WUOLAH

Hoja-5-Resuelta.pdf

DEYORS

Teoria de la Programacion

4º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

TPRO

HOJA 5

22/04/21.

(5.2) Determina el funcional F asociado con while $\neg(x=0)$ do $x:=x-1$, y luego determina cuáles de las funciones $g_1, \dots, g_5$ son puntos fijos de F.

$$S_{ds}[\![\text{while } \neg(x=0) \text{ do } x:=x-1]\!] = F\left(S_{ds}[\![\text{while } \neg(x=0) \text{ do } x:=x-1]\!]\right),$$

donde $\boxed{F\, g\, s = \text{cond}\left(\mathcal{B}[\![\neg(x=0)]\!],\ g \circ S_{ds}[\![x:=x-1]\!],\ id\right) s}$

$$= \begin{cases} g\ s[x \mapsto \mathcal{A}[\![x-1]\!]s] & \text{si } s\,x \neq 0 \\ id\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} g\ s[x \mapsto s\,x-1] & \text{si } s\,x \neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases}}$$

$g_1\ s = \text{undef}$ for all s.

$$F\, g_1\, s = \begin{cases} \text{undef} & \text{si } s\,x \neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} \neq g_1\ s$$

, luego g_1 no es pto fijo.

$$g_2\ s = \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 0 \\ \text{undef} & \text{si } s\,x < 0 \end{cases}$$

$$(F\, g_2)\, s = \begin{cases} g_2\ s[x \mapsto s\,x-1] & \text{si } s\,x \neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} s[x \mapsto s\,x-1][x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \neq 0 \text{ y } s\,x-1 \geq 0 \\ \text{undef} & \text{si } s\,x \neq 0 \text{ y } s\,x-1 < 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 1 \\ \text{undef} & \text{si } s\,x < 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} = \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 0 \\ \text{undef} & \text{si } s\,x < 0 \end{cases} = g_2\ s.$$

En realidad dicen lo mismo

$\rightarrow$ g_2 es punto fijo de F.

(5.3) Considera while $\neg(x=1)$ do $(y := y * x;\ x := x-1)$ y averigua el funcional F asociado, con al menos dos puntos fijos.

$$S_{ds}[\![\text{while } \neg(x=1) \text{ do } (y := y*x;\ x := x-1)]\!] = F\,(S_{ds}[\![\cdots]\!]),$$

donde $F\ g\ s = cond\,(\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!],\ g \circ S_{ds}[\![(y:=y*x;\ x:=x-1)]\!],\ id)\,s =$

$$= \begin{cases} g \circ S_{ds}[\![x:=x-1]\!] \circ \overbrace{S_{ds}[\![y:=y*x]\!]\,s}^{1^{\circ}\text{ esto}} & \text{si } s\,x \neq 1 \\ id\ s & \text{si } s\,x = 1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g\ s\,\overbrace{[y \mapsto (s\,y) * (s\,x)]}^{1^{\circ}\text{ esto}}[x \mapsto s\,x - 1] & \text{si } s\,x \neq 1. \\ s & \text{si } s\,x = 1. \end{cases}$$

EL PUNTO FIJO ES SITUARTE EN EL FINAL, y dar de uno lo que pasaría en el ÚLTIMO CICLO

$$g_1\ s = \begin{cases} s[x \mapsto 1][y \mapsto s\,y * (s\,x)!] & \text{si } s\,x \geq 1 \\ \underline{\text{undef}} & \text{si } s\,x \leq 0. \end{cases}$$

(5.4) Determina cual de los puntos fijos del 5.2. es el mejor por los requerimientos.

Los puntos fijos que salen son:

$$g_2\ s = \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 0. \\ \text{undef} & \text{si } s\,x < 0. \end{cases}$$

$$g_4\ s = s[x \mapsto 0] \quad \text{para todo } s$$

g_2 es el punto fijo de mejor requerimiento, ya que además de que $F\,g_2 = g_2$, se verifica que si $g_2\ s = s'$, entonces lo único manera es que $s' = s[x \mapsto 0]$ (si no s' estaría indefinido), y entonces $g_4\ s = s[x \mapsto 0] = s'$.


McDonald's
"SOY CREW DE McDONALD'S,
Y POR SUPUESTO QUE
MI TRABAJO Y MI PASIÓN
SON COMPATIBLES"
¿TE VIENES?
My CREW
Mi trabajo. Mi pasión. Mi gente.

TPRO

(5.5) Determina el punto fijo deseado del ej. 5.3.

El deseado (de def mínimo) es:

$$g\ s = \begin{cases} s\,[x \mapsto 1][y \mapsto s\ y * (s\ x)!] & \text{si } s\ x \geq 1 \\ \text{undef} & \text{si } s\ x < 1 \end{cases}$$

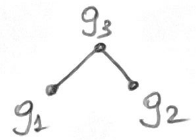
(5.7) Sean g_1, g_2 y g_3:

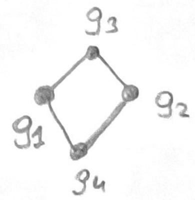
$$g_1\ s = \begin{cases} s & \text{si } s\ x \text{ es par} \\ \text{undef.} & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad g_2\ s = \begin{cases} s & \text{si } s\ x \text{ es primo} \\ \text{undef} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$g_3\ s = s$$

Determina el ordening entre estas tres funciones.

- Sea $s_1 \in$ State con $s_1\ x = 4$, entonces $g_1\ s_1 = s_1$, pero $g_2\ s_1$ NO ESTÁ DEFINIDO, luego $\underline{g_1 \not\sqsubseteq g_2}$.
- Sea $s_2 \in$ State con $s_2\ x = 13$, entonces $g_2\ s_2 = s_2$, pero $g_1\ s_2$ NO ESTÁ DEFINIDO, luego $\underline{g_2 \not\sqsubseteq g_1}$
- Sea $s_3 \in$ State, si $g_1\ s_3 = s_3'$, entonces $s_3' = s_3$ y $s\ x$ tendrá que ser par. Como $g_1\ s_3 = s_3 = s_3'$, se cumple que $\underline{g_1 \sqsubseteq g_3}$.
- De forma análoga $\underline{g_2 \sqsubseteq g_3}$

Luego 

$\rightarrow$ 

Determina g_4 tal que $g_4 \sqsubseteq g_1$, $g_4 \sqsubseteq g_2$ y $g_4 \sqsubseteq g_3$.

