# Entrega Superficies. GDIF

Mario Calvarro Marines

## Enunciado

Demuestra que una superficie parametrizada tal que $E = \frac{1}{v^2}$, $F = 0$, $G = \frac{1}{v^2}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $v > 0$ tiene una curvatura de Gauss constante igual a $-1$. Comprueba que las curvas de la forma

$$(u(s), v(s)) = (a + r\tanh(s), r\,\mathrm{sech}(s))$$

son las semicircunferencias con centro en $v = 0$ y que su imagen por $\varphi$ están parametrizadas por su longitud de arco y son geodésicas. Parametriza por arco las semirrectas verticales y comprueba que también son geodésicas. ¿Puede haber más geodésicas?

## Curvatura de Gauss

Veamos que, efectivamente, la curvatura de Gauss de esta superficie es constantemente $-1$. Por hipótesis, sabemos que la matriz de la *Primera Forma Fundamental* de esta superficie es:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}.$$

Además, gracias a que $F = 0$, podemos aplicar el ejercicio 7 de la hoja 6 que nos indica una forma de la curvatura de Gauss:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

Por lo que solo queda calcular los distintos términos:

$$\sqrt{EG} = \sqrt{\frac{1}{v^4}} = \frac{1}{v^2} \qquad E_v = -\frac{2}{v^3} \qquad G_u = 0$$

$$\left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v = \left( -\frac{2}{v} \right)_v = \frac{2}{v^2}.$$

Sustituyendo,

$$K = -\frac{v^2}{2} \left( \frac{2}{v^2} + 0 \right) = -\frac{v^2}{2} \cdot \frac{2}{v^2} = -1.$$

Que es lo que buscábamos.

## Estudio de posibles geodésicas

En primer lugar, veamos que las curvas dadas son las semicircunferencias pedidas. Esto es equivalente a que, para cualquier $a$ y $r$ dados, existe un punto en $v = 0$ que está a la misma distancia de todos los puntos de la curva. Además, la curva debe ser exactamente una semicircunferencia.

Antes de empezar a hacer cálculos daremos otra forma de expresar las componentes hiperbólicas de la curva:

$$\tanh s = \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \qquad \operatorname{sech} s = \cosh^{-1} s = \frac{2}{e^s + e^{-s}}.$$

Con esto empezaremos calculando los límites de la curva cuando $s$ tiende a infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} (u(s), v(s)) &= \lim_{s\to\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) \\
&= \lim_{s\to\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s}{e^s}, r \cdot \frac{2}{e^s}\right) = (a + r, 0). \\
\lim_{s\to-\infty} (u(s), v(s)) &= \lim_{s\to-\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) \\
&= \lim_{s\to-\infty} \left(a - r \cdot \frac{e^{-s}}{e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s}\right) = (a - r, 0).
\end{aligned}$$

A su vez, $v(s) = r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}} \begin{cases} > 0, & \text{si } r > 0 \\ < 0, & \text{si } r < 0 \end{cases}$. Con esto hemos visto que la curva tiende (en $-\infty$ y $+\infty$) a dos puntos con $v = 0$ sin cruzar antes ningún otro con $v = 0$. Es decir, que si encontramos un punto en $v = 0$ que equidiste a todos los de la curva, aseguraremos que se trata de una semicircunferencia centrada en $v = 0$.

Para obtener un posible candidato a centro de la supuesta semicircunferencia tenemos un par de datos, tiene que tener $v = 0$ y equidistar de los dos límites que acabamos de calcular. Con esto un posible centro sería el punto $(a, 0)$. Comprobemos que efectivamente lo es. Para ello vamos a ver que el cuadrado (y, por tanto, sin el cuadrado también) de la distancia euclídea del posible centro a cualquier punto de la curva es constante:

$$|(x - a, y)|^2 \overset{?}{\equiv} \text{const. } \forall (x, y) \in (u(s), v(s)).$$

Sustituyendo el valor de un punto de la curva, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|(a + r\tanh s - a, r \operatorname{sech} s)|^2 &= r^2 \left(\tanh^2 s + \operatorname{sech}^2 s\right) \\
&= r^2 \cdot \frac{\sinh^2 s + 1}{\cosh^2 h} \\
&= r^2 \cdot \frac{\cosh^2 s - 1 + 1}{\cosh^2 s} = r^2 \equiv \text{const.}
\end{aligned}$$

Y con esto hemos probado que estas curvas son semicircunferencias con centro en $v = 0$.

