

Ejercicio 41

Enunciado

Sea K un cuerpo de característica 0 y $a, b \in K$ tales que el polinomio $f(t) := t^4 + at^2 + b$ es irreducible en $K[t]$. Hallar, en función de los valores de a y b , el grupo de Galois de f sobre K .

Solución:

Sabemos¹ que la resolvente del polinomio será $g(t) = t^3 - 2at^2 + (a^2 - 4b)t$ que es claramente reducible en $K[t]$. También sabemos² que $\Delta(f) = 16b(4b - a^2)^2$. Observando entonces la tabla de la Proposición V.3.3[2], tenemos que el grupo de Galois de f sobre K , $G_K(f)$, será isomorfo a una de las siguientes opciones: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, \mathcal{D}_4 ó \mathbb{Z}_4 .

Empecemos distinguiendo el caso en el que una raíz cuadrada del discriminante pertenece a K . Esto es equivalente a que $\delta := \sqrt{16b(4b - a^2)^2} = 4\sqrt{b}(4b - a^2) \in K$. Como el segundo término del producto lo cumple por definición, solo nos queda ver cuándo se da para el primero, que será si $\exists c \in K : b = c^2$. Si esto ocurre, observamos la tabla y vemos que $G_K(f) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. En caso contrario, que es lo que asumiremos en lo sucesivo, tendremos que no existe tal c o, dicho de otra manera, b no es un cuadrado en K , es decir, $K(\delta) = K(\sqrt{b})$. Además, $G_K(f)$ será isomorfo a alguno de los otros dos grupos nombrados. Veamos cuando se da cada caso.

Estudiemos ahora la irreducibilidad de f en $K(\delta)[t]$ según a y b . Que f sea reducible puede significar una de dos cosas:

- Que tenga una raíz $\alpha \in K(\delta)$.
- Que f se descomponga como el producto de otros dos polinomios irreducibles de grado 2 sobre $K(\delta)[t]$.

Sin embargo, la primera posibilidad la podemos descartar debido a que, si la asumimos como cierta, al ser f irreducible en $K[t]$, tendríamos la siguiente desigualdad:³

$$4 = \deg(f) = \deg(P_{K,\alpha}) = [K(\alpha) : K] \leq [K(\delta) : K] = [K(\sqrt{b}) : K] = 2$$

que es una contradicción.

Veamos, pues, bajo que condiciones podemos descomponer f como producto de polinomios de grado dos en $K(\delta)[t]$. Debido a que f es un polinomio bicuadrado podemos calcular fácilmente sus raíces:

$$u := \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \quad v := \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

¹Subsección V.3.c[2].

²Ejemplos VII.2.13 (3.1)[1].

³Transitividad del grado. Proposición I.1.6[2].

y sus opuestos. Naturalmente, $u, v \in K_f$,⁴ lo que quiere decir, a su vez, que $\beta := \sqrt{a^2 - 4b} = 2u^2 + a \in K_f$. Por lo tanto, podemos factorizar f como:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4 + at^2 + b \\ &= \left(t^2 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} \\ &= \left(t^2 + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \left(t^2 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \\ &= \left(t^2 + \frac{a}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \left(t^2 + \frac{a}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Es decir, si $\beta \in K(\sqrt{b})$, f es reducible en $K(\sqrt{b})[t]$ y $G_K(f) \simeq \mathbb{Z}_4$.

Si suponemos ahora que $\beta \notin K(\sqrt{b})$, tendremos que $K(\sqrt{b}) \mid K$ y $K(\beta) \mid K$ son dos subextensiones distintas de grado dos⁵ de $K_f \mid K$, pero como \mathbb{Z}_4 solo tiene un subgrupo de índice 2, por la primera parte del Teorema Fundamental de la teoría de Galois,⁶ solo puede haber una subextensión de grado 2. Como solo teníamos dos alternativas para el grupo de Galois, $G_K(f) \simeq \mathcal{D}_4$.

⁴ K_f denota el cuerpo de descomposición de f sobre K .

⁵Sabemos que $K(\beta) \mid K$ tiene grado 2 porque $a^2 - 4b \in K$.

⁶Teorema IV.2.5[2].

Bibliografía

- [1] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Estructuras Algebraicas: Divisibilidad en Anillos Conmutativos. Sanz y Torres, 2021.
- [2] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Ecuaciones Algebraicas: Extensiones de Cuerpos y Teoría de Galois. Sanz y Torres, 2022.