Si $g_4 = \begin{cases} s & \text{si } s\ x \text{ es par y primo} \\ \text{undef} & \text{en otro caso} \end{cases}$, entonces cumple los requerimientos (demo. análoga usando la def.)

Determina g_5 tal que $g_1 \sqsubseteq g_5$, $g_2 \sqsubseteq g_5$ y $g_5 \sqsubseteq g_3$ pero distinta de g_1, g_2 ó g_3.

$$g_5 = \begin{cases} s & \text{si } s\ x \text{ es par ó primo} \\ \text{undef} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(5.8) Otra caracterización de $\sqsubseteq$ en State $\hookrightarrow$ State es:

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \overset{}{\underset{DEF}{\Longleftrightarrow}} graf(g_1) \subseteq graf(g_2) \text{ , donde}$$

$$graf(g) = \{(s_1, s_2) \in State_g \times State \,//\, g\ s_1 = s_2\}$$

y donde $State_g \subseteq State$ con $State_g = \{s \in State$ tq $g\ x$ está definido$\}$

Se cumple la propiedad:

- Si $(s_1, s_2) \in graf(g)$ y $(s_1, s_2') \in graf(g)$, entonces $s_2 = s_2'$.

Demuestra que esta definición es correcta.

Demostremos que esta caracterización cumple las propiedades de orden parcial:

1.) Reflexividad: ¿ $g_1 \sqsubseteq g_1$? Veamos que $graf(g_1) \subseteq graf(g_1)$

Sea $(s_1, s_2) \in graf(g)$, $s_1 \in State_g$, $g\ s_1 = s_2 \in State$, entonces $(s_1, s_2) \in graf(g_1)$ ✓

2.) Transitividad: ¿ $\begin{matrix} g_1 \overset{(1)}{\sqsubseteq} g_2 \\ g_2 \overset{(2)}{\sqsubseteq} g_3 \end{matrix} \overset{?}{\Longrightarrow} g_1 \sqsubseteq g_3$?

Sea $(s_1, s_2) \in State_g \times State$, con $(s_1, s_2) \in graf(g_1)$

Por (1): $graf(g_1) \subseteq graf(g_2)$, luego $(s_1, s_2) \in graf(g_2)$

Por (2): $graf(g_2) \subseteq graf(g_3)$, luego $(s_1, s_2) \in graf(g_3)$, luego $graf(g_1) \subseteq graf(g_3)$,

y por tanto $g_1 \sqsubseteq g_3$. ✓

3.) Antisimetría: ¿ $\begin{matrix} g_1 \overset{(1)}{\sqsubseteq} g_2 \\ g_2 \overset{(2)}{\sqsubseteq} g_1 \end{matrix} \overset{?}{\Longrightarrow} g_1 = g_2$?

Por (1), $graf(g_1) \subseteq graf(g_2)$

Por (2), $graf(g_2) \subseteq graf(g_1)$

$\Longrightarrow graf(g_1) = graf(g_2) \underset{\text{Propiedades del conjunto gráfica}}{\Longrightarrow} g_1 = g_2$. ✓

Luego la def. es correcta.

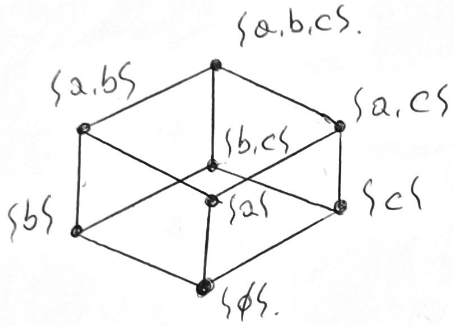
TPRO 24/05/21

Ejemplo 5.10

Sea $S \neq \phi$, con $\mathcal{P}(S) = \{K / K \subseteq S\}$. Entonces $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado porque:

1) Reflexividad: $K \subseteq K$ ✓
2) Transitividad: Supongamos que $K \subseteq L$ y $L \subseteq M$, entonces fácilmente se puede ver que $K \subseteq M$ ✓
3) Antisimetría: Supongamos que $K \subseteq L$ y $L \subseteq K$, entonces $K = L$ trivialmente.

Por ejemplo, si $S = \{a,b,c\}$, tenemos:



Todo $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ tiene un least element ϕ.

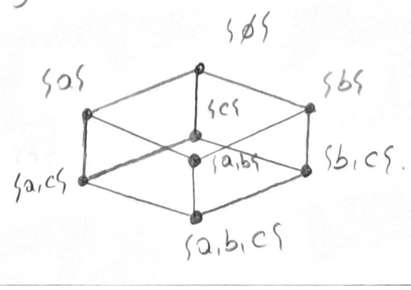
(5.11) Demuestra que $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y determina su elemento mínimo.

Sea $S \neq \phi$, con $\mathcal{P}(S) = \{K / K \subseteq S\}$:

1) Reflex: $K \supseteq K$ ✓
2) Trans: Supongamos que $K \supseteq L$ y $L \supseteq M$, entonces $K \supseteq L \supseteq M \Rightarrow$ $\Rightarrow K \supseteq M$ ✓
3) Antisimetría: Supongamos que $K \supseteq L$ y $L \supseteq K$, entonces $K = L$ trivialmente ✓

Luego sí es un conjunto parc. ordenado.

Dibuja su ordenación cuando $S = \{a,b,c\}$



El mínimo elemento es S.

(5.12) Sea $S \neq \emptyset$ y $\mathcal{P}_{fin}(S) = \{K \,/\, K$ es finito y $K \subseteq S\}$

Verifica que $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}_{fin}(S), \supseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados. ¿Ambos tienen elemento mínimo para cualquier elección de S?

- La demo. de conjuntos parc. ord. es análoga al ejercicio 5.11.
- El elemento mínimo de $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ es $\emptyset$, ya que por def:

$\forall K \in \mathcal{P}(S) \,\|\, \emptyset \subseteq K$.

- Supongamos que existe un elemento mínimo $(\mathcal{P}_{fin}(S), \supseteq)$, por ej. K,

y supongamos S tq $|S| = |\mathbb{N}|$.

