Entrega Superficies. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Considérese el conjunto $X = \left\{x^2 + y^2 - \cosh^2(z) = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$. Se pide:

1. Probar que X es una superficie diferenciable y escribir parametrizaciones locales cuyas imágenes recubran X.
2. Calcular, en la coordenadas locales elegidas en el apartado anterior, las expresiones en cada punto de la primera y segunda forma fundamental, de la aplicación de Weingarten y de la curvatura de Gauss.
3. Discutir, a la vista de los resultados anteriores, si pueden existir rectas contenidas en esta superficie. Comprobar si efectivamente existen rectas de las citadas que pasen por el punto $(1, 0, 0)$.
4. Dar una parametrización de alguna línea asintótica por el punto $(1, 0, 0)$.

Apartado 1

Recordamos que, para demostrar que X es una superficie diferenciable podemos simplemente ver que, considerando

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0 \end{aligned}$$

y viendo que $X = \{F(x, y, z) = 0\}$, es suficiente comprobar que $F \in C^{\infty)}$ y que 0 es un valor regular de F, es decir, que $\nabla F(p) \neq 0,\ \forall p \in X$. Que F pertenezca a $C^{\infty)}$ es trivial (suma de funciones que lo son) y, como $\nabla F = (2x, 2y, 2\sinh z \cosh z)$, tendremos que $\nabla F(x, y, z) = 0$ si, y sólo si,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \sinh z \cosh z \Leftrightarrow \sinh z = 0 \text{ ó } \cosh z = 0 \end{cases}$$

Como

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow z = 0$$

y

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \text{ es imposible} \left(z \in \mathbb{R}\right),$$

tenemos que $\nabla F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$ que no pertenece a X y, por lo tanto, X es una superficie diferenciable.

Veamos ahora una parametrización de la superficie. Si tomamos $u \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y realizamos un cambio de variable, $x = u\cos\theta,\ y = u\sin\theta$, tenemos que:

$$u^2 - \cosh^2 z = 0$$

y, por tanto,
$$u^2 = \cosh^2 z.$$

En definitiva,[1] sustituyendo z por λ, tenemos como parametrización:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\to X \\ (\lambda, \theta) &\mapsto (\cosh\lambda\cos\theta, \cosh\lambda\sin\theta, \lambda)\end{aligned}$$

Sin embargo, nos interesa que el dominio sea abierto. Por esta razón utilizaremos dos parametrizaciones con dominio abierto que cubran toda la superficie. Estarán definidas por las mismas ecuaciones, pero una tendrá como dominio $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ y la otra $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Con esto la primera cubrirá el hueco que deja la otra en el $(\lambda, 0)$.

Ahora debemos comprobar que φ es diferenciable (trivial por serlo sus componentes), es un homeomorfismo con su imagen y que la aplicación diferencial de φ es inyectiva.

Veamos que es un homeomorfismo, es decir, que φ es biyectiva y que tanto ella como φ^{-1} son continuas. La sobreyectividad se da al ser sobre su imagen. Veamos la inyectividad. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ó $\theta_1 \neq \theta_2 \in (0, 2\pi)$, supongamos que $\varphi(\lambda_1, \theta_1) = \varphi(\lambda_2, \theta_2)$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces la componente z será distinta directamente, por tanto, supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2$, digamos $\lambda := \lambda_1$, y $\theta_1 \neq \theta_2$. Con esto tenemos que $\cosh\lambda_1 = \cosh\lambda_2$, es decir, $\cosh\lambda\cos\theta_1 = \cosh\lambda\cos\theta_2 \Leftrightarrow$ [2] $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, pero como estamos en un dominio de tamaño $< 2\pi$, esto es imposible y las componentes x son distintas. Con esto f es biyectiva.

