AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

Objetivo: Extender la integral de Cauchy a funciones $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotadas, no necesariamente continuas.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ siendo $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Entonces f está acotada en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, por lo que existen los siguientes valores:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

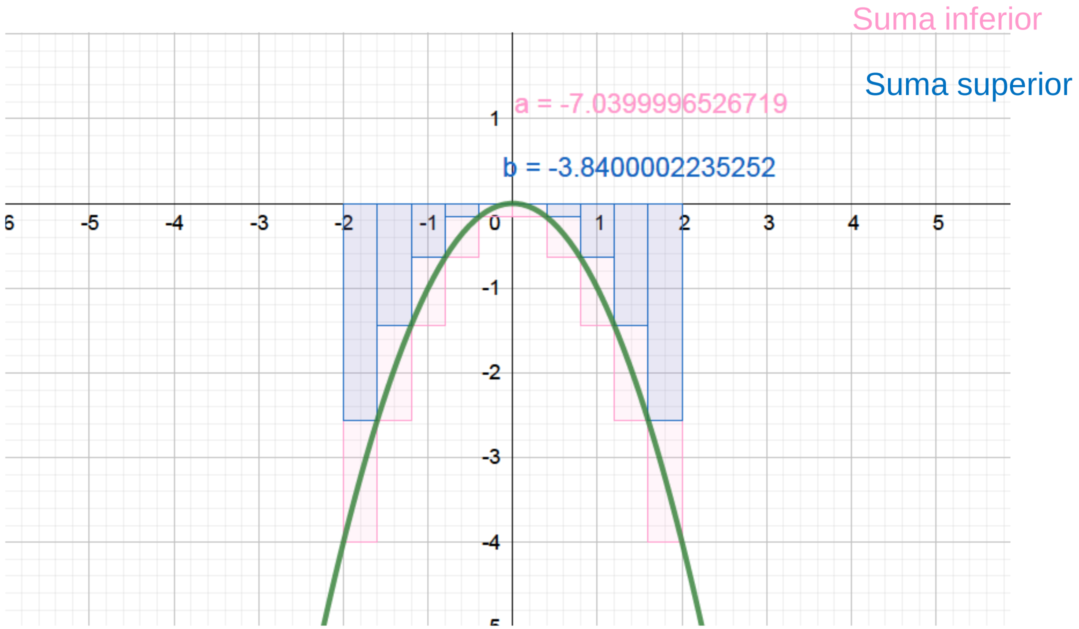
Definición. Llamamos

Suma inferior de f para la partición P al valor

$$\mathrm{I}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Suma superior de f para la partición P al valor

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$



Si $m \leq f(x) \leq M$ entonces

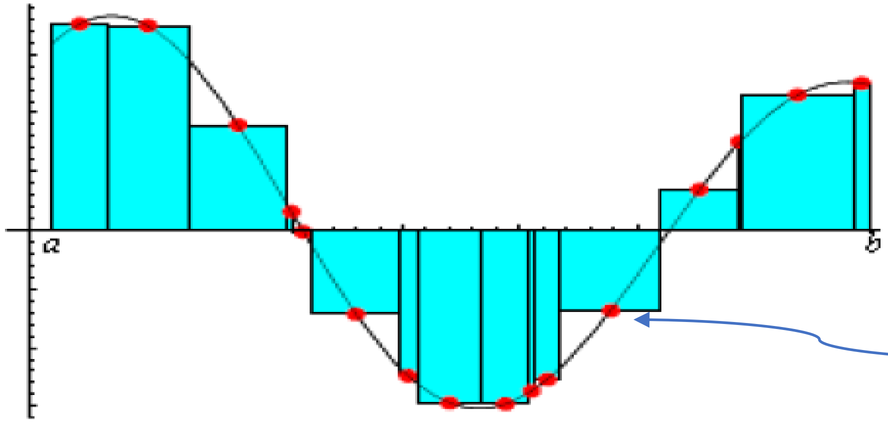
$$m(b-a) \leq I(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

Definición. Llamamos Suma intermedia (o suma de Riemann) de la función f para la partición P al valor

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \dots, n$. Obviamente

$$I(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P)$$



Una suma de Riemann.

Los ξ_k son las etiquetas de la suma de Riemann.

La función $\xi: \{1, \dots, n\} \to [a,b]$ dada por $\xi(j) = \xi_j$ es la función etiquetado o de selección de la suma de Riemann.

Imágenes de las selecciones o etiquetas.

Observación. Una misma partición tiene infinitas sumas intermedias, pero una única suma superior e inferior.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

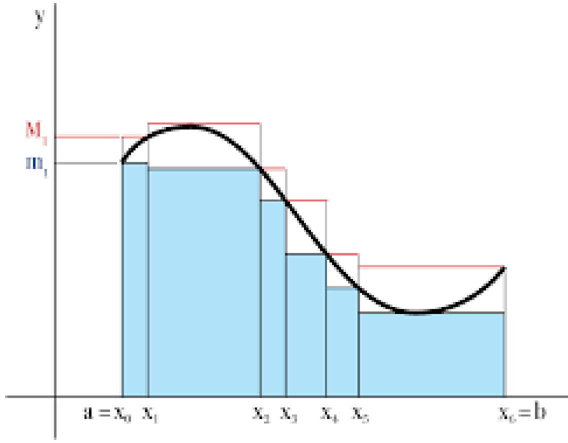
Definición (Darboux). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Por la acotación, los siguientes valores son reales:

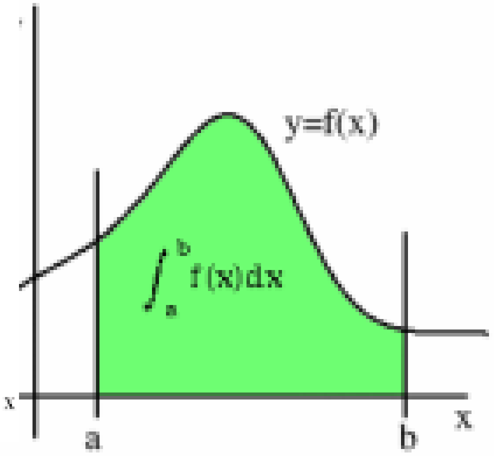
$$I(f) := \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \quad \text{(Integral inferior)}$$
$$S(f) := \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}. \quad \text{(integral superior)}$$

Se dice que f es Riemann integrable cuando $I(f) = S(f)$, en cuyo caso escribimos

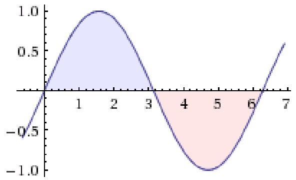
$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = S(f).$$

Cuando $f(x) \geq 0$, para cada $x \in [a,b]$, entonces decimos que dicho valor es el área delimitada por la gráfica de la función (positiva) f entre las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abcisas.





Cuestión: ¿Cómo definir el área de una función que toma valores positivos y negativos?



Lo razonable sería sumar las áreas sombreadas.