Como K es mínimo, entonces $\forall K' \in \mathcal{P}_{fin}(S) \,\|\, \underline{K \supseteq K'}$ (*)

Como $\underline{K \text{ es FINITO}}$ y $|S| = |\mathbb{N}|$, entonces $\underline{\exists x_0 \in S \text{ tq } x_0 \notin K}$.

Sea $K' \in \mathcal{P}_{fin}(S)$ con $K' = K \cup \{x_0\}$, entonces $\underline{K \not\supseteq K'}$ (**)

(*) y (**) forman un absurdo, luego $\nexists K$ elemento mínimo.

(5.14) Demuestra que si F tiene un punto fijo $\overset{\text{¡MÍNIMO!}}{\frown}$ g_0, entonces g_0 es único.

Sea $(State \hookrightarrow State, \sqsubseteq)$ el conjunto parcialmente ordenado que contiene a todos los puntos de F:

Como g_0 es MÍNIMO: $\forall g \in State \hookrightarrow State \,\|\, g_0 \sqsubseteq g$ (1)

Supongamos que existe otro punto fijo MÍNIMO de f, por ejemplo g_1.

Por la misma definición, $\forall g \in State \hookrightarrow State \,\|\, g_1 \sqsubseteq g$ (2)

Aplicando g_1 en (1): $g_0 \sqsubseteq g_1$

Aplicando g_0 en (2): $g_1 \sqsubseteq g_0$ $\xRightarrow[\text{Por la prop. ANTISIMÉTRICA}]{}$ $g_0 = g_1$.

#

TPRO 25/05/21

(5.15) Determina los puntos fijos mínimos de los funcionales considerados en los ejercicios 5.2 y 5.3. Luego, compáralos con los ejercicios 5.4 y 5.5.

Ej. 5.2: $F\,g\,s = \begin{cases} g\ s[x \mapsto s\,x-1] & \text{si } s\,x \neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0. \end{cases}$

(while ¬(x=0) do x:=x-1)

El punto fijo mínimo se consigue situándote en la última parte del bucle y dar los valores de las variables al final de este. Hay que poner las condiciones que hagan que el bucle termine, si no queda indefinido.

El punto fijo mínimo es $g\,s = \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 0 \\ \text{indef.} & \text{si } s\,x < 0. \end{cases}$ (CREO)

Ej. 5.3: $F\,g\,s = \begin{cases} g\ s[y \mapsto (s\,y) * (s\,x)][x \mapsto s(x-1)] & \text{si } s\,x \neq 1. \\ s & \text{si } s\,x = 1. \end{cases}$ (while ¬(x=1) do (y:=y*x; x:=x-1))

Punto fijo mínimo es: $g\,s = \begin{cases} s[x \mapsto 1][y \mapsto (s\,y) * (s\,x)!] & \text{si } s\,x \geq 1 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x < 1. \end{cases}$

Estas dos funciones parciales aparecen en los ej. 5.4 y 5.5.

(5.16) Demuestra que si Y tiene un mínimo límite superior (LUB) d, entonces d es único.

$(D, \sqsubseteq)$ CPO, $Y \subset D$, $d \in D$ LUB, por def. de LUB:

- $\forall d' \in Y \;\|\; d' \sqsubseteq d$. (UB) (1)
- $\forall d'' \in D \;\|\; d''$ U.B. de $Y \;\|\; d \sqsubseteq d''$ (LUB). (2)

$\longrightarrow$

- $\forall d_1' \in Y \;\|\; d_1' \sqsubseteq d_1$ (UB) (3)
- $\forall d_1'' \in D \;\|\; d_1''$ UB de $Y \;\|\; d_1 \sqsubseteq d_1''$ (4)

Sea $d_1 \in D$ otro LUB (de Y), otra vez por def:

Aplicando d_1 a (2) : $d \sqsubseteq d_1$

Aplicando d a (4) : $d_1 \sqsubseteq d$ $\xrightarrow[\text{DEL CPO}]{\text{PROP. ANTISIMETRICA}}$ $d = d_1$ #

Ejemplo 5.17: Considera $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ del ejemplo 10, y también $Y_0 = \{\phi, \{a\}, \{a,c\}\} \subset \mathcal{P}(\{a,b,c\})$.

1) Y_0 es una CADENA:

$\phi \sqsubseteq \{a\} \sqsubseteq \{a,c\}$

2) $\{a,b,c\}$ y $\{a,c\}$ son UB de Y_0.

3) $\{a,c\}$ es el LUB de Y_0.

(5.18) Sea $S \neq \phi$, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ CPO. Demuestra que cualquier $Y \subset P(S)$ tiene un LBO. Haz lo mismo para el CPO $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$

Sea: $Y \in \mathcal{P}(S)$, ¿$\exists\, d \in \mathcal{P}(S)$ tq $\forall d' \in Y \,\|\, d' \subseteq d$?

Sí, por ejemplo $d = Y$, es fácil de ver que $\forall d' \in Y \,\|\, d' \subseteq Y$.
luego Y tiene UB.

¿$\exists\, d_{UBY} \in \mathcal{P}(S)$ tq $\forall d'_{UBY} \in \mathcal{P}(S) \,\|\, d_{UBY} \subseteq d'_{UBY}$?

Como $Y \in \mathcal{P}(S)$, $Y = \{Y_i \,\|\, Y_i \subset \mathcal{P}(S)\}$. Sea $\boxed{d_{UBY} = \bigcup_i Y_i}$.

Entonces $\forall d' \in Y \,\|\, d' \subseteq \bigcup_i Y_i = d_{UBY}$ (d_{UBY} UB)

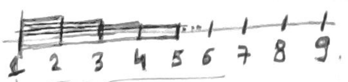
Sea $d'_{UBY} \in \mathcal{P}(S)$ otro UB, supongamos que $\nexists\, j$ tq $Y_j \notin d'_{UBY}$, claramente d'_{UBY} no sería UB de Y ¡! Luego es obligatorio que $\bigcup_i Y_i \subseteq d'_{UBY}$,

luego $d_{UBY} \subseteq d'_{UBY} \Rightarrow$ d_{UBY} es LUB de Y. #

(5.19) Sea $S \neq \phi$, $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ del ej. 5.12. Demuestra que existen S tal que $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ tiene cadenas sin UB, consecuentemente sin LUB.