Para ver ahora que φ^{-1} es continua tomemos $q \in U = \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ y la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Como hemos visto que φ es diferenciable, podemos aplicar el teorema de la función inversa y obtenemos entornos $V_1 \subset U$ de q y $V_2 \subset \mathbb{R}^2$ de $\pi \circ \varphi(q)$ tal que se aplica de forma difeomorfa V_1 a V_2 a través de $\pi \circ \varphi$. Como hemos visto que φ es biyectiva, al restringir a $\varphi(V_1)$, $\varphi^{-1} = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi$ tenemos que φ^{-1} es composición de funciones continuas, es decir, es continua.

A continuación veremos que $d\varphi$ es inyectiva. Para ello veremos el rango de la matriz de la aplicación lineal:
$$d\varphi = \begin{pmatrix} \sinh\lambda\cos\theta & -\cosh\lambda\sin\theta \\ \sinh\lambda\sin\theta & \cosh\lambda\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
es 2 para todo los valores posibles. En primer lugar,

$$\begin{vmatrix} \sinh\lambda\cos\theta & -\cosh\lambda\sin\theta \\ \sinh\lambda\sin\theta & \cosh\lambda\cos\theta \end{vmatrix} = \sinh\lambda\cosh\lambda\left(\cos^2\theta + \sin\theta\right) = \sinh\lambda\cosh\lambda = 0,$$

lo que solo se puede dar si $\lambda = 0$. Por tanto, solo nos queda comprobar este caso:

$$d\varphi(0, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que el rango también es 2 y la aplicación es inyectiva.

Por último, debemos comprobar que las dos parametrizaciones que hemos visto antes cubren toda la superficie. Tenemos que ver que $\varphi(U_1) \cup \varphi(U_2) = X$, donde $U_1 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ y $U_2 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$.

$\subset$) Sea $(x, y, z) \in \varphi(U_1) \cup \varphi(U_2)$, entonces $\exists\, (\lambda, \theta) \in U_1 \cup U_2$ tal que
$$\varphi(\lambda, \theta) = (\cosh\lambda\cos\theta, \cosh\lambda\sin\theta, \lambda)$$
debemos ver que se cumple, con esos x, y, z, que $x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0$. Esto sale de como hemos definido la parametrización.

[1] Como $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} > 0$, tenemos que $\cosh z = |\cosh z|$

[2] Podemos dividir entre $\cosh\lambda$ porque esta función no se anula en ningún punto de su dominio ($\mathbb{R}$).

$\supset$) Sea $(x,y,z)\in X$. Si perteneciese a $\varphi(U_1)\cup\varphi(U_2)$ entonces debe existir $(\lambda,\theta)\in U_1\cup U_2$ tal que $\varphi(\lambda,\theta)=(\cosh\lambda\cos\theta,\cosh\lambda\sin\theta,\lambda)=(x,y,z)$

Si tenemos que $x\neq 0$, entonces:

$$\begin{cases}\cosh\lambda\cos\theta = x\\ \cosh\lambda\sin\theta = y\\ \lambda = z\end{cases}$$

lo que quiere decir que $\lambda = z$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, luego $\varphi\left(z,\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=(x,y,z)$.

Si $x=0$, $(0,y,z)\in X\Rightarrow y=\pm\cosh\lambda=\pm\cosh z$, luego tomando $\left(z,\frac{\pi}{2}\right),\left(z,\frac{3\pi}{2}\right)\in U_1\cup U_2$, sus imágenes por φ son los dos posibles $(0,y,z)$ porque:

$$\varphi\left(z,\frac{\pi}{2}\right)=\left(\cosh z\cos\frac{\pi}{2},\cosh z\sin\frac{\pi}{2},z\right)=(0,\cosh z,z)=(0,y,z)$$
$$\varphi\left(z,\frac{3\pi}{2}\right)=\left(\cosh z\cos\frac{3\pi}{2},\cosh z\sin\frac{3\pi}{2},z\right)=(0,-\cosh z,z)=(0,y,z)$$

En definitiva, cubrimos toda la superficie X.

