Hoja-3-Resuelta.pdf

DEYORS

Teoria de la Programacion

4º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

TPRO HOJA 3 26/03/21.

(3.2) Extiende WHILE con el statement:

assert b before S.

$\langle$ assert b before S, s $\rangle \Rightarrow \langle S, s \rangle$ si $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$. $[\text{assert}^{tt}_{sos}]$

$\langle$ assert b before S, s $\rangle$ si $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$. $[\text{assert}^{ff}_{sos}]$

Demuestra que assert true before S es semánticamente equivalente a S.

Dado se State, demostraremos que:

$\langle$ assert true before S, s $\rangle \Rightarrow^* s' \Leftrightarrow \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$

$\Rightarrow$) Supongamos que $\langle$ assert true before S, s $\rangle \Rightarrow s'$. (1)
Por la definición anterior, como $\mathcal{B}[\![\text{true}]\!]s = tt$, usaremos $[\text{assert}^{tt}_{sos}]$, y obtenemos:
$\langle$ assert b before S, s $\rangle \Rightarrow \langle S, s \rangle$. Por (1) y por el determinismo de la semántica, entonces $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$. ✓

$\Leftarrow$) Supongamos que $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$. Como $\mathcal{B}[\![\text{true}]\!]s = tt$, entonces usando $[\text{assert}^{tt}_{sos}]$, obtenemos:

$\langle$ assert b before S, s $\rangle \Rightarrow \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$, por lo que

$\langle$ assert b before S, s $\rangle \Rightarrow^* s'$. ✓

Demuestra que assert false before S no es equivalente ni a while true do skip ni a skip.

Dado se State, como $\mathcal{B}[\![\text{false}]\!]s = ff$, desarrollaremos

$\langle$ assert false before S, s $\rangle$. Como sólo podemos usar $[\text{assert}^{ff}_{sos}]$, no podremos desarrollar una secuencia de derivación y la ejecución quedaría atascada.

Desarrollando: $\langle$while true do skip, s$\rangle \xRightarrow{[\text{while}_{sos}]} \langle$if true then (skip ; while true do skip), s$\rangle \Rightarrow$

$\underset{[\text{if}^{tt}_{sos}]}{\Rightarrow} \langle$ skip; while true do skip, s $\rangle \underset{[\text{comp}^2_{sos}]}{\overset{\langle \text{skip}, s\rangle \Rightarrow s}{\Rightarrow}} \langle$while true do skip, s $\rangle \Rightarrow \ldots$

Se ha llegado a una configuración idéntica a la premisa, luego la ejecución es infinita por estar en un loop. La configuración de loop no es equivalente a la configuración atascada, por tanto, assert false before S' no es equivalente a while true do skip.

Por otro lado, desarrollando: $\langle skip, s\rangle \underset{[skip_{sos}]}{\Rightarrow} s$. La ejecución ha terminado en el estado inicial. Como skip es un statement con una configuración que termina y assert true before S tiene una configuración que se queda atascada, estos dos statements no son equivalentes.

(3.4) Se extiende While con el statement

random(x)

La idea es que se cambie el valor de x a cualquier nº natural. Hazlo para NS y SOS.

$$[random^{tr}_{NS}] \quad \frac{\langle x:=1, s\rangle \to s'', \langle random(x), s''\rangle \to s'}{\langle random(x), s\rangle \to s'} \quad \text{si } s\,x \leq 0$$

$$[random^{go}_{NS}] : \quad \frac{\langle x:=x+1, s\rangle \to s'', \langle random(x), s''\rangle \to s'}{\langle random(x), s\rangle \to s'} \quad \text{si } s\,x \geq 1$$

$$[random^{stop}_{NS}] : \quad \langle random(x), s\rangle \to s \quad \text{si } s\,x \geq 1$$

Si está extendido con el or construct, entonces random(x) sería equivalente a:

if $x \leq 0$ then $(x:=1; random(x))$ else $(x:=x+1; random(x))$ or skip

En SOS:

$$[random_{sos}] : \langle random(x), s\rangle \Rightarrow \langle \text{if } x \leq 0 \text{ then } (x:=1; random(x)) \text{ else } (x:=x+1; random(x)) \text{ or } skip, s\rangle$$

TPRO 26/03/21 (2)

(3.6) Especifica semánticas de estructura operacional para expresiones aritméticas donde las partes individuales de la expresión sean ejecutados en paralelo. Demuestra que sigues obteniendo el resultado especificado en cf.