Definición. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

(i) la parte positiva de f como la función $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

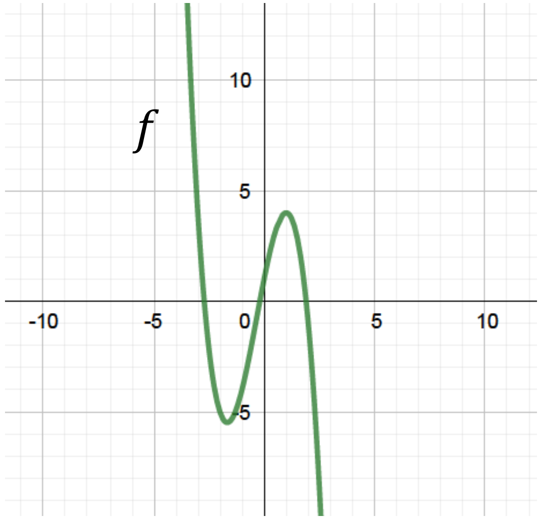
$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \qquad (x \in [a,b]).$$

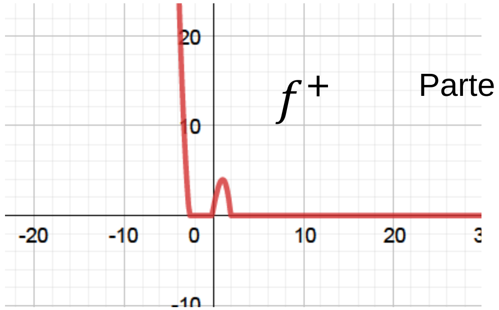
(ii) la parte negativa de f como la función $f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \qquad (x \in [a,b]).$$

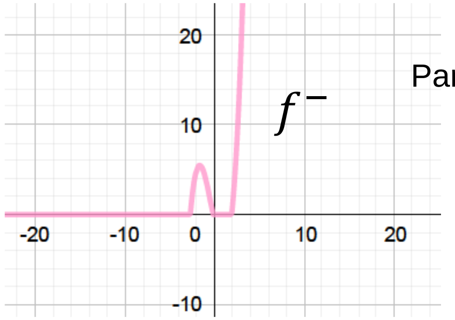
Propiedades:

- $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$ en $[a,b]$
- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$
- $f \geq 0$ en $[a,b] \Leftrightarrow f = f^+$.
- $f \leq 0$ en $[a,b] \Leftrightarrow f = f^-$.





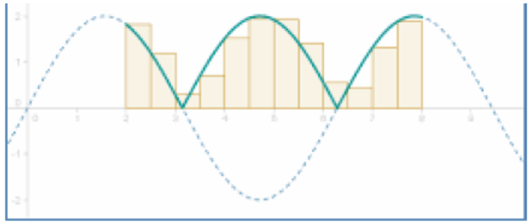
Parte positiva



Parte negativa

Definición. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se define el área de la region limitada por la gráfica de f y las rectas $x=a$, $x=b$ e $y=0$ como

$$\lambda(G(f,a,b)) := \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^-(x)dx + \int_a^b f^+(x)dx$$



Área del seno.

Objetivo pendiente. Probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada que toma valores positivos y negativos entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solo si f^+ y f^- son Riemann integrables en $[a,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

En consecuencia, la integral de Riemann de f viene a ser una especie de área con signo.

Para ello, previamente vamos a caracterizar la integral de Riemann y vamos a establecer sus propiedades elementales. Retomaremos la cuestión anterior cuando veamos que si f es Riemann integrable entonces $|f|$ también lo es.

Antes de proceder con la caracterización de las funciones Riemann integrables, nos planteamos alguna cuestiones básicas.

Observación. Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ nótese que entonces es Riemann integrable siendo la integral de Riemann y la de Cauchy una misma cosa.
(La integrabilidad de f se demostró en el Teorema Integral de Cauchy).

Cuestión: ¿Son Riemann integrables todas las funciones acotadas? No.

Ejemplo. La función de Dirichlet dada por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ no es integrable en ningún intervalo acotado $[a, b]$. De hecho, para cada $P \in \mathscr{P}[a, b]$ se tiene que $I(f, P) = 0$ mientras que $S(f, P) = b - a$, lo que demuestra que $I(f) = 0 \neq S(f) = b - a$.

Cuestión: ¿Extiende verdaderamente la integral de Riemann a la integral de Cauchy?

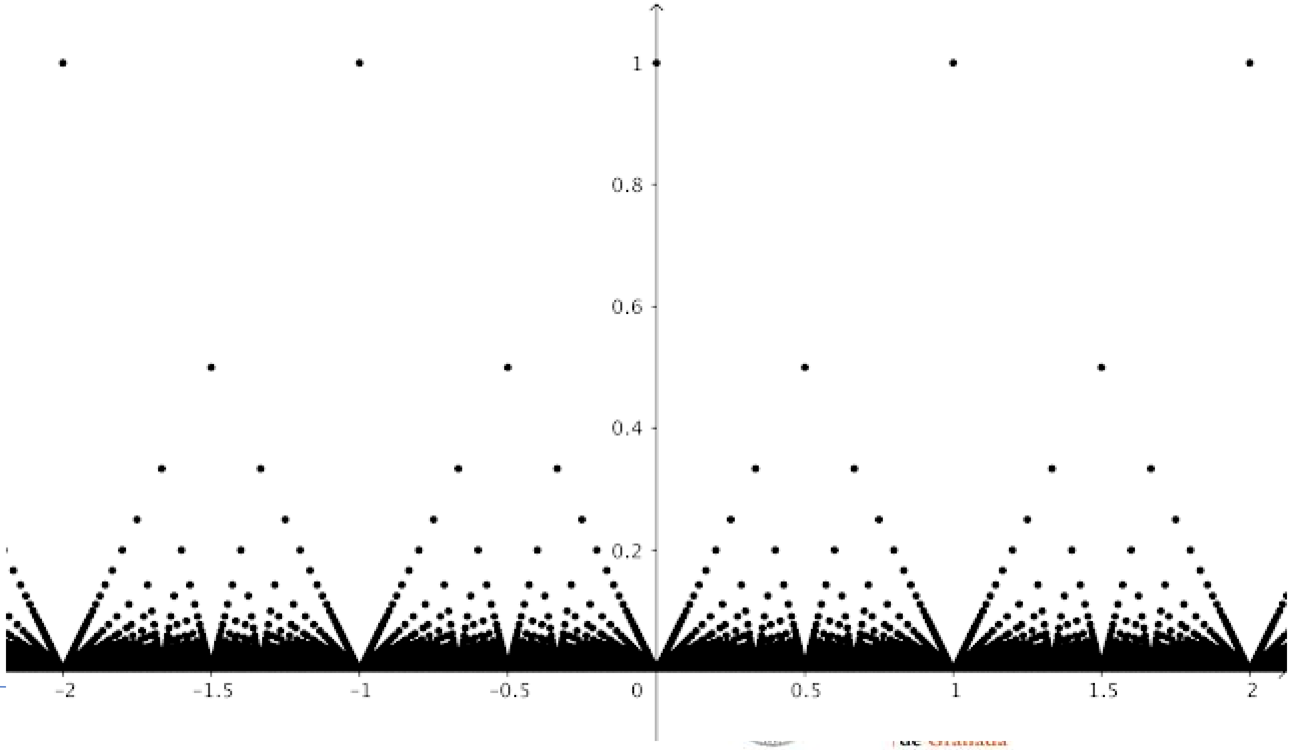
Sí. El concepto de integral de Riemann permite abordar la integrabilidad de funciones que distan mucho de ser continuas.

Función de Thomae o de las palomitas: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ donde para cada $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & si \;\; x = \frac{p}{q} \text{ con } m.c.d.(p,q) = 1 \end{cases}$$

Carl Johannes Thomae (1840-1921)

Einleitung In Die Theorie Der Bestimmten Integrale (1875)



La función de Thomae o de las palomitas es un ejemplo de función continua en todos los números irracionales y discontinua en todos los números racionales.