Apartado 2

En primer lugar, recordamos que la parametrización que hemos elegido es:

$$\varphi(\lambda,\theta)=(\cosh\lambda\cos\theta,\cosh\lambda\sin\theta,\lambda).$$

Siendo la definición de primera forma fundamental:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_p : T_pX &\to \mathbb{R}\\ (v,v') &\mapsto \langle v,v'\rangle\end{aligned}$$

tiene como matriz respecto de la base $\langle\varphi_\lambda(p),\varphi_\theta(p)\rangle$

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_\lambda\cdot\varphi_\lambda & \varphi_\lambda\cdot\varphi_\theta\\ \varphi_\theta\cdot\varphi_\lambda & \varphi_\theta\cdot\varphi_\theta\end{pmatrix}$$

Por tanto, como:

$$\varphi_\lambda=(\sinh\lambda\cos\theta,\sinh\lambda\sin\theta,1)$$
$$\varphi_\theta=(-\cosh\lambda\sin\theta,\cosh\lambda\cos\theta,0)$$

Tenemos que:

$$\varphi_\lambda\cdot\varphi_\lambda=\sinh^2\lambda\cos^2\theta+\sinh^2\lambda\sin^2\theta+1=1+\sinh^2\lambda$$
$$\varphi_\theta\cdot\varphi_\theta=\cosh^2\lambda\sin^2\theta+\cosh^2\lambda\cos^2\theta=\cosh^2\lambda$$
$$\varphi_\lambda\cdot\varphi_\theta=\varphi_\theta\cdot\varphi_\lambda=-\cosh\lambda\sinh\lambda\cos\theta\sin\theta+\cosh\lambda\sinh\lambda\cos\theta\sin\theta=0$$

Con lo que al final la matriz queda como:

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sinh^2\lambda & 0\\ 0 & \cosh^2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh^2\lambda & 0\\ 0 & \cosh^2\lambda\end{pmatrix}$$

Para calcular la segunda forma fundamental necesitaremos la aplicación de Gauss que será:

$$\begin{aligned}N : X &\to X^2\\ p &\mapsto N(p)=\frac{\varphi_\lambda\times\varphi_\theta}{\|\varphi_\lambda\times\varphi_\theta\|}\end{aligned}$$

Calculando

$$\varphi_\lambda \times \varphi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh\lambda\cos\theta & \sinh\lambda\sin\theta & 1 \\ -\cosh\lambda\sin\theta & \cosh\lambda\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\cosh\lambda\cos\theta, -\cosh\lambda\sin\theta, \sinh\lambda\cosh\lambda)$$

y

$$\|\varphi_\lambda \times \varphi_\theta\| = \sqrt{\cosh^2\lambda\left(1+\sinh^2\lambda\right)} = \cosh^2\lambda$$

En definitiva nos queda que:

$$N(p) = \left(-\frac{\cos\theta}{\cosh\lambda}, -\frac{\sin\theta}{\cosh\lambda}, \frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda}\right)$$

Con este valor podemos calcular entonces la segunda forma fundamental que recordemos definíamos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p : T_pX &\to \mathbb{R} \\ (v, v') &\mapsto dN_p(v)\cdot v' \end{aligned}$$

Con la siguiente matriz respecto de la base $\langle \varphi_\lambda, \varphi_\theta \rangle$:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\cdot\varphi_{\lambda\lambda} & N\cdot\varphi_{\lambda\theta} \\ N\cdot\varphi_{\theta\lambda} & N\cdot\varphi_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Realizamos entonces los cálculos necesarios:

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda\lambda} &= (\cosh\lambda\cos\theta, \cosh\lambda\sin\theta, 0) & N\cdot\varphi_{\lambda\lambda} &= -1 \\ \varphi_{\theta\theta} &= (-\cosh\lambda\cos\theta, -\cosh\lambda\sin\theta, 0) & N\cdot\varphi_{\theta\theta} &= 1 \\ \varphi_{\lambda\theta} = \text{[3]}\varphi_{\theta\lambda} &= (-\sinh\lambda\sin\theta, \sinh\lambda\cos\theta, 0) & N\cdot\varphi_{\lambda\theta} &= N\cdot\varphi_{\theta\theta} = 0 \end{aligned}$$

Por lo que al final nos queda la matriz:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la aplicación de Weingarten que se define como la derivada de la aplicación de Gauss, es decir,

$$d_pN : T_pX \to T_pX$$

Haciendo uso de las formas fundamentales tenemos que:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -dN_p \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh^2\lambda & 0 \\ 0 & \cosh^2\lambda \end{pmatrix}$$

En definitiva,

$$dN_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cosh^2\lambda} \end{pmatrix}$$

Por último, calculamos la curvatura de Gauss. Para ello, calcularemos los autovalores de la aplicación de Weingarten para obtener $-k_1$ y $-k_2$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\cosh^2\lambda} - \eta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cosh^2\lambda} - \eta \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cosh^4\lambda} - \eta = 0$$

Por tanto,

$$\eta = \pm\frac{1}{\cosh^2\lambda} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{\cosh^2\lambda} > 0 \\ k_2 = -\frac{1}{\cosh^2\lambda} < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{\cosh^4\lambda} < 0}$$

Apartado 3

Por el anterior apartado, hemos visto que $k < 0$, por lo tanto, los puntos de la superficie son hiperbólicos. Por tanto, existe una base ortonormal $\langle w_1, w_2 \rangle$ de T_pX tal que $k_1 := k_n(w_1) > 0, k_2 := k_n(w_2) < 0$ y, al ser de distinto signo, tenemos que cada punto es localmente un punto de silla. Como k_n es continua, deberá existir un punto en el que la curvatura cambie de signo:

$$\exists w^* : k_n(w^*) = 0$$

Veamos que cualquier recta que esté contenida en una superficie es una línea asintótica. Esto quiere decir que, siendo r una recta, r (que es su propia tangente) se encuentra en una dirección asintótica ($k_n = 0$).

Por tanto, sea $r : I \to X$ una curva parametrizada por la longitud de arco (p.p.a) de la traza de una recta contenida en X. Al ser una recta, sabemos que $r'' = 0$ y, por tanto, $k_{n_r} = k_r \cos(\text{ang}(\overrightarrow{n}, N)) = 0$ con lo que la curvatura normal de todos los puntos de r es nula y, en conclusión, r es una línea asintótica. Veamos entonces las direcciones de las líneas asintóticas (que pueden o no ser rectas, pero son las únicas posibles) que están contenidas en X.

Sabiendo que $\mathbf{II}_p = 0$ en las direcciones asintóticas tenemos que:

$$\ker(\text{II}_p) : 0 = -dN_p(x, y) \cdot (x, y) = \left(\frac{x}{\cosh^2\lambda}, -\frac{y}{\cosh^2\lambda}\right) \cdot (x, y) = -\frac{1}{\cosh^2\lambda}\left(x^2 - y^2\right)$$

Es decir, $\pm x = y$ o, lo que es lo mismo, $(1, 1)$ ó $(1, -1)$. Utilizando estos puntos y la matriz de $d\varphi$ calculamos las direcciones asintóticas:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \sinh\lambda\cos\theta & -\cosh\lambda\sin\theta \\ \sinh\lambda cin\theta & \cosh\lambda\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(\sinh\lambda\cos\theta - \cosh\lambda\sin\theta, \sinh\lambda\sin\theta + \cosh\lambda\cos\theta, 1)}_{=:\overrightarrow{v_1}(\lambda,\theta)} \\ \begin{pmatrix} \sinh\lambda\cos\theta & -\cosh\lambda\sin\theta \\ \sinh\lambda cin\theta & \cosh\lambda\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{(\sinh\lambda\cos\theta + \cosh\lambda\sin\theta, \sinh\lambda\sin\theta - \cosh\lambda\cos\theta, 1)}_{=:\overrightarrow{v_2}(\lambda,\theta)} \end{cases}$$

