

$$= 2^n - (n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{j} C_i = \left(2^{n+1} - 1\right) + (2^n - n - 1) = 3 \cdot 2^n - n - 2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{j} C_i}{2^n} \leq 3 \in O(1)$$

De forma similar si tomamos $j = 2^n + j' : j' \in 1, \ldots, 2^n - 1$.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{j} 3 \cdot 2^n - n - 2 + j \Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^{j} C_i}{j} \leq 3 \in O(1)$$

Ya que $\begin{cases} 2^n \leq j \\ j' \leq j \end{cases}$

Ejercicio 4. (Juan Fonseca)

Utilizamos el método del potencial para calcular el coste amortizado:

$\Phi(D_i)$ elementos en la lista tras operación i-ésima

- Añadir un número:

$$\hat{c}_i = c_1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + (k+1) - k = 2 \in O(1)$$

- Reducir-lista:

$$\hat{c}_i = c_1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k + 1 + 1 - k = 2 \in O(1)$$

Ejercicio 5. (Marta Vicente)

```
proc contar(C[0, ..., k − 1] de {0, 1}, E/S posSig: nat)
    j := 0
    mientras j < k AND j < posSig AND C[j] = 1
        C[j] := 0
        j := j + 1
    fmientras

    si j < k AND j < posSig
        C[j] := 1
    fsi

    si j < k AND j = posSig
        C[j] := 1
        posSig := posSig + 1
    fsi
fproc

proc resetear (E/S posSig: nat)
    posSig := 0
fproc
```

$$valor(c) = \sum_{j=0}^{\text{posSig}} 2^j C[j]$$

Ejercicio 6. (Juan Diego Barrado)

DISCLAMER: Este ejercicio no está ni de cerca completo. Recomiendo no utilizar este documento para estudiarlo.

Buscar:

Para cada A_i, hacer búsqueda binaria tiene coste en $O\left(\log 2^i\right) = O(i)$.

En el caso peor, el elemento que buscamos está en A_{k-1}, luego $\sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2} \in O\left(k^2\right) = O\left(\log^2(n)\right)$.

Insertar: Cuando insertamos n elementos como mucho viajan al nivel $\log(n)$ vaciamos A_0 de 1 elemento $\frac{n}{2}$ veces, A_1, 2 elementos $\frac{n}{4}$ veces y A_j, 2^j elementos $\frac{n}{2^{j+1}}$ veces $\Rightarrow$

$$T(n) = \sum_{j=0}^{\log n} 2^j \cdot \frac{n}{2^{j+1}} = \frac{n}{2}\log n.$$

Ejercicio 7. (Leonardo Macías)

Base: $b[0,\ldots,n-1] \in \mathbb{Z}^n$ con $b[i] \geq 2$.

Contador: $v[0,\ldots,n-1]$ con $0 \leq v[i] < b[i]$ y $v[0]$ menos significativo.

```
proc incrementar (b: base, v: contador)
    i := 0
    mientras i < n AND v[i] = b[i] - 1 hacer
        v[i] := 0
        i := i + 1
    fmientras
    si i < n hacer
        v[i] := v[i] + 1
    fsi
fproc
```

$v[0]$ cambia n veces, $v[1]$ cambia $\frac{n}{b[0]}$ veces, $\ldots$, $v[i]$ cambia $\frac{n}{\prod_{j=0}^{i} b[j]}$ veces.

M. Agregación: Nº Cambios: $\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{\prod_{j=0}^{i} b[j]}$

Como $\forall j \in \{0,\ldots,n-1\} : b[j] \geq 2$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{j=0}^{i} b[j]} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Coste amortizado:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{\prod_{j=0}^{i} b[j]} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{j=0}^{i} b[j]} \leq 2$$

Ejercicio 8. (Beñat Pérez)

a) Utilizamos dos pilas una de los elementos y otra de máximos.

Operaciones:

```
proc apilar(p1, p2: pila; k: ent)
    si !p2.empty AND k <= p2.top =>
        p2.push(k)
    fsi
    p1.push(k)
fproc
```

```
proc maximo (p2: pila; k: ent)
    si !p2.empty =>
        return p2.top
    fsi
fproc
```

```
proc desapilar(p1, p2: pila)
    si !p1.empty =>
        si p1.top = p2.top =>
            p2.pop
        fsi
    fsi
    p1.pop
fproc
```

b) Operaciones:

```
proc anyadir(p1: pila; k: ent)
    si !p1.empty =>
        p1.push(k, max(k, p1.top)
    si no =>
        p1.push(k, max)
    fsi
fproc
```

```
func max(p1, p2: pila)
    return max(p1.top.b, p2.top.b)
fproc
```

```
proc desapilar(p1, p2: pilas; k: ent)
    si !p2.empty =>
        si !p1.empty =>
            p2.push(p1.top.a, p1.top.a)
            p1.pop
            mientras !p1.empty hacer
                p2.push(p1.top.a, max(p1.top.a, p2.top.b)
                p1.pop
            fmientras
            p2.pop
        fsi
    si no =>
        p2.pop
    fsi
fproc
```

En el caso peor tendremos $O(n)$. Sin embargo, amortizado de n operaciones nos saldrá $O(1)$ por operación.

