Beñat Perez de Arenaza Eizaguirre

6. Demuestra que una superficie parametrizada tal que $E = \frac{1}{v^2}, F = 0, G = \frac{1}{v^2}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $v > 0$ tiene curvatura de Gauss constante igual a -1. Comprueba que las curvas de la forma

$$(u(s), v(s)) = (a + r\ \tanh(\mathrm{s}), r\ \mathrm{sech}(s))$$

son las semicircunferencias con centro en $v = 0$ y que su imagen por φ están parametrizadas por su longitud de arco y son geodésicas. Parametriza por arco las semirrectas verticales y comprueba que también son geodésicas. ¿Puede haber más geodésicas?

Para comenzar, veamos que la curvatura de Gauss es constante igual a -1:

Sabemos que $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$

Además, por el ejercicio 7 de la hoja 6, sabemos lo siguiente sobre la curvatura de Gauss:

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

Calculemos los términos necesarios para obtener la curvatura de Gauss:

$$E_v = -\frac{2}{v^3}\ ;\ G_u = 0\ ;\ \sqrt{EG} = \sqrt{\frac{1}{v^2}\cdot\frac{1}{v^2}} = \frac{1}{v^2}\ ;\ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v = \left(\frac{-2}{v}\right)_v = \frac{2}{v^2}$$

Por tanto, $K = \frac{-1}{2\cdot\frac{1}{v^2}}\left(\frac{2}{v^2} + \left(\frac{0}{\frac{1}{v^2}}\right)_u\right) = -\frac{v^2}{2}\left(\frac{2}{v^2}\right) = -1$

Así, acabamos de demostrar que $\boxed{K = -1}$.

Ahora comprobemos que las curvas de la forma $(u(s), v(s)) = (a + r\tanh(s), r\,\mathrm{sech}(s))$ son las semicircunferencias con centro en $v=0$:

$$\tanh(s) = \frac{\mathrm{senh}(s)}{\cosh(s)} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}$$

$$\mathrm{sech}(s) = \frac{1}{\cosh(s)} = \frac{2}{e^s + e^{-s}}$$

Debemos ver que para cada a y r existe un punto en $v=0$ tal que todos los puntos de la curva están a la misma distancia de dicho punto, y que además, no es una circunferencia completa, sino que exactamente una semicircunferencia:

En primer lugar, calculemos los límites de la curva cuando s tiende a infinito y a -infinito:

- $$\lim_{s\to\infty} (u(s), v(s)) = \lim_{s\to\infty}\left(a + r\cdot\frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}},\ r\cdot\frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) =$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(a + r\,\overbrace{\frac{e^s}{e^s}}^{\to 1},\ r\cdot\frac{2}{e^s}\right) = (a+r, 0)$$

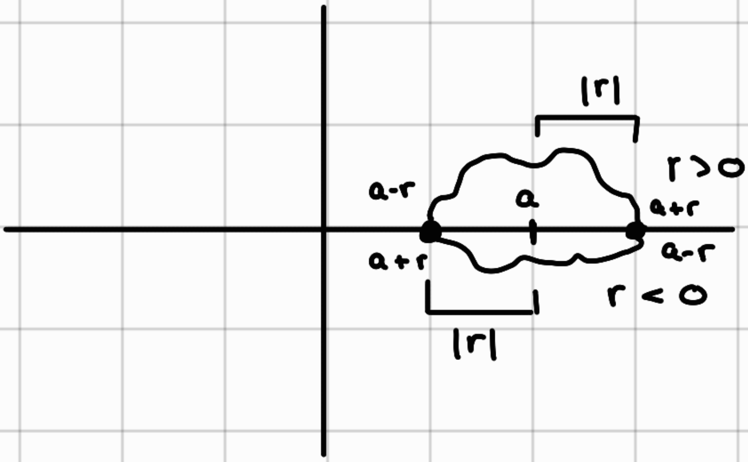
- $$\lim_{s\to-\infty} (u(s), v(s)) = \lim_{s\to-\infty}\left(a + r\cdot\frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}},\ r\cdot\frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) =$$

$$\lim_{s\to-\infty}\left(a + r\,\overbrace{\frac{-e^{-s}}{e^{-s}}}^{\to -1},\ r\cdot\frac{2}{e^{-s}}\right) = (a-r, 0)$$