Sea $P_n \in \mathscr{P}[0,1]$ la partición de $[0,1]$ que divide a este intervalo en n subintervalos $J_1, \dots, J_n$ de longitud $\frac{1}{n}$.
Es claro que $I(f, P_n) = 0$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que el conjunto $A_\varepsilon =: \{x \in [0,1] : f(x) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es finito (compruébese). Si card$(A_\varepsilon) = k$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2k}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea

$$U = \{k \in \{1, \dots, n\} : J_k \cap A_\varepsilon = \emptyset\}.$$

Si $k \in \mathrm{U}$ es porque ningún $x \in J_k$ es tal que $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$, luego $f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $x \in J_k$.
Por el contrario, si $k \notin U$ entonces algún $x \in J_k$ será tal que $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$, pero siempre $f(x) \leq 1$ para cada $x \in J_k$, y como mucho tendremos $2k$ intervalos (esto es el doble cardinal de A_ε) en esta situación.

Por tanto, para $M_k = \sup\{f(x) : x \in J_k\}$, se tiene que

$$S(f, P_n) = \sum_{k \in U} M_k l(J_k) + \sum_{k \notin U} M_k l(J_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{n} \operatorname{card}(U) + 1 \operatorname{card}(A_\varepsilon) \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2k}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En consecuencia $0 \leq S(f) - I(f) \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \to 0$, lo que prueba que:

La función de las palomitas es integrable siendo $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Formalizamos la estrategia anterior:

Teorema (caracterización de la integrabilidad) . Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable (esto es $I(f) = S(f)$) si, y solo si, existe una sucesión $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0,$$

en cuyo caso se tiene que

$$I(f) = S(f) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n)$$

Dem. [⇒] Supongamos que $I(f) = S(f)$. Por definición de supremo y de ínfimo existen particiones $\hat{P}_n$, $\tilde{P}_n \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I\big(f,\hat{P}_n\big), \qquad S(f) = \lim_{n\to\infty} S\big(f,\tilde{P}_n\big).$$

Sea $P_n := \hat{P}_n \cup \tilde{P}_n$. Entonces

$$I\big(f,\hat{P}_n\big) \le I(f,P_n) \le S(f,P_n) \le S\big(f,\tilde{P}_n\big).$$

Así, $0 \le S(f,P_n) - I(f,P_n) \le S\big(f,\tilde{P}_n\big) - I\big(f,\hat{P}_n\big) \to S(f) - I(f) = 0,$ de donde $S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0$.

[⇐] Supongamos que existe $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0$. Puesto que

$$I(f,P_n) \le I(f) \le S(f) \le S(f,P_n),$$

deducimos que $I(f) = S(f)$ y el resto es claro. ■

Nota: El resultado se reformula diciendo que $I(f) = S(f)$ si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $|S(f,P) - I(f,P)| < \varepsilon$

INTEGRACIÓN: Integral de Cauchy

Propiedades básicas de la integral de Riemann

Linealidad. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en $[a,b]$, Riemann integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Positividad. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y tal que $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$. Si f es Riemann integrable entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Conservación del orden. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en $[a,b]$, Riemann integrables. Estableciendo que

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \text{ para cada } x \in [a,b]$$

se tiene que

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particular, si $m \leq f(x) \leq M$, para cada $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

INTEGRACIÓN: Integral de Cauchy

Integrabilidad del valor absoluto. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada y Riemann integrable entonces $|f|$ es Riemann integrable, siendo $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$.

Aditividad respecto del intervalo de integración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada y $c\in\,]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A continuación, adelantamos la demostración de las propiedades de la integral de Riemann relativas a la linealidad respecto del integrando y a la positividad. La demostración de dos propiedades anteriores las haremos un poco más adelante cuando dispongamos de algún resultado adicional (que nos permita probar con comodidad la integrabilidad del valor absoluto), o de caracterizaciones potentes de la integrabilidad de Riemann (que usaremos para probar la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración).

Dem.

1.- Veamos que si f y g son integrables entonces $f+g$ es integrable. Tomemos particiones $\hat{P}_n$, $\tilde{P}_n \in \mathscr{P}[a,b]$ tales que

$$I(f)=S(f)=\lim_{n\to\infty} I\big(f,\hat{P}_n\big)=\lim_{n\to\infty} S\big(f,\hat{P}_n\big),\qquad I(g)=S(g)=\lim_{n\to\infty} I\big(f,\tilde{P}_n\big)=\lim_{n\to\infty} S\big(f,\tilde{P}_n\big).$$

Sea $P_n := \hat{P}_n \cup \tilde{P}_n$. Entonces

$$I\big(f,\hat{P}_n\big)\le I(f,P_n)\le S(f,P_n)\le S\big(f,\hat{P}_n\big)\ ;$$
$$I\big(g,\tilde{P}_n\big)\le I(g,P_n)\le S(g,P_n)\le S\big(g,\tilde{P}_n\big)$$

Además, $I(f,P_n)+I(g,P_n)\le I(f+g,P_n)\le S(f+g,P_n)\le S(f,P_n)+S(g,P_n)$

$$0\le S(f+g,P_n)-I(f+g,P_n)\le \Big(S\big(f,\tilde{P}_n\big)-I\big(f,\tilde{P}_n\big)\Big)+\big(S(g,P_n)\ -I\big(g,\hat{P}_n\big)\big)\to 0,$$

de donde se deduce la integrabilidad de $f+g$ y también que $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

2.- Que αf es integrable siendo $\int_a^b(\alpha f)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$ se deduce del siguiente hecho:

$$0\le \big|S\big(\alpha f,\hat{P}_n\big)-\ I\big(\alpha f,\hat{P}_n\big)\big|=|\alpha|\,\big|S\big(f,\hat{P}_n\big)-\ I\big(f,\hat{P}_n\big)\big|\to 0.$$

(Compruébese distinguiendo entre que los casos $\alpha>0$ y $\alpha<0$).

3.- La positividad de la integral es obvia (por construcción).

4.- La conservación del orden se deduce de la positividad y la linealidad $(f=(f-g)+g)$. ■

Teorema (de Composición). Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$. Sea $[c,d]$ un intervalo acotado tal que $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Si $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g \circ f \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

Dem. Sea $h := g \circ f$. Dado $\varepsilon > 0$ buscamos $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(h,P) - I(h,P) < \varepsilon$.
Sea $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Por el Teorema de Heine, g es uniformemente continua. Por ello, dado γ, existe $\delta > 0$ tal que si $u, v \in [c,d]$ son tales que $|u - v| < \delta$ entonces $|g(u) - g(v)| < \gamma$.
Sea $\mathrm{Im}\, g = [m, M]$ y sea $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \mu < \frac{\varepsilon\delta}{4M}$. Para dicho μ, por la caracterización de la integrabilidad, existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \mu$. Si $P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ sea

$$M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$R_k := \sup\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad r_k := \inf\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Sea $A = \{k \in \{1, \dots, n\} : M_k - m_k < \delta\}$.

Si $k \notin A$ entonces $M_k - m_k \geq \delta$, por lo que $\delta \sum_{k\notin A}(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k\notin A}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq S(f,P) - I(f,P) < \mu$.
Así $\sum_{k\notin A}(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\mu}{\delta} < \frac{\varepsilon}{4M}$. En consecuencia, $\sum_{k\notin A}(R_k - r_k)(x_k - x_{k-1}) \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$

Si $k \in A$ entonces $|f(s_k) - f(t_k)| \leq |M_k - m_k| < \delta$, para cada $s_k, t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, por lo que $|g(f(s_k)) - g(f(t_k))| < \gamma$ (esto es $|h(s_k) - h(t_k)| < \gamma$), de donde $|R_k - r_k| \leq \gamma$. Por tanto,

$$\sum_{k\in A}(R_k - r_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \gamma(b-a) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, $S(h,P) - I(h,P) = \sum_{k=1}^{n}(R_k - r_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k\in A}(R_k - r_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\notin A}(R_k - r_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ ■

Corolario (Integrabilidad del valor absoluto). Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces $|f|$ es Riemann integrable, siendo $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$

Dem. La función $|f|$ no es otra cosa que la composición de la función integrable f con la función valor absoluto, esto es la función continua $|\cdot| : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $x \to |x|$. En consecuencia, por el teorema anterior $|f|$ es Riemann integrable. Por otra parte, puesto que $-f \le |f|$ y $f \le |f|$ se tiene que

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \le \int_a^b |f|(x)dx\,; \quad y \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f|(x)dx\,;$$

de donde $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$. ■

Corolario. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, f^+ y f^- son Riemann integrables en $[a,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

Dem. Si f es Riemann integrable entonces $|f|$ también lo es de donde $f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$ son Riemann integrables. Recíprocamente, si f^+ y f^- son integrables entonces $f = f^+ - f^-$ también lo es. Como $f = f^+ - f^-$ es claro que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$. ■

Corolario. Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada Riemann integrable en $[a, b]$ entonces f^2 también lo es.