Hay que jugar con que el cardinal de las PARTES FINITAS de S es INFINITO, luego podemos coger cadenas INFINITAS que no puedan cubrirse por ningún elemento finito:

$S = \mathbb{N}$,



CADENA IMPOSIBLE DE CUBRIR CON ELEM. FINITO.

$Y = \{ Y_i = [1, i) \,\|\, i \in \mathbb{N} \}$

- Y es una cadena.
- Y sólo se puede cubrir con $\mathbb{N}$, pero $\mathbb{N} \notin \mathcal{P}_{fin}(S) \Rightarrow$ Y NO TIENE UB.

5.21 Construye $Y \subset State \rightharpoonup State$ tal que Y no tenga UB, consecuentemente tampoco LUB.

Sea $Y = \{g_1, g_2\}$ donde $g_1\, s = \begin{cases} s[x \mapsto -4] & \text{si } s\,x \geq 1 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x < 1. \end{cases}$

y $g_2\, s = \begin{cases} s[x \mapsto 0] & \text{si } s\,x \geq 1. \\ \text{indef} & \text{si } s\,x < 1. \end{cases}$

Dado $g_{UB} \in State \rightharpoonup State$, si $g_1 \sqsubseteq g_{UB}$, entonces al menos: $\forall s' \in State$ tq $s'x \geq 1$, g_{UB} deberá ser $g_{UB}\, s' = s'[x \mapsto 4]$., luego $g_2 \not\sqsubseteq g_{UB}$ porque $g_2\, s' = s'[x \mapsto 0] \neq s'[x \mapsto 4]$. → No existe UB de Y

5.22 Sea $g_n\, s = \begin{cases} s[y \mapsto (s\,x)!][x \mapsto 1] & \text{si } 0 < s\,x \leq n \\ \text{indef} & \text{si } s\,x \leq 0 \text{ ó } s\,x > n. \end{cases}$

Sea $Y_0 = \{g_n \mid n \geq 0\}$, caracteriza los UB y determina el LUB.

Todos los UB tienen la forma $g_m^{UB}\, s = \begin{cases} s[y \mapsto (s\,x)!][x \mapsto 1] & \text{si } s\,x > m \\ \text{indef} & \text{si } s\,x \leq m \end{cases}$

donde $m \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. El LUB es $g_0^{UB}\, s$.

5.26 (EJEMPLO)

$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(\{d,e\}), \subseteq)$, $f_1 : \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \to \mathcal{P}(\{d,e\})$ tq:

X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$f_1 X$	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\emptyset$

¿Si $d \subseteq d'$, entonces $f\, d \subseteq f\, d'$? $\{a\} \subseteq \{a,b,c\} \to f(\{a\}) = \{d\} \subseteq \{d,e\} = f(\{a,b,c\})$

↳ Siempre ⇒ f_1 ES MONÓTONA. Sea $f_2 : \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \to \mathcal{P}(\{d,e\})$ tq:

X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
$f_2 X$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$.

$\{b\} \subseteq \{a,b\} \to f\{b\} = \{e\} \not\subseteq \{d\} = f\{a,b\} \to f_2$ NO ES MONÓTONA.

Lo sería si todas las a fueran a d y el resto a $\emptyset$.

(5.27) Considera el CCPO $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Determina cuál de las siguientes funciones en $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es monótona:

$$f_1 X = \mathbb{N} \setminus X$$

Supongamos $d_1, d_2 \in X$, $d_1 \subseteq d_2$. Entonces $f_1 d_1 = \mathbb{N} \setminus d_1$ y $f_1 d_2 = \mathbb{N} \setminus d_2$.

¿$f_1 d_1 \subseteq f_1 d_2$? $\iff$ ¿$\mathbb{N} \setminus d_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus d_2$?

No, por ejemplo sea $d_1 = \{1\}$, $d_2 = \{1,3\}$, entonces $d_1 \subseteq d_2$, pero $\mathbb{N} \setminus \{d_1\} = \mathbb{N} \setminus \{1\} \not\subseteq \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$ ya que $3 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ pero $3 \notin \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$

Luego f_1 NO ES MONÓTONA.

$$f_2 X = X \cup \{27\}.$$

$d_1 \subseteq d_2 \overset{?}{\Rightarrow} f_2 d_1 = d_1 \cup \{27\} \subseteq d_2 \cup \{27\} = f_2 d_2$.

$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow d_1 \cup \{27\} \subseteq d_2 \cup \{27\} \Rightarrow f_2 d_1 \subseteq f_2 d_2$ ✓. f_2 SÍ ES MONÓTONA.

$$f_3 X = X \cap \{7, 9, 13\}.$$

$d_1 \subseteq d_2 \overset{?}{\Rightarrow} f_3 d_1 = d_1 \cap \{7,9,13\} \subseteq d_2 \cap \{7,9,13\} = f_3 d_2$

$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow d_1 \cap \{7,9,13\} \subseteq d_2 \cap \{7,9,13\}. \Rightarrow f d_1 \subseteq f d_2 \Rightarrow f_3$ SÍ ES MONÓTONA.

$$f_4 X = \{n \in X \mid n \text{ es primo}\}.$$

$d_1 \subseteq d_2 \overset{?}{\Rightarrow} f_4 d_1 = \{n \in d_1 \mid n \text{ es primo}\} \subseteq \{n \in d_2 \mid n \text{ es primo}\} = f_4 d_2$.

$f_4 d_1 = \bigcup\limits_{\substack{n \text{ primo} \\ n \in d_1}} n$, $f_4 d_2 = \bigcup\limits_{\substack{n' \text{ primo} \\ n' \in d_2}} n'$

$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow \bigcup\limits_{\substack{n \text{ primo} \\ n \in d_1}} n \subseteq \bigcup\limits_{\substack{n' \text{ primo} \\ n' \in d_2}} n'$. $\Rightarrow f_4 d_1 \subseteq f_4 d_2 \Rightarrow f_4$ ES MONÓTONA.

$f_5 X = \{2 \cdot n \mid n \in X\}. \to f_5 d_1 = \bigcup\limits_{n \in d_1} \{2 \cdot n\}$

$d_1 \subseteq d_2 \underset{\boxed{n \in d_1 \Rightarrow n \in d_2}}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{n \in d_1} \{2 \cdot n\} \subseteq \bigcup\limits_{n' \in d_2} \{2 \cdot n'\}$. $\Rightarrow f_5 d_1 \subseteq f_5 d_2 \Rightarrow f_5$ ES MONÓTONA.

