TEMA 2

ESPACIOS VECTORIALES

Definición:

V (conjunto no vacío) es espacio vectorial en K (cuerpo conmutativo) si:

- **(V, +) es un grupo abeliano**. Por tanto tiene estas propiedades:
    - Asociativa: $\forall$ u, v, w $\in$ V se cumple (u + v) + w = u + (v + w).
    - Conmutativa: $\forall$ u, v $\in$ V se verifica u + v = v + u.
    - Existencia de elemento neutro: $\exists$ 0 $\in$ V tal que 0 + v = v + 0 = v, $\forall$ v $\in$ V.
    - Existencia de opuestos: $\forall$ v $\in$ V , $\exists$ − v tal que v + (−v) = (−v) + v = 0.
- En V hay definida una ley de composición externa a partir de K que llamaremos **producto por escalares**; es decir · : K × V −→ V tal que ·(α, v) = αv, que tiene que verificar:
    - Distributividad: $\forall$ a $\in$ K, $\forall$ u, v $\in$ V se tiene a(u + v) = au + av.
    - Distributividad: $\forall$ a, b $\in$ K, $\forall$ u $\in$ V se tiene (a + b)u = au + bu.
    - Pseudoasociatividad: $\forall$ a, b $\in$ K, $\forall$ u $\in$ V se tiene (ab)v = a(bv).
    - Propiedad modular: $\forall$ u $\in$ V , 1u = u, siendo 1 el elemento neutro para el producto de K.

Dependencia e independencia lineal:

Combinación lineal: Cualquier vector expresado como la suma de ciertos vectores de un conjunto finito multiplicados cada uno por un escalar. Ej: $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n$.

Dependencia lineal: Diremos que un conjunto de vectores es dependiente si se puede expresar el 0 como combinación lineal de ellos sin todos los escalares nulos.

Un conjunto de vectores {v1, . . . , vn} es linealmente dependiente si y solo si alguno de dichos vectores es combinación lineal de los restantes.

Independencia lineal: Cuando la única forma de expresar el 0 como combinación lineal de un conjunto de vectores es con todos los escalares nulos.

Relación con matrices:

Comprobar la dependencia de un conjunto de vectores es lo mismo que discutir un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuyas incógnitas son de la siguiente forma

Ej R^3 $\quad a(x_a \;\; _c, z_c),\ b(x_b, y_b, z_b),\ c(x_c, y_c, z_c),\ d(x_d, y_d, z_d) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} ax_a + bx_b + x_c + dx_d &= 0 \\ ay_a + by_b + y_c + dy_d &= 0 \\ az_c + bz_b + cz_c + dx_a &= 0 \end{aligned} \qquad (M|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} x_a & x_b & x_c & x_d & 0 \\ y_a & y_b & y_c & y_d & 0 \\ z_a & z_b & z_c & z_d & 0 \end{array}\right)$$

SISTEMA $\begin{cases} \text{COMPATIBLE} \rightarrow \text{INDEPENDIENTES} & \text{Rango } M = \text{Rango } M|B = \text{Orden} \\ \text{INCOMPATIBLE} \rightarrow \text{DEPENDIENTES} & \text{Rango } M \neq \text{Rango } M|B \end{cases}$

Propiedades:

- Si $0 \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente.
- $\{v\}$ es linealmente independiente si y solo si $v \neq 0$.
- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente, cualquier conjunto que lo contenga $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ también es linealmente dependiente.
- Si $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ es linealmente independiente, cualquier subconjunto suyo no vacío $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sigue siendo linealmente independiente.

Sistemas de generadores de un espacio vectorial:

Un conjunto de vectores S de V (K) es un sistema de generadores de dicho espacio vectorial si cualquier vector de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S (en el caso de que S sea infinito, consideraremos combinaciones lineales de un número finito de vectores de S).

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto linealmente independiente en V (K) y $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ un sistema de generadores del mismo espacio. Entonces $m \leq s$.

Bases de un espacio vectorial:

Definición:

Sea V (K) un espacio vectorial y $B \subseteq V$. Diremos que B es una base de V si B es:

- linealmente independiente
- un sistema de generadores de V.

Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores, entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de vectores.

Ampliación de la base:

Sea V (K) un espacio vectorial de dimensión n y $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces podemos encontrar vectores $v_r+_1, \ldots, v_n$ tales que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ sea una base de V .