Dem. La función $f^2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f^2(x) = f(x)^2$ no es otra cosa que la composición $g \circ f$ donde $g(x) = x^2$, y el resultado se obtiene por el Teorema de Composición. ■

Observación. Esto se aplica a muchas más funciones en el papel de $g(x)$.

Teorema. Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas Riemann integrables. Entonces la función producto fg es Riemann integrable.

Dem. Las funciones $f^2, g^2, (f+g)^2: [a, b] \to \mathbb{R}$ son Riemann integrables por el corolario anterior y

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}. \quad ■$$

Teorema. Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas Riemann integrables. Entonces

(i) Desigualdaad de Schawarz: $\left(\int_a^b (fg)(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$.

(ii) Desigualdad de Minkowski: $\left(\int_a^b (f+g)^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

La integral como límite de sumas

Recordamos que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y P_n cualquier sucesión de particiones en $\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n\to 0$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Esto es muy útil tanto para calcular una integral como un límite de sumas, como para calcular sumas haciendo uso de la integral.

Queremos trasladar este resultado al marco de la integral de Riemann, en el que ya no disponemos del Teorema de Heine por no suponer que f es continua. A pesar de ello podemos probar, igualmente, que si tenemos una función Riemann integrable, f, entonces para calcular el valor de $\int_a^b f(x)dx$, basta considerar una sucesión de particiones P_n en $\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n\to 0$, y calcular cualesquiera de los límites anteriores, puesto que de nuevo:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Probar este resultado es nuestro próximo objetivo.

Teorema (Criterio de Riemann). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) $\int_a^b f(x)dx=\alpha$.

(ii) Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $P\in\mathcal{P}[a,b]$ verifica que $\Delta P<\delta$, entonces $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$.

Dem.

(ii) ⇒ (i). Si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\sigma(f,P)\in\,]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[$ siempre que $\Delta P<\delta$, entonces

$$I(f)\geq I(f,P)\geq\alpha-\varepsilon,\ \text{ y }\ S(f)\leq S(f,P)\leq\alpha+\varepsilon,$$

de donde $\alpha-\varepsilon\leq I(f)\leq S(f)\leq\alpha+\varepsilon$, y haciendo $\varepsilon\to 0$ se obtiene que $\int_a^b f(x)dx=\alpha$.

(i)⇒ (ii). Por hipótesis $I(f)=S(f)=\alpha$. Sea

$$M\coloneqq\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\}.$$

Por definición de ínfimo sea $P_\varepsilon=\{x_0=a,\dots,x_s=b\}\in\mathcal{P}[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon)<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$. Definimos

$$\mu=\min\{x_i-x_{i-1}: i=1,\dots,s\}.$$

Sea

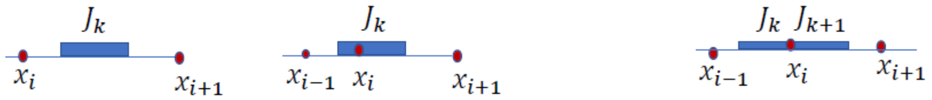
$$\delta\coloneqq\min\{\mu,\frac{\varepsilon}{2(s-1)M}\}.$$

Consideremos ahora $P\in\mathcal{P}[a,b]$ tal que $\Delta P<\delta$ y veamos que $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$.

Si $P=\{\hat{x}_0=a,\dots,\hat{x}_m=b\}$, para $k=1,\dots,m$, sean $J_k=[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k]$ los intervalos asociados a la partición P.
y sean $l(J_k)=\hat{x}_k-\hat{x}_{k-1}$, sus longitudes.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Por construcción las posibilidades son las siguientes:



Por tanto, cada J_k está en una de estas dos situaciones:

(a) J_k corta a un único $[x_{i-1}, x_i]$ (estando de hecho contenido en él) o
(b) J_k corta a dos intervalos consecutivos $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$ para algún $i = 1, \dots, (s-1)$.

Sean $A = \{k \in \{1, \dots, m\} : J_k$ está en el caso (a)$\}$ y $B = \{k \in \{1, \dots, m\} : J_k$ está en el caso (b)$\}$.
Si $M_k = \sup\{f(x) : x \in J_k\}$ $(k = 1, \dots, m)$ es claro que

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{m} M_k l(J_k) = \sum_{k\in A} M_k l(J_k) + \sum_{k\in B} M_k l(J_k)$$
$$\leq S(f, P_\varepsilon) + M(s-1)\Delta P < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) + M(s-1)\frac{\varepsilon}{2(s-1)M} = \alpha + \varepsilon,$$

dado que $M_k \leq M$, $\operatorname{card}(B) \leq s-1$ y $l(J_k) \leq \Delta P \leq \min\{\mu, \frac{\varepsilon}{2(s-1)M}\}$.

De forma análoga se demuestra que $\alpha - \varepsilon = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < I(f, P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq I(f,P)$, de donde

$$\alpha - \varepsilon < I(f,P) \leq S(f,P) < \alpha + \varepsilon.$$

En consecuencia $\alpha - \varepsilon < \sigma(f,P) < \alpha + \varepsilon$, o lo que es lo mismo $|\sigma(f,P) - \alpha| < \varepsilon$. ■

Teorema de convergencia de las sumas integrales. Una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable si, y solo si, para cada sucesión de particiones P_n en $\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n\to 0$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$, en cuyo caso se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Dem.

[⇒] Sea $\alpha := \int_a^b f(x)dx$. Por el teorema anterior, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $P\in\mathscr{P}[a,b]$ verifica que $\Delta P<\delta$, entonces $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$. Como $\Delta P_n\to 0$, asociado a δ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\Delta P_n<\delta$ para cada $n\geq n_0$. Por tanto $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$, para cada $n\geq n_0$ de donde $\alpha=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)$.

En particular, $\alpha=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ y análogamente $\alpha=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$.

[⇐] De la igualdad $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)-I(f,P_n)=0$, para cada P_n tal que $\Delta P_n\to 0$, de donde $0\leq S(f)-I(f)\leq S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0$, y en consecuencia $S(f)=I(f)$, es decir, f es Riemann integrable. ■

Observación. El teorema anterior junto con propiedades básicas como que $\sigma(\alpha f+\beta g,P)=\alpha\,\sigma(f,P)+\beta\sigma(g,P)$, nos permite redemostrar con facilidad las propiedades ya conocidas para la integral de Cauchy al ambiente más general de la integral de Riemann (aunque ya hemos facilitado una prueba de la mayoría de ellas).

Demostramos, a continuación, la aditividad de la integral de Riemann respecto del intervalo de integración.