Además, $v(s) = r\,\mathrm{sech}(s) = r \cdot \frac{2}{e^s+e^{-s}} > 0$ si $r>0$

y

$r \cdot \frac{2}{e^s+e^{-s}} < 0$ si $r<0$



por tanto, la curva va de un punto de $V=0$ a otro de $V=0$ y no cruza $V=0$. Por tanto, si encontramos un punto que equidiste a toda la curva, podremos afirmar que en efecto se trata de una semicircunferencia:

Además, tenemos un punto candidato a que equidiste de todos los puntos de la curva, ya que hemos visto que cuando s tiende a ∞ y $-\infty$, se acerca a los valores $(a+r, 0)$ y $(a-r, 0)$ respectivamente. Por tanto, si existe un punto que equidiste a todos los de la curva, en particular equidistará a estos dos, por tanto deberá estar en la recta $(a,t): t\in\mathbb{R}$. Además, como queremos demostrar que dicho punto está en $V=0$, entonces vamos a demostrar que, en efecto, el punto $(a,0)$ es el centro de las semicircunferencias:

Definamos la siguiente función: $d: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y) \longrightarrow \|(x-a, y-0)\|^2$$

y veamos que d es constante para todos los puntos de la curva, es decir, que $d|_{(u,v)} \equiv cte$ para cada a y r:

$$d(u,v) = \|(a+r\tanh(s)-a, r\operatorname{sech}(s))\|^2 = r^2\tanh^2(s)+r^2\operatorname{sech}^2(s) =$$
$$= r^2(\tanh^2(s)+\operatorname{sech}^2(s)) = r^2\left(\frac{\operatorname{senh}^2(s)}{\cosh^2(s)}+\frac{1}{\cosh^4(s)}\right) = r^2\left(\frac{\operatorname{senh}^2(s)+1}{\cosh^4(s)}\right) =$$
$$= r^2\left(\frac{\cosh^2(s)-1+1}{\cosh^2(s)}\right) = r^2 \equiv cte \text{ para cada } r \text{ y } a$$

$\cosh^2(s)-\operatorname{senh}^2(s)=1$

Por tanto, como $d(u,v)\equiv r^2$, entonces $\sqrt{d(u,v)}\equiv r$ también es constante para todos los puntos de la curva, dados r y a. Por tanto, $\sqrt{\|(u,v)-(a,0)\|^2} = \|(u,v)-(a,0)\|$ también es constante para todos los puntos de la curva. Así, concluimos que dichas curvas son las semicircunferencias con centro en $V=0$.

Ahora veamos que la imagen de las curvas por φ están parametrizadas por longitud de arco:

$$\varphi(t) = \big(u(t), v(t)\big) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{regla de la} \\ \text{cadena}}}{\Rightarrow} \varphi'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_u \cdot u'(t) + \varphi_v \cdot v'(t)$$

Por tanto, $\big(u'(t), v'(t)\big)$ son las coordenadas de $\varphi'(t)$ sobre la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$.

Por la definición de la primera forma fundamental,

$$\|\varphi'(t)\|^2 = I_\varphi\big(u'(t), v'(t)\big) \Rightarrow \|\varphi'(t)\| = \sqrt{I_\varphi\big(u'(t), v'(t)\big)}$$

Por tanto: $L_{t_0}^{t}(\varphi) = \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(s)\| \, ds = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_{\varphi(t)}\big(u'(t), v'(t)\big)} \, du$

Así pues, calculemos la primera forma fundamental de $w = u'(t), v'(t)$ y acto seguido veamos si φ está o no parametrizada por arco:

$$I_{\varphi(t)}\big(u'(t), v'(t)\big) = \big(u'(t), v'(t)\big) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{v^2} u'(t) \quad \frac{1}{v^2} v'(t) \right) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2}\big(u'(t)\big)^2 + \frac{1}{v^2}\big(v'(t)\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{v^2}\Big(\big(u'(t)\big)^2 + \big(v'(t)\big)^2 \Big).$$