TPRO 25/05/21

③

(5.28) Determina cuál de los siguientes funcionales de $(State \to State) \to (State \to State)$ son monótonos.

- $F_0\ g = g$

Sea $g_0, g_1 \in State \to State$, $g_0 \sqsubseteq g_1$. Entonces $F g_0 = g_0 \sqsubseteq g_1 = F g_1$ luego F_0 es monótona.

- $F_1\ g = \begin{cases} g_1 & \text{si } g = g_2 \\ g_2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ donde $g_1 \neq g_2$.

Sean $g_0, g_0' \in State \to State$, $g_1, g_2 \in State \to State$, $g_0 \sqsubseteq g_0'$, entonces:

1) Si $g_0 = g_2$ y $g_0' = g_2$: $F_0 g_0 = g_1 \overset{\text{Reflex.}}{\sqsubseteq} g_1 = F_0 g_0'$ ✓

2) Si $g_0 \neq g_0$ y $g_0' = g_2$: $F_1 g_0 = g_2 \not\sqsubseteq g_1 = F_1 g_0'$ →

Podemos suponer que $g_2 \not\sqsubseteq g_1$ sin contradecir ninguna definición

→ F_1 NO ES MONÓTONA.

- $(F' g) s = \begin{cases} g\ s & \text{si } s\ x \neq 0 \\ s & \text{si } s\ x = 0 \end{cases}$

Sean $g_0, g_1 \in (State \to State)$, con $g_0 \sqsubseteq g_1$:

$(F' g_0)\ s = \begin{cases} g_0\ s & \text{si } s\ x \neq 0 \\ s & \text{si } s\ x = 0. \end{cases}$ $(F g_1)\ s = \begin{cases} g_1\ s & \text{si } s\ x \neq 0 \\ s & \text{si } s\ x = 0. \end{cases}$

Supongamos que $(F g_0)\ s = s'$. Entonces:

. Si $s\ x \neq 0$, entonces $s' = g_0\ s$. Por otro lado,

$(F' g_1)\ s = g_1\ s \underset{g_0 \sqsubseteq g_1}{\sqsupseteq} s' \Rightarrow F' g_0 \sqsubseteq F' g_1$ ✓

. Si $s\ x = 0$, entonces $s' = s$. Por otro lado

$(F' g_1)\ s = s = s' \Rightarrow F' g_0 \sqsubseteq F' g_1$. ✓

Luego F' es monótona.

$\boxed{\text{5.31 (EJEMPLO)}}$ → Función monótona que no es continua (no preserva el LUB en cadenas)

Sea $(\mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{a\}), \subseteq)$ CCPO.

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{a\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{a\})$$
$$X \longmapsto fX = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ es finito} \\ X \cup \{a\} & \text{si } X \text{ es infinito.} \end{cases}$$

- $X_1 \subseteq X_2 \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} f X_1 \subseteq f X_2$ para todos las combinaciones ⇒ X_i finito o infinito

$\underline{f \text{ ES MONÓTONA}}$

- Sea $Y = \{ \{0, 1, \dots, n\} \,\|\, n > 0 \}$, Y es una cadena con LUB

Entonces $\sqcup \{ fX \,\|\, X \in Y \} \underset{\uparrow}{=} \sqcup \{ X \,\|\, X \in Y \} = \sqcup Y = \mathbb{N}$

$\boxed{\text{CADA CONJUNTO DE } Y \text{ ES FINITO.}}$

pero $f(\sqcup Y) \underset{\uparrow}{=} f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{a\} \neq \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Y TIENE CARDINAL INFINITO}}$

Luego f $\underline{\text{NO ES CONTINUA}}$.

$\boxed{\text{5.32 (EJEMPLO)}}$ Demostrar que una FUNCIÓN ES CONTINUA. (Dado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$)

- Dada $f : \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \to \mathcal{P}(\{d,e\})$

X	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\emptyset$
fX	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\emptyset$

- f es MONÓTONA (Ej. 5.26)
- Dada cualquier cadena Y en $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$, sea $X_0 \in Y$ con $X_0 = \bigcup_{y_0 \in Y} y_0$, entonces X_0 es el LUB de Y. ($X_0 = \sqcup Y$)
- Calculemos $f(\sqcup Y) = f X_0$
- ¿Es $\sqcup \{ fX \,\|\, X \in Y \} = f(\sqcup Y) = f X_0$?

$$\begin{cases} f X_0 \subseteq \sqcup \{ fX \,\|\, X \in Y \} & \text{(porque } X_0 \in Y) \\ \sqcup \{ fX \,\|\, X \in Y \} \subseteq f(\sqcup Y) = f(X_0) \\ \text{(Lema 5.30 usando } f \text{ monótona)} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f \text{ ES CONTINUA}}$$

TPRO 26/05/21.

5.34 Sean $(D, \sqsubseteq), (D', \sqsubseteq')$ ccpo, y sea:

$f: D \to D'$ tq. $\sqcup' \{ f d \mid d \in Y \} = f(\sqcup Y)$ para toda cadena $Y \subset D$.

Demuestra que D es monótona.

INFORMACIÓN:

- $(D, \sqsubseteq), (D', \sqsubseteq')$ ccpo $\Leftrightarrow$ (1) Se verifican prop. de CPO (2) Todas las cadenas tienen LUB.
- f MONÓTONA $\Leftrightarrow [d \sqsubseteq d' \Rightarrow f d \sqsubseteq' f d']$.
- $\sqcup' \{ f d \mid d \in Y \} = f(\sqcup Y)$.

Sea $d \in D$ y $d' \in D'$, con $d \sqsubseteq d'$

Sea $\boxed{Y = \{ d, d' \}}$ $\Rightarrow$ Y es una CADENA.

PROPIEDAD IMPORTANTE: TODO ELEMENTO ENVIADO DESDE UNA CADENA PERTENECE AL CONJUNTO DE IMÁGENES DE LA CADENA.

$\Rightarrow f d \in \{ f d^* \mid d^* \in Y \}$.

Como LUB resume la información, $f d \sqsubseteq' \sqcup \{ f d^* \mid d^* \in Y \} \overset{\text{HIPÓTESIS}}{=} f(\sqcup Y)$

Como estamos en un CCPO, TODAS LAS CADENAS TIENEN LUB.
Como $d \sqsubseteq d'$, entonces $d' = \sqcup Y$, luego $f d \sqsubseteq f d'$ $\Rightarrow f$ ES MONÓTONA

#

EJEMPLO 5.38: | HALLAR FIX F MÍNIMO USANDO TH 3.7.