NO ENTIENDO Y CREO QUE ESTÁ MAL.

$[\text{intpar}_{sos}]$ $\langle n, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \mathcal{N}[\![n]\!]$ (sólo es un proceso)

$[\text{varpar}_{sos}]$ $\langle x, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} s\ x$ (sólo es un proceso)

$[\text{oppar}^1_{sos}]$ $\dfrac{\langle a_1, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle a_1', s'\rangle}{\langle a_1 \text{ op } a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle a_1' \text{ op } a_2, s'\rangle}$ si $a_1 \notin Num$

$[\text{oppar}^2_{sos}]$ $\dfrac{\langle a_1, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} n_1}{\langle a_1 \text{ op } a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle \mathcal{N}^{-1}[\![n_1]\!] \text{ op } a_2, s'\rangle}$ si $a_1 \notin Num$.

$[\text{oppar}^3_{sos}]$ $\dfrac{\langle a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle a_2', s'\rangle}{\langle a_1 \text{ op } a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle a_1 \text{ op } \mathcal{N}^{-1}[\![n_2]\!], s'\rangle}$ si $a_2 \notin Num$

$[\text{oppar}^4_{sos}]$ $\dfrac{\langle a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} n_2}{\langle a_1 \text{ op } a_2, s\rangle \Rightarrow_{Aexp} \langle a_1 \text{ op } \mathcal{N}^{-1}[\![n_2]\!], s'\rangle}$ si $a_2 \notin Num$.

(3.7) Utiliza la semántica natural para mostrar que la ejecución del siguiente Statement finalizará en un estado donde la x tiene un valor 4:

```
begin var y := 1;
  (x := 1;
   begin var x := 2; y := x+1 end;
   x = y+x
end
```

$(1) = \text{var } y := 1; \varepsilon.$

$(2) = \text{var } x := 2; \varepsilon.$

El árbol de derivación es:

$$[\text{block}_{ns}] \quad \frac{T_1 \qquad , \qquad T_2}{\langle \text{begin } \underbrace{D_V}_{(1)} \; S' \text{ end}, s\rangle \longrightarrow s[DV(D_V) \mapsto s]} \quad \text{, donde:}$$

$$T_1 \equiv [\text{var}_{ns}] \quad \frac{\langle \varepsilon, s[y \mapsto 1]\rangle \longrightarrow_D s_1}{\langle D_V, s\rangle \longrightarrow_D s_1.} \qquad \boxed{s_1 = s[y \mapsto 1]}$$

$$T_2 \equiv \frac{T_3 \quad , T_4 \quad , T_5}{\langle S', s_1\rangle \longrightarrow s_2} \quad \text{, donde:}$$

$$\boxed{s_3 = s[y \mapsto 1][x \mapsto 1]}$$

$$T_3 \equiv \langle x := 1, s_1\rangle = s_3$$

$$T_4 \equiv \frac{T_6 \qquad , \qquad T_7}{\langle \text{begin } D_V' \; S' \text{ end}, s_3\rangle \longrightarrow s_4[DV'(D_V') \mapsto s_3]} \quad \text{, donde:}$$

$$T_6 \equiv \frac{\langle \varepsilon, s_3[x \mapsto 2]\rangle \longrightarrow s_4}{\langle D_V', s_3\rangle \longrightarrow s_4} \qquad \boxed{s_4 = s_3[x \mapsto 2]}$$

$$T_7 \equiv \langle y := x+1, s_4\rangle \longmapsto s_5 \qquad \boxed{s_5 = s_4[y \mapsto 3] = s[y \mapsto 3][x \mapsto 2].}$$

Para averiguar T_5 necesitamos calcular $s_5[DV'(D_V') \mapsto s_3] =$

$$= s[y \mapsto 3][x \mapsto 2][DV'(\underbrace{D_V'}_{(2)}) \mapsto s_3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DV'(D_V') = \{x\} \Rightarrow s_5[\{x\} \mapsto s_3]\, x \underset{x \in \{x\}}{=} s_3\, x \quad , \quad s_5[\{x\} \mapsto s_3]\, y \underset{y \notin \{x\}.}{=} s_5\, y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s_5[DV'(D_V') \mapsto s_3] = s[x \mapsto 1][y \mapsto 3] = s_6.}$$