$\bullet\ u'(t) = r\,\mathrm{Sech}^2(t)$

$\bullet\ v'(t) = -r\,\mathrm{sech}(t)\cdot\tanh(t)$

$$I_{\varphi(t)}\left(u'(t), v'(t)\right) = \frac{1}{v^2}\left(r^2\,\mathrm{sech}^4(t) + r^2\,\mathrm{Sech}^2(t)\tanh^2(t)\right) =$$

$$= \frac{r^2}{v^2}\,\mathrm{sech}^2(t)\left(\mathrm{Sech}^2(t) + \tanh^2(t)\right) =$$

$$= r^2 \cdot \frac{\mathrm{sech}^2(t)}{r^2\,\mathrm{Sech}^2(t)}\left(\mathrm{Sech}^2(t) + \tanh^2(t)\right) = \mathrm{Sech}^2(t) + \tanh^2(t)$$

Así, $$L_{t_0}^{t}(\varphi) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_{\varphi}(u'(t), v'(t))}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathrm{sech}^2(t) + \tanh^2(t)}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1}{\cosh^2(t)} + \frac{\mathrm{senh}^2(t)}{\cosh^2(t)}}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1+\mathrm{Senh}^2(t)}{\cosh^2(t)}}\,dt =$$

$\cosh^2(t) - \mathrm{Senh}^2(t) = 1$

$$= \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

. Por tanto, $\varphi(t)$ está parametrizado por arco.

Veamos que son geodésicas:

Sabemos que serán geodésicas si se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} u''(t) = -\Gamma_{11}^{1} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{1} u'(t)v'(t) - \Gamma_{22}^{1} v'(t)^2 \\ v''(t) = -\Gamma_{11}^{2} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{2} u'(t)v'(t) - \Gamma_{22}^{2} v'(t)^2 \end{cases}$$

Para poder resolver el sistema nos damos cuenta de que nos hacen falta conocer el valor de los símbolos de Christoffel:

Para ello, primero resolveremos las siguientes ecuaciones en función de la matriz de la primera forma fundamental:

$E = \frac{1}{v^2}$; $F = 0$; $G = \frac{1}{v^2}$

$E_u = 0$; $E_v = -\frac{2}{v^3}$; $F_u = F_v = 0$; $G_u = 0$; $G_v = -\frac{2}{v^3}$

- $$\begin{cases} \frac{1}{2}E_u = E\Gamma_{11}^{1} + F\Gamma_{11}^{2} \\ F_u - \frac{1}{2}E_v = F\Gamma_{11}^{1} + G\Gamma_{11}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{v^2}\Gamma_{11}^{1} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{11}^{1} = 0 \\ \frac{1}{v^3} = \frac{1}{v^2}\Gamma_{11}^{2} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{v} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \frac{1}{2}E_v = E\Gamma_{12}^{1} + F\Gamma_{12}^{2} \\ \frac{1}{2}G_u = F\Gamma_{12}^{1} + G\Gamma_{12}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{v^3} = \frac{1}{v^2}\Gamma_{12}^{1} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{v} \\ 0 = \frac{1}{v^2}\Gamma_{12}^{2} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{12}^{2} = 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} F_v - \frac{1}{2}G_u = E\Gamma_{22}^{1} + F\Gamma_{22}^{2} \\ \frac{1}{2}G_v = F\Gamma_{22}^{1} + G\Gamma_{22}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{v^2}\Gamma_{22}^{1} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{22}^{1} = 0 \\ -\frac{1}{v^3} = \frac{1}{v^2}\Gamma_{22}^{2} \overset{v>0}{\Rightarrow} \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{v} \end{cases}$$

Así: $\Gamma_{11}^{1} = 0$; $\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{v}$; $\Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{v}$; $\Gamma_{12}^{2} = 0$; $\Gamma_{22}^{1} = 0$; $\Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{v}$

