CamScanner-01-25-2021-18.pdf

nacho_rv01

Geometría I

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Enero 2018:

1) Resolver el siguiente sistema ecuaciones en función de α.

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ -x+y+z-t = \alpha \\ x+\alpha y - z + t = 1 \end{cases} ; \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 + F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right)$$

Si $\alpha = -1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \Rightarrow 2y + 2z - t = -1 \Leftrightarrow 2y = -1 - 2z + t \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\mu$$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} - \cancel{\lambda} + \frac{1}{2}\mu + \cancel{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu$$

$$\Rightarrow (x,y,z,t) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) + L\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right), (0,-1,1,0)\right) \Rightarrow SCI$$

Si $\alpha = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1, \quad 2y + 2z - t = 0 \Leftrightarrow 2 + 2z - t = 0 \Leftrightarrow t = 2 + 2z = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}$$

$$x + y + z = x + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \lambda$$

$$\Rightarrow (x,y,z,t) = (-1, 1, 0, 2) + L((-1, 0, 1, 2)) \Rightarrow SCI$$

Si $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\alpha+1)y = (\alpha+1) \neq 0 \Rightarrow y = 1, \quad 2y + 2z - t = \alpha \Leftrightarrow 2z - t = \alpha - 2 \Leftrightarrow t = 2z - \alpha + 2 = 2\lambda + 2 - \alpha \\ z = \lambda \end{array}$$

$$x + y + z = x + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \lambda$$

$$\Rightarrow (x,y,z,t) = (-1, 1, 0, 2-\alpha) + L((-1, 0, 1, 2)) \Rightarrow SCI$$

2) Sean V, V' e.v. sobre $\mathbb{K}$, sea $f: V \to V'$ aplicación lineal. Si V tiene dimensión finita, probar que: $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$. Sea $n = \dim(V)$

Sea $B_{\ker} = \{v_1, \dots, v_r\}$ base de $\ker(f)$. Ampliamos a $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base de V.

Entonces, dados $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\neq 0} \in \mathbb{K}$, $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) + \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n)$, donde cada $\lambda_i f(v_i) \neq 0$, $i = \{r+1, \dots, n\}$ (si $f(v_i) = 0$, $v_i \in \ker(f)$, pero ya hemos dejado atrás todos los vectores del núcleo). Supongamos $\lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Entonces, $f(\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) \in \ker(f)$. $\boxed{\Rightarrow \Leftarrow}$ (la base de $\ker(f)$ es $\{v_1, \dots, v_r\}$)

$\Rightarrow \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) \neq \vec{0} \Rightarrow f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ son l.i., luego forman una base de $\mathrm{Im}(f)$.

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - r$, $\dim(\ker(f)) = r \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = n - r + r = n = \dim(V)$.

3) Encontrar aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

·) la imagen por f del plano $x_1 - x_2 = 0$, es el plano $x_1 - x_3 = 0$

·) $f((1,-1,0)) = (1,0,1)$

Calcular la matriz de f en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

Vamos a denotar por comodidad, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x = y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \end{array}\right. \Rightarrow B_{\pi_1} = \{(1,1,0),(0,0,1)\} \\ \\ \pi_2 \equiv x - z = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x = z = \mu_1 \\ y = \mu_2 \end{array}\right. \Rightarrow B_{\pi_2} = \{(0,1,0),(1,0,1)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Definimos } f: \left\{\begin{array}{l} f(1,1,0) = (0,1,0) \\ f(0,0,1) = (1,0,1) \\ f(1,-1,0) = (1,0,1) \end{array}\right.$$

Los vectores $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,-1,0)$ son l.i., ya que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Luego $B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ es una base del dominio.

$B_{Im(f)} = \{(0,1,0)(1,0,1)\}$ es una base de la imagen (claramente l.i.)

Ampliamos $B_{Im(f)}$ a $\bar{B} = \{(0,1,0)(1,0,1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ (son l.i., $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).

$$M(f, \bar{B} \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ya que } \left\{\begin{array}{l} f(1,1,0) = 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(0,0,1) \\ f(0,0,1) = f(1,-1,0) = 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(1,0,1) + 0\cdot(0,0,1) \end{array}\right.$$

$$M(I, B \leftarrow B_u) = M(I, B_u \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(I, B_u \leftarrow \bar{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_u) = M(I, B_u \leftarrow \bar{B}) \cdot M(f, \bar{B} \leftarrow B) \cdot M(I, B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} //$$

4) Sea V e.v. dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$, sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de V, y $B^* = \{w^1, w^2, w^3, w^4\}$ su base dual. Se considera en V el subespacio vectorial:

$U := L(u_1+u_2+u_3, u_3+u_4)$

a) Calcular una base de U^0 (anulador de U). Por un conjunto independiente de ecuaciones implícitas de U. ¿$\dim(U)$?

