

Entrega Curvas. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Dadas dos curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo β regular, decimos que β es una *evoluta* de α si $\alpha(t)$ está sobre la recta afín tangente a β en $\beta(t)$ y, además, $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ son ortogonales. Se pide:

1. Probar que si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto (aquí κ denota la función curvatura de α), la curva β definida por los centros de curvatura de α es una evoluta suya si y solo si α es una curva plana. En este caso, pruébese además que β es la única evoluta plana de α .
2. Si α es una curva plana regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto, probar que todas las evolutas de α tienen su traza contenida en un cilindro perpendicular al plano que contiene a α y cuya base es la única evoluta plana de α .
3. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que todas las evolutas de α son hélices generalizadas.

Apartado 1

Supongamos en primer lugar que α es una curva plana parametrizada por longitud de arco. Recordemos¹ que la curva definida por los centros de curvatura de α tiene la siguiente expresión:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s).$$

Ya que α es una curva plana, sabemos que su torsión es nula, es decir, $\mathbf{n}'_\alpha(s) = -\kappa(s) \alpha'(s)$. Si derivamos ahora la definición de β tenemos que:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{\mathbf{n}'_\alpha(s) \cdot \kappa(s) - \kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} \\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} + \frac{1}{\kappa(s)} (-\kappa(s) \alpha'(s)) = \boxed{-\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \mathbf{n}_\alpha(s)} \end{aligned}$$

Con esta última expresión, y sabiendo que $\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ es un escalar y que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es perpendicular a α' , tenemos que $\alpha'(s)$ y $\beta'(s)$ son ortogonales. Ahora, despejando α en la definición de β , vemos que

$$\alpha(s) = \beta(s) - \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) = \beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)} \beta'(s)$$

y, por tanto, $\alpha(s)$ se encuentra en la recta tangente a $\beta(s)$. Esto² nos indica que α es la *involuta* de β con lo que queda demostrada esta primera implicación.

¹Definición 6.9 [1]

²Definición 7.1 [1]

Antes de ver la implicación recíproca, veamos la unicidad de esta evoluta plana. Sea pues γ una evoluta cualquiera de α . Tendremos entonces que $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\gamma'(s)$ siendo $\alpha'(s)$ y $\gamma'(s)$ ortogonales. Como ambas curvas son planas el hecho de que sus tangentes sean perpendiculares en todo momento, nos indica que pertenecen al mismo plano. Además, tenemos que $\gamma'(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + g(s)\mathbf{n}_\alpha(s),$$

luego $\gamma(s) = \alpha(s) - g(s)\mathbf{n}_\alpha(s)$ y

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \alpha'(s) - g'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) - g(s)\mathbf{n}'_\alpha(s) \\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) - g'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + g(s)\kappa_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el producto escalar por $\mathbf{t}_\alpha(s)$ sobre esta expresión, tenemos que $0 = 1 + g(s)\kappa_\alpha(s)$, debido a que $\mathbf{t}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\gamma'(s)$ y a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. Con esto obtenemos que $g(s) = -\frac{1}{\kappa_\alpha}(s)$ y sustituyendo en la anterior expresión de $\gamma(s)$ tenemos que:

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Es decir, la curva formada por los centros de curvatura de α .

Veamos ahora la implicación inversa. Por tanto, supongamos que $\beta(t)$, como curva formada por los centros de curvatura de α , es evoluta de α . Al ser evoluta se da³ la siguiente relación:

$$\alpha(s) = \beta(s) + (\lambda - s)\beta'(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si sustituimos el valor de $\alpha(s)$ dado por esta fórmula en la igualdad de la curva de centros tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s) \\ &= \beta(s) + (\lambda - s)\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Es decir, $0 = (\lambda - s)\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva, $\beta'(s) = \frac{1}{\kappa(s) \cdot (\lambda - s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. Como es para un punto fijo, la anterior igualdad nos indica que β' y $\mathbf{n}_\alpha(s)$ son proporcionales. Si calculamos ahora β' en base a la fórmula de los centros de curvatura tenemos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Sin embargo, como α' y \mathbf{n}' son perpendiculares ambos a \mathbf{n}_α , no es posible, haciendo una suma de ambos, obtener un vector proporcional a \mathbf{n}_α , luego, su suma en este caso será 0:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) \\ &\Rightarrow -\alpha'(s)\kappa(s) = \mathbf{n}'_\alpha(s)\end{aligned}$$

Lo que comparado con la fórmula de Frenet-Serret nos indica que la torsión de α es 0 y, por tanto, es plana.

Apartado 2

Referencias

- [1] Jesús M. Ruiz José M. Rodríguez-Sanjurjo. Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas. Sanz y Torres, 2012.

³Proposición 7.2 [1]