Coordenadas de un vector respecto de una base:

Sea V (K) un espacio vectorial. Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base de V , entonces todo vector $x \in V$ admite una única expresión como combinación lineal de los vectores de B.

Coordenadas de un vector: Expresión única de dicho vector como combinación lineal de una base. Se anota $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ para la expresión $x \in V$, $x = x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$.

Vamos a poder trabajar con cualquier espacio de dimensión n como en K^n, ya que solo anotamos las coordenadas, las cuales son n-tuplas de elementos de K, por lo que es equivalente a trabajar en K^n.

Coordenadas y dependencia lineal:

Sea V (K) un espacio vectorial y B una base de V. Entonces un conjunto de n vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ en V es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de dichos vectores respecto de B tiene rango n.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, \dots, & y_n \\ z_1, & z_2, \dots, & z_n \end{pmatrix}$$

$v = (x, y, z)$

Rango $(A) = n \Rightarrow$ INDEPENDENCIA

Rango $(A) < n \Rightarrow$ DEPENDENCIA

Teorema de Rouché-Frobenius

Del sistema
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \longrightarrow x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Llamamos

Matriz del Sistema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Matriz Ampliada $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$

Un sistema es Compatible si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (A) es igual al rango de la matriz ampliada (A|B)

$\boxed{\text{S Compatible} \longrightarrow \text{rango } A = \text{rango } A^*}$

Esto nos permite discutir el sistema sin resolverlo $\longrightarrow$

- si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = $ nº incógnitas
- si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) <$ nº incógnitas
- si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*)$

Cambio de base:

Para pasar un vector x de B a B':

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n$$
$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n$$

- Expresamos los vectores de B' en base B.
- Sustituimos en x expresado en base B'
$$x = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n$$
- Igualamos para obtener:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Y

X P

$X = PY$

-

P^{-1} es la matriz de **cambio de base** ya que Y = P^{-1} X, siendo Y un vector en base B' y X en base B.

Subespacios vectoriales:

Definición: Sea V (K) un espacio vectorial y U un subconjunto no vacío de V . Diremos que U es un subespacio vectorial de V si se verifican las siguientes condiciones:

1. U es cerrado para la suma: $\forall\, u, v \in U, u + v \in U$.
2. U es cerrado para el producto por escalares: $\forall\, a \in K, \forall\, u \in U, au \in U$.
3. Un subespacio vectorial **siempre va a contener al 0**.

Subespacios impropios: En un espacio V(K), él mismo y el trivial.

Subespacio generado por S:

S es un subconjunto arbitrario

$$\mathcal{L}(S) = \{a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m \,/\, m \in \mathbb{N},\ a_i \in K, s_i \in S, i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Si W es otro subespacio, y S⊆W, entonces $\mathcal{L}(S) \subseteq$ W.

S es sistema de generadores de $\mathcal{L}(S)$.

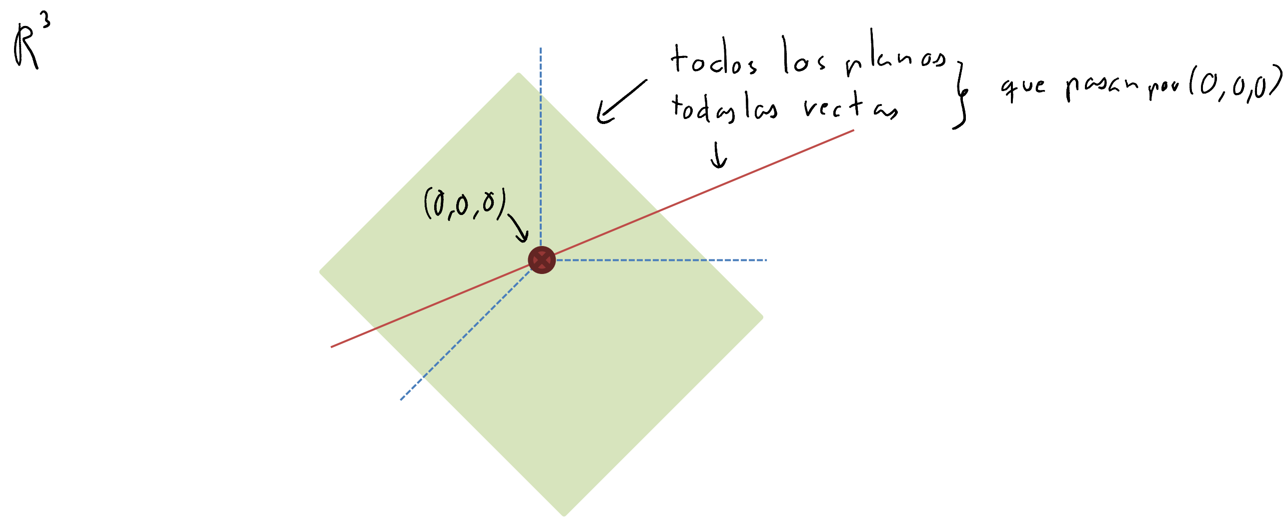
Dimensión entre espacios: Siendo U subespacio de V

