Métodos Numéricos I

Tema 3:Interpolación

Parte 1: Interpolación polinomial

Miguel A. Piñar
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

6 de abril de 2022

Contenidos

Introducción

Problema general de interpolación

Sean $n+1$ datos experimentales $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ (con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$).
El problema general de interpolación consiste en encontrar una función $g(x)$ tal que $g(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

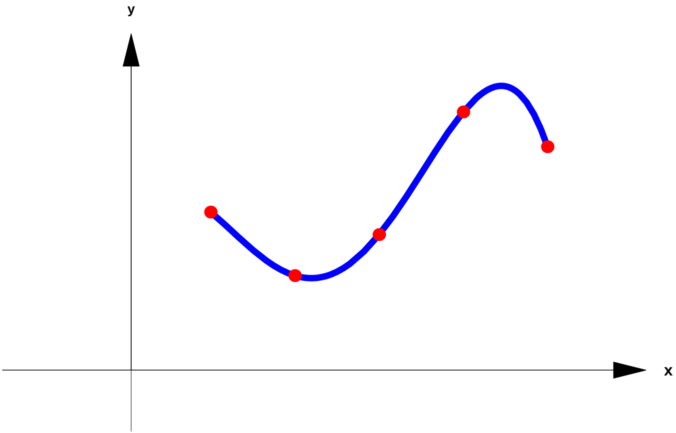
Introducción

Problema general de interpolación

Sean $n+1$ datos experimentales $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ (con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$).
El problema general de interpolación consiste en encontrar una función $g(x)$ tal que $g(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Gráficamente, esta condición significa que la curva que representa a $g(x)$ pasa por los puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$

Problema general de interpolación



La función interpoladora

Buscamos funciones $g(x)$ que posean ciertas propiedades, esto es, que $g(x)$ sea

- fácil de evaluar,
- simple de calcular,
- suficientemente regular,
- ...

Interpolación de una función

Definición

Supongamos que se conocen los $n+1$ valores que toma una función $f(x)$, en los puntos del conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, se dice que $g(x)$ **interpola** a $f(x)$ en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. si

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Interpolación de una función

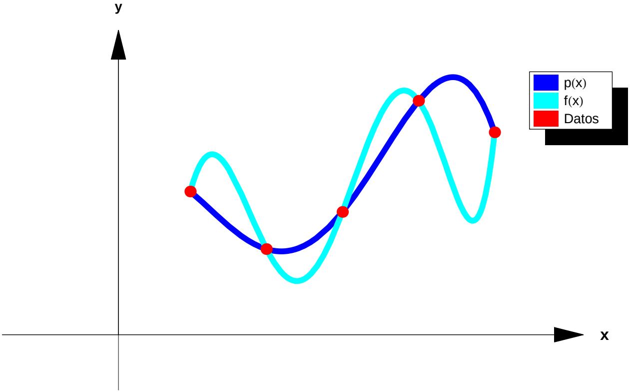
Definición

Supongamos que se conocen los $n+1$ valores que toma una función $f(x)$, en los puntos del conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, se dice que $g(x)$ interpola a $f(x)$ en $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. si

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Gráficamente, esta condición significa que las curvas que representan a $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Interpolación de una función



Utilidad de la interpolación

La finalidad de encontrar una función $g(x)$ que interpola a otra $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es la de aproximar la función $f(x)$ en cualquier punto $x \in [a, b]$.

Aplicaciones de la interpolación

- Trazado de curvas suaves que pasan por una serie de puntos.
- Evaluación de una función complicada f.
- Construcción de librerias de funciones matemáticas.
- Aproximación de la derivada (o la integral) de $f(x)$ mediante la derivada (o la integral) de $g(x)$.
- $\ldots$

Tipos de interpolación

Dependiendo del tipo de función $g(x)$:

- Interpolación polinomial: $g(x) \in \mathbb{P}_n$.
- Interpolación por funciones spline: $g(x) \in S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
- Interpolación trigonométrica:
  $g(x) \in V = \langle \text{sen}(jx), \cos(jx); j = 0, 1, \ldots \rangle$.
- Interpolación racional:
  $g(x) \in \mathcal{R}_{m,n} = \{\frac{p(x)}{q(x)} : p(x) \in \mathbb{P}_m, q(x) \in \mathbb{P}_n\}$.