Sean $a, b \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$a(u_1+u_2+u_3) + b(u_3+u_4) = \vec{0} \iff u_1(a) + u_2(a) + u_3(a+b) + u_4(b) = \vec{0}.$$

Por ser u_1, u_2, u_3, u_4 elementos de una base, son l.i. $\Rightarrow \left.\begin{cases} a=0 \\ a+b=0 \\ b=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow a=b=0$

$\Rightarrow (u_1+u_2+u_3)$ y (u_3+u_4) son l.i. $\Rightarrow \dim(U) = 2$.

Sea $B' = \{u_1+u_2+u_3, u_3+u_4, u_1, u_2\}$ una base de V ampliada a partir de una de U.

(son l.i., $a(u_1+u_2+u_3) + b(u_3+u_4) + c(u_1) + d(u_2) = \vec{0} \iff (a+c)u_1 + (a+d)u_2 + (a+b)u_3 + (b)u_4$

$= \vec{0} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a+b = 0 \\ \boxed{b = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow \boxed{c=0} \Rightarrow \boxed{d=0}$).

Sea la base dual de B', $B'^* = \{\phi, \varphi, w^1, w^2\}$

Lo que nos interesa:

$\begin{cases} M(w^1, \{1\} \leftarrow B') = (0\ 0\ 1\ 0) \\ M(w^2, \{1\} \leftarrow B') = (0\ 0\ 0\ 1) \end{cases}$

Es decir, $w^1(u_1+u_2+u_3) = w^1(u_3+u_4) = w^2(u_1+u_2+u_3) = w^2(u_3+u_4) = 0 \Rightarrow an(U) = L(w^1, w^2)$.

b) Extender una base de U a una base B' de V.

Hecho en el apartado anterior.

c) Calcular la base dual $(B')^*$ en función de las formas lineales de la base B^*.

$(B')^* = \{\phi, \varphi, w^1, w^2\}$

$\begin{cases} \phi(u_1+u_2+u_3) = 1 \Rightarrow \phi(u_1)^{\nearrow 0} + \phi(u_2)^{\nearrow 0} + \boxed{\phi(u_3) = 1} \\ \phi(u_3+u_4) = 0 \Rightarrow \phi(u_3) + \phi(u_4) = 1 + \phi(u_4) = 0 \iff \phi(u_4) = -1 \iff -\phi(u_4) = 1 \\ \phi(u_1) = 0 \\ \phi(u_2) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \phi = w^3 - w^4 \Rightarrow \phi(u_1+u_2+u_3) = (w^3-w^4)(u_1+u_2+u_3) = w^3(u_1+u_2+u_3) - w^4(u_1+u_2+u_3) = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow \phi(u_3+u_4) = (w^3-w^4)(u_3+u_4) = w^3(u_3+u_4) - w^4(u_3+u_4) = 1 - 1 = 0$

$\begin{cases} \varphi(u_1+u_2+u_3) = 0 \Rightarrow \varphi(u_1)^{\nearrow 0} + \varphi(u_2)^{\nearrow 0} + \boxed{\varphi(u_3) = 0} \\ \varphi(u_3+u_4) = 1 \Rightarrow \varphi(u_3)^{\nearrow 0} + \boxed{\varphi(u_4) = 1} \\ \varphi(u_1) = 0 \\ \varphi(u_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = w^4$

Así, $(B')^* = \{w^3 - w^4, w^4, w^1, w^2\}$, l.i., ya que

$b^1(w^3 - w^4) + b^2(w^4) + b^3(w^1) + b^4(w^2) = 0 \iff$

$(b^3)w^1 + (b^4)w^2 + (b^1)w^3 + (-b^1+b^2)w^4 = 0 \iff \begin{cases} b^1 = 0 \\ b^3 = 0 \\ b^4 = 0 \end{cases}, \quad -b^1 + b^2 = 0 \iff b^2 = 0 \Rightarrow b^1 = b^2 = b^3 = b^4 = 0$