Aditividad respecto del intervalo de integración. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dem. [⇐] Veamos que si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.
Sea $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$. Entonces $\hat{P}_n \coloneqq P_n \cup \{c\}$ es tal que $\Delta \hat{P}_n \to 0$ puesto que $\Delta \hat{P}_n \leq \Delta P_n$.
En consecuencia, $Q_n \coloneqq \hat{P}_n \cap [a,c]$ y $R_n \coloneqq \hat{P}_n \cap [c,b]$ son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ tales que $\Delta Q_n \to 0$ y $\Delta R_n \to 0$, de donde

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, Q_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, Q_n).$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, R_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, R_n).$$

Como $I(f,\hat{P}_n) = I(f, Q_n) + I(f, R_n)$ y, análogamente, $S(f,\hat{P}_n) = S(f, Q_n) + S(f, R_n)$, se deduce que ,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, Q_n) + \lim_{n\to\infty} \sigma(f, R_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,\hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S\left(f,\hat{P}_n\right).$$

Además, $\lim_{n\to\infty} I(f,\hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$, y $\lim_{n\to\infty} S(f,\hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$ pues si $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in [a,b]$,

$0 \leq S(f,P_n) - S\left(f,\hat{P}_n\right) \leq M\Delta P_n$, al igual que $0 \leq I(f,\hat{P}_n) - I(f,P_n) \leq M\Delta P_n$.

Así, se tiene que $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, por lo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

[⇒] Supongamos f integrable en $[a,b]$. Dadas particiones $Q_n \in \mathscr{P}[a,c]$ y $R_n \in \mathscr{P}[c,b]$ tales que $\Delta Q_n \to 0$ y $\Delta R_n \to 0$ es claro que $P_n := Q_n \cup R_n$ es una partición de $[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$. En consecuencia, $\lim_{n\to\infty}\left(S(f,P_n) - I(f,P_n)\right) = 0$. Pero

$$I(f,P_n) = I(f,Q_n) + I(f,R_n)$$
$$S(f,P_n) = S(f,Q_n) + S(f,R_n),$$

de donde

$$0 \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) = (S(f,Q_n) - I(f,Q_n)) + (S(f,R_n) - I(f,R_n)) \to 0.$$

Puesto que

$$0 \leq (S(f,Q_n) - I(f,Q_n)) \quad \text{y} \quad 0 \leq (S(f,R_n) - I(f,R_n))$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(S(f,Q_n) - I(f,Q_n)) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(S(f,R_n) - I(f,R_n)) = 0.$$

Esto prueba la integrabilidad de f en $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. Por lo ya demostrado, se sigue que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \;\blacksquare$$

Corolario. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $c,d \in [a,b]$ tales que $[c,d] \subseteq [a,b]$. Si f es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces también lo es en $[c,d]$.

Dem. Sea $[c,d] \subseteq\,]a,b[$. Entonces f es integrable en $[a,d]$ (y en $[d,b]$). Como $c \in\,]a,d[$, una nueva aplicación del resultado anterior nos da la Riemann integrabilidad de f en $[c,d]$ (y en $[a,c]$). $\blacksquare$

Condiciones suficientes de integrabilidad.

En lo que sigue vamos a establecer condiciones que aseguren la integrabilidad de Riemann de una función.

Teorema. Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Si f es monótona entonces es Riemann integrable.

Dem. Suponemos f creciente (no es restrictivo). Además suponemos f no negativa (tampoco es restrictivo: De hecho podríamos trabajar con $h(x)=f(b)-f(x)$, para $x\in[a,b]$). Para $f=0$ el resultado es claro.
Si $f\neq 0$, dado $\varepsilon>0$, tomamos $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Sea $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P<\delta$ siendo $P=\{x_0=a,\dots,x_n=b\}$.
Entonces

$$S(f,P)-I(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))(x_k-x_{k-1})\leq\delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\big(f(b)-f(a)\big)=\varepsilon,$$

lo que prueba la Riemann integrabilidad de f. ■

Observación. Hay funciones monótonas con infinitas discontinuidades. Dichas funciones, en virtud del teorema anterior, son Riemann integrables.

Condiciones suficientes de integrabilidad muy elementales son las siguientes:

Teorema. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x)=0$ para cada $x \in [a,b] \backslash \{c_1,\dots,c_m\}$, donde $\{c_1,\dots,c_m\} \subseteq [a,b]$. Entonces f es Riemann integrable siendo

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Dem. No es restrictivo suponer que $c_i < c_{i+1}$, para $i = 1,\dots,(m-1)$ (se renombran si es necesario). Sea

$$\delta = \min\{ c_{i+1} - c_i : i = 1,\dots,(m-1)\}.$$

Sea $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P < \delta$. Nótese que en cada subintervalo de la partición P hay a lo sumo un c_i (si lo hay), por lo que $S(|f|,P) \leq \sum_{i=1}^{m} |f(c_i)|\, \Delta P$ mientras que $I(|f|,P) = 0$. Por tanto,

$$S(|f|,P) \to 0 \text{ cuando } \Delta P \to 0$$

de donde $S(|f|) = I(|f|) = 0$. De ahí se obtiene que

$$\int_a^b |f(x)| = 0,$$

por lo que $\int_a^b f(x)dx = 0.$ ■

Observación. Si $\int_a^b |f(x)| = 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$.

De hecho, si $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^-(x)dx + \int_a^b f^+(x)dx = 0$, entonces, $\int_a^b f^-(x)dx = 0$ y $\int_a^b f^+(x)dx = 0$, de donde $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx = 0$.

Corolario: Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas tales que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in [a,b] \backslash \{c_1, \dots, c_m\}$, donde $\{c_1, \dots, c_m\} \subseteq [a,b]$. Entonces f es Riemann integrable si, y solo si, lo es g en cuyo caso:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Dem. Por el resultado anterior $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = 0$. En consecuencia, de la igualdad $f = (f-g) + g$, y de la linealidad de la integral de Riemann respecto del integrando se obtiene el resultado. ■

Observación. Con el siguiente corolario inmediato, obtenemos una buena gama de ejemplos de funciones Riemann integrables que no son continuas.

Corolario: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua salvo en un conjunto finito de puntos en los que presenta (respectivamente) una discontinuidad evitable entonces f es Riemann integrable.

Dem. Obvia. Se deduce del resultado anterior y del hecho de que las funciones continuas son integrables. ■

Objetivo. Liberar el corolario anterior del requerimiento de que las discontinuidades sean evitables.

Teorema. Sean $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si el número de discontinuidades de f es finito entonces f es Riemann integrable.

Dem. **Caso 1.** Si f es continua en $]a, b[$ entonces f es integrable en $[a, b]$. En efecto.

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\mu = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{8M}\}$, donde M es tal que $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in [a, b]$.

Sean c, d tales que $a < c < d < b$, con $c - a < \mu$ y $b - d < \mu$. Como f es continua en $[c, d]$ y por tanto integrable, podemos encontrar $\hat{P} \in \mathscr{P}[c, d]$ tal que $\Delta\hat{P} < \mu$ siendo

$$S(f, \hat{P}) - I(f, \hat{P}) < \mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero entonces $P = \hat{P} \cup \{a, b\}$ es tal que $P \in \mathscr{P}[a, b]$ siendo $\Delta P < \mu$ y

$$S(f, P) - I(f, P) = S(f, \hat{P}) - I(f, \hat{P}) + (\alpha - \beta)(c - a) + (\gamma - \delta)(b - d), \text{ donde}$$

$$\alpha := \sup\{f(x) : x \in [a, c]\}; \quad \beta := \inf\{f(x) : x \in [a, c]\}$$
$$\gamma := \sup\{f(x) : x \in [d, b]\}; \quad \delta := \inf\{f(x) : x \in [d, b]\}.$$

Como $(\alpha - \beta)(c - a) + (\gamma - \delta)(b - d) \leq 2M\mu + 2M\mu$, concluimos que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} + 4M\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Caso 2. Si el número de discontinuidades de f en $[a, b]$ es finito y $c_1, \ldots, c_k$ son los puntos de discontinuidad de f, aplicamos lo anterior a los subintervalos asociados a la partición que determinan y hacemos uso de la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración (aplicando el resultado que afirma que si $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y solo si, lo es en $[a, c]$ y $[c, b]$). ■

Ejemplo. La función acotada $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\in\,]0,1]$ y $f(0)=0$ es integrable en $[0,1]$ aunque presente una discontinuidad esencial en $x=0$. La integrabilidad queda garantizada por el hecho de que el número de discontinuidades de f en $[0,1]$ es finito.