$T_5: \langle x := y + x, s_6 \rangle \to \underbrace{s[x \mapsto 4][y \mapsto 3]}_{s_2}$

$s_2[DV(D_v) \mapsto s]\ x \underset{p}{=} s_2\ x = 4$

$DV(D_v) \underset{(1)}{=} \{y\},\ x \notin \{y\},\ y \in \{y\}$

$s_2[DV(D_v) \mapsto s]\ y = s\ y = y.$

Sea un estado s∈State, la ejecución del enunciado es:

$\boxed{\langle \text{begin } D_v\ S' \text{ end}, S' \rangle \to s[x \mapsto 4].}$

(3.8) Considerando la siguiente ejecución, construir el árbol de derivación utilizando variables y procedimientos dinámicos desde un estado inicial donde el valor de la x es 3:

```
begin proc fac is begin var z:=x;
                         if x=1 then skip
                         else (x:=x-1; call proc; y=z*y)
                       end;
      (y:=1; call fac)
end
```

$\boxed{s_0 = [x \mapsto 3]}$

El árbol de derivación es:

$$[block_{ns}]\ \frac{\langle D_v, s_0 \rangle \to_D s_1 \qquad T_2}{env_p \vdash \langle \text{begin } D_v\ D_p\ S \text{ end}, s_0 \rangle \to s_2[DV(D_v) \mapsto s_0].}$$

$\boxed{s_1 = s_0}$ [none$_{ns}$]

donde:

$D_v = \varepsilon$

$D_p = \text{proc fac is } S';\ \varepsilon$

$DV(D_v) = \emptyset$

$T_2 \equiv upd_p(D_p, env_p) \vdash \langle S', s_0 \rangle \to s_2$

$\hookrightarrow upd_p(\text{proc fac is } S';\ \varepsilon, env_p) = upd_p(\varepsilon, env_p[fac \mapsto S']) = env_p[fac \mapsto S'] =$

$= env_p 1$, donde $env_p 1$: Pname $\longrightarrow$ Stm, luego $\boxed{env_p[fac \mapsto S']\ fac = S'}$

$fac \longmapsto S'$

$\Downarrow$

$T_2 \equiv env_p 1 \vdash \langle S', s_0 \rangle \to s_2.$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$T_2 \equiv \frac{env_p\,1 \vdash \langle y:=1, s_0\rangle \to s_3 \quad , \quad T_3}{env_p\,1 \vdash \langle y:=1;\ call\ fac,\ s_0\rangle \to s_2}$$
[$comp_{ns}$]

$$\boxed{s_3 = s_0[y \mapsto 1] = = s[x\mapsto 3][y \mapsto 1].}$$

donde:

$$T_3 \equiv \frac{T_4}{env_p\,1 \vdash \langle call\ fac,\ s_3\rangle \to s_2}$$, donde:
[$call_{ns}^{rec}$]

$$\boxed{s_5 = s_3[z \mapsto 3]}$$

$$T_4 \equiv \frac{\dfrac{\langle \varepsilon, s_5\rangle \to s_5}{\langle (z:=x;\ \varepsilon), s_3\rangle \to s_5} \quad , \quad T_5}{env_p\,1 \vdash \langle begin\ D_v'\ \ D_p'\ \ S''\ end,\ s_3\rangle \to s_2}$$
[$block_{ns}$]

$D_v' = var\ z:=x;\ \varepsilon$

$D_p' = \varepsilon$.

$s_2 = s_4[DV'(D_v') \mapsto s_3]$

$$\boxed{s_5 = s[x\mapsto 3,\ y \mapsto 1,\ z\mapsto 3].}$$

, donde:

$$T_5 \equiv \frac{T_6}{\underbrace{upd_p(\varepsilon, env_p\,1) \vdash \langle S'', s_5}_{env_p\,1\ \vdash\ \langle S'',\ s_5\rangle}\rangle \to s_4}$$

$$\boxed{s_6 = s_5[x\mapsto 2].}$$

$\Downarrow$

$$T_5 \equiv \frac{T_6}{env_p\,1 \vdash \langle if\ (x=1)\ then\ skip\ else\ (x:=x-1;\ call\ fac;\ y=z*y),\ s_5\rangle \to s_4}$$

donde:

$$T_6 \equiv \frac{env_p\,1 \vdash \langle x:=x-1, s_5\rangle \to s_6 \ ,\ \dfrac{T_7}{env_p\,1 \vdash (call\ fac, s_6) \to s_7}\ ,\ env_p\,1 \vdash (y:=z*y, s_7) \to s_4}{env_p\,1 \vdash \langle (x:=x-1;\ call\ fac;\ y:=z*y),\ s_5\rangle \to s_4}$$
[if_{ns}^{ff}]

donde:

