AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por M. Victoria Velasco como profesora responsable de la asignatura de Cálculo II del Grado de Matemáticas, del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y del Doble Grado de Informática y Matemáticas, para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

El polinomio de Taylor es una aproximación asintótica en un punto $x = a$ de una función $f(x)$ que es n veces derivable en $x = a$ por un polinomio de grado n. El Teorema de Taylor fue enunciado en 1712 por Brook Taylor (si bien hubo contribuciones relevantes al respecto de muchos otros autores anteriores a Taylor, entre otras la de James Gregory (1671) y de los propios fundadores del Cálculo).

Brook Taylor (1685-1731)

Desde una perspectiva histórica, el concebir las funciones elementales básicas como límites de polinomios (siquiera localmente) fue esencial para el desarrollo del Cálculo Infinitesimal pues condujo la descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo y permitió avanzar ostensiblemente en el conocimiento de tales funciones.

En lo que sigue, como de costumbre, I denotará un intervalo no trivial (de cualquier tipo).

Definición. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I y sea $f': I \to \mathbb{R}$ su derivada. En el caso de que f' vuelva a ser derivable en I decimos que f es dos veces derivable en I y definimos la derivada segunda de f como la función $f'': I \to \mathbb{R}$ que determina la derivada de la función f'. Por tanto, para cada $x \in I$, tenemos que

$$f''(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

POLINOMIO DE TAYLOR

Definición. Por recurrencia, si para $n \geq 2$, si la derivada n-ésima de f, que denotamos como $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ resulta ser una función derivable in I entonces decimos que f es $(n+1)$ veces derivable en I y definimos la derivada $(n+1)$ $-$ésima como la función derivada de $f^{(n)}$.

Observación. Se demuestra por inducción que $n, m, k \in \mathbb{N}$ son tales que $m = n + k$, entonces $f^{(m)} = \left(f^{(n)}\right)^{(k)}$.

Definición. Dado $n \in \mathbb{N}$, se dice que $f : I \to \mathbb{R}$ es de clase C^n en el intervalo I, y escribimos $f \in C^n(I)$, si f es n veces derivable en I y $f^{(n)}$ es continua en I.
Análogamente, se dice que f es de clase C^∞ en el intervalo I, y escribimos $f \in C^\infty(I)$, cuando f es n veces derivable en I para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^2 + 3$ son de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

Observación. Existen funciones derivables en $\mathbb{R}$ que sin embargo no son de clase $C^1(\mathbb{R})$.
Por ejemplo, como sabemos, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, siendo $f(0) = 0$ es derivable en $\mathbb{R}$ siendo $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, mientras que $f'(0) = 0$. En consecuencia f' no es continua en $x = 0$ (donde presenta una discontinuidad esencial).

POLINOMIO DE TAYLOR

Cuestión. Sea $a \in \mathbb{R}$ ¿Cómo ordenar un polinomio por $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ en potencias de $(x-a)$?

De forma heurística, si hubiésemos encontrado la solución, tendríamos

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots + \beta_n(x-a)^n.$$

Calculemos la derivada k-ésima de un polinomio de orden n, para $k = 0,1, \ldots n$.

$$p'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + \ldots + n\beta_n(x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\beta_k(x-a)^{k-1}$$

$$p''(x) = 2!\,\beta_2 + 3!\,\beta_3(x-a) + \ldots + n(n-1)\beta_n(x-a)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\beta_k(x-a)^{k-2}$$

$$p^{(j)}(x) = j!\,\beta_j + (j+1)!\,\beta_{j+1}(x-a) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\beta_n(x-a)^{n-k} = \sum_{k=j}^{n} k\ldots(k-j+1)\beta_k(x-a)^{k-j}$$

$$p^{(n-1)}(x) = (n-1)!\,\beta_{n-1} + n!\,\beta_n(x-a)$$

$$p^{(n)}(x) = n!\,\beta_n.$$

Evaluando las expresiones anteriores en $x = a$, concluimos que $\beta_0 = p(a)$, $\beta_1 = p'(a)$, $\beta_2 = \frac{p''(a)}{2!}$ y en general

$$\boxed{\beta_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0,1,\ldots,n).}$$

