Hoja-1-Resuelta.pdf

DEYORS

Teoria de la Programacion

4º Grado en Matemáticas

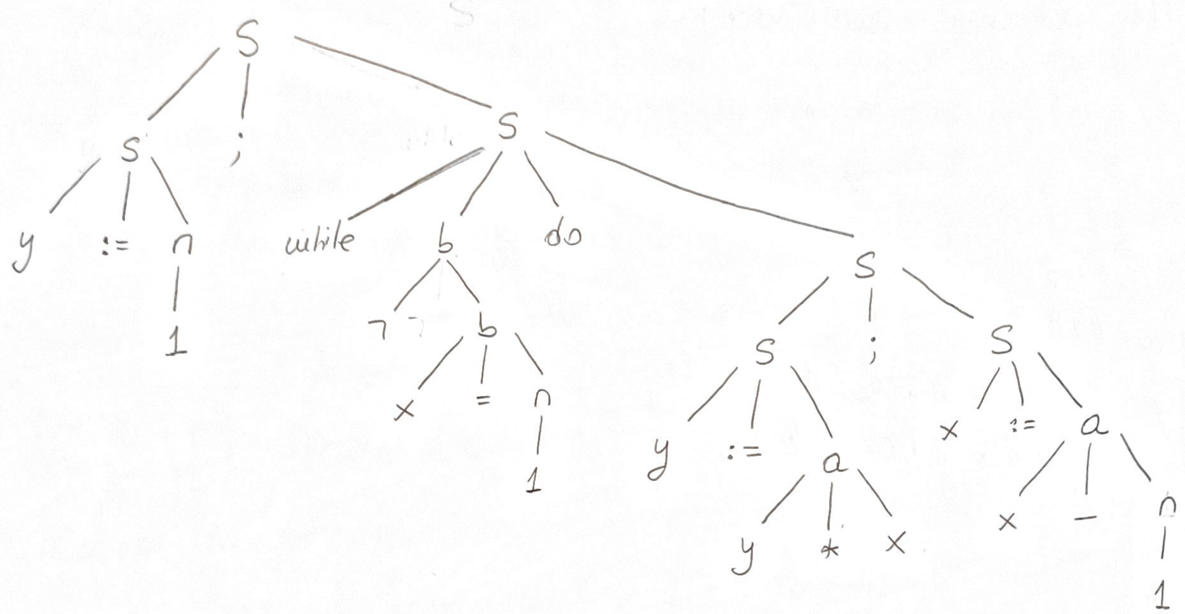
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

TPRO 19/02/2021

HOJA 1:

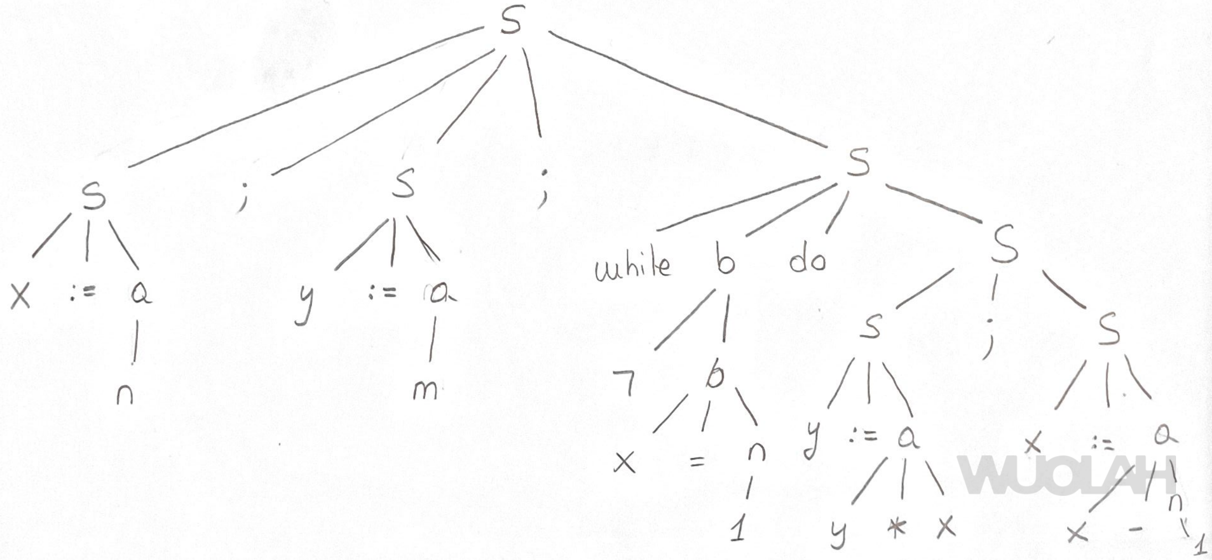
(1.1) Sea la expresión $y:=1;$ while $\neg(x=1)$ do $(y:=y*x; x:=x-1)$