Problema básico de interpolación polinómica

Dados $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, hallar un polinomio $p(x)$, que interpola a estos datos, o sea, que verifique:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Interpolación polinomial

Problema básico de interpolación polinómica

Dados $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, hallar un polinomio $p(x)$, que interpola a estos datos, o sea, que verifique:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Teorema

Dados $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, existe un único polinomio de grado menor o igual que n, $p_n(x)$, que interpola a estos datos, es decir,

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

(1) Método de los coeficientes indeterminados

Tomamos $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
Sustituyendo las condiciones de interpolación
$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_0 & + & a_1 & x_0 & + & a_2 & x_0^2 & + & \ldots & + & a_n & x_0^n & = & y_0 \\
a_0 & + & a_1 & x_1 & + & a_2 & x_1^2 & + & \ldots & + & a_n & x_1^n & = & y_1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\
a_0 & + & a_1 & x_n & + & a_2 & x_n^2 & + & \ldots & + & a_n & x_n^n & = & y_n
\end{array}$$

Se trata de resolver este sistema.

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones es el determinante de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones es el determinante de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

que verifica

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j$$

(2) Fórmula de Lagrange

Polinomios básicos de Lagrange

Para $0 \leq k \leq n$, se define

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

(2) Fórmula de Lagrange

Polinomios básicos de Lagrange

Para $0 \leq k \leq n$, se define

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Son polinomios de grado exacto n, y verifican

$$\ell_k(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Además, $\{\ell_k(x); k = 0, 1, \ldots, n\}$ constituyen una base de $\mathbb{P}_n$.

(2) Fórmula de Lagrange

El polinomio $p_n(x)$ que interpola los datos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, se escribe como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x),$$

y se denomina fórmula de Lagrange

(2) Fórmula de Lagrange

Ventajas

- No hemos de resolver sistemas de ecuaciones
- Los *polinomios básicos de Lagrange* no dependen nada más que de las abcisas

(2) Fórmula de Lagrange

Ventajas

- No hemos de resolver sistemas de ecuaciones
- Los *polinomios básicos de Lagrange* no dependen nada más que de las abcisas

Desventajas

- No es recursiva: si añadimos un nuevo punto hemos de rehacer los cálculos
- Es inestable numéricamente

(3) Fórmula de Newton

Expresión recursiva del polinomio de interpolación

Teorema

Sea $p_{n-1}(x)$ el polinomio que interpola los datos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n-1$, y sea $p_n(x)$ el polinomio que interpola a los mismos datos y además (x_n, y_n). Entonces

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + D_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

donde

$$D_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

Como consecuencia se tiene

$$p_n(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + \ldots + D_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

(3) Fórmula de Newton

Como consecuencia se tiene

$$p_n(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + \ldots + D_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Cada D_k sólo depende de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$

Como consecuencia se tiene

$$p_n(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + \ldots + D_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Cada D_k sólo depende de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$

Definición

Al coeficiente $D_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ se le llama la diferencia dividida de orden k

(3) Fórmula de Newton

El polinomio $p_n(x)$ que interpola los datos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, se escribe como

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ &\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) = \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \end{aligned}$$

Propiedades de las diferencias divididas

- **Simetría** Si notamos $\pi(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$, se tiene que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\pi'(x_i)}.$$

- **Ley de recurrencia**

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_n] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}; \quad x_0 \neq x_n, \\ f[x_i] &= y_i, i = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

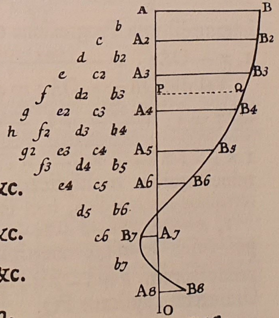
Tabla de diferencias divididas

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & f[x_0] & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & \vdots \\
 & & f[x_2,x_3] & \vdots & \\
x_3 & f[x_3] & \vdots & &
\end{array}
$$

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Sunto puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. et ad Abscissam quamvis AA7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c.



Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$, $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$,

$\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$, $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$,

$\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$, $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6$,

$\frac{-A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$.

Deinde $\frac{b - b2}{AA3} = c$, $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$, $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$, &c.

Tunc $\frac{c - c2}{AA4} = d$, $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$, $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$, &c.

Et $\frac{d - d2}{AA5} = e$, $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$, $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$, &c.

Sic pergendum est ad ultimam differentiam.