En consecuencia,

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo. Para calcular 101^5 consideramos $p(x) = x^5$ y $a = 100$. Así $101^5 = p(101) = p(a+1)$

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{p^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{p^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{p^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 5x^4, \\ p''(x) &= 20x^3, \\ p^{(3)}(x) &= 60x^2, \\ p^{(4)}(x) &= 120x, \\ p^{(5)}(x) &= 120. \end{aligned}$$

Evaluando en $a = 100 = 10^2$, para $x = 101$, tenemos que $(x-a) = 1$, por lo que

$$101^5 = p(101) = 10^{10} + 5\ 10^8 + \frac{1}{2}\ 20\ 10^6 + \frac{1}{6}\ 60\ 10^4 + \frac{1}{24} 120\ \ 10^2 + \frac{1}{120} 120 = 10.510.100.501$$

Cuestión. Si en lugar de trabajar con un polinomio $p(x)$ tenemos una función derivable un número suficiente de veces y hacemos el mismo procedimiento, quizás no obtengamos el valor exacto de $f(x)$, pero ¿obtendríamos un valor aproximado?

POLINOMIO DE TAYLOR

Definición. Sea $n \geq 2$. Decimos que $f: I \to \mathbb{R}$ es n-veces derivable en un punto $a \in I$ si f es $(n-1)$ veces derivable en I y $f^{(n-1)}$ es derivable en el punto a.

Definición. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función al menos n veces derivable en $a \in I$. Definimos el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a como el polinomio

$$P_{n,a}^{f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Cuando no haya confusión con la función f escribiremos simplemente $P_{n,a}(x)$.

Observaciones.

(i) Este polinomio es el único polinomio de orden n que tiene la propiedad de que su derivada de orden k (para $k = 0,1,\ldots,n$), en el punto $x = a$, coincide con $f^{(k)}(a)$ (la derivada de orden k de f en $x = a$).
Por tanto,

$$P_{n,a}(a) = f(a), \qquad P'_{n,a}(a) = f'(a), \ldots, \quad P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \ldots, \quad P_{n,a}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

(ii) Obsérvese que $P_{1,a}(x)$ no es más que la recta tangente a la función f por el punto $(a, f(a))$. Así, $P_{1,a}(x)$ es la única recta con la propiedad de que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x-a} = 0.$$

$$\frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}{x-a} = \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] \to 0$$

POLINOMIO DE TAYLOR: Ejemplos

Ejemplos. Sea $n \in \mathbb{N}$. (En los siguientes casos $a = 0$, por lo que se trata de un desarrollo en serie de Maclaurin).

(i) Sea $f(x) = e^x$. Entonces, $P_{n,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}x^k$

(ii) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces,

$$P_{2n,0}(x) = P_{2n-1,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

(iii) Sea $f(x) = \cos(x)$. Entonces,

$$P_{2n,0}(x) = P_{2n+1,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

(iv) Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Entonces, $P_{n,0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n}x^n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

(v) Sea $\alpha \neq 0$ y $f(x) = (x+1)^\alpha$. Entonces $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$. Por tanto,

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

POLINOMIO DE TAYLOR

Esto, intuitivamente, es que cuando $x \to a$ la diferencia $f(x) - P_{1,a}(x)$ es bastante más ajustada que $x - a$. Veamos que cuando aumentamos el grado del polinomio la aproximación es aún mejor.

Teorema (Fórmula Infinitesimal del resto). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$. Entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Dem. Sean $h, g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $h(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ y $g(x) = (x-a)^n$ para cada $x \in I \backslash \{a\}$. Es claro que estas funciones son derivables en $I \backslash \{a\}$ (de hecho lo son $(n-1)$ veces) con

$$g^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(x-a)^{n-k}$$
$$h^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_{n,a}^{(k)}(x),$$

donde $P_{n,a}^{(k)}(x) = k!\,\beta_k + (k+1)!\,\beta_{k+1}(x-a) + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)\beta_n (x-a)^{n-k}$ siendo $\beta_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ para cada $(k = 1, \dots, n-1)$. Además, $g^{(k)}(x) \neq 0$, para cada $x \in I \backslash \{a\}$ y por otra parte, $\lim_{x \to a} \frac{h^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = [\frac{0}{0}]$. Así,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{``=''} \lim_{x \to a} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{``=''} \dots \text{``=''} \dots = \lim_{x \to a} \frac{h^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_{n,a}^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - (n-1)!\,\beta_{n-1} - n!\,\beta_n (x-a)}{n!\,(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{(x-a)} - f^{(n)}(a) \right) = 0. \blacksquare$$

