

## Ejercicio 41

### Enunciado

Sea  $K$  un cuerpo de característica 0 y  $a, b \in K$  tales que el polinomio  $f(t) := t^4 + at^2 + b$  es irreducible en  $K[t]$ . Hallar, en función de los valores de  $a$  y  $b$ , el grupo de Galois de  $f$  sobre  $K$ .

### Solución:

Sabemos<sup>1</sup> que la resolvente del polinomio será  $g(t) = t^3 - 2at^2 + (a^2 - 4b)t$  que es claramente reducible en  $K[t]$ . También sabemos<sup>2</sup> que  $\Delta(f) = 16b(4b - a^2)^2$ . Observando entonces la tabla de la Proposición V.3.3[2], tenemos que el grupo de Galois de  $f$  sobre  $K$  ( $G_K(f)$ ) será isomorfo a una de las siguientes opciones:  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathcal{D}_4$  ó  $\mathbb{Z}_4$ .

Empecemos distinguiendo el caso de que la raíz cuadrada (positiva) del discriminante pertenece a  $K$ . Esto es equivalente a que  $\delta := \sqrt{16b(4b - a^2)^2} \in K$ . Como el segundo término del producto lo cumple por definición, solo nos queda ver cuando se da para el primero. Trivialmente se dará si  $\exists c \in K : b = c^2$ . Si esto ocurre, observamos la tabla y vemos que  $G_K(f) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . En caso contrario, que es lo que asumiremos en lo sucesivo, tendremos que no existe tal  $c$  o, dicho de otra manera,  $b$  no es un cuadrado en  $K$  y  $G_K(f)$  será isomorfo a alguno de los otros dos grupos nombrados. Además, tendremos que  $K(\delta) = K(\sqrt{b})$ . Veamos cuando se da cada caso.

Estudiemos ahora la irreducibilidad de  $f$  en  $K(\delta)[t]$  según  $a$  y  $b$ . Que  $f$  sea reducible puede significar una de dos cosas:

- Que tenga una raíz  $\alpha \in K(\delta)$ .
- Que  $f$  se descomponga como el producto de otros dos polinomios irreducibles de grado 2 sobre  $K(\delta)[t]$ .

Sin embargo, la primera posibilidad la podemos descartar debido a que, si la asumimos como cierta, al ser  $f$  irreducible en  $K[t]$ , tendríamos la siguiente desigualdad:<sup>3</sup>

$$4 = \deg(f) = \deg(P_{K,\alpha}) = [K(\alpha) : K] \leq [K(\delta) : K] = 2$$

que es una contradicción.

Veamos, pues, bajo que condiciones podemos descomponer  $f$  como producto de polinomios de grado dos en  $K(\delta)[t]$ . Debido a que  $f$  es un polinomio bicuadrado podemos calcular fácilmente sus raíces:

$$u := \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \quad v := \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

y sus opuestos. Naturalmente,  $u, v \in K_f$ <sup>4</sup> lo que quiere decir, a su vez, que  $d := \sqrt{a^2 - 4b} = 2u^2 + a \in K_f$ . Al ser  $d$  raíz de  $t^2 - (a^2 - 4b)$ , su polinomio irreducible sobre  $K$  lo dividirá y, por tanto, tendrá grado menor o igual a 2. Esto nos permite asegurar entonces que  $d \in K(\sqrt{b})$ . Por lo tanto, podemos

<sup>1</sup>Subsección 3.c[2].

<sup>2</sup>Ejemplos VII.2.13 (3.1)[1].

<sup>3</sup>Transitividad del grado. Proposición I.1.6[2].

<sup>4</sup> $K_f$  denota el cuerpo de descomposición de  $f$  sobre  $K$ .

factorizar  $f$  como:

$$\begin{aligned}f(t) &= t^4 + at^2 + b \\&= \left(t^2 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} \\&= \left(t^2 + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \left(t^2 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) \\&= \left(t^2 + \frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right) \left(t^2 + \frac{a}{2} + \frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

# Bibliografía

---

- [1] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Estructuras Algebraicas: Divisibilidad en Anillos Conmutativos. Sanz y Torres, 2021.
- [2] J. Manuel Gamboa José F. Fernando. Ecuaciones Algebraicas: Extensiones de Cuerpos y Teoría de Galois. Sanz y Torres, 2022.