B b　　　　Differen-

Lema de Aitken

Lema de Aitken

Sean los datos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Denotemos por $p_{\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}}(x)$ el polinomio que interpola los n primeros, y sea $p_{\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}}(x)$ el polinomio que interpola los n últimos. Entonces el polinomio que interpola todos los datos, $p_n(x)$ se puede escribir en la forma

$$p_n(x) = \frac{(x - x_0)\, p_{\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}}(x) - (x - x_n)\, p_{\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}}(x)}{x_n - x_0}.$$

Ventajas de la Fórmula de Newton

Ventajas

- Los coeficientes de la fórmula, las diferencias divididas, se pueden calcular recurrentemente a partir de la tabla anterior.

Ventajas de la Fórmula de Newton

Ventajas

- Los coeficientes de la fórmula, las diferencias divididas, se pueden calcular recurrentemente a partir de la tabla anterior.
- La fórmula es recurrente, si añadimos un punto sólo hay que calcular una nueva diagonal en la tabla de diferencias divididas.

Ventajas de la Fórmula de Newton

Ventajas

- Los coeficientes de la fórmula, las diferencias divididas, se pueden calcular recurrentemente a partir de la tabla anterior.
- La fórmula es recurrente, si añadimos un punto sólo hay que calcular una nueva diagonal en la tabla de diferencias divididas.
- La fórmula se puede evaluar mediante una algoritmo análogo al esquema de Horner.

En ciertos casos, se proporcionan datos valor de la función y derivadas sucesivas en los nodos.
Se impondrá la condición de que si se da como dato $f^{(j)}(x_i)$, entonces se proporcionarán en el nodo x_i, las derivadas sucesivas de orden inferior a j.
Supongamos que los datos dados son de la forma

$$(x_i, f^{(j)}(x_i)), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq k_i - 1,$$

esto es:

Interpolación de Hermite

$$\begin{array}{llll}
(x_0, f(x_0)) & (x_1, f(x_1)) & \dots & (x_n, f(x_n)) \\
(x_0, f'(x_0)) & (x_1, f'(x_1)) & \dots & (x_n, f'(x_n)) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(x_0, f^{(k_0-1)}(x_0)) & (x_1, f^{(k_1-1)}(x_1)) & \dots & (x_n, f^{(k_n-1)}(x_n))
\end{array}$$

En realidad hay $m = k_0 + k_1 + \cdots + k_n$ datos de interpolación.

Interpolación de Hermite

$$\begin{array}{llll}
(x_0, f(x_0)) & (x_1, f(x_1)) & \dots & (x_n, f(x_n)) \\
(x_0, f'(x_0)) & (x_1, f'(x_1)) & \dots & (x_n, f'(x_n)) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(x_0, f^{(k_0-1)}(x_0)) & (x_1, f^{(k_1-1)}(x_1)) & \dots & (x_n, f^{(k_n-1)}(x_n))
\end{array}$$

En realidad hay $m = k_0 + k_1 + \cdots + k_n$ datos de interpolación.

Proposición

Existe un único polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que $m - 1$ que interpola los datos de interpolación de Hermite.

Definición

Sea $f \in \mathcal{C}^{k+1}[a,b]$, y $x_0 \in [a,b]$. Entonces

$$f[\overbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}^{(k+1)}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ejemplo

Calcule el polinomio que interpola los datos de la tabla

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	2	1	59
$f'(x_i)$	1	-1	
$f''(x_i)$	-12		

Ejemplo

Ejemplo

Calcule el polinomio que interpola los datos de la tabla

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	2	1	59
$f'(x_i)$	1	-1	
$f''(x_i)$	-12		

Tenemos en total 6 datos, luego existe un único polinomio de grado menor o igual que 5 que los interpola.

Tabla de diferencias divididas

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 2 & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
-1 & 2 & & -6 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & \\
-1 & 2 & & -2 & & -2 & \\
 & & -1 & & 2 & & 1 \\
0 & 1 & & 0 & & 1 & \\
 & & -1 & & 5 & & \\
0 & 1 & & 15 & & & \\
 & & 29 & & & & \\
2 & 59 & & & & &
\end{array}
$$

Ejemplo

Luego el polinomio de interpolación en forma de Newton sería

$$p(x) = 2 + (x+1) - 6(x+1)^2 + 4(x+1)^3 - 3(x+1)^3 x + (x+1)^3 x^2.$$