Haz una representación gráfica del árbol sintáctico.



(1.2) Asume que el valor inicial de una variable x es n y que el de y es m. Escribe una expresión que asigne a z el valor de n^m. Luego escribe su árbol sintáctico.

$x:=n$; $y:=m$; while $\neg(y=0)$ do $(x:=x*x$; $y:=y-1)$.



(1.4) Supón que la gramática para n hubiera sido:

$$n ::= 0 \mid 1 \mid 0\,n \mid 1\,n$$

Define $\mathcal{N}$ correctamente en este caso.

Necesitamos una función $\mathcal{N}_{aux}$ que me lleve la cuenta de la posición en la que está el elemento de la izquierda del número.

$\mathcal{N}_{aux} : \text{Num} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\mathcal{N}_{aux}[\![0]\!] = 2$

$\mathcal{N}_{aux}[\![1]\!] = 2.$

$\mathcal{N}_{aux}[\![0\ n]\!] = 2 \cdot \mathcal{N}_{aux}[\![n]\!].$

$\mathcal{N}_{aux}[\![1\ n]\!] = 2 \cdot \mathcal{N}_{aux}[\![n]\!].$

$\mathcal{N} : \text{Num} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\mathcal{N}[\![0]\!] = 0$

$\mathcal{N}[\![1]\!] = 1.$

$\mathcal{N}[\![0\ n]\!] = \mathcal{N}[\![n]\!]$

$\mathcal{N}[\![1\ n]\!] = 2 \cdot \mathcal{N}_{aux}[\![n]\!] + \mathcal{N}[\![n]\!].$

VENUE / RECINTO:

Iberdrola music

MADRID

#MadCool2024

MAD COOL FESTIVAL

2024

10-13 JULY

WD 10 DUA LIPA · THE SMASHING PUMPKINS · JANELLE MONÁE
GARBAGE · SEXYY RED · RELS B · NOTHING BUT THIEVES · TOM ODELL
JAMES ARTHUR · KENYA GRACE · SOCCER MOMMY · CRAWLERS · JULIETA
DEAD POSEY · JET VESPER · SWIM SCHOOL · CHOSES SAUVAGES · NADYE
THE LOOP CARLITA · KID FRANCESCOLI · PARRA FOR CUVA · CLAUDIA LEÓN

TH 11 PEARL JAM · MOTXILA 21
GRETA VAN FLEET · KEANE · MICHAEL KIWANUKA · PAUL KALKBRENNER
BOMBA ESTÉREO · NIA ARCHIVES · MANDO DIAO · SOFI TUKKER
LARKIN POE · THE HEAVY · BLACK HONEY · KNEECAP · BLANCO WHITE
MERINA GRIS · MERINO · LAWRENCE · PIEM
THE LOOP BONOBO dj set · CC:DISCO! · ADIEL · SUGAR FREE · LOLA BOZZANO

FR 12 MÅNESKIN · REMA · SUM 41
JESSIE WARE · BLACK PUMAS · TOM MORELLO · THE BREEDERS
UNKNOWN MORTAL ORCHESTRA · ALEC BENJAMIN · ALVVAYS
SLEAFORD MODS · ACID ARAB dj set · DEPRESIÓN SONORA · STAY HOMAS
COMANDANTE TWIN · GILIPOJAZZ · ⊓ L.T. · JULIA SABATÉ
THE LOOP MOCHAKK · DJ KOZE · JAYDA G · DANILO PLESSOW · LOLA HARO