Por el método de contabilidad. Asumamos que apilar tiene coste 3 (poner el elemento en p_1, quitarlo de p_1 y ponerlo en p_2). Así, solamente nos queda que desapilar tiene coste 1, ya que habría que hacer una sola operación.

Además, la función máximo es constante.

Con todo, nos queda que el coste amortizado es $O(1)$.

Ejercicio 9 (Lucía Alonso)

Tenemos una cola C, creamos una doble cola llamada *maximos* para llevar el control del máximo de C_1:

$$maximos[i] : 0 \leq i < n : \forall j : i < j \leq n : maximos[i] \leq maximos[j]$$

- En la llamada a $borrar\left(\right)$ elemento de C_1 debemos comprobar si es 1^{er} máximo.
- En la llamada a $insertar\left(\right)$ elemento de C_1 debemos borrar todos los elementos de máximo menores que él.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} C = 5,4,3,2,1; &\quad maximos = 5,4,3,2,1 \Rightarrow insertar\left(3\right) \\ C = 5,4,3,2,1,3; &\quad maximos = 5,4,3,3 \Rightarrow remove\left(\right) \\ C = 4,3,2,1,3; &\quad maximos = 4,3,3 \Rightarrow insert\left(6\right) \\ C = 4,3,2,1,3,6; &\quad maximos = 6. \end{aligned}$$

```
proc insertar(cola: C1, doble cola : maximos, elemento: x)
    c.push(x)
    mientras !maximos.empty() AND maximos.back() < x
        maximo.pop_back()
    fmientras
    maximos.push_back(x)
fproc

proc borrar(cola: C1, doble cola: maximos)
    si c.front() = maximos.front()
        maximos.pop_front()
    fsi
    c.pop()
fproc

{!maximo.empty()}
func getMax(doble cola: maximo)
    return maximo.front()
ffunc
```

Coste amortizado. Por el método del potencial.

- Caso peor: Se añade el máximo de C y *maximos* está ordenada decrecientemente:

  $$c_i = 4 + n \in O\left(n\right) \Rightarrow \text{Lineal.}$$

  En la siguiente llamada, cola vacía:

  $$c_{i+1} = 4 + 1 \in O\left(1\right) \Rightarrow \text{cte.}$$

- Método del potencial:

  $$\Phi\left(D_i\right) = \text{longitud de la doble cola de máximos.}$$

  Al empezar con C vacía se cumple $\forall i : \Phi\left(D_i\right) - \Phi\left(D_0\right) > 0$.

  - En la llamada a $getMax\left(\right)$:

    $$\hat{c}_i = c_i + \Phi\left(D_i\right) - \Phi\left(D_{i-1}\right) = 1 \in O\left(1\right)$$

    Al ser una operación de consulta.

- En la llamada *borrar* ():

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \begin{cases} 2 \text{ si no se borra el máximo} \\ 2 + m - 2 - m = 1 \text{ c.c} \end{cases}$$

- En la llamada a *insertar* ():

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 4 + b_i + (k - b_i) - k = 4 \in O(1)$$

Es decir, el coste amortizado es <u>constante</u>.

Ejercicio 10 (Javier Saras)

Por el <u>método del potencial</u>.

$$\Phi(D_i) = M + m$$

Con $\Phi(D_0) = 0$ y $\Phi(D_i) \geq 0$.

- *maximo* ():
$$\hat{c}_i = 1 + M + m - M - m = 1$$
- *minimo* ():
$$\hat{c}_i = 1 + M + m - M - m = 1$$
- *eliminar* ():
  - Máximo: $\hat{c}_i = 2 + M - 1 + m - M - m = 1$.
  - Mínimo: $\hat{c}_i = 2 + M + m - 1 - M - m = 1$.
  - Ninguno: $\hat{c}_i = 1 + M + m - M - m = 1$.
- *insertar* ():
  - Máximo: $\hat{c}_i = m + 3 + 1 + m + 1 - (M + m) = 5$
  - Mínimo: $\hat{c}_i = m + 3 + M + 1 + 1 - (M + m) = 5$
  - Ninguno: $\hat{c}_i = a + b + 3 + M - a + 1 + m - b + 1 - (M + m) = 5$