POLINOMIO DE TAYLOR

Acabamos de ver que el polinomio de Taylor de orden n, en el punto $x = a$, de la función f pasa por $(a, f(a))$ y es tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$. Veamos que este es el único polinomio de orden n con dicha propiedad.

Teorema. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$ y sea $Q(x)$ un polinomio de grado n con la propiedad de que $Q(a) = f(a)$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Entonces $P_{n,a}(x) = Q(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Dem. Sea $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $H(x) = Q(x) - P_{n,a}(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Si fuese $H \neq 0$, lo ordenamos en potencias de $(x-a)$ y al ser $H(a) = 0$ obtendríamos una expresión de la forma

$$H(x) = \beta_k (x-a)^k + \ldots + \beta_m (x-a)^m,$$

para ciertos $k, m \in \{1, \ldots, n\}$ siendo $\beta_k \neq 0$ y $\beta_m \neq 0$ (pudiera ser $k = m$). En consecuencia,

$$\lim_{x\to a} \frac{H(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)-f(x)+f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)-f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Pero entonces $\beta_k = \lim_{x\to a} \frac{H(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{H(x)(x-a)^{n-k}}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{H(x)}{(x-a)^n} \lim_{x\to a} (x-a)^{n-k} = 0$, contradicción que muestra que $H = 0$, de donde $P_{n,a}(x) = Q(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. ■

El resultado anterior nos permitirá cerciorarnos de que determinados polinomios son el polinomio de Taylor de una función dada en un punto determinado, como mostramos a continuación.

Observación. La siguiente igualdad es de comprobación inmediata.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x}\, x^{n+1} \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

$$(1+x)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n) = 1 + (-1)^n x^{n+1}$$

En particular,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2}\, x^{2n+2} \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo. Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $Q(x) := 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$, entonces $P^f_{2n,0}(x) = \mathrm{Q}(x)$.

En efecto, como $Q(x)$ es un polinomio de grado $2n$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - Q(x)}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2}\, x^{2n+2}}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2}\, x^2 = 0,$$

Concluimos por el teorema anterior que $Q(x) = P^f_{2n,0}(x)$.

Análogamente, si $g(x) = \frac{1}{1+x}$, entonces $P^g_{n,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$.

POLINOMIO DE TAYLOR

Binomio de Newton generalizado: $(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k}$ siendo $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$, con $|x|<|y|$.

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-k+1)}{k!}$$

Si $m\in\mathbb{N}$, $(a+b)^m=\sum_{k=0}^{k=m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}$

$\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{m(m-1)\ldots.(m-k+1)}{k!}$ $(m\geq k)$

Observación. Puesto que $(x+y)^{\alpha}=y^{\alpha}\left(\frac{x}{y}+1\right)^{\alpha}$, la fórmula anterior se reduce al caso

$$(x+1)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \quad \text{si } |x|<1.$$

Si $m\in\mathbb{N}$ $(x+1)^m=\sum_{k=0}^{k=m}\binom{m}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$

Si $k>m$, $\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\ldots(m-(m-1))(m-m)\ldots(m-k+1)}{k!}=0.$

En particular, para $\alpha=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k x^{2k}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots \quad \text{si } |x|<1.$$

Ejemplo. Si $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ entonces de la igualdad anterior se deduce que $P_{2n,0}^{(1-x^2)^{-1/2}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}(-1)^k x^{2k}$

De hecho, se puede probar que:

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-a)^n$, para cada $x\in]a-r,a+r[$ (con $r>0$) entonces f tiene derivada de todos los órdenes en dicho intervalo. Además, $\alpha_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Por tanto, $P_{n,a}^{f}(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-a)^k$.