ST 13 THE KILLERS · BRING ME THE HORIZON · AVRIL LAVIGNE
THE KOOKS · THE GASLIGHT ANTHEM · ARLO PARKS · TYLA · ASHNIKKO
LORD HURON · NATHANIEL RATELIFF & THE NIGHT SWEATS · GENESIS OWUSU · THE WARNING
CHINCHILLA · BAR ITALIA · JOEL CULPEPPER · SEA GIRLS · PICTURE PARLOUR · HE.SHE.THEY. LIVE · SLIX
THE LOOP 2MANYDJS dj set · THE BLESSED MADONNA · ANDRES CAMPO
AXEL BOMAN · HONEYLUV

CONSIGUE TU ENTRADA AQUÍ →

TICKETS ON SALE NOW! • www.madcoolfestival.es • ENTRADAS DESDE 89€

PRO

(1.8) Prueba que las ecuaciones de la tabla de $\mathcal{A}$ definen una función $\mathcal{A}: Aexp \to (State \hookrightarrow \mathbb{Z})$ total.

Hay que probar que $\forall a \in Aexp$, $\forall s \in State$, $\exists!\, v \in \mathbb{Z} \,//\, \mathcal{A}[\![a]\!]s = v$.

- CASO BASE: Sea $s \in State$, $a \in Aexp$:

→ $a = n$. Entonces $\mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![n]\!]s = \mathcal{N}[\![n]\!]$, luego es obvio que se cumple, porque $\mathcal{N}$ es función total, luego $\exists!\, v$ tq $\mathcal{N}[\![n]\!] = v$. ✓

→ $a = x$. Entonces $\mathcal{A}[\![x]\!]s = s\,x$. Por la def de estado, $\exists!\, v$ tq $s\,x = v$ ✓

- CASO COMPUESTO: Supongamos que $\forall a_1, a_2 \in Aexp$, $\forall s_1, s_2 \in State$, $\exists v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$ tq $\mathcal{A}[\![a_1]\!]s_1 = v_1$ y $\mathcal{A}[\![a_2]\!]s_2 = v_2$. (H1)

Sea $a \in Aexp$, $s \in State$:

→ $a = a_1 + a_2$. Entonces $\mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \overset{H1}{=} v_1 + v_2 = v^*$, de forma única, luego $\exists!\, v^* \,//\, \mathcal{A}[\![a]\!]s = v^*$ ✓

→ $a = a_1 * a_2$, $a = a_1 - a_2$ de forma análoga ✓.

Luego $\mathcal{A}$ es total.

(1.9) Asume que $s\,x = 3$ y determina $\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]s$

$$\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]s = tt$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{B}[\![x=1]\!]s = ff.$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{A}[\![x]\!]s = s\,x = 3 \neq 1 = \mathcal{N}[\![1]\!] = \mathcal{A}[\![1]\!]s.$$

(1.10) Prueba que la tabla de $\mathcal{B}$ define esta función como función total. ($T = \{ff, tt\}$)

$\mathcal{B} : Bexp \longrightarrow (State \rightarrow T)$

Hay que demostrar que $\forall\, b \in Bexp, \forall s \in State, \exists!\, t \in T = \{tt, ff\}$ tq $\mathcal{B}[\![b]\!]s = t$.

INDUCCIÓN ESTRUCTURAL: Sea $b \in Bexp$, $s \in State$.

- CASO BASE:

$\rightarrow b := true \rightarrow \mathcal{B}[\![true]\!]s = tt \rightarrow \exists!\, t \in State \,||\, \mathcal{B}[\![b]\!]s = t$.

$\rightarrow b := false \rightarrow$ Análogo.