$$dim_K\, U \leq dim_K\, V \qquad\qquad dim_K\, U = dim_K\, V \Leftrightarrow U = V$$

Ecuaciones cartesianas y paramétricas de un subespacio:

El <u>conjunto de soluciones</u> de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sobre K (AX=0), es un <u>subespacio vectorial de K^n</u>, y por tanto cada <u>solución</u> un <u>elemento</u> de K^n.

Cada subespacio de V (de dimensión finita) se puede considerar como conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.



Ecuaciones cartesianas y dimensión de un subespacio:

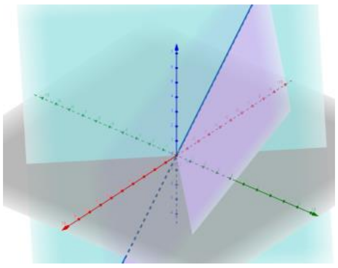
Sea V (K) un espacio vectorial con $\dim_K(V) = n$ y U un subespacio vectorial suyo con $\dim_K(U) = r$:

- La matriz de coeficientes tendrá rango n-r.
- Hay n-r ecuaciones.

Operaciones de subespacios:

Intersección: Sean U y W subespacios vectoriales del espacio vectorial V (K), U ∩W es siempre otro espacio vectorial.

Para la intersección debemos buscar las ecuaciones cartesianas que definan U⋂W, es decir, las condiciones que debe cumplir un vector para pertenecer a ambos.



Unión: En general, no tiene por que ser subespacio.

Suma de subespaicios: $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\} = \mathcal{L}(\mathrm{U} \cup \mathrm{W})$ Es el menor subespacio que contiene a U⋃W. Para obtenerlo, buscamos las bases de ambos subespaicos, quedándonos con los vectores linealmente independientes.

$$\sum_{i \in I} U_i = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

Suma directa de subespacios: Si para cada vector del espacio suma, la forma de expresarlo como suma de los vectores del subespacio es única**.** Es decir, si es una suma de espacios independientes.

Familia de subespacios independiente: Si es finita y

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \;\; U_i \cap \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{m} U_i \right) = \{0\}$$

Subespacio complementario (de U): Un subespacio W de V que verifica V = U ⨁ W.

U ∩ W = {0} (U y W son complementarios).

Fórmula de las dimensiones:

Si U y W son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V (K) de dimensión finita, se verifica la siguiente igualdad:

$$dimK(U) + dimK(W) = dimK(U + W) + dimK(U \cap W).$$

Espacio vectorial cociente:

Sea V (K) un espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V . Definimos en V la siguiente relación $\sim_U$: dados v, w ∈ V , diremos que v $\sim_U$ w si y solo si v − w ∈ U.

U es un ideal y $\sim_U$ una congruencia(¿)

Notamos las clases de equivalencia $\bar{v} = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$

La clase del 0 es U. $0 + U = \{0 + u \mid u \in U\}$ (*U = I = Ker(~U)*)

Conjunto cociente: $V/Ker(\sim_U) = V/U = \{x + U | x \in V\}$ es también un espacio vectorial, **el espacio vectorial cociente.**

- **Suma:** $(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$
- **Producto:** $a(v + U) = (av) + U$
- si V (K) es un espacio vectorial con dimensión finita n y U es un subespacio vectorial suyo con dimensión r, entonces $dimK(V/U) = n - r$