POLINOMIO DE TAYLOR

Observación. $[P^f_{(n+1),a}(x)]' = [\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k]' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}\ (x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\ (x-a)^k = P^{f'}_{n,a}(x)$

Así,

$$\boxed{[P^f_{(n+1),a}(x)]' = P^{f'}_{n,a}(x)}$$

Ejemplos.

(i) Si $f(x) = \arctan(x)$ entonces $P^f_{(2n+1),0} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Sabemos que $P^{f'}_{2n,0}(x) = P^{\frac{1}{1+x^2}}_{2n,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$.

Como $[P^f_{(n+1),a}(x)]' = P^{f'}_{n,a}\ (x)$ obtenemos

$$P^f_{(2n+1),0} = P^{\arctan(x)}_{(2n+1),0} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(ii) Si $f(x) = \text{arcsen}(x)$ entonces $P^f_{(2n+1),0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3.5\ldots.(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$

Hemos visto que $P^{f'}_{2n,0}(x) = P^{(1-x^2)^{-1/2}}_{2n,0} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$.

Por tanto $P^f_{(2n+1),0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$. Ahora basta observar que

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{1.2\ldots.k} = (-1)^k\ \frac{1.3.5\ldots.(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)}.$$

De la fórmula infinitesimal del resto obtenemos, de forma inmediata, este otro resultado que será útil para el cálculo de algunos límites:

Corolario. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{(n-1),a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Dem. Puesto que $P_{n,a}(x) = P_{(n-1),a}(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ concluimos, por la Fórmula infinitesimal del resto, que

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{(n-1),a}(x)-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n},$$

de donde $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{(n-1),a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$ ■

Este resultado será útil para el cálculo de determinados límites.

Ejemplo. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^4} = \frac{1}{24}.$

De hecho, si $f(x) = e^x$, entonces $P_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ siendo $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{24}.$

POLINOMIO DE TAYLOR

Nos proponemos ahora calcular en la medida de lo posible el error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$.

Definición. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función al menos n veces derivable en $a \in I$. Definimos el resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a como la función $R_{n,a}\colon I \to \mathbb{R}$ dada por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

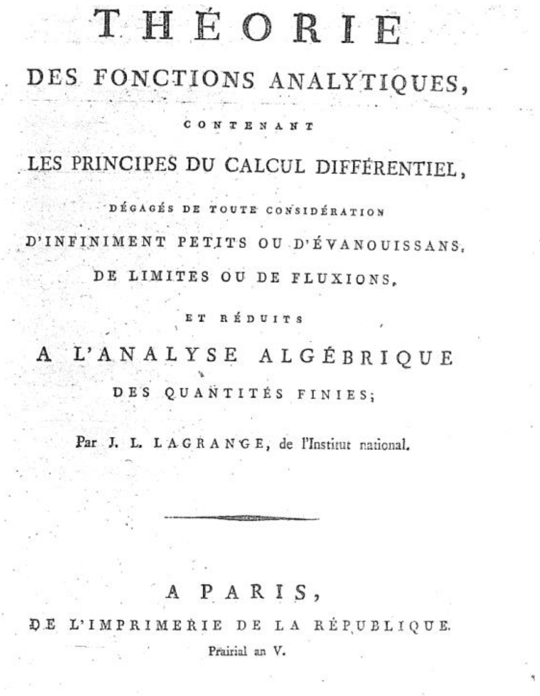
para cada $x \in I$.

A continuación damos una expresión de la función $R_{n,a}(x)$.

Este texto en el que se recogen los resultados de cálculo diferencial que Lagrange impartía en sus clases en la École Polytechnique de París consta de tres partes:

- En la primera se facilita una demostración algebraica del teorema de Taylor,
- En la segunda se abordan aplicaciones a la Geometría
- En la tercera se aportan aplicaciones a la Mecánica.

Este texto junto con otro tratado similar del autor, *Leçons sur le calcul des fonctions*, publicado en 1804, constituyó una fuente básica para A. Cauchy, C. G. Jacobi y K. Weierstrass.



THÉORIE
DES FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,
DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION
D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,
DE LIMITES OU DE FLUXIONS,
ET RÉDUITS
A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE
DES QUANTITÉS FINIES;
Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.
Prairial an V.

