Función de las Palomitas (o de Thomae)

Es la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ó } \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ con } x = \frac{p}{q} \text{ y } m.c.d.\{p.q\} = 1. \end{cases}$$

A título de ejemplo:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{5}) &= f(\frac{2}{5}) = f(\frac{4}{10}) = \frac{1}{5}. \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= f(\frac{2}{e}) = f(\frac{1}{\pi}) = 0. \end{aligned}$$

La Función de las Palomitas (o de Thomae) tiene las dos propiedades siguientes:

Propiedad 1: Dado $0 < \varepsilon < 1$, sea $A_\varepsilon := \{x \in [0,1] : f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Entonces, A_ε es finito.

Demostración. Nótese que $\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ si, y solo si, $q \leq \frac{2}{\varepsilon}$. En consecuencia, dado

$$n_0 := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{2}{\varepsilon}\},$$

se tiene que $x \in A_\varepsilon$ si, y solo si, $x = \frac{p}{q}$ con $0 < p \leq q \leq n_0$ y $m.c.d.$ $\{p,q\} = 1$. Estas fracciones han de pertenecer necesariamente al conjunto finito dado por

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, ..., \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}, ..., \frac{n_0 - 1}{n_0}\right\} \cup \{0,1\}.$$

De hecho, A_ε se obtiene eliminando en dicho conjunto las todas las fracciones $\frac{p}{q}$ tales que $m.c.d.\{p.q\} \neq 1$, como $\frac{2}{4}$, por ejemplo. Por ello, A_ε es finito. ■

Propiedad 2: $\int_0^1 f(x)dx = 0.$

Demostración. Dado $0 < \varepsilon < 1$ sea $k_0 := \text{card}(A_\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$A = \{s_1, ..., s_{k_0}\} \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2k_0}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (equivalentemente, $n \geq \frac{4k_0}{\varepsilon}$). Sea

$$P_n := \{x_0, x_1, ..., x_n\} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$$

la partición que divide a $[0,1]$ en n partes iguales. Así, $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, para cada $k = 1, ..., n$. Sea

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Nótese que $M_k \leq 1$, para cada $k = 1, ..., n$ (ya que, por definición, $\operatorname{Im} f \subseteq [0,1]$).

Sea
$$B = \{k \in \{1, ..., n\} : [x_{k-1}, x_k] \cap A_\varepsilon \neq \varnothing\}.$$

Como cada $s_j \in A$ está contenido como mucho en dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ (esto ocurriría si $s_j = x_k$, para algún $k \in \{1, ..., n-1\}$) se tiene que cada elemento de A_ε aporta como mucho dos elementos al conjunto B. Así, como A_ε tiene k_0 elementos, ha de ser

$$\operatorname{card}(B) \leq 2k_0.$$

Si $k \notin B$ entonces $[x_{k-1}, x_k] \cap A_\varepsilon = \varnothing$, de donde $M_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además,

$$\sum_{k \notin B} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k \notin B} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k \in B} M_k \frac{1}{n} + \sum_{k \notin B} M_k \frac{1}{n} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \operatorname{card}(B) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin B} \frac{1}{n} \leq \frac{2k_0}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, si $m_0 := E(\frac{4k_0}{\varepsilon}) + 1$, y $n \geq m_0$, entonces $\frac{2k_0}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de donde se sigue que $S(f, P_n) < \varepsilon$. Esto es,

$$\lim_{n \to \infty} S(f, P_n) = 0\,.$$

Como $I(f, P_n) = 0$ (de hecho, $I(f, P) = 0$ para cada partición P del intervalo $[0,1]$) resulta que
$$\lim_{n \to \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0.$$

Esto prueba que f es integrable. Dado que $I(f) = 0$ concluimos finalmente que
$$\int_0^1 f(x) = dx = 0.$$

■