A continuación comprobaremos que las imágenes de estas curvas por $\varphi$ están parametrizadas por su longitud de arco. La imagen de la curva por $\varphi$ será:

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)).$$

Con lo que $\alpha'(t) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t)$ y $(u'(t), v'(t))$ son las coordenadas de $\alpha'(t)$ sobre $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por la definición de la *Primera Forma Fundamental* sabemos que:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \mathrm{I}(u'(t), v'(t)).$$

Con lo que:

$$L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathrm{I}(u'(s), v'(s))} \mathrm{d}s.$$

Calculemos, pues, la primera forma fundamental para $(u'(t), v'(t))$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(u'(t), v'(t)) &= (u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{v^2} \cdot (u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{v^2} \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2\right).
\end{aligned}$$

Como $u'(t) = r\operatorname{sech}^2 t$ y $v'(t) = -r\operatorname{sech} t \cdot \tanh t$, si sustituimos tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\left(u'(t), v'(t)\right) &= \frac{r^2}{r^2 \cdot \operatorname{sech}^2 t} \cdot \operatorname{sech}^2 t \left(\operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t\right) \\ &= \operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} L_{t_0}^{t}(\varphi) &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1}{\cosh^2 t} + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1+\sinh^2 t}{\cosh^2 t}} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = t - t_0. \end{aligned}$$

Con lo que queda probado que esta parametrizada por longitud de arco.

Por último, comprobemos que son geodésicas. Como la curva está parametrizada por longitud de arco, será geodésica si cumple que:

$$\begin{cases} u''(t) &= -\Gamma_{11}^{1} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{1} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{1} v'(t)^2 \\ v''(t) &= -\Gamma_{11}^{2} u'(t)^2 - 2\Gamma_{12}^{2} u'(t) v'(t) - \Gamma_{22}^{2} v'(t)^2 \end{cases}.$$

Por tanto, para resolver este sistema de ecuaciones necesitamos saber el valor de los símbolos de Christoffel. Para ello usamos su relación con la matriz de la *Primera Forma Fundamental*:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}E_u &= E\Gamma_{11}^{1} + F\Gamma_{11}^{2} \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= F\Gamma_{11}^{1} + G\Gamma_{11}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{11}^{1} \\ \frac{1}{v^3} &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{11}^{2} \end{cases} \xRightarrow{v>0} \begin{cases} \Gamma_{11}^{1} &= 0 \\ \Gamma_{11}^{2} &= \frac{1}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}E_v &= E\Gamma_{12}^{1} + F\Gamma_{12}^{2} \\ \frac{1}{2}G_u &= F\Gamma_{12}^{1} + G\Gamma_{12}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{v^3} &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{12}^{1} \\ 0 &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{12}^{2} \end{cases} \xRightarrow{v>0} \begin{cases} \Gamma_{12}^{1} &= -\frac{1}{v} \\ \Gamma_{12}^{2} &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_v - \frac{1}{2}G_u &= E\Gamma_{22}^{1} + F\Gamma_{22}^{2} \\ \frac{1}{2}G_v &= F\Gamma_{22}^{1} + G\Gamma_{22}^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{22}^{1} \\ -\frac{1}{v^3} &= \frac{1}{v^2}\Gamma_{22}^{2} \end{cases} \xRightarrow{v>0} \begin{cases} \Gamma_{22}^{1} &= 0 \\ \Gamma_{22}^{2} &= -\frac{1}{v} \end{cases}.$$