$s_8 = s_6[z \mapsto 2]$

$s_7 = s_9[DV'(D_v') \mapsto s_6]$

$$T_7 \equiv \frac{\langle z:=x, s_6\rangle \to s_8 \quad , \quad T_8}{env_p\,1 \vdash \langle \underbrace{env_p\,1\ fac}_{S' \,=\, begin\ D_v'\ D_p'\ S''\ end},\ s_6\rangle \to s_7}$$

donde:

$$T_8 \equiv \frac{T_9}{\underbrace{upd_p(\varepsilon, env_p\,1) \vdash \langle S'', s_8}_{env_p\,1\ \vdash\ \langle S'',\ s_8\rangle}\rangle \to s_9}$$

$\Downarrow$

$$\Downarrow \qquad T_8 \equiv \frac{T_9}{env_p 1 \vdash \langle if\ (x=1)\ then\ skip\ else\ (x:=x-1;\ call\ fac;\ y:=z*y),\ S_8\rangle \to S_9}$$

donde:

$$T_9 \equiv \frac{env_p 1 \vdash \langle x:=x-1, S_8\rangle \to S_{10},\ \overbrace{env_p 1 \vdash \langle call\ fac; S_{10}\rangle \to S_{11}}^{T_{10}},\ env_p 1 \vdash (y:=z*y, S_{11}) \to S_9}{env_p 1 \vdash \langle (x:=x-1;\ call\ fac;\ y:=z*y), S_8\rangle \to S_9}$$

$\boxed{S_{10} = S_8[x \mapsto 1]}$

donde:

$$T_{10} \equiv \frac{\langle z:=x, S_{10}\rangle \to S_{13},\ T_{11}}{env_p 1 \vdash \langle \underbrace{env_p 1\ fac}_{S'}, S_{10}\rangle \to S_{11}}$$

$S' =$ begin $D_v'\ D_p'\ S''$ end

$\boxed{S_{11} = S_{12}[DV'(D_v') \mapsto S_{10}]}$

$\boxed{S_{13} = S_{10}[z \mapsto 1]}$

$$T_{11} \equiv \frac{T_{12}}{\underbrace{upd_p(\varepsilon, env_p 1) \vdash \langle S'', S_{13}\rangle}_{=\ env_p 1 \vdash \langle S'', S_{13}\rangle} \to S_{12}}$$

$$\Downarrow$$

$$T_{11} \equiv \frac{env_p 1 \vdash \langle skip, S_{13}\rangle \to S_{13}}{env_p 1 \vdash \langle if\ (x=1)\ then\ skip\ else\ (x:=x-1;\ call\ fac;\ y:=z*y), S_{13}\rangle \to S_{12}}.$$

La única manera de que se cumpla skip y la condición if es que $S_{13} = S_{12}$, luego:

- $D_v = \varepsilon$, $D_v' \equiv var\ z:=x;\ \varepsilon$
- $DV(D_v) = \phi$, $DV'(D_v') = \{z\}$

- $S_{13} = S_{12} = S_{10}[z \mapsto 1]$
- $S_{11} = S_{12}[DV'(D_v') \mapsto S_{10}]$
- $S_{10} = S_8[x \mapsto 1]$.
  - $env_p 1 \vdash \langle y:=z*y, S_{11}\rangle \to S_9$.
- $S_8 = S_6[z \mapsto 2]$.
- $S_7 = S_9[DV'(D_v') \mapsto S_6]$.
- $S_6 = S_5[x \mapsto 2]$.
- $S_5 = [x \mapsto 3\ \ y \mapsto 1,\ z \mapsto 3]$.
  - $env_p 1 \vdash \langle y:=z*y, S_7\rangle \to S_4$
- $S_3 = S_0[x \mapsto 3, y \mapsto 1]$.
- $S_2 = S_4[DV'(D_v') \mapsto S_3]$. ; $S_1 = S_0$

Vamos despejando estados desde el inicio:

$s_0 = s_1 = [x \mapsto 3]$.