Lagrange, *Teoría de las funciones analíticas,* 1797

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Corolario (Lagrange 1797). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n(I)$, siendo $(n+1)$ veces derivable en I^0 . Entonces, para cada $a, x \in I$ con $a \neq x$, existe $c \in I$ comprendido entre a y x tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ (Resto de Lagrange)

Dem. Sea $J = [u, v]$ donde $u = \min\{a, x\}$ y $v = \max\{a, x\}$. Como $J \subseteq I$ tenemos que $J^0 \subseteq I^0$ por lo que las funciones $R_{n,a}, g: [u, v] \to \mathbb{R}$ dadas por $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ y $g(x) = (x-a)^{n+1}$ son continuas en $[u, v]$ y derivables en $]u, v[$. De hecho son de clase $C^n(]u, v[)$.

En particular, $R_{n,a}^{(k)}(a) = 0$, para $k = 0,1,2, \dots, n$, por ser $f^{(k)}(a) = P_{n,a}^{(k)}(a)$ para $k = 0,1,2, \dots, n$,

($P_{n,a}(x)$ es el único polinomio de orden n con tal propiedad). También $g^{(k)}(a) = 0$ si $k = 0,1,2, \dots, n$.

Aplicando reiteradamente el Teorema del valor medio generalizado, vamos obteniendo puntos $c_1, \dots, c_n \in [u, v]$ tales que c_{k+1} está comprendido estrictamente entre c_k y a, tales que

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_{n,a}(x) - R_{n,a}(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'_{n,a}(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R'_{n,a}(c_1) - R'_{n,a}(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{R''_{n,a}(c_2)}{g''(c_2)} = \frac{R''_{n,a}(c_2) - R''_{n,a}(a)}{g''(c_2) - g''(a)} = \cdots = \frac{R_{n,a}^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_{n,a}^{(n)}(c_n) - R_{n,a}^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(a)} =$$

$$\frac{R_{n,a}^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_n)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

habida cuenta de que $P_{n,a}^{(n+1)}(x) = 0$, y $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ para cada x. Ya, basta hacer $c = c_{n+1}$. ■

POLINOMIO DE TAYLOR

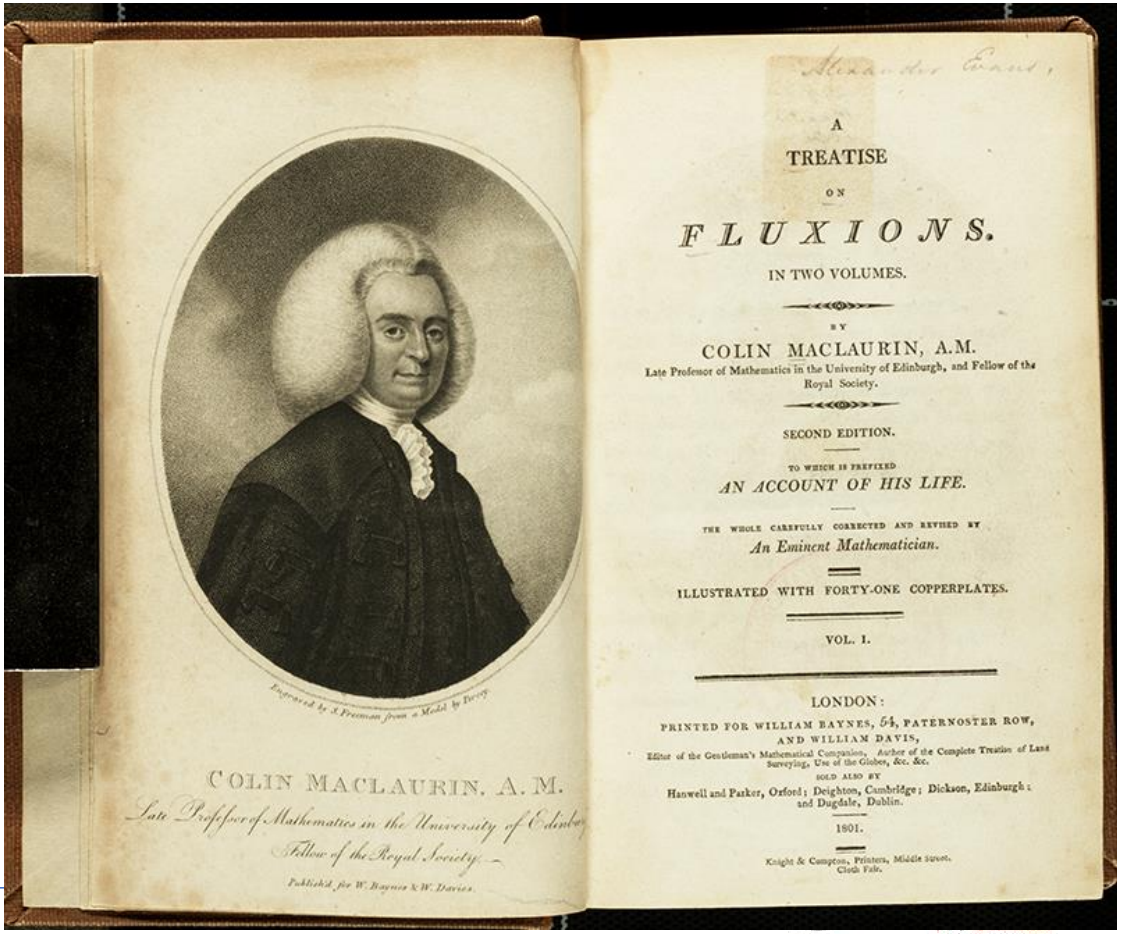
Fórmula de Taylor con resto de Lagrange. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n(I)$, siendo $(n+1)$ veces derivable en I^0 . Entonces, para cada $a, x \in I$ con $a \neq x,$ existe $c \in I$ comprendido entre a y x tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

