Relación de Problemas: *Aproximación*

1. Calcule la recta que mejor aproxima por mínimos cuadrados discretos los datos (-1,0), (0, 1/2), (1,1), (2,2) y (3,2).

2. El dueño de un negocio en expansión observa que en los cinco primeros meses del año las ventas han sido de 40, 44, 52, 64 y 80 miles de euros, respectivamente.

    a) Calcular la parábola de mínimos cuadrados $v(x) = a + bx + cx^2$ (x = meses, $v(x)$ = ventas), resolviendo el sistema por el método de Gauss.

    b) Estimar, según el modelo de ajuste anterior, las ventas que habrá a finales de año.

3. Determinar la recta que más se aproxima a la curva $y = e^x$ según el método de mínimos cuadrados discreto en -1, -0.5, 0, 0.5, 1; y el método de mínimos cuadrados continuo en $[-1, 1]$.

4. Obtener el polinomio de grado menor o igual que 2 mejor aproximación por mínimos cuadrados continua para la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ tomando como función peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

5. *a*) Utilizando el algoritmo de Gram–Schmidt, calcule una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$ utilizando el producto escalar discreto en los puntos -1, 0, 1, con pesos 1, 2, 1, respectivamente.

    b) Obtenga el polinomio de grado no mayor que 2 mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = x^{1/3}$ utilizando el apartado anterior.

6. Obtenga la mejor aproximación de la función $f(x) = x^3$ mediante polinomios de segundo grado, con respecto a la medida combinada de distancia

$$d(u, f)^2 = (u(0) - f(0))^2 + \int_0^1 (u(x) - f(x))^2 dx.$$

    Calcule, además los tres primeros polinomios ortogonales asociados a este producto escalar.

7. Repita el ejercicio número 5 utilizando el producto escalar continuo en el intervalo $[-1, 1]$, con peso $w(x) = x^2$.

8. Calcule los polinomios de grados 1 y 2 que mejor aproximen por mínimos cuadrados discretos los datos de la siguiente tabla.

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53

9. Hallar la expresión del polinomio trigonométrico $a + b\cos x + c\,\mathrm{sen}\,x$ mejor aproximación por mínimos cuadrados de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$.

10. Cuando el crecimiento de una población está acotado por un valor constante L sigue una curva logística que tiene la forma

$$y(x) = \frac{L}{1 + Be^{Ax}}$$

a) Realice un cambio de variable que transforme la función $y(x)$ en una expresión lineal en x. (Téngase en cuenta que $L/y - 1 = Be^{Ax}$).

b) Utilice los datos de una población, dados por la tabla

Año	1800	1850	1900	1950
x_k	-10	-5	0	5
y_k (millones)	5.3	23.2	76.1	152.3

para encontrar una curva logística $y(x)$ correspondiente a $L = 800$ (millones), aplicando mínimos cuadrados sobre la función transformada del apartado a).

c) Estime la población en el año 2000.