Ejercicio 11 (Javier Amado)

```
class multiconj {
    valores: array <int>
    n: int
    +constructor vacio() {
        valores := new int[max]
        n := 0;
    }

    +insertar(v: int) {
        si (n < max) {
            valores[n] = v
            n := n + 1
        fsi
    }
    +elimMayores {
        nborrar := ceil(n/2)
```

```
        m := mediana(valores/n)
        i := 0; elim = 0; j = 0;
        mientras i < n
            si valores[i] > m
                valores [i] := null
                elim := elim + 1
            fsi
            i := i + 1
        fmientras
        mientras j < n AND elim < nborrar
            si valores[j] = m
                valores[j] := null
                elim := elim + 1
            fsi
            j := j + 1
        fmientras
        i := 0; j := 0
        mientras j < n
            si valores[j] != null
                valores[i] = valores[j]
                i := i + 1
            fsi
        fmientras
        n := n - elim; f elim mayores?
    }
}
```

Coste por el método del potencial

$$\Phi\left(D_i\right) = 2n$$

$$\hat{c}_{insertar} = c_{insertar} + \left(\Phi\left(D_i\right) - \Phi\left(D_{i-1}\right)\right) = 1 + 2 = 3 \in O\left(1\right)$$

$$\hat{c}_{elimMayores} = c_{elimMayores} + \left(\Phi\left(D_i\right) - \Phi\left(D_{i-1}\right)\right) = n - 2\left\lfloor n/2 \right\rfloor = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ 1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Hoja 2

Ejercicio 1. (Natalia Rodríguez)

```
func esEA (t: arbolbinario) dev (h: ent, b: bool)
   caso vacio?(t) entonces (0, true)
       !vacio?(t) entonces sea (l, x, r) = desc(t)
                    (hl, bl) = esEA(l)
                    (hr, br) = esEA(r)
                    en(max(hl, hr) + 1, bl AND br AND |hl - hr| <= 1)
   fcaso
ffunc
```

Ejercicio 2. (Dylan Hewitt)

```
func zurdo(T: arbolBinario) dev (esZurdo: bool, nNodos: nat)
    caso vacio?(t) entonces (true, 0)
        !vacio?(t) entonces sea (iz, x, dr) = desc(t) en
        caso vacio?(iz) AND vacio?(dr) entonces (true, 1)
            !vacio?(dr) OR !vacio?(dr) sean (esZurdoIz, nNodosIz) = zurdo(iz)
                                             (esZurdoDr, nNodosDr) = zurdo(dr)
                    entonces:
                    (esZurdoDr AND esZurdoIz AND nNodosDr < nNodosIz,
                    nNodosIz + nNodosDr + 1)
        fcaso
    fcaso
ffunc
```

Ejercicio 3. (Laura Rodrigo)

Dibujo

Ejercicio 4. (Pablo García)

(*Dibujo*)

Sea T_1, T_2 completos con $h_{T_1} = h_{T_2} + 1$

T_1, T_2 son equilibrados por ser completos, T también por serlo T_1, T_2 y $\|h_{T_1} - h_{T_2} = \|h_{T_2} + 1 - h_{T_2}\| = 1 \leq 1$. Sean n_{T_i} el número de nodos de T_i :

$$\begin{aligned} n_{T_1} &= \sum_{i=0}^{h_{T_1}-1} 2^i = \frac{1-2^{h_{T_1}}}{1-2} = 2^{h_{T_1}} - 1 = 2^{h_{T_2}+1} - 1 \\ n_{T_2} &= \sum_{i=0}^{h_{T_2}-1} 2^i = \frac{1-2^{h_{T_2}}}{1-2} = 2^{h_{T_2}} - 1. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} n_{T_1} - n_{T_2} &= 2^{h_{T_2}+1} - 1 - 2^{h_{T_2}} + 1 \\ &= 2^{h_{T_2}} \cdot 2 - 2^{h_{T_2}} \\ &= 2^{h_{T_2}} \Rightarrow \\ \lim_{h_{T_2} \to \infty} n_{T_1} - n_{T_2} &= \lim_{h_{T_2} \to \infty} 2^{h_{T_2}} = \infty. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\forall C > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} : h_{T_2} \leq m \Rightarrow n_{T_1} - n_{T_2} > C.$$

Ejercicio 5. (Iker Muñoz)

Supongamos un desequilibrio LL ($h_{iz} = h_{der} + 2$)

(*Dibujo*)

Por reducción al absurdo.

- Si $h_{ii} = h_{id} = h \Rightarrow$ No hay desequilibrio.
- Si $h_{ii} = h_{id} = h + 1 \Rightarrow$ Antes de insertar ya había un desequilibrio, es decir, no se cumplía la precondición.
- $h_{id} \neq h_{ii}$ (Análogo RR)

Insertamos y hacemos una rotación:

(*Dibujo*)

La rotación disminuye en 1 la altura del árbol y tenemos la altura original.

El elemento ya está insertado y el árbol es AVL, por lo que no es necesario más rotaciones.

Ejercicio 6. (Virginia Chacón)

(*Dibujo*)