Convocatoria ordinaria de junio-Geometría II
1º Grado en Matemáticas
5 de junio 2019

1) (2,5 PUNTOS) Sea V un espacio vectorial real de dimensión 4, g una métrica euclídea sobre V y $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal. Consideramos el endomorfismo f de V dado por

$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_3\,, \quad f(e_3) = e_4\,, \quad f(e_4) = e_1\,.$$

Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es f un endomorfismo autoadjunto?

b) ¿Es f un endomorfismo diagonalizable?

c) ¿Es f una isometría? congruente,

d) Demuestra que $f \circ f$ es la simetría respecto de cierto subespacio y calcula ese subespacio.

2) (2,5 PUNTOS) Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base. Para cada para de números reales a, b definimos la métrica cuya matriz en la base B viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la signatura y clasifica la métrica en función de los valores de a y b.

3) (2,5 PUNTOS) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual se consideran dos giros f y h. Prueba que existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ tal que $f(v) = h(v)$.

4) Sean V un espacio vectorial real, dim finita = n g, g' dos métricas en V y f un endomorfismo de V que verifica

$$g'(f(u), f(v)) = g(u, v)\,, \forall u, v \in V\,.$$

Demuestra que:

a) (1 PUNTO) $\text{índice}(g') \geqslant \text{índice}(g)$.

b) (1 PUNTO) $\text{rango}(g') \geqslant \text{rango}(g)$.

c) (0,5 PUNTO) Si existe h un endomorfismo de V tal que

$$g(h(u), h(v)) = g'(u, v)\,, \forall u, v \in V$$

entonces (V, g) y (V, g') son isométricos.