Entrega Superficies. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Demuestra que una superficie parametrizada tal que $E = \frac{1}{v^2}$, $F = 0$, $G = \frac{1}{v^2}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $v > 0$ tiene una curvatura de Gauss constante igual a -1. Comprueba que las curvas de la forma

$$(u(s), v(s)) = (a + r\tanh(s), r\,\mathrm{sech}(s))$$

son las semicircunferencias con centro en $v = 0$ y que su imagen por φ están parametrizadas por su longitud de arco y son geodésicas. Parametriza por arco las semirrectas verticales y comprueba que también son geodésicas. ¿Puede haber más geodésicas?

Curvatura de Gauss

Veamos que, efectivamente, la curvatura de Gauss de esta superficie es constantemente -1. Por hipótesis, sabemos que la matriz de la *Primera Forma Fundamental* de esta superficie es:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

Además, gracias a que $F = 0$, podemos aplicar el ejercicio 7 de la hoja 6 que nos indica una forma de la curvatura de Gauss:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Por lo que solo queda calcular los distintos términos:

$$\sqrt{EG} = \sqrt{\frac{1}{v^4}} = \frac{1}{v^2} \qquad E_v = -\frac{2}{v^3} \qquad G_u = 0$$

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v = \left(-\frac{2}{v} \right)_v = \frac{2}{v^2}$$

Sustituyendo,

$$K = -\frac{v^2}{2} \left(\frac{2}{v^2} + 0 \right) = -\frac{v^2}{2} \cdot \frac{2}{v^2} = -1.$$

Que es lo que buscábamos.

Estudio de posibles geodésicas

En primer lugar, veamos que las curvas dadas son las semicircunferencias pedidas. Esto es equivalente a que, para cualquier a y r dados, existe un punto en $v = 0$ que está a la misma distancia de todos los puntos de la curva. Además, la curva debe ser exactamente una semicircunferencia.

Antes de empezar a hacer cálculos daremos otra forma de expresar las componentes hiperbólicas de la curva:

$$\tanh s = \frac{\sinh s}{\cos s} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \qquad \operatorname{sech} s = \cosh^{-1} s = \frac{2}{e^s + e^{-s}}$$

Con esto empezaremos calculando los límites de la curva cuando s tiende a infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \left(u\left(s\right), v\left(s\right)\right) &= \lim_{s\to\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) \\
&= \lim_{s\to\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s}{e^s}, r \cdot \frac{2}{e^s}\right) = \left(a + r, 0\right). \\
\lim_{s\to-\infty} \left(u\left(s\right), v\left(s\right)\right) &= \lim_{s\to-\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}}\right) \\
&= \lim_{s\to-\infty} \left(a - r \cdot \frac{e^{-s}}{e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s}\right) = \left(a - r, 0\right).
\end{aligned}$$

A su vez, $v\left(s\right) = r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}} \begin{cases} > 0, & \text{si } r > 0 \\ < 0, & \text{si } r < 0 \end{cases}$. Con esto hemos visto que la curva tiende a dos puntos con $v = 0$ (en $-\infty$ y $+\infty$) sin cruzar ningún otro con $v = 0$. Es decir, que si encontramos un punto que equidiste a todos los de la curva, aseguraremos que se trata de una semicircunferencia.

Para obtener un posible candidato a centro de la supuesta semicircunferencia tenemos un par de datos, tiene que tener $v = 0$ y equidistar de los dos límites que acabamos de calcular. Con esto un posible centro sería el punto $(a, 0)$. Comprobemos que efectivamente lo es. Para ello vamos a ver que el cuadrado, y por tanto sin el cuadrado también, de la distancia euclídea del posible centro a cualquier punto de la curva es constante:

$$\left|\left(x - a, y\right)\right|^2 \overset{?}{\equiv} \text{const. } \forall \left(x, y\right) \in \left(u\left(s\right), v\left(s\right)\right).$$

Sustituyendo el valor de un punto de la curva, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\left(a + r\tanh s - a, r \operatorname{sech} s\right)\right|^2 &= r^2 \left(\tanh^2 s + \operatorname{sech}^2 s\right) \\
&= r^2 \cdot \frac{\sinh^2 s + 1}{\cosh^2 h} \\
&= r^2 \cdot \frac{\cosh^2 s - 1 + 1}{\cosh^2 s} = r^2 \equiv \text{const.}
\end{aligned}$$

Y con esto hemos probado que estas curvas son semicircunferencias con centro en $v = 0$.

A continuación comprobaremos que las imágenes de estas curvas por φ están parametrizadas por su longitud de arco. La imagen de la curva por φ será:

$$\varphi\left(t\right) = \left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)$$

Con lo que $\varphi'\left(t\right) = \varphi_u u'\left(t\right) + \varphi_v v'\left(t\right)$ y $\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right)$ son las coordenadas de $\varphi'\left(t\right)$ sobre $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por la definición de la *Primera Forma Fundamental* sabemos que:

$$\left\|\varphi'\left(t\right)\right\|^2 = \mathrm{I}_\varphi\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right)$$

Con lo que:

$$L_{t_0}^t\left(\varphi\right) = \int_{t_0}^t \left\|\varphi'\left(s\right)\right\| \mathrm{d}s = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathrm{I}_{\varphi(s)}\left(u'\left(s\right), v'\left(s\right)\right)} \mathrm{d}s$$

Calculemos, pues, la primera forma fundamental para $\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\varphi(t)}\left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right) &= \left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'\left(t\right) \\ v'\left(t\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{v^2} \cdot \left(u'\left(t\right), v'\left(t\right)\right) \begin{pmatrix} u'\left(t\right) \\ v'\left(t\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{v^2} \left(\left(u'\left(t\right)\right)^2 + \left(v'\left(t\right)\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Como $u'(t) = r\,\mathrm{sech}^2\, t$ y $v'(t) = -r\,\mathrm{sech}\, t \cdot \tanh t$, si sustituimos tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{\varphi(t)}\left(u'(t), v'(t)\right) &= \frac{r^2}{r^2 \cdot \mathrm{sech}^2\, t} \cdot \mathrm{sech}^2\, t \left(\mathrm{sech}^2\, t + \tanh^2 t\right) \\ &= \mathrm{sech}^2\, t + \tanh^2 t\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\begin{aligned}L_{t_0}^{t}(\varphi) &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathrm{sech}^2\, t + \tanh^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1}{\cosh^2 t} + \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1+\sinh^2 t}{\cosh^2 t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = t - t_0\end{aligned}$$

Con lo que queda probado que esta parametrizada por longitud de arco.