Ejercicios Teoría de la Programación

Mario Calvarro Marines

Índice general

El lenguaje while

Ejercicio 1

Enunciado

Siendo la sintaxis para n

$$n \ ::= \ 0 \ | \ 1 \ | \ 0 \ n \ | \ 1 \ n$$

¿Se puede definir $\mathcal{N}$ correctamente?

Solución:

La semántica $\mathcal{N}$ para esta sintaxis se podría obtener trivialmente utilizando la misma que para el caso en que los constructores compuestos tuviesen el orden inverso. De esta forma, lo único que cambiaría sería que "la lectura"del número se haría de izquierda a derecha. Si intuitivamente pensamos en n como un número binario, diríamos que los bits menos significativos son los de la izquierda en contra de lo usual (que son los de la derecha).

Sin embargo, si queremos mantener el convenio de lectura de estos numerales, debemos hacer uso de una función auxiliar. Esta se deberá definir composicionalmente y simplemente es la longitud:

$$\begin{gathered}
\text{long} : \text{Num} \to \mathbb{Z} \\
\text{long}[[0]] = \text{long}[[1]] = 1 \\
\text{long}[[0\ n]] = \text{long}[[1\ n]] = 1 + \text{long}[[n]]
\end{gathered}$$

En definitiva, la función semántica será:

$$\begin{gathered}
\mathcal{N} : \text{Num} \to \mathbb{Z} \\
\mathcal{N}[[0]] = 0 \\
\mathcal{N}[[0]] = 1 \\
\mathcal{N}[[0\ n]] = \mathcal{N}[[n]] \\
\mathcal{N}[[1\ n]] = 2^{\text{long}[[n]]} \cdot \mathcal{N}[[n]]
\end{gathered}$$

Ejercicio 2

Enunciado

Explicitar la equivalencia sintáctica entre las dos formas vistas de definir sintácticamente los numerales (en un orden y el otro) mediante dos biyecciones, $M : \text{Num}' \to \text{Num}$ y $M' : \text{Num} \to \text{Num}'$, tales que $M' \circ M = \text{Id}_{\text{Num}'}$ y $M \circ M' = \text{Id}_{\text{Num}}$.

Solución:

En primer lugar, de manera natural podemos definir las funciones M y M' tal que:

$$
\begin{aligned}
&M : \mathrm{Num}' \to \mathrm{Num} && M' : \mathrm{Num} \to \mathrm{Num}' \\
&M(0') = 0 && M'(0) = 0' \\
&M(1') = 1 && M'(1) = 1' \\
&M(0'\ n') = M(n')\ 0 && M'(n\ 0) = 0'\ M'(n) \\
&M(1'\ n') = M(n')\ 1 && M'(n\ 1) = 1'\ M'(n)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora por inducción que $M \circ M' = \mathrm{Id}_{\mathrm{Num}}$:

1. Casos base:
   - $n = 0$: $M'(0) = 0'$ y $M(0') = 0 \Rightarrow M \circ M'(0) = 0$.
   - $n = 1$: $M'(1) = 1'$ y $M(1') = 1 \Rightarrow M \circ M'(1) = 1$.

   Por tanto, se cumple para los casos base.

2. Caso inductivo: Supongamos por hipótesis de inducción que esta composición es la identidad al aplicarse sobre los constituyentes de los constructores compuestos de Num, que denominaremos n. Es decir, $M \circ M'(n) = n$. Veamos ahora que ocurre ahora en los operadores:
   - $n := n\ 0$: Como $M'(n\ 0) = 0'\ M'(n)$, aplicando ahora M tenemos que $M(0'\ M'(n)) = M(M'(n))\ 0 = n\ 0$ (esta última igualdad por hipótesis de inducción).
   - $n := n\ 1$: Similar al anterior punto.

Para ver la composición inversa podemos utilizar el mismo razonamiento y con esto tenemos el resultado que buscábamos.