$\rightarrow b := (a_1 = a_2) \rightarrow \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![a_1 + a_2]\!]s$

Si $\mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s$ (Posible porque $\mathcal{A}$ es total) entonces

$\exists!\, t \in T$ (llamado tt) tq $\mathcal{B}[\![a_1 + a_2]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s = t$ ✓

$\mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s$ análogo. ✓

$\rightarrow b := (a_1 \leq a_2) \rightarrow$ Análogo. ✓

- PASO INDUCTIVO: Supongamos que $\forall b_1, b_2 \in Bexp, \forall s_1, s_2 \in State$. $\exists!\, t_1, t_2 \in T \,||\, \mathcal{B}[\![b_1]\!]s_1 = t_1$ y $\mathcal{B}[\![b_2]\!]s_2 = t_2$. Sea $b \in Bexp$ y $s \in State$:

$\rightarrow b := \neg b_1 \rightarrow \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![\neg b_1]\!]s$

(HI) $\exists!\, t_1 \in State \,||\, \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = t_1$. Si $t_1 = tt$, $\exists!\, t \in T$ (llamado ff) tq $\mathcal{B}[\![b]\!]s = t$. ✓

Si $t_1 = ff$, ANÁLOGO ✓

$\rightarrow$ Si $t := b_1 \wedge b_2 \rightarrow \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s$.

(HI) $\exists!\, t_1, t_2 \in T \,||\, \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = t_1$ y $\mathcal{B}[\![b_2]\!]s = t_2$.

Si $t_1 = t_2 = tt \Rightarrow \exists!\, t \in T$ (llamado tt) $||\, \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s = t$ ✓

Si $t_1 = ff$ ó $t_2 = ff \rightarrow$ ANÁLOGO ✓

Luego $\mathcal{B}$ es TOTAL.

PRO 20/02/21.

(1.11) La categoría sintáctica Bexp' es definida como extensión de Bexp como:

$$b ::= \text{true} \mid \text{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \neq a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid a_1 \geq a_2 \mid a_1 < a_2 \mid a_1 > a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid b_1 \Rightarrow b_2 \mid b_1 \Leftrightarrow b_2 .$$

Muestra una extensión composicional de la función semántica $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}'\llbracket \text{true} \rrbracket s$ DEF ✓ $\mathcal{B}\llbracket \text{false} \rrbracket s$ DEF ✓ $\mathcal{B}\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket s$ ✓ $\mathcal{B}\llbracket a_1 \leq a_2 \rrbracket s$ ✓

$\mathcal{B}'\llbracket \neg b \rrbracket s$ DEF ✓ $\mathcal{B}\llbracket b_1 \wedge b_2 \rrbracket s$ ✓.

$$\mathcal{B}'\llbracket a_1 \neq a_2 \rrbracket s = \begin{cases} ff & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s = \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s \\ tt & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s \neq \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s. \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'\llbracket a_1 \geq a_2 \rrbracket s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s \geq \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s. \\ ff & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s < \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s. \end{cases} \to \mathcal{B}\llbracket a_1 < a_2 \rrbracket s,\ \mathcal{B}\llbracket a_1 > a_2 \rrbracket s$$

ANÁLOGAS

$$\mathcal{B}'\llbracket b_1 \vee b_2 \rrbracket s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = tt \text{ ó } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = tt. \\ ff & \text{si } \mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = ff \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = ff \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'\llbracket b_1 \Rightarrow b_2 \rrbracket s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = tt \text{ ó } \mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = ff. \\ ff & \text{si } \mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = tt \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = ff. \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'\llbracket b_1 \Leftrightarrow b_2 \rrbracket s = \begin{cases} tt & \text{si } (\mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = tt \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = tt) \text{ ó } (\mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = ff \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = ff) \\ ff & \text{si } (\mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = tt \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = ff) \text{ ó } (\mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = ff \text{ y } \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s = tt). \end{cases}$$

Dos estados b_1, b_2 bool son equivalentes si $\forall s \in \text{State} \parallel \mathcal{B}\llbracket b_1 \rrbracket s = \mathcal{B}\llbracket b_2 \rrbracket s$.

Demuestra que $\forall b' \in \text{Bexp}', \exists b \in \text{Bexp} \parallel b$ y b' son equivalentes.

