

# Entrega Curvas. GDIF

Mario Calvarro Marines

## Enunciado

Dadas dos curvas  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , siendo  $\beta$  regular, decimos que  $\beta$  es una *evoluta* de  $\alpha$  si  $\alpha(t)$  está sobre la recta afín tangente a  $\beta$  en  $\beta(t)$  y, además,  $\alpha'(t)$  y  $\beta'(t)$  son ortogonales. Se pide:

1. Probar que si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva regular con  $\kappa, \kappa' \neq 0$  en todo punto (aquí  $\kappa$  denota la función curvatura de  $\alpha$ ), la curva  $\beta$  definida por los centros de curvatura de  $\alpha$  es una evoluta suya si y solo si  $\alpha$  es una curva plana. En este caso, pruébese además que  $\beta$  es la única evoluta plana de  $\alpha$ .
2. Si  $\alpha$  es una curva plana regular con  $\kappa, \kappa' \neq 0$  en todo punto, probar que todas las evolutas de  $\alpha$  tienen su traza contenida en un cilindro perpendicular al plano que contiene a  $\alpha$  y cuya base es la única evoluta plana de  $\alpha$ .
3. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que todas las evolutas de  $\alpha$  son hélices generalizadas.

## Apartado 1

Supongamos en primer lugar que  $\alpha$  es una curva plana parametrizada por longitud de arco. Recordemos<sup>1</sup> que la curva definida por los centros de curvatura de  $\alpha$  tiene la siguiente expresión:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s).$$

Ya que  $\alpha$  es una curva plana, sabemos que su torsión es nula, es decir,  $\mathbf{n}'_\alpha(s) = -\kappa(s) \alpha'(s)$ . Si derivamos ahora la definición de  $\beta$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{\mathbf{n}'_\alpha(s) \cdot \kappa(s) - \kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} \\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} + \frac{1}{\kappa(s)} (-\kappa(s) \alpha'(s)) = \boxed{-\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \mathbf{n}_\alpha(s)} \end{aligned}$$

Con esta última expresión, y sabiendo que  $\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$  es un escalar y que  $\mathbf{n}_\alpha(s)$  es perpendicular a  $\alpha'$ , tenemos que  $\alpha'(s)$  y  $\beta'(s)$  son ortogonales. Ahora, despejando  $\alpha$  en la definición de  $\beta$ , vemos que

$$\alpha(s) = \beta(s) - \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) = \beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)} \beta'(s)$$

y, por tanto,  $\alpha(s)$  se encuentra en la recta tangente a  $\beta(s)$ . Esto<sup>2</sup> nos indica que  $\alpha$  es la *involuta* de  $\beta$  con lo que queda demostrada esta primera implicación.

---

<sup>1</sup>Definición 6.9 [1]

<sup>2</sup>Definición 7.1 [1]

Antes de ver la implicación recíproca, veamos la unicidad de esta evoluta plana. Sea pues  $\gamma$  una evoluta cualquiera de  $\alpha$ . Tendremos entonces que  $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\gamma'(s)$  siendo  $\alpha'(s)$  y  $\gamma'(s)$  ortogonales. Como ambas curvas son planas el hecho de que sus tangentes sean perpendiculares en todo momento, nos indica que pertenecen al mismo plano. Además, tenemos que  $\gamma'(s)$  es proporcional a  $\mathbf{n}_\alpha(s)$ . En definitiva,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + g(s)\mathbf{n}_\alpha(s),$$

luego  $\gamma(s) = \alpha(s) - g(s)\mathbf{n}_\alpha(s)$  y

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \alpha'(s) - g'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) - g(s)\mathbf{n}'_\alpha(s) \\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) - g'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + g(s)\kappa_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el producto escalar por  $\mathbf{t}_\alpha(s)$  sobre esta expresión, tenemos que  $0 = 1 + g(s)\kappa_\alpha(s)$ , debido a que  $\mathbf{t}_\alpha(s)$  es perpendicular a  $\gamma'(s)$  y a  $\mathbf{n}_\alpha(s)$ . Con esto obtenemos que  $g(s) = -\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}$  y sustituyendo en la anterior expresión de  $\gamma(s)$  tenemos que:

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Es decir, la curva formada por los centros de curvatura de  $\alpha$ .

Veamos ahora la implicación inversa. Por tanto, supongamos que  $\beta$ , como curva formada por los centros de curvatura de  $\alpha$ , es evoluta de  $\alpha$ . Al ser evoluta se da<sup>3</sup> la siguiente relación:

$$\alpha(s) = \beta(s) + t(s)\beta'(s), \quad t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si sustituimos el valor de  $\alpha(s)$  dado por esta fórmula en la igualdad de la curva de centros tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s) \\ &= \beta(s) + t(s)\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Es decir,  $0 = t(s)\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$ . En definitiva,  $\beta'(s) = -\frac{1}{\kappa(s)t(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$ . Como es para un punto fijo, la anterior igualdad nos indica que  $\beta'(s)$  y  $\mathbf{n}_\alpha(s)$  son proporcionales. Si calculamos ahora  $\beta'(s)$  en base a la fórmula de los centros de curvatura tenemos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Sin embargo, como  $\alpha'(s)$  y  $\mathbf{n}'_\alpha(s)$  son ambos perpendiculares a  $\mathbf{n}_\alpha(s)$  (y, por lo tanto, linealmente independientes), no es posible, haciendo una suma de ambos, obtener un vector proporcional a  $\mathbf{n}_\alpha(s)$ , luego, su suma en este caso será 0:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) \\ &\Rightarrow -\alpha'(s)\kappa(s) = \mathbf{n}'_\alpha(s)\end{aligned}$$

Lo que comparado con la fórmula de Frenet-Serret nos indica que la torsión de  $\alpha$  es 0 y, por tanto, es plana.

## Apartado 2

## Referencias

- [1] Jesús M. Ruiz José M. Rodríguez-Sanjurjo. Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas. Sanz y Torres, 2012.

---

<sup>3</sup>Definición 7.1 [1]