$\boxed{s_2 = s_4[SZS \mapsto s_3] = [x \mapsto 1, y \mapsto 6]}$ → Estado final: x acaba en el valor 1 e y en el 6.

s_4? s_3?

#

$s_3 = [x \mapsto 3, y \mapsto 1]$.

$s_4 = [x \mapsto 1, y \mapsto 6, z \mapsto 3]$.

s_7?, $env_p 1 \vdash \langle y := z * y, s_7 \rangle$

$s_5 = [x \mapsto 3, y \mapsto 1, z \mapsto 3]$.

$s_6 = [x \mapsto 2, y \mapsto 1, z \mapsto 3]$.

$s_7 = [x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3]$.

s_9?, $s_9[SZS \mapsto s_6]$

$s_8 = [x \mapsto 2, y \mapsto 1, z \mapsto 2]$.

$s_9 = [x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 2]$.

s_{11}? $env_p 1 \vdash \langle y := y * z, s_{11} \rangle$

$s_{10} = [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 2]$.

$s_{11} = [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 2]$.

s_{12}? $s_{12}[SZS \mapsto s_{10}]$

$s_{12} = s_{13} = [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 1]$.

TPRO

29/03/21.

(3.9) Utiliza las semánticas para verificar que el siguiente Statement asigna al estado final el valor 6 a "y" (variables y procedimientos dinámicos):

```
begin var x := 0 ;
      proc p is x := x*2 ;
      proc q is call p ;
      begin var x := 5 ;
            proc p is x := x+1 ;
            call q ; y := x
      end
end
```

El árbol de derivación es:

$$\boxed{s_1 = s_0[x \mapsto 0]}$$

$$[block_{ns}] \quad \frac{\langle D_v, s_0\rangle \to_D s_1 \qquad , \qquad T_1}{env_p \vdash \langle \text{begin } D_v\ D_p\ S \text{ end}, s_0\rangle \to s_2[DV(D_v) \mapsto s_0]}.$$

$D_v \equiv$ var $x := 0$; ε

$D_p \equiv$ proc p is $x := x*2$; proc q is call p ; ε

donde,

$$T_1 \equiv \underbrace{upd_p(\text{proc } p \text{ is } x := x*2 ; \text{ proc } q \text{ is call } p ; \varepsilon, env_p)}_{\shortparallel} \vdash \langle S', s_1\rangle \to s_2.$$

$upd_p($proc q is call p ; ε , $\underbrace{env_p[p \mapsto x := x*2]}_{\shortparallel}$ $)$

$\shortparallel$

$upd_p(\varepsilon, env_1[q \mapsto \text{call } p])$

$\shortparallel$

$env_p 1 :$ Pname $\to$ Stm

$p \longmapsto x := x*2$

$q \longmapsto env_p\ q$

$env_p 2$: Pname $\to$ Stm

$p \longmapsto x := x*2$

$q \longmapsto$ call p

$T_1 \equiv env_p 2 \vdash \langle S', s_1\rangle \to s_2$.

$$\boxed{S_2 = S_3[DV'(D_v') \mapsto S_1]}$$

$$\boxed{S_4 = S_1[x \mapsto 5]}$$

$$T_1 \equiv \frac{\langle D_v', s_1\rangle \to s_4 \quad , \quad T_2}{env_p 2 \vdash \langle \text{begin } D_v' \; D_p' \; S' \text{ end}, s_1 \rangle \to s_2}$$

$D_v' \equiv \text{var } x := 5; \varepsilon$

$D_p' \equiv \text{proc } p \text{ is } x := x+1 ; \varepsilon$

donde:

$$T_2 \equiv upd_p(\varepsilon, \underbrace{env_p 2[p \mapsto x := x+1]}_{=}) = env_p 3$$

$$\begin{aligned} env_p 3 : \; & Pname \to Stm \\ & p \mapsto x := x+1 \\ & q \mapsto call\ p \end{aligned}$$

$$\underset{[comp_{ns}]}{T_2} \equiv \frac{T_3 \quad , \quad env_p 3 \vdash \langle y := x, s_5\rangle \to s_3}{env_p 3 \vdash \langle call\ q ; y := x , s_4 \rangle \to s_3}$$

donde:

$$T_3 \equiv \frac{env_p 3 \vdash \langle x := x+1, s_4 \rangle \to s_5}{env_p 3 \vdash \langle call\ q, s_4 \rangle \to s_5}$$