Ya estamos en condiciones de ver si se verifican las ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} \cdot\, u'(t) = r\,\mathrm{sech}^2(t) \\ \cdot\, v'(t) = -r\,\mathrm{sech}(t)\cdot\tanh(t) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u''(t) = 2r\,\mathrm{sech}(t)\left(-\mathrm{sech}(t)\tanh(t)\right) = -2r\,\mathrm{sech}^2(t)\tanh(t) \\ v''(t) = r\,\mathrm{sech}(t)\tanh^2(t) - r\,\mathrm{sech}^3(t) = r\,\mathrm{sech}(t)\left(\tanh^2(t) - \mathrm{sech}^2(t)\right) \end{array}\right]$$

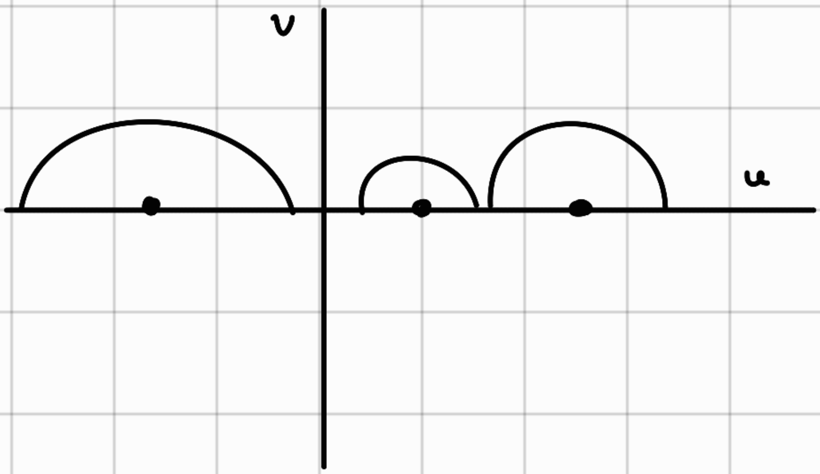
$$\begin{cases} u''(t) = -\Gamma_{11}^1 u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) - \Gamma_{22}^1 v'(t)^2 \\ v''(t) = -\Gamma_{11}^2 u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) - \Gamma_{22}^2 v'(t)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''(t) = -\frac{2}{v} r^2 \mathrm{sech}^3(t)\tanh(t) \\ v''(t) = -\frac{1}{v} r^2 \mathrm{sech}^4(t) - \frac{1}{v} \cdot r^2 \mathrm{sech}^2(t)\tanh^2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u''(t) = -2\,r\,\mathrm{sech}^2(t)\tanh(t) \\ v''(t) = -r\,\mathrm{sech}^3(t) - r\,\mathrm{sech}(t)\tanh^2(t) = r\,\mathrm{sech}(t)\left(\tanh^2(t) - \mathrm{sech}^2(t)\right) \end{cases}$$

Como se cumple, sabemos que $\varphi(t) = \hat{\varphi}(\lambda t)$ donde $\hat{\varphi}$ es una geodésica parametrizada por arco.

En este caso, como φ está parametrizada por arco, $\varphi(t) = \hat{\varphi}(1\cdot t) = \hat{\varphi}(t)$ y por tanto, φ es una geodésica que esta parametrizada por arco, tal y como queríamos ver.

Por tanto, hemos visto que (u,v) son las semicircunferencias con centro en $v=0$ y que su imagen por φ está parametrizada por arco y son geodésicas:



Ahora veamos lo que sucede con las semirrectas verticales:

Primero parametricémoslas por arco:

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (a, re^t)$$

Como hemos visto antes, sabemos que $I_{\varphi(t)}(u'(t), v'(t)) = \frac{1}{v^2}\left((u'(t))^2 + (v'(t))^2\right)$

En este caso, $u'(t) = 0 \quad v'(t) = re^t$

Por tanto, $I_{\varphi(t)}(u'(t), v'(t)) = \frac{1}{r^2 e^{2t}}\left(r^2 e^{2t}\right) = 1$

Así, $L_{t_0}^{t}(\varphi) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_\varphi(u'(t), v'(t))}\, dt = \int_{t_0}^{t} dt = 1 \Rightarrow$ ya está parametrizado por arco.

