# Entrega Curvas. GDIF

Mario Calvarro Marines

## Enunciado

Dadas dos curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$, siendo $\beta$ regular, decimos que $\beta$ es una *evoluta* de $\alpha$ si $\alpha(t)$ está sobre la recta afín tangente a $\beta$ en $\beta(t)$ y, además, $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ son ortogonales. Se pide:

1. Probar que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto (aquí $\kappa$ denota la función curvatura de $\alpha$), la curva $\beta$ definida por los centros de curvatura de $\alpha$ es una evoluta suya si y solo si $\alpha$ es una curva plana. En este caso, pruébese además que $\beta$ es la única evoluta plana de $\alpha$.

2. Si $\alpha$ es una curva plana regular con $\kappa, \kappa' \neq 0$ en todo punto, probar que todas las evolutas de $\alpha$ tienen su traza contenida en un cilindro perpendicular al plano que contiene a $\alpha$ y cuya base es la única evoluta plana de $\alpha$.

3. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que todas las evolutas de $\alpha$ son hélices generalizadas.

## Apartado 1

Supongamos en primer lugar que $\alpha$ es una curva plana parametrizada por longitud de arco. Recordemos[1] que la curva definida por los centros de curvatura de $\alpha$ tiene la siguiente expresión:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s).$$

Ya que $\alpha$ es una curva plana, sabemos que su torsión es nula, es decir, $\mathbf{n}'_\alpha(s) = -\kappa(s)\alpha'(s)$. Si derivamos ahora la definición de $\beta$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{\mathbf{n}'_\alpha(s)\cdot\kappa(s) - \kappa'(s)\cdot\mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} \\ &= \alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)\cdot\mathbf{n}_\alpha(s)}{\kappa^2(s)} + \frac{1}{\kappa(s)}\left(-\kappa(s)\alpha'(s)\right) = \boxed{-\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)}\end{aligned}$$

Con esta última expresión, y sabiendo que $\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ es un escalar y que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\alpha'$, tenemos que $\alpha'(s)$ y $\beta'(s)$ son ortogonales. Ahora, despejando $\alpha$ en la definición de $\beta$, vemos que

$$\alpha(s) = \beta(s) - \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) = \beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)}\beta'(s)$$

y, por tanto, $\alpha(s)$ se encuentra en la recta tangente a $\beta(s)$. Esto[2] nos indica que $\alpha$ es la *involuta* de $\beta$ con lo que queda demostrada esta primera implicación.

[1] Definición 6.9 [1]
[2] Definición 7.1 [1]

Antes de ver la implicación recíproca, veamos la unicidad de esta evoluta plana. Sea pues $\gamma$ una evoluta cualquiera de $\alpha$. Tendremos entonces que $\alpha(s) = \gamma(s) + f(s)\gamma'(s)$ siendo $\alpha'(s)$ y $\gamma'(s)$ ortogonales. Como ambas curvas son planas el hecho de que sus tangentes sean perpendiculares en todo momento, nos indica que pertenecen al mismo plano. Además, tenemos que $\gamma'(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + g(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s),$$

luego $\gamma(s) = \alpha(s) - g(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s)$ y

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \alpha'(s) - g'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) - g(s)\,\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) - g'(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) + g(s)\,\kappa_\alpha(s)\,\mathbf{t}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el producto escalar por $\mathbf{t}_\alpha(s)$ sobre esta expresión, tenemos que $0 = 1 + g(s)\,\kappa_\alpha(s)$, debido a que $\mathbf{t}_\alpha(s)$ es perpendicular a $\gamma'(s)$ y a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. Con esto obtenemos que $g(s) = -\frac{1}{\kappa_\alpha}(s)$ y sustituyendo en la anterior expresión de $\gamma(s)$ tenemos que:

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Es decir, la curva formada por los centros de curvatura de $\alpha$.

Veamos ahora la implicación inversa. Por tanto, supongamos que $\beta$, como curva formada por los centros de curvatura de $\alpha$, es evoluta de $\alpha$. Al ser evoluta se da[3] la siguiente relación:

$$\alpha(s) = \beta(s) + t(s)\,\beta'(s), \; t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Si sustituimos el valor de $\alpha(s)$ dado por esta fórmula en la igualdad de la curva de centros tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\\ &= \beta(s) + t(s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)\end{aligned}$$

Es decir, $0 = t(s)\,\beta'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. En definitiva, $\beta'(s) = \frac{1}{\kappa(s)t(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$. Como es para un punto fijo, la anterior igualdad nos indica que $\beta'(s)$ y $\mathbf{n}_\alpha(s)$ son proporcionales. Si calculamos ahora $\beta'(s)$ en base a la fórmula de los centros de curvatura tenemos que:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Sin embargo, como $\alpha'(s)$ y $\mathbf{n}'_\alpha(s)$ son ambos perpendiculares a $\mathbf{n}_\alpha(s)$ (y, por lo tanto, linealmente independientes), no es posible, haciendo una suma de ambos, obtener un vector proporcional a $\mathbf{n}_\alpha(s)$, luego, su suma en este caso será 0:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}'_\alpha(s)\\ &\Rightarrow -\alpha'(s)\,\kappa(s) = \mathbf{n}'_\alpha(s)\end{aligned}$$

Lo que comparado con la fórmula de Frenet-Serret nos indica que la torsión de $\alpha$ es 0 y, por tanto, es plana.

## Apartado 2

Ya que estamos tratando con cilindros generalizados, estos podrán tener como base cualquier tipo de curva. Estos cilindros tienen la siguiente parametrización:

$$\varphi(u,v) = \gamma(u) + v\mathbf{v}$$

[3]Definición 7.1 [1]

donde **v** es un vector que nos indica la dirección en la que se construye el cilindro y $\gamma$, una curva (que será su base). Con esto, para ver que una curva esta contenida en un cilindro será simplemente necesario ver que la proyección de dicha curva a un plano perpendicular al cilindro es igual a la curva $\gamma$. En nuestro caso tendremos que, como $\beta$ es una evoluta de $\alpha$ (parametrizada por la longitud de arco),[4]

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\tan\left(\int_{s_0}^{s}\tau(u)\,\mathrm{d}u + c\right)\mathbf{b}_\alpha(s).$$

Si llamamos ahora $\hat{\beta}$ a la evoluta plana que, por el anterior apartado, cumple que

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}_\alpha(s).$$

restando ambos puntos

$$\beta(s) - \hat{\beta}(s) = \underbrace{\frac{1}{\kappa(s)}\tan\left(\int_{s_0}^{s}\tau(u)\,\mathrm{d}u + c\right)}_{=\lambda}\mathbf{b}_\alpha(s).$$

nos quedamos con que

$$\beta(s) = \hat{\beta}(s) + \lambda\mathbf{b}_\alpha(s)$$

lo que finalmente nos indica que $\beta$ se encuentra en un cilindro con base $\hat{\beta}$. Como esta última curva es plana y se encuentra en el mismo plano que $\alpha$, tenemos el resultado.

# Referencias


[1] Jesús M. Ruiz José M. Rodríguez-Sanjurjo. Introducción a la Geometría Diferencial I: Curvas. Sanz y Torres, 2012.


[4] Teorema 7.5 [1]