"while $\neg(x=0)$ do skip"

Yo creo que la g mínima es:

$$g\,s = \begin{cases} s & \text{si } s\,x=0 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x\neq 0 \end{cases}$$

Considera $(F'g)\,s = \begin{cases} g\,s & \text{si } s\,x \neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0. \end{cases}$

- Como State $\hookrightarrow$ State ccpo $\underset{\text{lema 5.17}}{\Rightarrow}$ $\perp$ elemento MÍNIMO.
- Ahora a determinar $\{F'^n \perp \,\|\, n \geq 0\}$.

$$(F'^0 \perp)\,s = (id\,\perp)\,s = \perp s = \text{indef } \forall s.$$

$$(F'^1 \perp)\,s = \begin{cases} \perp s & \text{si } s\,x\neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} = \begin{cases} s & \text{si } s\,x=0 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x\neq 0. \end{cases}$$

$$(F'^2 \perp)\,s = F'(F'^1 \perp)\,s = \begin{cases} (F'^1\perp)\,s & \text{si } s\,x\neq 0 \\ s & \text{si } s\,x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{indef} & \text{si } s\,x\neq 0 \\ s & \text{si } s\,x=0 \end{cases}$$

Es fácil de ver que para $n\neq 0$: $(F'^n \perp)\,s = \begin{cases} s & \text{si } s\,x=0 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x\neq 0. \end{cases}$

Luego $\bigsqcup \{F'^n \perp \,\|\, n\geq 0\}\,s = \begin{cases} s & \text{si } s\,x=0 \\ \text{indef} & \text{si } s\,x\neq 0. \end{cases} = \text{Fix } F\,s = g\,s$

5.40 Sea $(D, \sqsubseteq)$ ccpo, $f: D \to D$ continua. Sea $d\in D$ con $f\,d \sqsubseteq d$

Demuestra que $\text{Fix } f \sqsubseteq d$.

- f CONTINUA $\Rightarrow \left[f \text{ MONÓTONA} \underset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \boxed{d\sqsubseteq d' \Rightarrow f\,d \sqsubseteq f\,d'} \right]$ (*) • $f\,d \sqsubseteq d$
- ¿$\text{Fix } f = \bigsqcup \{f^n \perp \,\|\, n\geq 0\} \sqsubseteq d$. ?

Como $f\,d \sqsubseteq d \underset{(*)}{\Rightarrow} f(f\,d) \sqsubseteq f\,d \Rightarrow \dots \Rightarrow f^n d \sqsubseteq f^{n-1} d$

Además, $\forall n\geq 0 \,\|\, f^n d \sqsubseteq d$, luego d es UB de $\{f^n d,\ d\in D,\ n\geq 0\}$.

y como $\forall d\in D \,\|\, \perp \sqsubseteq d$, entonces d es UB de $\{f^n \perp,\ n\geq 0\}$.

Como $\text{Fix } f = \bigsqcup\{f^n \perp \,\|\, n\geq 0\} \Rightarrow \text{Fix } f$ es LUB de $\{f^n \perp, n\geq 0\}$

$\Rightarrow \text{Fix } f \sqsubseteq d$.

\#

5.40* (Otra manera de resolverlo)

- $(D, \sqsubseteq)$ ccpo
- f CONTINUA $\Rightarrow f$ MONÓTONA $_{(1)}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ ¿ $Fix\, f \sqsubseteq d$?
- $f\, d \sqsubseteq d$
- $Fix\, f = \bigsqcup \{ f^n \perp \,\|\, n \geq 0 \}$.

$\perp \sqsubseteq d \overset{(1)}{\Rightarrow} f \perp \sqsubseteq f\, d \sqsubseteq d \Rightarrow f \perp \sqsubseteq d. \Rightarrow f(f\perp) \sqsubseteq f\, d \sqsubseteq d \Rightarrow$

$\Rightarrow f^2 \perp \sqsubseteq d.$

Demostraremos que $f^n \perp \sqsubseteq d$ por inducción sobre n:

1) $n=0$: $f^0 \perp = \perp \sqsubseteq d$ ✓

$n=1$: Demostrado.

$n=2$: Demostrado.

2) Suponemos que se cumple para n, y demostramos para $n+1$:

$f^n \perp \sqsubseteq d.$

$f^{n+1} \perp = f(f^n \perp) \sqsubseteq f\, d \sqsubseteq d$ ✓

Luego $f^n \perp \sqsubseteq d \;\; \forall n \geq 0$, luego d es UB de $\{ f^n \perp \,/\, n \geq 0 \}$

Como Fix es LUB de $\{ f^n \perp \,/\, n \geq 0 \}$ $\Rightarrow \boxed{Fix\, f \sqsubseteq d}$ #

5.41* Sea $(D, \sqsubseteq)$ ccpo, y sea $(D \to D, \sqsubseteq')$ donde $\sqsubseteq'$ se define como:

$$f_1 \sqsubseteq' f_2 \quad \text{si y sólo si} \quad f_1\, d \sqsubseteq f_2\, d \quad \forall d \in D.$$

Demuestra que $(D \to D, \sqsubseteq')$ es un ccpo y que FIX es continua, es decir:

$$\text{FIX}(\sqcup' \mathcal{F}) = \sqcup \{\text{FIX } f \mid f \in \mathcal{F}\} \text{ se cumple } \forall \mathcal{F} \subseteq D \to D \text{ con}$$

$\mathcal{F}$ cadena no vacía de funciones continuas.

• ¿$(D \to D, \sqsubseteq')$ ccpo? Sea $d \in D$:

Se tienen que cumplir las propiedades:

a) ¿$(D \to D, \sqsubseteq')$ CPO? Se tienen que cumplir las propiedades:

1) $\boxed{\text{REFLEXIVA}} \Rightarrow$ ¿$f \sqsubseteq' f$? $\quad f \sqsubseteq' f \Leftrightarrow f\, d \sqsubseteq f\, d$. Esto se cumple por la prop. reflex. de $(D, \sqsubseteq)$ ✓

2) $\boxed{\text{TRANSITIVA}}$

¿$f_1 \sqsubseteq' f_2$ y $f_2 \sqsubseteq' f_3 \Rightarrow f_1 \sqsubseteq' f_3$?

