Entrega Curvas. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Dadas dos curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$, siendo β regular, decimos que β es una *evoluta* de α si $\alpha(t)$ está sobre la recta afín tangente a β en $\beta(t)$ y, además, $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ son ortogonales. Se pide:

1. Probar que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto (aquí κ denota la función curvatura de α), la curva β definida por los centros de curvatura de α es una evoluta suya si y solo si α es una curva plana. En este caso, pruébese además que β es la única evoluta plana de α.
2. Si α es una curva plana regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto, probar que todas las evolutas de α tienen su traza contenida en un cilindro perpendicular al plano que contiene a α y cuya base es la única evoluta plana de α.
3. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que todas las evolutas de α son hélices generalizadas.

Apartado 1

Supongamos en primer lugar que α es una curva plana parametrizada por longitud de arco. Recordemos[1] que la curva definida por los centros de curvatura de α tiene la siguiente expresión:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s).$$

Ya que α es una curva plana, sabemos que su torsión es nula, es decir, $\mathbf{n}'_\alpha(s) = -\kappa(s)\alpha'(s)$. Si derivamos ahora la definición de β tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{\mathbf{n}'_\alpha(s)\cdot\kappa(s) - \kappa'(s)\cdot\mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)}\\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)\cdot\mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} + \frac{1}{\kappa(s)}\left(-\kappa(s)\alpha'(s)\right) = \boxed{-\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)}\end{aligned}$$

Con esta última expresión, y sabiendo que $\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ es un escalar y que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es perpendicular a α', tenemos que $\alpha'(s)$ y $\beta'(s)$ son ortogonales. Ahora, despejando α en la definición de β, vemos que

$$\alpha(s) = \beta(s) - \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) = \beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)}\beta'(s)$$

y, por tanto, $\alpha(s)$ se encuentra en la recta tangente a $\beta(s)$. Esto[2] nos indica que α es la *involuta* de β con lo que queda demostrada esta primera implicación.

[1] Definición 6.9 [1]
[2] Definición 7.1 [1]

Antes de ver la implicación recíproca, veamos la unicidad de esta evoluta plana. Sea pues γ una evoluta cualquiera de α. Tendremos entonces que $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\gamma'(s)$ siendo $\alpha'(s)$ y $\gamma'(s)$ ortogonales. Como ambas curvas son planas el hecho de que sus tangentes sean perpendiculares en todo momento, nos indica que pertenecen al mismo plano. Además, tenemos que $\gamma'(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + g(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s),$$

luego $\gamma(s) = \alpha(s) - g(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s)$ y

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \alpha'(s) - g'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) - g(s)\,\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) - g'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) + g(s)\,\kappa_\alpha(s)\,\mathbf{t}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el producto escalar por $\mathbf{t}_\alpha(s)$ sobre esta expresión, tenemos que $0 = 1 + g(s)\,\kappa_\alpha(s)$, debido a que $\mathbf{t}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\gamma'(s)$ y a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. Con esto obtenemos que $g(s) = -\frac{1}{\kappa_\alpha}(s)$ y sustituyendo en la anterior expresión de $\gamma(s)$ tenemos que:

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Es decir, la curva formada por los centros de curvatura de α.

Veamos ahora la implicación inversa. Por tanto, supongamos que β, como curva formada por los centros de curvatura de α, es evoluta de α. Al ser evoluta se da[3] la siguiente relación:

$$\alpha(s) = \beta(s) + (\lambda - s)\,\beta'(s),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si sustituimos el valor de $\alpha(s)$ dado por esta fórmula en la igualdad de la curva de centros tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\\ &= \beta(s) + (\lambda - s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Es decir, $0 = (\lambda - s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva, $\beta'(s) = \frac{1}{\kappa(s)\cdot(\lambda - s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. Como es para un punto fijo, la anterior igualdad nos indica que $\beta'(s)$ y $\mathbf{n}_\alpha(s)$ son proporcionales. Si calculamos ahora $\beta'(s)$ en base a la fórmula de los centros de curvatura tenemos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Sin embargo, como $\alpha'(s)$ y $\mathbf{n}'_\alpha(s)$ son ambos perpendiculares a $\mathbf{n}_\alpha(s)$, no es posible, haciendo una suma de ambos, obtener un vector proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$, luego, su suma en este caso será 0:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &\Rightarrow -\alpha'(s)\,\kappa(s) = \mathbf{n}'_\alpha(s)\end{aligned}$$

Lo que comparado con la fórmula de Frenet-Serret nos indica que la torsión de α es 0 y, por tanto, es plana.

Apartado 2

Referencias

[1] Jesús M. Ruiz José M. Rodríguez-Sanjurjo. Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas. Sanz y Torres, 2012.

[3] Proposición 7.2 [1]