Los estados que se han formado son:

$\boxed{s_0 \in State}$

$\boxed{s_1 = s_0[x \mapsto 0]}$

$s_2 = s_3[DV'(D_v') \mapsto s_1] = s_3[\{x\} \mapsto s_1]$, $\boxed{s_2 = s_0[x \mapsto 0][y \mapsto 6]}$

$s_3 ?$

$env_p 3 \vdash \langle y := x , s_5 \rangle \to s_3$, $\boxed{s_3 = s_0[x \mapsto 6][y \mapsto 6]}$

$s_5 ?$

$s_4 = s_1[x \mapsto 5] = s_0[x \mapsto 5]$

$env_p 3 \vdash \langle x := x+1, s_4 \rangle \to s_5$

$\Downarrow$

$\boxed{s_5 = s_4[x := 6] = s_0[x \mapsto 6]}$

El estado final es $\boxed{s_2[\overbrace{DV(D_v)}^{\{x\}} \mapsto s_0] = s_0[y \mapsto 6].}$ #

(3.11) Utiliza el Statement del ej. 3.9 aplicado a variables dinámicas y procedimientos estáticos para demostrar que el estado final tendrá el valor 10 para la variable y.

```
begin var x := 0 ;
      proc p is x := x*2 ;
      proc q is call p ;
      begin var x := 5 ;
            proc p is x := x+1 ;
            call q ; y := x
      end
end
```

El árbol de derivación es:

$$\boxed{S_1 = S_0[x \mapsto 0]}$$

$$[block_{ns}] \quad \frac{\langle D_v, S_0 \rangle \longrightarrow S_1 \quad , \quad T_1}{env_p \vdash \langle \text{begin } D_v \; D_p \; S' \text{ end}, S_0 \rangle \longrightarrow S_2[DV(D_v) \mapsto S_0]}$$

$D_v \equiv$ var $x := 0$; ε

$D_p \equiv$ proc p is $x := x*2$; proc q is call p ; ε.

donde:

$$T_1 \equiv \underbrace{upd_p(D_p, env_p)}_{\shortparallel} \vdash \langle S', S_1 \rangle \longrightarrow S_2$$

$$upd_p(\text{proc } p \text{ is } x := x*2 ; D_p, env_p) = upd_p(D_p, \underbrace{env_p[p \mapsto (x := x*2, env_p)]}_{\shortparallel}) =$$

env_p1 : Pname $\to$ Stm $\times$ Envp

$p \mapsto (x := x*2, env_p)$

$q \mapsto env_p\, q$.

$$= upd_p(\text{proc } q \text{ is call } p, \varepsilon, env_p1) =$$

$$= upd_p(\varepsilon, \underbrace{env_p1[q \mapsto (\text{call } p, env_p1)]}_{\shortparallel}) = env_p2.$$

env_p2 : Pname $\longrightarrow$ Stm $\times$ Envp

$p \longmapsto env_p1\; p = (x := x*2, env_p\, p)$

$q \longmapsto (\text{call } p, env_p1)$

$T_1 \equiv env_p 2 \vdash \langle S, s_1 \rangle \longrightarrow s_2$

$\boxed{s_4 = s_1[x \mapsto 5]}$

$\boxed{s_2 = s_3[DV'(D_v') \mapsto s_1]}$

$$\underset{[block_{ns}]}{T_1} \equiv \frac{\langle D_v', s_1 \rangle \longrightarrow s_4 \quad , \quad T_2}{env_p 2 \vdash \langle \text{begin } D_v' \; D_p' \; S' \text{ end}, s_1 \rangle \longrightarrow s_2}$$

$D_v' \equiv \text{var } x := 5; \varepsilon$

$D_p' \equiv \text{proc } p \text{ is } x := x+1.$

donde:

$T_2 \equiv \underbrace{upd_p(D_p', env_p 2)} \vdash \langle S', s_4 \rangle \longrightarrow s_3.$

$\overset{\shortparallel}{upd_p}(\text{proc } p \text{ is } x := x+1; \varepsilon, env_p 2) =$

$= upd_p(\varepsilon, \underbrace{env_p 2[p \mapsto (x := x+1, env_p 2)]}) = env_p 3$