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \sqsubseteq' f_2 \Rightarrow f_1\, d \sqsubseteq f_2\, d \\ f_2 \sqsubseteq' f_3 \Rightarrow f_2\, d \sqsubseteq f_3\, d \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{TRANS. DE} \\ (D, \sqsubseteq)}}{\Longrightarrow} f_1\, d \sqsubseteq f_2\, d \underset{\substack{\text{DEF.} \\ \text{DE } \sqsubseteq'}}{\Longrightarrow} f_1 \sqsubseteq' f_2. \ ✓$$

3) $\boxed{\text{ANTISIMETRICA}}$

¿$f_1 \sqsubseteq' f_2$ y $f_2 \sqsubseteq' f_1 \Rightarrow f_1 = f_2$?

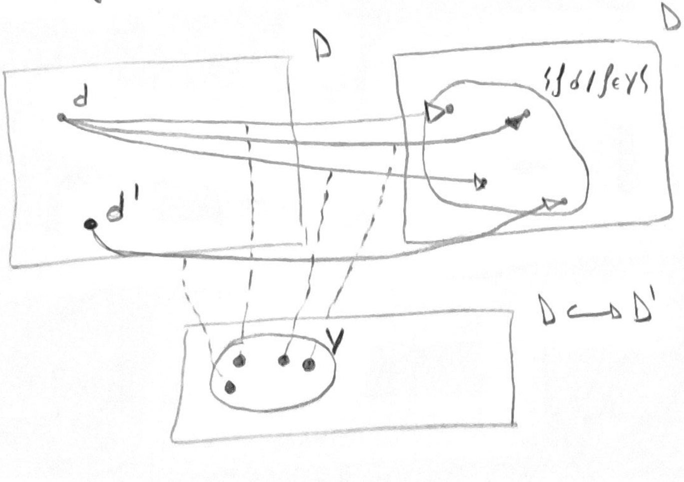
$$\left.\begin{array}{l} f_1 \sqsubseteq' f_2 \Leftrightarrow f_1\, d \sqsubseteq f_2\, d \\ f_2 \sqsubseteq' f_1 \Leftrightarrow f_2\, d \sqsubseteq f_1\, d \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{ANTIS.} \\ \text{DE } (D, \sqsubseteq)}}{\Longrightarrow} f_1\, d = f_2\, d \Longrightarrow f_1 = f_2 \quad ✓$$

b) ¿$\forall Y \subseteq D \to D$, Y cadena no vacía // Y tiene LUB?

Sea $Y \subseteq D \to D$, Y cadena no vacía.

Se te tiene que ocurrir definir $f_Y : D \to D$ dada por

$$f_Y\, d = \sqcup \{f\, d \mid f \in Y\}$$



ESTAMOS LOQUÍSIMOS

f_Y ES LA FUNCIÓN QUE DA LA MÍNIMA COTA SUPERIOR (EL LUB) QUE ENGLOBA AL CONJUNTO DE IMÁGENES DE PUNTOS QUE PUEDEN LLEVARSE POR FUNCIONES EN Y

TPRO 26/05/21 ③

Si demostramos que $\int_Y$ es función y que $\int_Y = \bigsqcup' Y$, $(D \to D, \sqsubseteq')$ es CCPO.

A por ello:

• ¿ $\int_Y$ es FUNCIÓN ?

Usamos la siguiente propiedad: $\boxed{\int_Y \text{ es FUNCIÓN} \Leftrightarrow \text{SI EXISTE SUPREMO DE } \int_Y, \text{ ESTE SUPREMO ES ÚNICO}}$

Veamos que existe ese supremo:

$\int_Y d = \bigsqcup' \{ f\, d \mid f \in Y \}$

Como Y es cadena, $\forall f_1, f_2 \in Y \parallel f_1 \sqsubseteq' f_2$ ó $f_2 \sqsubseteq f_1$

Como $\forall f \in Y \parallel f$ es continua (enunciado), todas las f PRESERVAN los LUB de las cadenas $Y_D \subseteq D$, y como $f_1 \sqsubseteq' f_2 \Leftrightarrow f_1\, d \sqsubseteq f_2\, d \ \forall d \in D$, esos LUB que se preservan a la vez están incluidos unos dentro de otros, luego siempre existirá una FUNCIÓN EN Y que los englobe a todos y a la vez sea el menor de todos los posibles candidatos, es decir, siempre existe un LUB de estas funciones, y por lo tanto $\int_Y = \bigsqcup' \{ f\, d \mid f \in Y \}$ estará definida $\forall d \in D$, incluido para el SUPREMO.

Como el SUPREMO también es LUB, este es ÚNICO, luego $\int_Y$ es FUNCIÓN.

• ¿ $\int_Y = \bigsqcup' Y$? Hay que demostrar que $\boxed{\int_Y \text{ ES COTA SUPERIOR de } Y \text{ y además ES LA MENOR DE ELLAS}}$

→ Cota superior: ¿ $\forall f \in Y \parallel f \sqsubseteq \int_Y$?

Sea $f_1 \in Y$, $d \in D \Rightarrow f_1\, d \sqsubseteq (\bigsqcup \{ f\, d \mid f \in Y \}) \Rightarrow f_1 \sqsubseteq' \overline{\bigsqcup' \{ f\, d \mid f \in Y \}} \Rightarrow$

ES UN LUB A LA DERECHA Y f_1 PERTENECE A ESE CONJUNTO

$\Rightarrow f_1 \sqsubseteq' \int_Y \Rightarrow \int_Y$ es COTA SUPERIOR.

→ Mínima cota superior

Supongamos que existe una cota superior menor: g es UB de Y y $g \sqsubseteq \int_Y$.

Como g es UB de Y: $\forall f \in Y \parallel f \sqsubseteq' g$, es decir, dado $d \in D \parallel f\, d \sqsubseteq g\, d$

Como $g \sqsubseteq \int_Y$: $g\, d \sqsubseteq \bigsqcup \{ f\, d \mid f \in Y \}$ luego $g \in Y$.

