Ejercicio 41

Enunciado

Sea K un cuerpo de característica 0 y $a, b \in K$ tales que el polinomio $f(\mathrm{t}) := \mathrm{t}^4 + a\mathrm{t}^2 + b$ es irreducible en $K[\mathrm{t}]$. Hallar, en función de los valores de a y b, el grupo de Galois de f sobre K.

Solución:

Sabemos[1] que la resolvente del polinomio será $g(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^3 - 2a\mathrm{t}^2 + (a^2 - 4b)\,\mathrm{t}$ que es claramente reducible en $K[\mathrm{t}]$. También sabemos[2] que $\Delta(f) = 16b\left(4b - a^2\right)^2$. Observando entonces la tabla de la Proposición V.3.3[2], tenemos que el grupo de Galois de f sobre K, $G_K(f)$, será isomorfo a una de las siguientes opciones: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{D}_4$ ó $\mathbb{Z}_4$.

Empecemos distinguiendo el caso en el que la raíz cuadrada (positiva) del discriminante pertenece a K. Esto es equivalente a que $\delta := \sqrt{16b\left(4b - a^2\right)^2} = 4\sqrt{b}\left(4b - a^2\right) \in K$. Como el segundo término del producto lo cumple por definición, solo nos queda ver cuando se da para el primero. Trivialmente se dará si $\exists c \in K : b = c^2$. Si esto ocurre, observamos la tabla y vemos que $\boxed{G_K(f) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$. En caso contrario, que es lo que asumiremos en lo sucesivo, tendremos que no existe tal c o, dicho de otra manera, b no es un cuadrado en K y $G_K(f)$ será isomorfo a alguno de los otros dos grupos nombrados. Además, tendremos que $K(\delta) = K\left(\sqrt{b}\right)$. Veamos cuando se da cada caso.

Estudiemos ahora la irreducibilidad de f en $K(\delta)[\mathrm{t}]$ según a y b. Que f sea reducible puede significar una de dos cosas:

- Que tenga una raíz $\alpha \in K(\delta)$.
- Que f se descomponga como el producto de otros dos polinomios irreducibles de grado 2 sobre $K(\delta)[\mathrm{t}]$.

Sin embargo, la primera posibilidad la podemos descartar debido a que, si la asumimos como cierta, al ser f irreducible en $K[\mathrm{t}]$, tendríamos la siguiente desigualdad:[3]

$$4 = \deg(f) = \deg(P_{K,\alpha}) = [K(\alpha) : K] \leq [K(\delta) : K] = 2$$

que es una contradicción.

Veamos, pues, bajo que condiciones podemos descomponer f como producto de polinomios de grado dos en $K(\delta)[\mathrm{t}]$. Debido a que f es un polinomio bicuadrado podemos calcular fácilmente sus raíces:

$$u := \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \qquad v := \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

[1] Subsección V.3.c[2].
[2] Ejemplos VII.2.13 (3.1)[1].
[3] Transitividad del grado. Proposición I.1.6[2].

y sus opuestos. Naturalmente, $u, v \in K_f$[4] lo que quiere decir, a su vez, que $\beta := \sqrt{a^2 - 4b} = 2u^2 + a \in K_f$. Por lo tanto, podemos factorizar f como:

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{t}) &= \mathrm{t}^4 + a\mathrm{t}^2 + b \\
&= \left(\mathrm{t}^2 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} \\
&= \left(\mathrm{t}^2 + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)\left(\mathrm{t}^2 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \\
&= \left(t^2 + \frac{a}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\left(\mathrm{t}^2 + \frac{a}{2} + \frac{\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, si $\beta \in K\left(\sqrt{b}\right)$, entonces, f es reducible en $K\left(\sqrt{b}\right)[\mathrm{t}]$ y $\boxed{G_K(f) \simeq \mathbb{Z}_4}$.

Si suponemos ahora que $\beta \notin K\left(\sqrt{b}\right)$, tendremos que $K\left(\sqrt{b}\right) \mid K$ y $K\left(\sqrt{a^2 - 4b}\right) \mid K$ son dos subextensiones distintas de grado 2 de $K_f \mid K$, pero como $\mathbb{Z}_4$ solo tiene un subgrupo de índice 2, por la primera parte del Teorema Fundamental de la teoría de Galois,[5] solo puede haber una subextensión de grado 2. Como solo teníamos dos alternativas, $\boxed{G_K(f) \simeq \mathcal{D}_4}$.

[4] K_f denota el cuerpo de descomposición de f sobre K.
[5] Teorema IV.2.5[2].

Bibliografía

[1] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Estructuras Algebraicas: Divisibilidad en Anillos Conmutativos. Sanz y Torres, 2021.

[2] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Ecuaciones Algebraicas: Extensiones de Cuerpos y Teoría de Galois. Sanz y Torres, 2022.