Con lo que solo queda comprobar si se verifican las ecuaciones de las geodésicas para esta curva. Calculemos las derivadas de $u$ y $v$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= r\operatorname{sech}^2 t & u''(t) &= 2r\operatorname{sech} t \cdot (-\operatorname{sech} t \cdot \tanh t) = -2r\operatorname{sech}^2 t \cdot \tanh t \\ v'(t) &= -r\operatorname{sech} t \cdot \tanh t & v''(t) &= r\operatorname{sech} t \cdot \tanh^2 t - r\operatorname{sech}^3 t = r\operatorname{sech} t \left(\tanh^2 t - \operatorname{sech}^2 t\right). \end{aligned}$$

Y ahora sustituimos en las ecuaciones de las geodésicas con los valores que hemos obtenido para los símbolos de Christoffel:

$$\begin{cases} u''(t) &= -\frac{2}{v} r^2 \operatorname{sech}^3 t \cdot \tanh t \\ v''(t) &= -\frac{1}{v} r^2 \operatorname{sech}^4 t + \frac{1}{v} r^2 \operatorname{sech}^2 t \cdot \tanh^2 t \end{cases} \xRightarrow{v = r\operatorname{sech} t} \begin{cases} u''(t) = -2r\operatorname{sech}^2(t) \cdot \tanh t \\ v''(t) = r\operatorname{sech} t \left(\tan^2 t - \operatorname{sech}^2 t\right) \end{cases}.$$

Y con esto hemos comprobado que es una geodésica.

## Estudio de las rectas verticales

Empecemos dando una parametrización para las rectas verticales (es decir, aquellas con su coordenada $x$ constante):

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = \left(a, re^t\right)$$

Por los anteriores cálculos sabemos que $\mathrm{I}\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right) = \frac{1}{v^2}\left(\left(u'\left(t\right)\right)^2 + \left(v'\left(t\right)\right)^2\right)$. Como en este caso $u'\left(t\right) = 0$ y $v'\left(t\right) = re^t$, tenemos que:

$$\mathrm{I}\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right) = 1.$$

Y, de esta forma,

$$L_{t_0}^{t}\left(\gamma\right) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathrm{I}\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right)} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} 1 \cdot \mathrm{d}t = t - t_0.$$

Con lo que, con esta parametrización, las rectas verticales ya están parametrizadas por longitud de arco.

De nuevo, al estar parametrizadas por longitud de arco, podemos comprobar directamente si son geodésicas viendo si cumplen las ecuaciones que hemos planteado para el anterior caso. Además, como los símbolos de Christoffel solo dependen de la Primera Forma Fundamental, no será necesario volverlos a calcular. En definitiva, calculemos en primer lugar las derivadas de $u$ y $v$:

$$\begin{aligned} u'\left(t\right) &= 0 & \qquad u''\left(t\right) &= 0 \\ v'\left(t\right) &= re^t & \qquad v''\left(t\right) &= re^t, \end{aligned}$$

y sustituyamos en las ecuaciones de las geodésicas:

$$\begin{cases} u''\left(t\right) & = \frac{2}{v} \cdot 0 \\ v''\left(t\right) & = -\frac{1}{v} \cdot 0^2 + \frac{1}{v} r^2 e^{2t} \end{cases} \xRightarrow{v = re^t} \begin{cases} u''\left(t\right) = 0 \\ v''\left(t\right) = re^t \end{cases}.$$

Con lo que es una geodésica.

## Estudio de otras posibles geodésicas

Supongamos que existen otras curvas geodésicas aparte de las dos posibles que hemos visto. Esto significa que existen dos puntos distintos entre sí tales que la curva más corta que los une es distinta a las semirrectas verticales o a las semicircunferencias con centro en $v = 0$.

Claramente, por la unicidad de las geodésicas, si los dos puntos tienen la misma coordenada $x$, necesariamente su geodésica es una de las ya vistas. Por tanto, podemos suponer que tienen distinta coordenada $x$. Sin embargo, como entre cualesquiera dos puntos del semiplano superior de $\mathbb{R}^2$, con distinta $x$, pasa una sola semicircunferencia con centro en el eje $y = 0$ y las geodésicas son únicas, no es posible que hay otras geodésicas distintas a las que hemos visto.