$\shortparallel$

$env_p 3 : Pname \longrightarrow Stm \times Env_p$

$p \longmapsto (x := x+1, env_p 2)$

$q \longmapsto env_p 2 \; q = (call \; p, env_p 1)$

$$\underset{[comp_{ns}]}{T_2} \equiv \frac{T_3 \quad , \quad env_p 3 \vdash \langle y := x, s_5 \rangle \longrightarrow s_3}{env_p 3 \vdash \langle call \; q ; y := x, s_4 \rangle \longrightarrow s_3}$$

donde:

$$\underset{[call_{ns}]}{T_3} \equiv \frac{T_4}{env_p 3 \mapsto \langle call \; q, s_4 \rangle \longrightarrow s_5}, \text{ donde:}$$

$$\underset{[call_{ns}]}{T_4} \equiv \frac{env_p \vdash \langle x := x * 2, s_4 \rangle \longrightarrow s_5}{env_p 1 \vdash \langle call \; p, s_4 \rangle \longrightarrow s_5}$$

$\boxed{s_5 = s_4[x \mapsto 10]}$

Los estados son:

$s_5 = s_4[x \mapsto 10] = s_0[x \mapsto 10].$

$s_0 \in State$

$s_1 = s_0[x \mapsto 0]$

$s_2 = s_3[DV'(D_v') \mapsto s_1] = s_3[\{x\} \mapsto s_1].$, $s_2 \overset{s_3?}{=} s_0[x \mapsto 0][y \mapsto 10].$

$env_p 3 \vdash \langle y := x, s_5 \rangle \longrightarrow s_3$, $s_5?$, $s_3 = s_5[y \mapsto 10] = s_0[x \mapsto 10][y \mapsto 10]$. .

$s_4 = s_1[x \mapsto 5] = s_0[x \mapsto 5].$

__El estado final es__: $\boxed{s_2[\underset{\{x\}}{DV(D_v)} \mapsto s_0] = s_0[y \mapsto 10].}$

(3.13) Utiliza el Statement del ej. 3.9. para que, utilizando variables y procedimientos estáticos, llegar a la conclusión de que el estado final acaba dando el valor 5 a la variable y.

```
begin var x := 0;
      proc p is x := x*2;
      proc q is call p;
      begin var x := 5;
            proc p is x := x+1;
            call q ; y := x
      end
end
```

El árbol de derivación es:

$$[block_{ns}]\ \frac{T_1 \qquad , \qquad T_2}{(env_v, env_p) \vdash \langle begin\ D_v\ D_p\ S\ end, sto\rangle \to sto_1}$$

$D_v \equiv var\ x := 0 ;\ \varepsilon$

$D_p \equiv proc\ p\ is\ x := x*2 ;\ proc\ q\ is\ call\ p ;\ \varepsilon$

donde: $\boxed{new\ 1 = 2.}$

$$T_1 \equiv \frac{\langle \varepsilon, env_v[x \mapsto 1][next \mapsto new\ 1], sto[1 \mapsto \overset{v}{0}]\rangle \to_D (env_v 2, sto 2)}{\langle var\ x := 0 ;\ \varepsilon, env_v, sto\rangle \to_D (env_v 2, sto 2)}$$

$\boxed{\begin{array}{l} env_v : Var \cup \{next\} \to Loc \quad (\forall \sigma \in Var) \\ \quad \sigma \mapsto 0 \\ \quad next \mapsto 1. \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} env_v 2 : Var \cup \{next\} \to Loc \\ \quad x \mapsto 1 \\ \quad next \mapsto 2 = new\ 1. \\ \quad \sigma \mapsto 0 \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} sto\ 2 : Loc \to \mathbb{Z} \\ \quad 1 \mapsto 0 \end{array}}$

$v = \mathcal{A}[\![0]\!](sto \circ env_v) = 0$

$$T_2 \equiv (env_v 2, \underbrace{upd_p(D_p, env_v 2, env_p)}) \vdash \langle S, sto2 \rangle \to sto1$$

$$upd_p(\text{proc } p \text{ is } x := x * 2;\ D_p;\ env_v 2, env_p) =$$

$$= upd_p(\text{proc } q \text{ is call } p;\ \varepsilon,\ env_v 2,\ \underbrace{env_p[p \mapsto (x := x*2, env_v 2, env_p)]}) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} env_p 2 : Pname \to Stm \times Env_v \times Env_p \\ \qquad p \mapsto (x := x*2, env_v 2, env_p P) \end{array}}$$