Veamos ahora si es geodésica:

Igual que antes, procedamos a ver si se verifican las ecuaciones:

$$\begin{cases} u''(t) = -\Gamma_{11}^{1} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{1} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{1} v'(t)^2 \\ v''(t) = -\Gamma_{11}^{2} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{2} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{2} v'(t)^2 \end{cases}$$

Como los símbolos de Christoffel solamente dependen de la primera forma fundamental, son los mismos que antes:

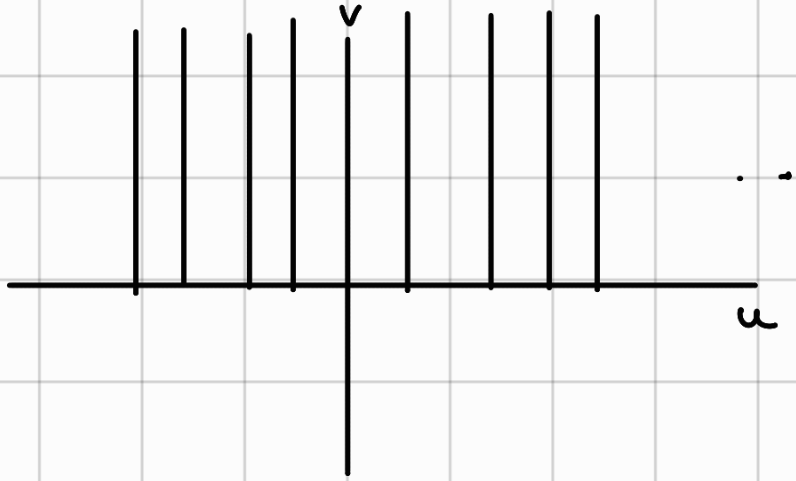
Así: $\Gamma_{11}^{1} = 0$; $\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{v}$; $\Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{v}$; $\Gamma_{12}^{2} = 0$; $\Gamma_{22}^{1} = 0$; $\Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{v}$

$$\left[\begin{array}{l} u'(t) = 0 \Rightarrow u''(t) = 0 \\ v'(t) = re^t \Rightarrow v''(t) = re^t \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} u''(t) = -\Gamma_{11}^{1} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{1} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{1} v'(t)^2 \\ v''(t) = -\Gamma_{11}^{2} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{2} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{2} v'(t)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''(t) = \frac{2}{v} \cdot 0 = 0 \\ v''(t) = -\frac{1}{v} \cdot 0^2 + \frac{1}{v} r^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u''(t) = 0 \\ v''(t) = \dfrac{r^2 e^{2t}}{re^t} = re^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''(t) = 0 \\ v''(t) = re^t \end{cases}$$

Como antes, esto nos asegura que $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(t) = \hat{\varphi}(\lambda t)$ donde $\hat{\varphi}$ es una geodésica parametrizada por arco. Como $\gamma(t)$ está parametrizada por arco, $\gamma(t) = \hat{\gamma}(1 \cdot t) = \hat{\gamma}(t) \Rightarrow \gamma(t)$ es una geodésica parametrizada por arco, como queríamos ver.



Para concluir, debemos razonar si puede haber más geodésicas. Supongamos que sí. Entonces existen dos puntos tales que su distancia más cercana es a través de esa nueva curva geodésica. Esos dos puntos pueden tener la misma primera coordenada o no:

- Si la primera coordenada es la misma, entonces acabamos de ver que la semirecta vertical es una geodésica que une los dos puntos, lo cual entra en contradicción con que haya una geodésica distinta que pase por los dos puntos, ya que las geodésicas entre dos puntos son únicas.

- Si la primera coordnada no es la misma, siempre podemos encontrar una semicircunferencia centrada en $v=0$ que pase por los dos puntos. Nuevamente, esto entra en contradicción con que exista una curva geodésica distinta que pase por los dos puntos, ya que las geodésicas entre dos puntos son únicas.

Por tanto, no puede haber más geodésicas.