Entrega Curvas. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Dadas dos curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$, siendo β regular, decimos que β es una *evoluta* de α si $\alpha(t)$ está sobre la recta afín tangente a β en $\beta(t)$ y, además, $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ son ortogonales. Se pide:

1. Probar que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto (aquí κ denota la función curvatura de α), la curva β definida por los centros de curvatura de α es una evoluta suya si y solo si α es una curva plana. En este caso, pruébese además que β es la única evoluta plana de α.
2. Si α es una curva plana regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto, probar que todas las evolutas de α tienen su traza contenida en un cilindro perpendicular al plano que contiene a α y cuya base es la única evoluta plana de α.
3. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que todas las evolutas de α son hélices generalizadas.

Apartado 1

Supongamos en primer lugar que α es una curva plana parametrizada por longitud de arco. Recordemos[1] que la curva definida por los centros de curvatura de α tiene la siguiente expresión:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}_\alpha(s).$$

Ya que α es una curva plana, sabemos que su torsión es nula, es decir,[2] $\mathbf{n}'_\alpha(s) = -\kappa(s)\,\alpha'(s)$. Si derivamos ahora la definición de β tenemos que

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{\mathbf{n}'_\alpha(s) \cdot \kappa(s) - \kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} \\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s) \cdot \mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} + \frac{1}{\kappa(s)} \left(-\kappa(s)\,\alpha'(s)\right) = \boxed{-\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \mathbf{n}_\alpha(s)}. \end{aligned}$$

Con esta última expresión, y sabiendo que $\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ es un escalar y que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\alpha'(s)$, tenemos que $\alpha'(s)$ y $\beta'(s)$ son ortogonales. Ahora, despejando α en la definición de β, vemos que

$$\alpha(s) = \beta(s) - \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}_\alpha(s) = \beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)} \beta'(s)$$

y, por tanto, $\alpha(s)$ se encuentra en la recta tangente a $\beta(s)$. Esto[3] nos indica que α es la *involuta* de β con lo que queda demostrada esta primera implicación.

[1] Definición 6.9 [1]
[2] Fórmulas de Frenet-Serret
[3] Definición 7.1 [1]

Antes de ver la implicación recíproca, veamos la unicidad de esta evoluta plana. Sea pues γ una evoluta plana cualquiera de α. Tendremos[4] entonces que $\alpha(s) = \gamma(s) + t(s)\gamma'(s)$ siendo $\alpha'(s)$ y $\gamma'(s)$ ortogonales y t una función de I a $\mathbb{R}$. Como ambas curvas son planas, el hecho de que todos los puntos de α se encuentren en las rectas afines tangente de sus respectivos puntos de γ nos dice que α y γ se encuentran en el mismo plano. Con esto tenemos que $\gamma'(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Luego $\gamma(s) = \alpha(s) - \lambda(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s)$ y

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \alpha'(s) - \lambda'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) - \lambda(s)\,\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) - \lambda'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) + \lambda(s)\,\kappa(s)\,\mathbf{t}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el producto escalar por $\mathbf{t}_\alpha(s)$ sobre esta expresión, tenemos que $0 = 1+\lambda(s)\,\kappa(s)$, debido a que $\mathbf{t}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\gamma'(s)$ y a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. Con esto obtenemos que $\lambda(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}$ y sustituyendo en la anterior expresión de $\gamma(s)$ tenemos que

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Es decir, la curva formada por los centros de curvatura de α.

Veamos ahora la implicación inversa. Por tanto, supongamos que β, como curva formada por los centros de curvatura de α, es evoluta de α. Al ser evoluta se da[5] la siguiente relación:

$$\alpha(s) = \beta(s) + t(s)\,\beta'(s),\ t : I \to \mathbb{R}$$

Si sustituimos el valor de $\alpha(s)$ dado por esta fórmula en la igualdad de la curva de centros tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\\ &= \beta(s) + t(s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Es decir, $0 = t(s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva, $\beta'(s) = \frac{1}{\kappa(s)t(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. Como es para un punto fijo, la anterior igualdad nos indica que $\beta'(s)$ y $\mathbf{n}_\alpha(s)$ son proporcionales. Si calculamos ahora $\beta'(s)$ en base a la fórmula de los centros de curvatura tenemos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Sin embargo, como $\alpha'(s)$ y $\mathbf{n}'_\alpha(s)$ son ambos perpendiculares a $\mathbf{n}_\alpha(s)$ (y, por lo tanto, linealmente independientes), no es posible, haciendo una suma de ambos, obtener un vector proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$, luego, su suma en este caso será 0. Por tanto,

$$\begin{aligned}0 &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &\Rightarrow -\alpha'(s)\,\kappa(s) = \mathbf{n}'_\alpha(s)\end{aligned}$$

lo que comparado con la fórmula de Frenet-Serret nos indica que la torsión de α es 0 y, por tanto, es plana.