Recordamos que la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}^{f}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}^{f}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Observación. Cuando el polinomio anterior se centra en el punto $a = 0$ también recibe el nombre de Polinomio de Maclaurin en honor a Colin Maclaurin (1698-1746), discípulo de Newton que en su *Treatise of Fluxions* (1742) ya había calculado este desarrollo para algunas funciones elementales (desarrollo que también fue generalizado y publicado por B. Taylor posteriormente).



Colin Maclaurin,
Treatise of Fluxions (1742)

POLINOMIO DE TAYLOR

El polinomio de Taylor nos va a proporcionar una útil caracterización de los extremos relativos de una función.

Corolario (Criterio de la derivada segunda). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I^0$. Supongamos que $f'(a) = 0$ y que $f''(a) \neq 0$.
(i) Si $f''(a) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.
(ii) Si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.

Dem. Considerando el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $x = a$, tenemos

$$f(x) = P_{2,a}(x) + R_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + R_{2,a}(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + R_{2,a}(x).$$

Por la Fórmula infinitesimal del resto sabemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}{(x-a)^2} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{f''(a)}{2!} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}.$$

De aquí se deduce que si $f''(a) < 0$ entonces $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} < 0$ en un entorno de a, por lo que $f(x) \leq f(a)$ en dicho entorno, de donde f presenta un máximo relativo en $x = a$. Análogamente, si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$. ■

En las condiciones del resultado anterior, que $f'(a) = 0$ es una condición necesaria de extremo relativo.
Si se diese la situación de que $f'(a) = f''(a) = 0$ siendo $f'''(a) \neq 0$ entonces no tendríamos un extremo relativo en a como probamos a continuación.

Corolario. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función tres veces derivable en $a \in I^0$. Supongamos que $f'(a) = f''(a) = 0$ y que $f'''(a) \neq 0$. Entonces f no posee un extremo relativo en $x = a$.

Dem. De forma análoga a la prueba anterior, obtenemos ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{3,a}(x)}{(x-a)^3} = \frac{f(x) - P_{3,a}(x)}{(x-a)^3} = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3}{(x-a)^3} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{f'''(a)}{3!} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^3}.$$

En consecuencia, $f'''(a) \neq 0$, tanto si es $f'''(a) > 0$ como si es $f'''(a) < 0$, por la variación de $(x-a)^3$ en cualquier entorno de $x = a$, vamos a obtener una variación de sigo de signo de $f(x) - f(a)$ por lo que el signo de dicha diferencia no será el mismo a derecha y a izquierda de a en cualquier entorno de a. ■

Nota. Más adelante estableceremos el concepto de punto de inflexión y veremos que en la situación anterior el punto a sería un punto de inflexión.