Teorema (Cauchy). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable en $[c,b]$ para cada $c\in\,]a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$ siendo

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx\,.$$

Dem. Análoga a la del teorema anterior.

Observación. Esta idea se retomará más adelante para establecer el concepto de integral impropia.

Observación. Si bien el resultado anterior indica el camino para integrar la función $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$, no resuelve el problema adicional de tener que usar un método de aproximación numérica para calcular el valor de esta integral en $[0,1]$.

Observación. El teorema que afirma las funciones acotadas que tienen un número finito de discontinuidades (de cualquier tipo) son Riemann integrables, es muy práctico. Pero conocemos funciones que son Riemann integrables y que poseen un número infinito de discontinuidades. Por tanto no estamos ante un resultado óptimo, por lo que cabe preguntarse ¿cómo de "grande" puede llegar a ser el conjunto de las discontinuidades de una función Riemann integrable? La respuesta vino de manos de Lebesgue.

Definición. Se dice que un conjunto D de números reales tiene medida nula si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos acotados I_n tales que $D \subseteq \cup_n I_n$ siendo $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} l(I_n) < \varepsilon$.

Esta propiedad la tienen todos los subconjuntos finitos y los conjuntos infinitos numerables. También la tienen algunos conjuntos infinitos no numerables, como el conjunto de Cantor del intervalo $[0,1]$.

Teorema (Criterio de integrabilidad de Lebesgue). Una función acotada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solo si, el conjunto de los puntos de $[a,b]$ en lo que f es discontinua tiene medida nula.

Ejemplo. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1,$ si $x \in C,$ y $f(x) = 0$ si $x \notin C$ donde C denota el conjunto de Cantor en $[01]$ es Riemann integrable. El conjunto C tiene medida cero pero no es numerable.

$(A_1 := [0,1] \setminus]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right];$ A_2 suprime la parte central de los dos intervalos de A_1 etc. Se define $C = \cap A_n$).

Teoremas Fundamentales del Cálculo

Cuestión: ¿Es posible determinar una función a partir de su área? Con el primer teorema fundamental del Cálculo vamos a dar respuesta a dicha cuestión.

Definición. Sean $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann integrable en $[a,b]$. Llamamos integral indefinida de f centrada en $c \in [a,b]$ a la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt\,,$$

bajo la convención de que, cuando $x < c$,

$$\int_c^x f(t)dt = -\int_x^c f(t)dt.$$

Observaciones.

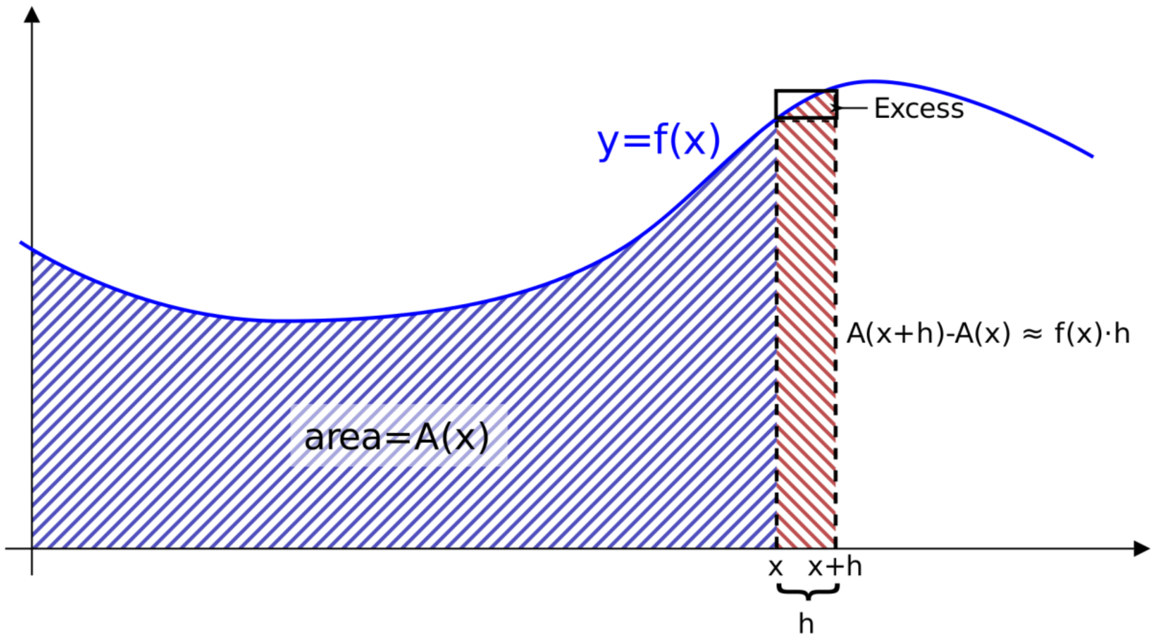
(i) Si $c, d \in [a,b]$ entonces la integral indefinida de f respecto de c se diferencia de la integral indefinida de f respecto de d en una constante: $\int_c^d f(t)dt$.

(ii) La justificación del convenio adoptado es que con él, para cualesquiera $x, y, z \in [a,b]$ se verifica la igualdad

$$\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \int_z^x f(t)dt = 0$$

Teoremas Fundamentales del Cálculo

Cuestión. Si conocemos $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ pero desconocemos la función f ¿es posible obtener f a partir de $A(x)$?



IDEA $f(x) \cdot h \approx A(x+h) - A(x)$ (sombreado rojo)

y la precisión de esta aproximación mejora al disminuir el valor de h.
Por tanto

$$f(x) \approx \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

Haciendo $h \to 0$ obtendríamos (de manera informal) que $f(x) = A'(x)$, es decir, que la derivada de la función de área $A(x)$ es en realidad la función $f(x)$.

Por tanto la función área $A(x)$ es la antiderivada de la función original f. Esto pone de manifiesto que la derivación y la integración son procesos inversos.

Teorema (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $c_0 \in [a,b]$. Supongamos que f es Riemann integrable en $[a,b]$ y sea $F(x) = \int_{c_0}^{x} f(t)dt$ (para cada $x \in [a,b]$) su integral indefinida. Entonces:
(i) F es continua en $[a,b]$ (de hecho es lipschitziana).
(ii) Si f es continua es continua en $c \in [a,b]$ entonces F es derivable en c siendo $F'(c) = f(c)$.

En particular, si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ siendo $F' = f$.

