

Entrega Superficies. GDIF

Mario Calvarro Marines

Enunciado

Demuestra que una superficie parametrizada tal que $E = \frac{1}{v^2}$, $F = 0$, $G = \frac{1}{v^2}$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $v > 0$ tiene una curvatura de Gauss constante igual a -1 . Comprueba que las curvas de la forma

$$(u(s), v(s)) = (a + r \tanh(s), r \operatorname{sech}(s))$$

son las semicircunferencias con centro en $v = 0$ y que su imagen por φ están parametrizadas por su longitud de arco y son geodésicas. Parametriza por arco las semirrectas verticales y comprueba que también son geodésicas. ¿Puede haber más geodésicas?

Curvatura de Gauss

Veamos que, efectivamente, la curvatura de Gauss de esta superficie es constantemente -1 . Por hipótesis, sabemos que la matriz de la *Primera Forma Fundamental* de esta superficie es:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

Además, gracias a que $F = 0$, podemos aplicar el ejercicio 7 de la hoja 6 que nos indica una forma de la curvatura de Gauss:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Por lo que solo queda calcular los distintos términos:

$$\begin{aligned} \sqrt{EG} &= \sqrt{\frac{1}{v^4}} = \frac{1}{v^2} & E_v &= -\frac{2}{v^3} & G_u &= 0 \\ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v &= \left(-\frac{2}{v} \right)_v = \frac{2}{v^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$K = -\frac{v^2}{2} \left(\frac{2}{v^2} + 0 \right) = -\frac{v^2}{2} \cdot \frac{2}{v^2} = -1.$$

Que es lo que buscábamos.

Estudio de posibles geodésicas

En primer lugar, veamos que las curvas dadas son las semicircunferencias pedidas. Esto es equivalente a que, para cualquier a y r dados, existe un punto en $v = 0$ que está a la misma distancia de todos los puntos de la curva. Además, la curva debe ser exactamente una semicircunferencia.

Antes de empezar a hacer cálculos daremos otra forma de expresar las componentes hiperbólicas de la curva:

$$\tanh s = \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \quad \text{sech } s = \cosh^{-1} s = \frac{2}{e^s + e^{-s}}$$

Con esto empezaremos calculando los límites de la curva cuando s tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} (u(s), v(s)) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s}{e^s}, r \cdot \frac{2}{e^s} \right) = (a + r, 0). \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} (u(s), v(s)) &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(a + r \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(a - r \cdot \frac{e^{-s}}{e^{-s}}, r \cdot \frac{2}{e^s} \right) = (a - r, 0). \end{aligned}$$

A su vez, $v(s) = r \cdot \frac{2}{e^s + e^{-s}} \begin{cases} > 0, & \text{si } r > 0 \\ < 0, & \text{si } r < 0 \end{cases}$. Con esto hemos visto que la curva tiende a dos puntos

con $v = 0$ (en $-\infty$ y $+\infty$) sin cruzar ningún otro con $v = 0$. Es decir, que si encontramos un punto que equidiste a todos los de la curva, aseguraremos que se trata de una semicircunferencia.

Para obtener un posible candidato a centro de la supuesta semicircunferencia tenemos un par de datos, tiene que tener $v = 0$ y equidistar de los dos límites que acabamos de calcular. Con esto un posible centro sería el punto $(a, 0)$. Comprobemos que efectivamente lo es. Para ello vamos a ver que el cuadrado, y por tanto sin el cuadrado también, de la distancia euclídea del posible centro a cualquier punto de la curva es constante:

$$|(x - a, y)|^2 \stackrel{?}{=} \text{const.} \quad \forall (x, y) \in (u(s), v(s)).$$

Sustituyendo el valor de un punto de la curva, tenemos que:

$$\begin{aligned} |(a + r \tanh s - a, r \text{sech } s)|^2 &= r^2 (\tanh^2 s + \text{sech}^2 s) \\ &= r^2 \cdot \frac{\sinh^2 s + 1}{\cosh^2 s} \\ &= r^2 \cdot \frac{\cosh^2 s - 1 + 1}{\cosh^2 s} = r^2 \equiv \text{const.} \end{aligned}$$

Y con esto hemos probado que estas curvas son las semicircunferencias con centro en $v = 0$.