$b' = a_1 \neq a_2 \equiv \neg(a_1 = a_2) = b$, porque: (coges las def de cada uno y sale).

$$\mathcal{B}\llbracket a_1 \neq a_2 \rrbracket = \begin{cases} ff & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s = \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s \\ tt & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s \neq \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s. \end{cases}$$

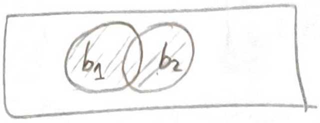
$$\mathcal{B}\llbracket \neg(a_1 = a_2) \rrbracket = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket s = tt \end{cases} = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s \neq \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}\llbracket a_1 \rrbracket s = \mathcal{A}\llbracket a_2 \rrbracket s. \end{cases}$$ ✓

$b' = a_1 \geq a_2 \equiv \neg(a_1 \leq a_2) \vee (a_1 = a_2) \equiv \neg((a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2)) = b.$

$b' = (a_1 < a_2) \equiv (a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2) = b.$

$b' = (a_1 > a_2) \equiv \neg(a_1 \leq a_2) = b.$

$b' = (b_1 \vee b_2) = \neg(\neg b_1 \wedge \neg b_2) = b$



$b' = (b_1 \Rightarrow b_2) \equiv b_2 \vee \neg b_1 = \neg(b_1 \wedge \neg b_2) = b.$

$b' = (b_1 \Leftrightarrow b_2) \equiv (b_1 \wedge b_2) \vee (\neg b_1 \wedge \neg b_2) = \neg(\neg(b_1 \wedge b_2) \wedge \neg(\neg b_1 \wedge \neg b_2)).$

RO

22/02/21.

(1.13). Sean $s, s' \in State$ tales que $s\,x = s'\,x$ para todo $x \in FV(b)$.
Demuestra que $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'$

Lo demostraremos por inducción estructural.

Sea $b \in Bexp$, $x \in FV(b)$ y sean $s, s' \in State$,
entonces b sólo puede tener las expresiones:

• CASO BASE:

→ $b := true$. Entonces $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$ de forma trivial.

→ $b := false$. Entonces $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$ de forma trivial.

→ $b := (a_1 = a_2)$. Entonces $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$. Por otro

lado, $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s' \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s' \end{cases}$

Por el lema 1.12, como $x \in FV(b)$, al ser $b := (a_1 = a_2)$, entonces
$FV(a_1 = a_2) = FV(a_1) \cup FV(a_2)$, luego cualquier variable libre de b es
una variable libre de a_1 ó de a_2, y al verificarse $s\,x = s'\,x$,
entonces $\mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!]s'$ y $\mathcal{A}[\![a_2]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s'$.

Tras esto, queda claro que $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$.

→ $b := (a_1 \leq a_2)$. Entonces $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$. Por

otro lado, $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s' \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s' \end{cases}$.

Por el lema 1.12, como $x \in FV(b)$, al ser $b := (a_1 \leq a_2)$, entonces
$FV(a_1 \leq a_2) = FV(a_1) \cup FV(b)$. Por el mismo argumento del punto anterior,
$\mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!]s'$ y $\mathcal{A}[\![a_2]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s'$, luego $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$.

• PASO INDUCTIVO:

(HI): Sea $s, s' \in State$, supongamos que dados $b_1, b_2 \in Bexp$, si $\forall x_1 \in FV(b_1)$ y $\forall x_2 \in FV(b_2)$ se cumple que $s\,x_1 = s'\,x_1$ y $s\,x_2 = s'\,x_2$, entonces $\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!]s'$ y $\mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}[\![b_2]\!]s'$.

Sea $b \in Bexp$, $x \in FV(b)$, entonces b sólo puede tener las expresiones:

→ $b := \neg b_1$. Entonces $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = ff \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!] = tt \end{cases}$. Por otro lado,

$\mathcal{B}[\![b]\!]s' = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = ff \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = tt \end{cases}$

Si $x \in FV(b)$, como $FV(b) = FV(\neg b_1) = FV(b_1)$, entonces $x \in FV(b_1)$. Como además $s\,x = s'\,x$, podemos aplicar (HI) y tendremos que $\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!]s'$, luego queda claro que $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$.