Dem.
(i) Veamos que F es lipschitziana y en consecuencia continua (de hecho lo es uniformemente).
Sea M tal que $|f(x)| \leq M,$ para cada $x \in [a,b]$. Puesto que, para $x, y \in [a,b]$ se tiene que

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_{c_0}^{y} f(t)dt - \int_{c_0}^{x} f(t)dt\right| = \left|\int_{x}^{y} f(t)dt\right| \leq M\,|y - x|$$

(con independencia de que sea $x \leq y$ o $y \leq x$), es claro que F es lipschitziana.
(ii) Si $x \in [a,b]$ es tal que $x \neq c$, se tiene que

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) = \frac{F(x)-F(c)-f(c)(x-c)}{x-c} = \frac{\int_{c_0}^{x} f(t)dt - \int_{c_0}^{c} f(t)dt - f(c)(x-c)}{x-c} = \frac{\int_{c}^{x} f(t)dt - f(c)(x-c)}{x-c} = \frac{\int_{c}^{x}(f(t)-f(c))dt}{x-c}.$$

Por la continuidad de f en $c,$ dado $\varepsilon > 0,$ existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [a,b]$ es tal que $|t - c| < \delta$ entonces $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$.
Por tanto, si $|x - c| < \delta$, y t está comprendido entre x y c, se tiene que $|t - c| < \delta,$ de donde $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Así,

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_{c}^{x}(f(t)-f(c))dt}{x-c}\varepsilon\right| \leq \left|\frac{\varepsilon(x-c)}{x-c}\right| = \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim\limits_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$. $\blacksquare$

Corolario. Toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es la derivada de alguna función continua en $[a,b]$.

Dem. Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, f es la derivada de su integral indefinida (que es continua). ■

Observación. Si bien toda función continua en un intervalo $[a,b]$ es la función derivada de otra, conviene recordar que la derivada de una función puede no ser continua. Este es el caso, por ejemplo de la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$, siendo $f(0)=0$.

Esto significa que la clase de las funciones derivables contiene estrictamente a la clase de las antiderivadas de las funciones continuas. (Definiremos explícitamente este término en la próxima definición).

Observación. Recordamos que si I es un intervalo tanto las funciones continuas en I como las derivadas de las funciones derivables tienen la propiedad de los valores intermedios. Esto es:
(i) $f:I\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f(I)$ intervalo. (Bolzano).
(ii) $f:I\to\mathbb{R}$ derivable $\Rightarrow f'(I)$ intervalo. (Darboux).
Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, el primer resultado se obtiene del segundo.
(Si f es continua entonces $f=F'$ siendo $F'(I)$ intervalo, luego $f(I)$ es intervalo).

Combinando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo con la Regla de la Cadena:

Corolario. Sea I un intervalo y sean $u, v : I \to [a, b]$ funciones derivables y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann integrable. Entonces la función $G(x) := \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ es derivable en I siendo

$$G'(x) = f\big(u(x)\big)u'(x) - f\big(v(x)\big)v'(x)$$

Dem. Nótese que si $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ entonces $F \cdot u : I \to \mathbb{R}$, es la función $x \to u(x) \to \int_a^{u(x)} f(t)dt$, función y análogamente $(F \cdot v)(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt$ de donde $G(x) := \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = (F \cdot u)(x) - (F \cdot v)(x)$ puesto que $\int_a^{u(x)} f(t)dt - \int_a^{v(x)} f(t)dt = \int_{v(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{u(x)} f(t)dt = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$.

El resto es claro por la Regla de la Cadena, junto con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo . ■

Ejemplos.

(i) $F(x) = \int_0^x t^2 dt \Rightarrow F'(x) = x^2$

(ii) $F(x) = \int_0^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t)dt \Rightarrow F'(x) = 3\, e^{3x}\operatorname{sen}(e^{3x})$.

(iii) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \operatorname{arcsen}(t)dt \Rightarrow F'(x) = 2x \operatorname{arcsen}(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$.

(iv) $F(x) = \int_x^{\int_a^x \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2(t)}} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(t)} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2(t)}\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}$

Definición. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se dice $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una primitiva (o anti-derivada) de f si F es continua en $[a,b]$ siendo $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in\,]a,b[$.
Si I es un intervalo arbitrario, una primitiva de $f:I\to\mathbb{R}$ es una función $F:I\to\mathbb{R}$, continua en I, derivable en el interior de I, siendo $F'=f$ en tales puntos.

Proposición. Si F y G son dos primitivas de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces F y G difieren en una constante

Dem. Puesto que $G-F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función derivable en $]a,b[$ siendo

$$(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0, \text{ para cada } a<x<b.$$

Como consecuencia del Teorema del Valor Medio deducimos que $(G-F)$ es constante en $[a,b]$ de donde existe k tal que $G(x)=F(x)+k$, para cada $x\in[a,b]$. ■

Observación. Gracias al Primer Teorema Fundamental del Cálculo, hemos probado que **la integral indefinida de una función continua es una de sus primitivas,** respondiendo así a la siguiente cuestión: Dada una función continua f ¿Cómo determinar una función cuya derivada sea f?

Además hemos probado que toda función acotada e integrable (continua o discontinua) verifica que **la derivada de su integral indefinida es igual a ella misma**. De ahí que la derivación y la integración se conciban como procesos inversos. Esto unificó el Cálculo Diferencial e Integral en una única disciplina (lo que justifica la denominación de “teorema fundamental”).

Con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo hemos podido determinar la primitiva de una función continua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. De hecho la integral indefinida de f es la primitiva buscada.

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow, nos dice que si conocemos una primitiva F de una función dada f entonces podemos determinar fácilmente cualquier integral definida suya, por lo que el cálculo de integrales definidas (y en particular el cálculo de áreas) se reduce al cálculo de primitivas.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es integrable en $[a,b]$ y sea F una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Dem. Sea $P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\} \in \mathscr{P}[a,b]$ una partición arbitraria. Entonces

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

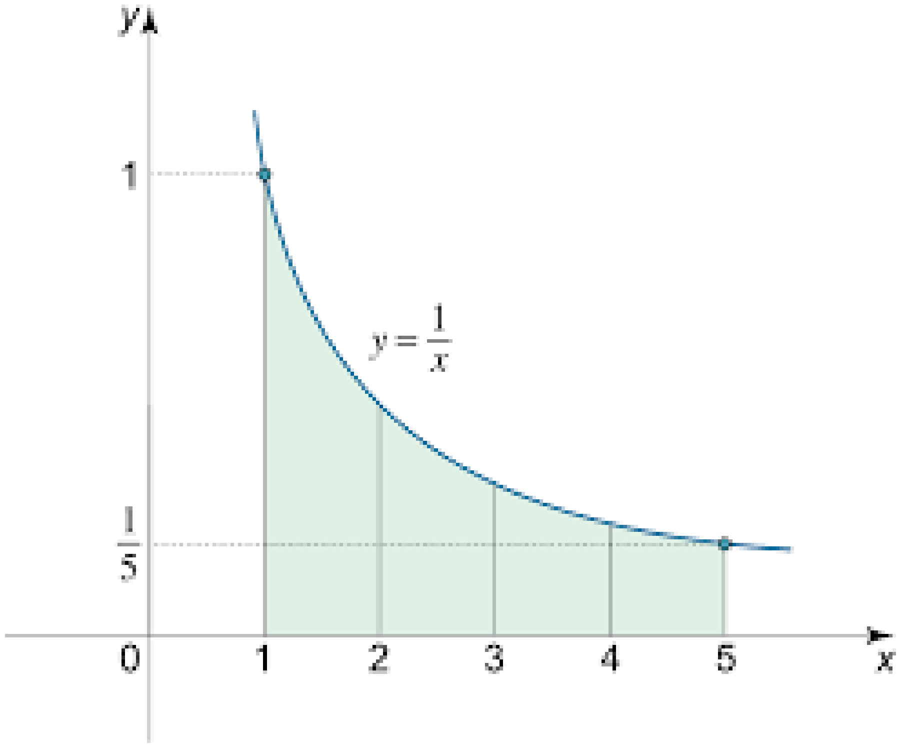
Por el Teorema del Valor Medio aplicado a F en el intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, encontramos $c_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Por tanto, $F(b) - F(a) = \sigma(f, P)$, y como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n)$ (por el Teorema de Convergencia de las Sumas Integrales) es claro que $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ■

Observación. En el resultado anterior no hemos supuesto que f sea continua, sino que sea Riemann integrable (que es una propiedad más débil). (Si F es primitiva de f en $[a,b]$ está en las hipótesis del TVM).