$$= upd_p(\varepsilon, env_v 2, \underbrace{env_p 2[q \mapsto (\text{call } p, env_v 2, env_p 2)]}) = env_p 3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} env_p 3 :\ p \mapsto (x := x*2, env_v 2, env_p 2) \\ \qquad\quad q \mapsto (\text{call } p, env_v 2, env_p 2) \end{array}}$$

$$T_2 \equiv (env_v 2, env_p 3) \vdash \langle S, sto2 \rangle \to sto1.$$

$$\downarrow$$

$$T_2 \equiv \frac{T_3 \qquad , \qquad T_4}{\langle env_v 2, env_p 3 \rangle \vdash \langle \text{begin } D_v'\ D_p'\ S' \text{ end}, sto2 \rangle \to sto1.}$$

$D_v' = \text{var } x := 5; \varepsilon$

$D_p' = \text{proc } p \text{ is } x := x+1; \varepsilon.$, donde:

$$T_3 \equiv \frac{\langle \varepsilon, env_v 2[x \mapsto \overset{(1)}{2}][next \mapsto \overset{(2)}{3}], sto[2 \mapsto \overset{(3)}{5}] \rangle \to_D (env_v 3, sto3)}{\langle \text{var } x := 5; \varepsilon, env_v 2, sto2 \rangle \to_D (env_v 3, sto3)}$$

(1) = $env_v 2\ next$

(2) = $new\ 2$

(3) = $\mathcal{A}[\![5]\!](sto2 \circ env_v 2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} env_v 3 : Var \cup \{next\} \to Loc \\ \qquad x \mapsto 2 \\ \qquad next \mapsto 3 \\ \qquad y \mapsto 0 \\ \qquad r \mapsto 0. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} sto3 : Loc \to \mathbb{Z} \\ \qquad 1 \mapsto 0 \\ \qquad 2 \mapsto 5 \end{array}}$$

TPRO 29/03/21 (4)

$T_4 \equiv (env_v 3, \underbrace{upd_p(D_p', env_v 3, env_p 3)}) \vdash \langle S', sto 3\rangle \longrightarrow sto 1$

$$\| $$

$upd_p(\text{proc } p \text{ is } x := x+1 ; \varepsilon, env_v 3, env_p 3) =$

$= upd_p(\varepsilon, env_v 3, \underbrace{env_p 3[p \mapsto (x:=x+1, env_v 3, env_p 3)]}) = env_p 4$

$$\boxed{\begin{array}{ll} env_p 4 : & p \mapsto (x:=x+1, env_v 3, env_p 3) \\ & q \mapsto (call\ p, env_v 2, env_p 2) \end{array}}$$

$T_4 \equiv (env_v 3, env_p 4) \vdash \langle S', sto 3\rangle \longrightarrow sto 1.$

$$\underset{[comp_{ns}]}{T_4} \equiv \frac{T_5 \quad , \quad T_6}{(env_v 3, env_p 4) \vdash \langle call\ q ; y := x, sto 3\rangle \longrightarrow sto 1.} \text{, donde:}$$

$$T_5 \equiv \cfrac{\cfrac{(env_v 2, env_p) \vdash \langle x := x*2, sto 3\rangle \longrightarrow sto 4}{(env_v 2, env_p 2) \vdash \langle call\ p, sto 3\rangle \longrightarrow sto 4}}{(env_v 3, env_p 4) \vdash \langle call\ q, sto 3\rangle \longrightarrow sto 4}$$

$$\boxed{sto 4 \underset{[ass_{ns}]}{=} sto 3[\underbrace{(env_v 2\ x)}_{1} \mapsto \underbrace{\mathcal{A}[\![a]\!](sto 3 \circ env_v 2)}_{0*2=0}]} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} sto 4 : & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 5. \end{array}}$$

$T_6 \equiv (env_v 3, env_p 4) \vdash \langle y := x, sto 4\rangle \longrightarrow sto 1.$

$$\boxed{sto 1 \underset{[ass_{ns}]}{=} sto 4[(\underbrace{env_v 3\ y}_{0}) \mapsto \underbrace{\mathcal{A}[\![x]\!](sto 4 \circ env_v 3)}_{sto 4 \circ env_v 3\ x = 5.}]} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} sto 1 : & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 5 \\ & 0 \mapsto 5. \end{array}}$$

El almacenamiento final es sto 1, que lleva la localización 0 (correspondiente a "y") al valor 5.

#.