Como $\int_Y \in Y$ y g es cota superior de Y: $\int_Y \sqsubseteq g$. $\Rightarrow \boxed{g = \int_Y}$.

luego $\int_Y$ es LUB DE Y

$(D \to D, \sqsubseteq')$ es CCPO

TPRO 26/05/21

(4)

(5.44) Pruebe que, de forma análoga al Lema 5.43, si definimos

$F\,g = cond(p, g_0, g)$ es continua en sus dos últimos argumentos.

Dado $g_0 \in State \hookrightarrow State$:

1) F es monótona:

Supongamos $g_1 \sqsubseteq g_2$ ($g_i \in State \hookrightarrow State$). Hay que demostrar que suponiendo $F\,g_1\,s = s'$, entonces $F\,g_2\,s = s'$

• Si $p\,s = ff$: $F\,g_1\,s = g_1\,s$ y $F\,g_2\,s = g_2\,s$, y como

$F\,g_1\,s = s' \Rightarrow g_1\,s = s' \underset{g_1 \sqsubseteq g_2}{\Rightarrow} g_2\,s = s' \Rightarrow F\,g_2\,s = s'$. ✓

• Si $p\,s = tt$: $F\,g_1\,s = g_0\,s$ y $F\,g_2\,s = g_0\,s \Rightarrow F\,g_1\,s = F\,g_2\,s$

Como $F\,g_1\,s = s' \Rightarrow F\,g_2\,s = s' \Rightarrow F\,g_1 \sqsubseteq F\,g_2$.

Luego F es monótona.

2) F es continua:

Necesitamos demostrar que dado $Y \subseteq State \hookrightarrow State$ cadena no vacía,

$$F(\sqcup Y) = \sqcup\{F\,g \mid g \in Y\}.$$

Como F es monótona $\underset{\text{LEMA 5.30}}{\Rightarrow} \sqcup\{F\,g \mid g \in Y\} \sqsubseteq F(\sqcup Y)$

Hay que demostrar que $F(\sqcup Y) \sqsubseteq \sqcup\{F\,g \mid g \in Y\}$.

Supongamos que $F(\sqcup Y)\,s = s'$. Si podemos demostrar que $\exists g^* \in Y \,\|\, F\,g^*\,s = s'$, entonces el LUB del conjunto $\{F\,g \mid g \in Y\}$ al que pertenece g^* también acabará en s' si se ejecuta desde s y habremos acabado la demostración.

• Si $p\,s = tt$, entonces $F(\sqcup Y)\,s = g_0\,s = s'$. y $\underbrace{\forall g \in Y : F\,g\,s = s'}_{\text{Por DEF de cond.}} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(\sqcup Y) \sqsubseteq \{F\,g \mid g \in Y\}$ ✓

• Si $p\,s = ff$, entonces $F(\sqcup Y)\,s = (\sqcup Y)\,s = s'$, luego $\langle s, s'\rangle \in graf(\sqcup Y)$.

Como $graf(\sqcup Y) \underset{\text{Lema 5.25}}{=} \cup\{graf(g) \mid g \in Y\} \underset{\text{Lema 5.25}}{\Rightarrow} \exists g^* \in Y \,\|\, g^*s = s' \Rightarrow$ $F\,g^*s \underset{p\,s = ff}{=} g^*s$

$\Rightarrow \exists g^* \in Y \,\|\, F\,g^*\,s = s' \Rightarrow F(\sqcup Y) \sqsubseteq \sqcup\{F\,g \mid g \in Y\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ F es continua ✓.

(5.49) Considera $z := 0$; while $y \le x$ do $(z := z+1 ; x := x-y)$ y desarróllalo.

Sea $s \in State$:

$$S_{ds} [\![z := 0 ; \text{while } y \le x \text{ do } (z := z+1 ; x := x-y)]\!] s =$$

$$= (\text{Fix } F)\, s[z \mapsto 0] \quad \text{donde } F g s = \begin{cases} g\,(S_{ds}[\![z := z+1 ; x := x-y]\!] s) & \text{si } \mathcal{B}[\![y \le x]\!] s = tt \\ s & \text{si } \mathcal{B}[\![y \le x]\!] = ff. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g \quad s[z \mapsto (s\,z)+1][x \mapsto (s\,x)-(s\,y)] & \text{si } (s\,y) \le (s\,x) \\ s \quad \text{si } (s\,y) > (s\,x) \end{cases}$$

Calculamos las potencias de $F \perp$:

$$F^0 \perp s = \underline{\text{undef}}.$$

$$F^1 \perp s = \begin{cases} \underline{\text{undef}} & \text{si } (s\,y) \le (s\,x) \\ s & \text{si } (s\,y) > (s\,x) \end{cases}$$

→ SÓLO NOTACIÓN

$$F^2 \perp s = F(F^1 \perp) s = \begin{cases} F^1 \perp \overbrace{(s[z \mapsto (s\,z)+1][x \mapsto (s\,x)-(s\,y)])}^{s_{z+1}^{sx-sy}} & \text{si } (s\,y \le s\,x) \\ s \quad \text{si } (s\,y) > (s\,x) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \underline{\text{undef}} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \text{ y } (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) \le (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \\ s_{z+1}^{sx-sy} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \text{ y } (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) > (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \\ s \text{ si } (s\,y) > (s\,x) \end{cases}$$

SÓLO NOTACIÓN

$$F^n \perp s = \begin{cases} \underline{\text{undef}} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \land (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) \le (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \land (s_{z+2}^{sx-2(sy)}\, y) \le (s_{z+2}^{sx-2(sy)}\, x) \land \dots \land (s_{z+(n-1)}^{sx-(n-1)(sy)}\, y \le s_{z+(n-1)}^{sx-(n-1)(sy)}\, x) \\ s \text{ si } (s\,y) > (s\,x) \\ s_{z+1}^{sx-sy} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \text{ y } (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) > (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \\ s_{z+2}^{sx-2sy} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \text{ y } (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) \le (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \text{ y } (s_{z+2}^{sx-2sy} \\ \vdots \\ s_{z+(n-1)}^{sx-(n-1)sy} \text{ si } (s\,y) \le (s\,x) \text{ y } (s_{z+1}^{sx-sy}\, y) \le (s_{z+1}^{sx-sy}\, x) \text{ y} \cdots \text{y } (s_{z+(n-1)}^{sx-(n-1)(sy)}\, y) > (s_{z+(n-1)}^{sx-(n-1)(sy)}\, x) \end{cases}$$