Aplicación. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 1/x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Llamamos logaritmo neperiano a la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\ln(x) := \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, para cada $x > 0$.



Nótese que $\ln(x)$ es negativo si $x < 1$. $\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt\right)$.

Por el Primer TFC, $\ln(x)$ es una función derivable (y por tanto continua).

Si $F(x) = \ln(x)$ entonces $F'(x) = \frac{1}{x}$ para cada $x > 0$, lo que demuestra $F(x) = \ln(x)$ es estrictamente creciente.

Dado $a > 0$, sea $H(x) := \ln(ax)$. Puesto que $H'(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x > 0$, las funciones H y F se diferencian en una constante k. Así

$$H(x) - F(x) = k = H(1) - F(1) = \ln(a) - 0,$$

de donde $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$, para cada $x > 0$, y cada $a > 0$.

Puesto que $\ln(2^n) = n\ln(2)$ (inducción), siendo $\ln(x)$ estrictamente creciente concluimos que su imagen o está acotada, siendo

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$$

De hecho, si $a > 0$, entonces $\ln(a) + \ln(a^{-1}) = \ln(aa^{-1}) = \ln(1) = 0$, por lo que $\ln(a^{-1}) = -\ln(a)$.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Puesto que $\ln(x) := \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una biyección (es estrictamente creciente y su imagen es $\mathbb{R}$), tiene inversa. Llamamos función exponencial a tal inversa. Por tanto, $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es una función es estrictamente creciente y derivable siendo (por el teorema de la derivada de la inversa),

$$\exp'(\ln(y)) = \frac{1}{\ln'(y)} = \frac{1}{1/y} = y.$$

Luego si llamamos $x = \ln(y)$, entonces $y = \exp(x)$ de donde

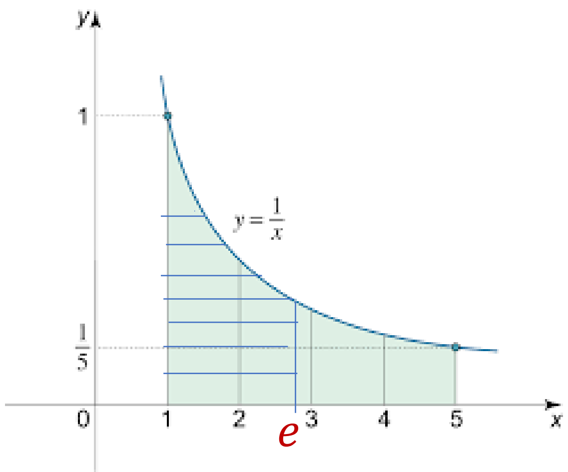
$$\exp'(x) = \exp(x)\text{, para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Puesto que $\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y)$, concluimos que, si $x = \ln(a)$ e $y = \ln(b)$, entonces

$$\exp(x+y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\exp(y),$$

de donde

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\text{, para cada } x \in \mathbb{R}.$$



Si definimos $e \in \mathbb{R}$ como $e := \exp(1)$, entonces tenemos que $\ln(e) = 1$, por lo que e es el valor real que hace que el área rayada en azul sea 1.

Como vemos el cálculo integral nos permite demostrar la existencia de estas funciones y establecer sus propiedades.

Lo mismo podríamos haber hecho, por ejemplo con $\operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(M. Spivak. Cálculo Infinitesimal. Reverté, 1992)

Álgunos métodos de integración: Integración por partes y cambio de variable

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo nos proporciona, como corolario, potentes métodos de cálculo integral, entre otros los dos que dan título a esta sección.

Teorema (Integración por partes). Sean $u, v: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funciones derivables en $[a,b]$ siendo sus derivadas funciones Riemann integrables en $[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b u'(x)v(x)dx\,.$$

Dem. Como uv' y $u'v$ son integrables por ser producto de funciones Riemann integrables (u y v son derivables, luego continuas, y u' y v' son Riemann integrables), tenemos que $(uv)' = uv' + u'v$ también lo es. Además, por el Segundo TFC tenemos que $\int_a^b (uv)'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, de donde

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a). \quad \blacksquare$$

Notación. $h(x)]_{x=a}^{x=b} = h(b) - h(a)$. Por tanto,

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)dx\,.}$$

Ejemplo. $\int_1^e \ln(x)dx = [u(x) = \ln(x); v(x) = x] = x\ln(x)]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1.$

El Segundo TFC junto con la integración por partes, nos proporciona una nueva expresión para calcular el resto en la Fórmula de Taylor.

Teorema (Residuo integral del Taylor). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces derivable en $[a,b]$ con derivada $f^{(n+1)}$ integrable en $[a,b]$. Sea $c\in[a,b]$. Entonces,

$$R^f_{n,c}(x):=f(x)-P^f_{n,c}(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Dem. Por el Segundo TFC (o Regla de Barrow), tenemos que $f(x)-f(c)=\int_c^x f'(t)dt$ e integrando por partes

$$\int_c^x f'(t)dt = [u(t)=f'(t), v(t)=-(x-t)\,] = -f'(t)(x-t)]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$f'(c)(x-c)+\int_c^x f''(t)(x-t)dt.$$

Por tanto,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x f'(t)dt = f'(c)(x-c)+\int_c^x f''(t)(x-t)dt = \left[u(t)=f''(t), v(t)=-\frac{(x-t)^2}{2}\right] =$$

$$= f'(c)(x-c)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt = f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\frac{1}{2}\int_c^x f'''(t)(x-t)^2dt =$$

$$= \ldots = f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \;\blacksquare$$

Otro potente método de integración que se obtiene como consecuencia del Segundo TFC es el siguiente.

Teorema (del cambio de variable o de sustitución Taylor). Sean I y J intervalos y sean $u: I \to J$ y $f: J \to \mathbb{R}$ funciones tales que f es continua en I y u es de clase $C^1(J)$. Entonces $(f \cdot u)u'$ es integrable en J siendo

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt, \quad \text{para cada } a, b \in J.$$

Dem. La función $(f \cdot u)u'$ es integrable por ser u' integrable y $(f \cdot u)$ continua. Sea F una primitiva de f en I. Por la Regla de la Cadena, $(F \cdot u)' = (F'.u)u' = (f \cdot u)u'$. Como f y $(f \cdot u)u'$ son integrables en I, por el Segundo TFC,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big) = (F \cdot u)(b) - (F \cdot u)(a) = \int_a^b (F \cdot u)'(t)dt =$$

$$= \int_a^b [(f \cdot u)u'](t)dt = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt \quad \blacksquare$$

Ejemplo. $\int_2^e \frac{dx}{x \ln(x)}$

$$\int_2^e \frac{dx}{x\ln(x)} = [u(x) = \ln(x)] = \int_2^e \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \left[\int_2^e f\big(u(x)\big)u'(x)dx; \text{ con } f(t) = \frac{1}{t}\right] = \int_{u(2)}^{u(e)} \frac{dt}{t} = \int_{\ln(2)}^{1} \frac{dt}{t} = -\ln(\ln(2)).$$

Observación . Si $u\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ es una biyección de clase $C^1([a,b])$ y $u(a)=\alpha$, y $u(b)=\beta$ entonces, si $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ es continua, tenemos que

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt\,.$$

Por tanto,

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f\big(u(x)\big)u'(x)dx.$$

Intercambiando el nombre de las variables (que son mudas), finalmente obtenemos:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f\big(u(t)\big)u'(t)dt}$$

Ejemplo. $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \left[\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = t;\ x = (t^2-1)^2 - 1 = u(t); dx = 4(t^2-1)t\right] = 4\int_1^2 (t^2-1)dt = \frac{16}{3}.$$