Apartado 2

Ya que estamos tratando con cilindros generalizados, estos podrán tener como base cualquier tipo de curva. Estos cilindros tienen la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3\\ (u, v) &\mapsto \gamma(u) + v\mathbf{v}\end{aligned}$$

[4] Definición 7.1 [1]
[5] Definición 7.1 [1]

donde $\mathbf{v}$ es un vector que nos indica la dirección en la que se construye el cilindro y γ, una curva (que será su base). Con esto, para ver que una curva esta contenida en un cilindro será simplemente necesario ver que la proyección de dicha curva a un plano perpendicular al cilindro es igual a la proyección de la propia curva γ. En nuestro caso tendremos que, como β es una evoluta de α (parametrizada por la longitud de arco),[6]

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\tan\left(\int_{s_0}^{s}\tau(u)\,\mathrm{d}u + c\right)\mathbf{b}_\alpha(s).$$

Si llamamos ahora $\hat{\beta}$ a la evoluta plana que, por el anterior apartado, cumple que

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Restando ambas ecuaciones,

$$\beta(s) - \hat{\beta}(s) = \underbrace{\frac{1}{\kappa(s)}\tan\left(\int_{s_0}^{s}\tau(u)\,\mathrm{d}u + c\right)}_{=\lambda}\mathbf{b}_\alpha(s),$$

nos quedamos con que

$$\beta(s) = \hat{\beta}(s) + \lambda\mathbf{b}_\alpha(s)$$

lo que finalmente nos indica que β se encuentra en un cilindro con base $\hat{\beta}$. Como esta última curva es plana y se encuentra en el mismo plano que α, tenemos el resultado.

Apartado 3

Veamos ahora que, con las condiciones del anterior apartado, todas las evolutas son hélices generalizadas, es decir, que los vectores tangentes de todas ellas forman un ángulo constante con un vector fijo no nulo. Esta definición es equivalente a que, para un $\mathbf{v}$ fijo, el producto escalar de $\mathbf{t}_\beta(s)$, siendo β una evoluta de α, con $\mathbf{v}$ es constante. O lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{ds}\langle\mathbf{t}_\beta(s), \mathbf{v}\rangle = 0, \ \forall s \in I.$$

Ahora, como la base del cilindro sobre el que están las evolutas de α es la única evoluta plana ($\hat{\beta}$), y $\mathbf{b}_\alpha$ es constante (al ser α una curva plana birregular) es lógico considerar $\mathbf{b}_\alpha$ como el vector $\mathbf{v}$ de la anterior ecuación. Veamos que esta ecuación se cumple para todas las evolutas de α.

Empezamos por la evoluta plana $\hat{\beta}$. Simplemente como esta curva es plana y está en el mismo plano que α (perpendicular a $\mathbf{b}_\alpha$) tenemos directamente el resultado.

Veamos ahora el resultado para el resto de evolutas β. Derivando el producto escalar tenemos que

$$0 = \frac{d}{ds}\langle\mathbf{t}_\beta(s), \mathbf{b}_\alpha\rangle = \langle\mathbf{t}'_\beta(s), \mathbf{b}_\alpha\rangle + \langle\mathbf{t}_\beta(s), \mathbf{b}'_\alpha\rangle,$$

pero como $\mathbf{b}_\alpha$ es constante, su derivada se anula y nos queda que

$$0 = \langle\mathbf{t}'_\beta(s), \mathbf{b}_\alpha\rangle.$$

Si recordamos ahora las fórmulas de Frenet-Serret

$$\mathbf{t}'_\beta(s) = \kappa_\beta(s)\,\mathbf{n}_\beta(s)$$

y sustituimos en la anterior igualdad

$$0 = \langle\kappa_\beta(s)\,\mathbf{n}_\beta(s), \mathbf{b}_\alpha\rangle = \underbrace{\kappa_\beta(s)}_{\neq 0}\langle\mathbf{n}_\beta(s), \mathbf{b}_\alpha\rangle,$$

solo nos quedará por ver que $\mathbf{n}_\beta(s)$ es perpendicular a $\mathbf{b}_\alpha$. Pero esto será cierto ya que β esta contenido en un cilindro construido en la dirección de $\mathbf{b}_\alpha$ y $\mathbf{n}_\beta(s)$ está en la dirección radial de dicho cilindro.[7]

[6] Teorema 7.5 [1]

[7] Que la curvatura de β fuese 0 solo se podría dar si $\mathbf{t}'_\beta$ también lo fuese, es decir, si β fuese una recta.

Referencias

[1] Jesús M. Ruiz José M. Rodríguez-Sanjurjo. Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas. Sanz y Torres, 2012.