Analicemos el caso del punto $(1, 0, 0)$:

$$\varphi(\lambda, \theta) = (1, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \cosh\lambda\cos\theta = 1 \\ \cosh\lambda\sin\theta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Para este punto las direcciones asintóticas son:

$$\overrightarrow{v_1}(0, 0) = (0, 1, 1)$$
$$\overrightarrow{v_2}(0, 0) = (0, -1, 1)$$

Por lo que las líneas asintóticas serán:

$$r_1 := \{(1, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$r_2 := \{(1, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Veamos que no satisfacen la ecuación que define a X ($x^2 + y^2 = \cosh^2 z$)

- Primera línea, r_1, si se diese:

$$1 + t^2 = \cosh^2 t \Rightarrow t^2 = \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 \Rightarrow t = \pm\sinh t$$

  Por lo tanto,

  1. Si $t = \sinh t$, lo cual no es cierto para, por ejemplo, $t = 1$.

2. Si $t = -\sinh t$, lo cual no es cierto para, por ejemplo, $t = 1$.

- Segunda línea, r_2, si se diese:
$$1 + t^2 = \cosh^2 t$$
y procedemos como en la anterior línea.

Como estas son las únicas posibles rectas que pasan por $(1, 0, 0)$ contenidas en X, pero realmente no son rectas, no existe ninguna.

Apartado 4

Sea $\alpha(t) = \varphi(\lambda(t), \theta(t))$ una línea asintótica. Derivando tenemos que:

$$\alpha'(t) = \lambda'(t)\,\varphi_\lambda(\lambda(t), \theta(t)) + \theta'(t)\,\varphi_\theta(\lambda(t), \theta(t))$$

Por lo que las coordenadas de α' en la base $\langle \varphi_\lambda(\lambda(t), \theta(t)), \varphi_\theta(\lambda(t), \theta(t)) \rangle$ serán $(\lambda'(t), \theta'(t))$ y, al ser asintótico, $\mathrm{II}_p(\lambda'(t), \theta'(t)) = 0$, lo que equivale a que:

$$\begin{pmatrix} \lambda'(t) & \theta'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda'(t)^2 + \theta'(t)^2 = 0;\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir, que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \theta'(t) \Rightarrow \lambda(t) = \theta(t) + C_1 \\ \lambda'(t) = -\theta'(t) \Rightarrow \lambda(t) = -\theta(t) + C_2 \end{cases}$$

En el caso concreto del punto $(1, 0, 0)$, tenemos que $\varphi^{-1}(1, 0, 0) = (0, 0)$. Suponiendo que $\alpha(0) = (1, 0, 0)$, por el anterior ejercicio, sabemos que $\lambda(0) = 0 = \theta(0)$ por lo que $C_1 = C_2 = 0$ y, entonces, $\lambda(t) = \theta(t)$ ó $\lambda(t) = -\theta(t)$. En definitiva:

1. Si $\lambda(t) = \theta(t)$, tenemos que la parametrización es:
$$\alpha(t) = \varphi(\lambda(t), \lambda(t)) = \boxed{(\cosh(\lambda(t))\cos(\lambda(t)), \cosh(\lambda(t))\sin(\lambda(t)), \lambda(t))}$$

2. Si $\lambda(t) = -\theta(t)$, tenemos que la parametrización es:
$$\alpha(t) = \varphi(\lambda(t), -\lambda(t)) = \boxed{(\cosh(\lambda(t))\cos(-\lambda(t)), \cosh(\lambda(t))\sin(-\lambda(t)), \lambda(t))}$$

Que son líneas asintóticas no rectas por el anterior ejercicio.