POLINOMIO DE TAYLOR

Las ideas anteriores se generalizan en el siguiente resultado.

Corolario. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I^0$. Supongamos que $f'(a) = f''(a) = f^{(n-1)}(a) = 0$ y que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:

(i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ entonces f posee un mínimo relativo en $x = a$.

(ii) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$ entonces f posee un máximo relativo en $x = a$.

(iii) Si n es impar entonces f no posee un extremo relativo en $x = a$.

Finalizamos la sección planteando una cuestión relativa a las funciones $f: I \to \mathbb{R}$ que son de clase $C^\infty(I)$.

Supongamos $f: I \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty(I)$. Sabemos que, fijado $a \in I$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

(donde $f^{(k)}(a) = f(a)$ y $0! = 1$). Conforme n aumenta, la aproximación de $P_{n,a}(x)$ al valor $f(x)$ cuando $x \to a$ es cada vez mejor. En este contexto:

Questión: ¿Cuándo podríamos decir que $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,a}(x)$? Si esto ocurriese para cada $x \in I$ escribiríamos

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n.}$$

Para esto necesitamos que $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0.$ Recordamos que, conforme a la expresión del resto de Lagrange $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para conveniente c comprendido (estrictamente) entre a y x.

Sea $w > 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{w^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De hecho,

$$\ln\left(\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}\right) = (n+1)\ln(w) - \ln\big((n+1)!\big) = (n+1)\ln(w) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) = (n+1)\left(\ln(w) - \frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(k)}{n+1}\right)$$

Puesto que por el Criterio de Stölz $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(k)}{n+1} = +\infty$ concluimos finalmente que $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}\right) = -\infty$.

En consecuencia $\lim_{n\to\infty} \frac{w^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De aquí se deduce que $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De hecho $\lim_{n\to\infty} \frac{K^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (tómese $w = |K\,(x-a)|$). Esto permite probar el siguiente resultado.

Teorema. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty(I)$. Si existen $M, K > 0$ tal que $\left|f^{(n)}(x)\right| \le MK^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in I$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n, \qquad (x \in I).$$

Nota. Con $K = 1$ la condición anterior es $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in I$.

Observación. Se dice que $f : I \to \mathbb{R}$ es analítica en $a \in I$ cuando existe un entorno $]a-r, a+r[$ en el que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n.$$

(Esto es que $f(x)$ se expresa como una serie de potencias centrada en a).
Por tanto, si f es de clase $C^\infty(I)$ y verifica las hipótesis de teorema anterior, entonces f es analítica en I.

Ejemplos.
(i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Si $M > 0$, considerando $f_{|[-M,M]}$ estamos en las condiciones del teorema anterior ($M = e^M$ y $K = 1$). Por tanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Para cada $x \in [-M, M]$ y como M es arbitrario, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Como obviamente $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ concluimos que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

(iii) Análogamente, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Todas estas series de potencias tienen radio de convergencia infinito y verifican que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0.$$

Por tanto $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,0}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

POLINOMIO DE TAYLOR

(iv) Análogamente, si $f(x) = \ln(x+1)$, entonces, $P_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge si $x \in]-1,1]$ y diverge si $x \notin]-1,1]$.

- Si $x = -1$ obtenemos la serie $\sum \frac{1}{n}$ que sabemos que no converge y
- Si $|x| > 1$ obtenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ que tampoco converge puesto que su término general no converge a cero.

Dado $-1 < m < 1$, sea $f : [m,1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \ln(x+1)$. Es claro que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\ (1+x)^{-n}$$

Además, para cada $x \in [m,1]$, existe $c_n \in]m,1[$ tal que

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n (1+c_n)^{-n}}{(n+1)} x^{n+1}$$

de donde $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

Obtenemos así que $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ para cada $x \in [m,1]$ y como m es arbitrario, concluimos que

$\boxed{\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,}$ para cada $x \in]-1,1]$. (Serie de Mercator (1668)).

De aquí se deduce también que $\boxed{\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$

Nicolas Mercator (1620-1687)