→ $b := b_1 \wedge b_2$. Entonces $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = tt \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = ff \text{ ó } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = ff. \end{cases}$

Por otro lado, $\mathcal{B}[\![b]\!]s' = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = tt \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s' = tt \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = ff \text{ ó } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s' = ff. \end{cases}$

Si $x \in FV(b)$, como $FV(b) = FV(b_1) \cup FV(b_2)$, cualquier variable libre de b es una variable libre de b_1 ó de b_2, y como $s\,x = s'\,x$, podemos usar (HI) y tendremos que $\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!]s'$ y $\mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}[\![b_2]\!]s'$, luego queda claro que $\underline{\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'}$.

#

23/02/21.

PRO

(1.14) Prueba que $\mathcal{A}[\![a[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a]\!](s[y\mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$

Inducción estructural sobre a.

Sea $s\in \text{State}$, $a\in \text{Aexp.}$, $y\in \text{Var}$, a puede ser de la forma:

• CASO BASE:

→ $a:=n$. Entonces $\mathcal{A}[\![n[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![n]\!]s = \underline{\mathcal{N}[\![n]\!]}$

y $\mathcal{A}[\![n]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = \underline{\mathcal{N}[\![n]\!]}$ ✓

→ $a:=x$, $x\neq y$. Entonces $\mathcal{A}[\![x[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![x]\!]s \underset{x\neq y}{=} \underline{s\,x}$. //

y $\mathcal{A}[\![x]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]\,x \underset{x\neq y}{=} \underline{s\,x}$ ✓

→ $a:=y$. Entonces $\mathcal{A}[\![y[y\mapsto a_0]]\!]s = \underline{\mathcal{A}[\![a_0]\!]s}$, y ‖ ✓

$\mathcal{A}[\![y]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]\,y = \underline{\mathcal{A}[\![a_0]\!]s}$

• PASO INDUCTIVO:

(HI) Sean $s\in \text{State}$, $y\in \text{Var}$. Supongamos que $\forall a_1,a_2\in \text{Aexp}$ ‖

$\mathcal{A}[\![a_i[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_i]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$, $i\in\{1,2\}$.

→ $a:=a_1+a_2$. Entonces $\underline{\mathcal{A}[\![(a_1+a_2)[y\mapsto a_0]]\!]s} = \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0] + a_2[y\mapsto a_0]]\!]s =$

$= \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0]]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2[y\mapsto a_0]]\!]s \underset{(HI)}{=} \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) + \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) =$

$= \underline{\mathcal{A}[\![(a_1+a_2)]\!](s[y\mapsto\mathcal{A}[\![a_0]\!]s])}$. ✓

→ $a:=a_1 * a_2$ y $a:=a_1-a_2$ ANÁLOGOS #

(1.15) Define la sustitución para expresiones booleanas: $b[y \mapsto a_0]$

Prueba que tu definición satisface $\mathcal{B}[\![b[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!](s[y \mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$

$$true[y\mapsto a_0]s = tt$$

$$false[y\mapsto a_0]s = ff.$$

$$(a_1 = a_2)[y\mapsto a_0]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2[y\mapsto a_0]]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2[y\mapsto a_0]]\!]s \end{cases}$$

$$(a_1 \leq a_2)[y\mapsto a_0]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0]]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2[y\mapsto a_0]]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y\mapsto a_0]]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2[y\mapsto a_0]]\!]s. \end{cases}$$

$$(\neg b)[y\mapsto a_0]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b[y\mapsto a_0]]\!]s = ff. \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b[y\mapsto a_0]]\!]s = tt \end{cases}$$

$$(b_1 \wedge b_2)[y\mapsto a_0]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y\mapsto a_0]]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2[y\mapsto a_0]]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y\mapsto a_0]]\!]s = ff \text{ ó } \mathcal{B}[\![b_2[y\mapsto a_0]]\!]s = ff \end{cases}$$

- Probar que satisface es como el 1.14 con inducción estructural.