

---

## **Cálculo II** **(Grupo 1º A)** **Relación de Ejercicios nº 1**

---

**Ejercicio 1.1:** Estudiar la derivabilidad de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $A = [-1,1]$  y  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,
- b)  $A = \mathbb{R}$  y  $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ ,
- c)  $A = \mathbb{R}$  y  $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$ ,
- d)  $A = \mathbb{R}_0^+$  y  $f(x) = x^x$  si  $x \in \mathbb{R}^+$ , y  $f(0) = 0$ .

**Ejercicio 1.2:** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ . Determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que hacen que el punto  $(2,4)$  pertenezca a la gráfica de  $f$  y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación  $2x - y = 0$ .

**Ejercicio 1.3:** Estudiar la derivabilidad de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y determinar su imagen.

**Ejercicio 1.4:** Estudiar la derivabilidad y el comportamiento en  $\pm\infty$  de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{5\sqrt{x}}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 1.5:** Calcular la imagen de las siguientes funciones:

- a)  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \arctg x$ , para cada  $x \in [0,1]$ ,
- b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \arctg x$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $f: ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}$ , para cada  $x \in ]0,1[$ ,
- d)  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , para cada  $x \in [-1,1]$ ,
- e)  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$ , para cada  $x \in [-1,1]$ ,
- f)  $f: ]-1,1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}$ , para cada  $x \in ]-1,1[$ .

**Ejercicio 1.6:** Demostrar las siguientes desigualdades para los valores de  $x$  indicados en cada caso:

- a)  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ , para todo  $x > 0$ ,

- b)  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ , para todo  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  
 c)  $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ , para todo  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Ejercicio 1.7:** Determinar el número de ceros y la imagen de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 1.8:** Calcular el número de soluciones de la ecuación  $3 \ln x - x = 0$ .

**Ejercicio 1.9:** Dado  $a > 1$ , probar que la ecuación  $x + e^{-x} = a$  tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

**Ejercicio 1.10:** Sea  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = x + \ln x + \operatorname{arctg} x$ . Demostrar que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única solución.

**Ejercicio 1.11:** Probar que la ecuación  $x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$  tiene una única raíz real y determinar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

**Ejercicio 1.12:** Probar que la ecuación  $\operatorname{tg} x = x$  tiene infinitas soluciones.

**Ejercicio 1.13:** Calcular la imagen de la función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^{1/x}$ .

**Ejercicio 1.14:** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $a^2 < 3b$ . Probar que la ecuación dada por  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  tiene una solución real única.

**Ejercicio 1.15:** Sea  $f: [-\frac{1}{2}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ , si  $x \neq 0$ , y  $f(0) = e^2$ . Estudiar la derivabilidad de  $f$ .

**Ejercicio 1.16:** Estudiar el comportamiento de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  en el punto  $\alpha$ , en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $A = ]2, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 2$ .  
 b)  $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 1$ .  
 c)  $A = ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 1$ .  
 d)  $A = \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^5}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 0$ .  
 e)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{sen} x}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  
 f)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 0$ .  
 g)  $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ ,  $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = e$ .  
 h)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$  ( $x \in A$ ),  $\alpha = 0$ .

**Ejercicio 1.17:** Estudiar el comportamiento en cero de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , en cada uno de los siguientes casos:

a)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$  ( $x \in A$ ),

b)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$  ( $x \in A$ ),

c)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\sin^3 x}$  ( $x \in A$ ),

d)  $A = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}}$  ( $x \in A$ ),

e)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = x^{\sin x}$

**Ejercicio 1.18:** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , y sea  $f: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - \sin x) - 2 \ln(\cos x)}{\sin x} & \text{si } x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\} \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de  $f$  en función del valor del parámetro  $a$ .

**Ejercicio 1.19:** Estudiar el comportamiento en  $+\infty$  de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , en cada uno de los siguientes casos:

a)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ .

b)  $A = ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{x(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$ .

c)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = x^a \sin \frac{1}{x}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

d)  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln x}$ .

**Ejercicio 1.20:** Dadas las funciones  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A$ , demostrar que si  $f$  es derivable en  $a$ , siendo  $f(a) = 0$ , y si  $g$  es continua en  $a$  entonces  $fg$  es derivable en  $a$ .

**Ejercicio 1.21:** Sea  $r > 1$ . Si  $f$  es una función real de variable real tal que  $|f(x)| \leq |x|^r$  en algún intervalo abierto que contenga al cero, demostrar que entonces  $f$  es derivable en cero.

**Ejercicio 1.22:** Sea  $f$  una función tal que  $f(x + h) = f(x) + 3xh + h^2 - 2h$ , para cada  $x, h \in \mathbb{R}$ , calcular  $f'(0)$  y  $f'(2)$ .