Primer-Parcial-Algebra-2020-2021-Mari...

aliciaam99

Álgebra I

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

TEST ÁLGEBRA || PARCIAL 1

Alicia Martínez

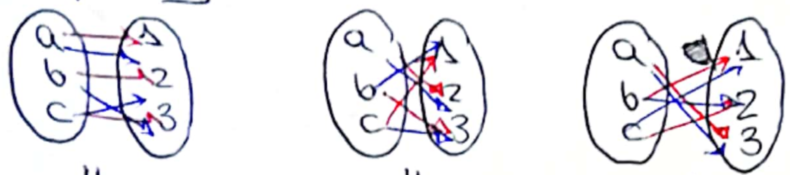
① . $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$

a) $\exists$ 3 ap. biy de X en Y

b) $\exists$ 9 " "

c) $\exists$ 6 " "

Resp: $\boxed{c)}$



$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\Rightarrow$ 6 aplicaciones biyectivas

② Sea $f: X \to Y$ aplicación, $A, B \in P(X) \Rightarrow$

a) $f_*(A) - f_*(B) \subseteq f_*(A - B)$

b) $f_*(A-B) = f_*(A) - f_*(B)$

c) $f_*(A-B) \subseteq f_*(A) - f_*(B)$

Resp $\boxed{a)}$

sea $y \in f_*(A) - f_*(B) \Rightarrow \begin{cases} y \in f_*(A) \Rightarrow \exists a \in A \text{ tq } y = f(a) \\ y \notin f_*(B) \Rightarrow \nexists b \in B \text{ tq } f(b) = y \end{cases}$

$\Rightarrow a \in A - B \Rightarrow$ como $y = f(a) \in f_*(A-B)$

Esto en general, ocurre siempre.

PERO $\supseteq$ NO.

En general, $f_*(A-B) \not\subseteq f_*(A) - f_*(B)$

Ejemplo: sea $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ $f(1) = a$
$f(2) = a$
$f(3) = b$

con $A = \{1, 2\}$
$B = \{2\}$

$\Rightarrow A - B = \{1\}$ $\Rightarrow f_*(A-B) = \{a\}$

$\left.\begin{array}{l} f_*(A) = \{a\} \\ f_*(B) = \{a\} \end{array}\right] f_*(A) - f_*(B) = \emptyset$

$\Rightarrow f_*(A-B) \not\subseteq f_*(A) - f_*(B)$

* RECORDATORIO *

$f_*(A) = \{f(a) : a \in A\}$

↳ $y \in Y$, $y \in f_*(A) \Leftrightarrow \exists a \in A$ tq $y = f(a)$

$f^*(B) = \{x \in X$ tq $f(x) \in B\}$

↳ $x \in X$, $x \in f^*(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

③ X cjto con 4 elementos, $S \subset X$ subcjto suyo con 2 elementos. Sea $f: P(X) \to P(X)$ la aplicación definida por $f(Y) = Y \cap S$ para $Y \in P(X)$.
El cardinal del cjto cociente $P(X)/R_f$ es:

a) 6
b) 4
c) 2

Resp: $\boxed{b)}$

Tomamos el ejemplo $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{1, 2\} \subseteq X$.

$f: P(X) \to P(X)$ $\quad$ R_f rel de equiv. en $P(X)$
$f(Y) = Y \cap S$

$Y_1 R_f Y_2 \Leftrightarrow f(Y_1) = f(Y_2) \Leftrightarrow Y_1 \cap S = Y_2 \cap S$

$P(X)/R_f$

$P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$

$\# P(X) = 2^4 = 16$.

Con $\Phi = \{Y \in P(X) : Y R_f \emptyset\} = \{Y \in P(X) : Y \cap S = \emptyset \cap S = \emptyset\}$
$= \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$

$\overline{X} = \{y \in P(X) : y R_g \overline{X}\} = \{y \in P(X) : y \cap S = X \cap S = 3\}$

$= \{X, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$

$\overline{\{1\}} = \{y \in P(X) : y R_g \{1\}\} = \{y \in P(X) : y \cap S = \{1\} \cap S = \{1\}\}$

$= \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}\}$

$\overline{\{2\}} = \{y \in P(X) : y R_g \{2\}\} = \{y \in P(X) : y \cap S = \{2\} \cap S = \{2\}\}$

$= \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}\}$

$\Rightarrow \overline{\emptyset} = \overline{\{3\}} = \overline{\{4\}} = \overline{\{3,4\}}$

$\overline{X} = \vdots$

$X / R_g \qquad b \in \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

Luego hay 4 clases de equiv.

④ IN cjto naturales y $g : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ aplicación dada por $g(n) = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n\} \Rightarrow$.

a) g inyectiva

b) g biyectiva

c) g sobreyectiva.

Resp: $\boxed{a)}$

Sea n_1, n_2 tq $g(n_1) = g(n_2)$, es decir,

$\{x \in \underset{\hat{n}}{\mathbb{N}} \mid x \geq n_1\} = \{x \in \underset{n_2}{\mathbb{N}} \mid x \geq n_2\}$

$\left.\begin{array}{l} n_1 \geq n_1 \\ n_2 \geq n_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 \geq n_2 \\ n_2 \geq n_1 \end{array}\right\} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow g$ inyectiva

Pero g no es sobreyectiva

p. ej: $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tq $g(n) = \{1,2\}$

Luego tp biyectiva.

5) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 3x + 1$ con R_f la rel de equiv. en $\mathbb{R}$ definida por la aplicación.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 2$, sea $\bar{a}$ su clase de equivalencia.

$\Rightarrow$ a) $\bar{a}$ tiene 2 elementos

b) $\bar{a}$ " 3 "

c) $\bar{a}$ " ∞ elementos

Resp: $\boxed{a)}$

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x R_f a\} = \{x \in \mathbb{R} / \ f(a) = f(x)\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 3x + 1 = a^2 - 3a + 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 3x - a^2 + 3a = 0\}$$

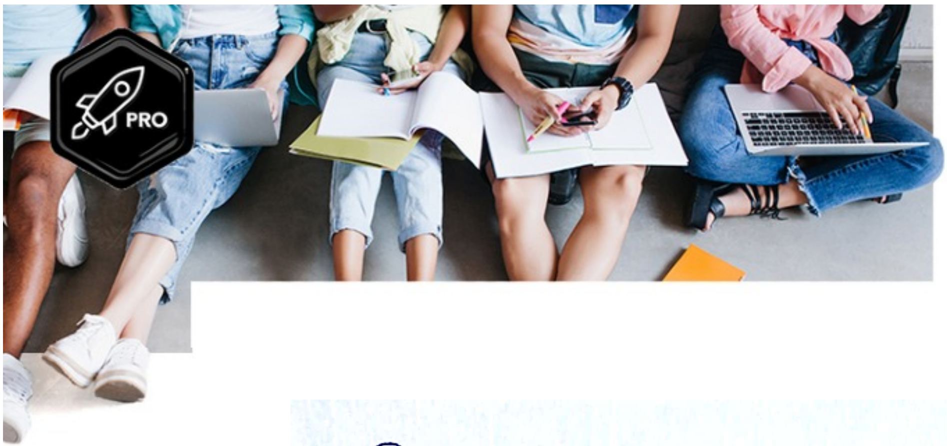
$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-a^2 + 3a)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a^2 - 12a}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{(2a-3)^2}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + 2a - 3}{2} = a \\ x_2 = \dfrac{3 - (2a-3)}{2} = 3 - a \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{a} = \{a, 3-a\}$.

Como $a \geq 2 \Rightarrow |\bar{a}| = 2$.

pues para que $a = 3 - a \Leftrightarrow a = 3/2 \not\geq 2$.



6) A, B subgrupos de X con $|A| = n$, $|B| = m \Rightarrow$

a) $|A \cap B| = m - n$

b) $|A \cap B| = n - m$

c) $|A \cup B| + |A \cap B| = n + m$

Resp $\boxed{c)}$ Es claro que si $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$\Rightarrow |A \cup B| + |A \cap B| = n + m$.

7) A, B subgrupos de X y $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow$

a) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

b) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A \neq B$

c) $A \Delta B = X \Leftrightarrow A = B$

Resp $\boxed{a)}$

Si $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset$ o $B - A = \emptyset$

pero $A - B = A \cap C(B) \Rightarrow A = \emptyset \wedge C(B) = \emptyset$

$B - A = B \cap C(A) \Rightarrow B = \emptyset \wedge C(A) = \emptyset$

$\Rightarrow A = B$

8) Sea el anillo $\mathbb{Z}_{10}$ y $U(\mathbb{Z}_{10})$ de unidades $\Rightarrow$

a) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 9\}$

b) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 5\}$

c) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$

Resp: $\boxed{c)}$ Profesora: por la tabla.

* TRUCO *

φ de Euler: $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p_i | n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

$\varphi(10) = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4 =$ nº elementos de $U(\mathbb{Z}_{10}) \Rightarrow \boxed{c)}$

$10 = 2 \cdot 5$

⑨ $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_7$, ¿cuál es verdadero?

a) $grd(p(x)q(x))$ siempre $= grd(p(x)) + grd(q(x))$

b) $\exists$ polin. no nulos para los que $grd(p(x)q(x)) >$ $grd(p(x)) + grd(q(x))$

c) $\exists$ polin. no nulos tq $grd(p(x)q(x)) < grd(p(x))$ $+ grd(q(x))$.

Resp: $\boxed{a)}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad a_n \neq 0$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \quad b_m \neq 0$

$p(x)q(x) = a_0 b_0 + \dots + a_n b_m x^{n+m}$

En $\mathbb{Z}_7$ el producto de elementos $\neq 0$ es siempre $\neq 0$.
(por ser un Dom. de Integridad)

Como $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0 \Rightarrow a_n b_m \neq 0$

$\Rightarrow$ Respuesta a).

⑩ En un anillo A, $a \in A$ es idempotente si $a^2 = a \Rightarrow$

a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ tiene solo 2 elementos idempotentes

b) $\mathbb{Z}_6$ " " " " "

c) $\mathbb{Z}$ " " " " "

Resp: $\boxed{c)}$

en $\mathbb{Z}$, $a^2 = a \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 0 \end{array}}$ solo 2. $\Rightarrow$ c)

Descontamos a) y b)

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ tiene $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$ $\Rightarrow$ más de 2. $\Rightarrow \cancel{a)}$
(y más)

$\mathbb{Z}_6$ sería $0, 1, 3$ pues $3 \cdot 3 = 9$ en $\mathbb{Z}_6 = 3 = 3$ ✓. $\Rightarrow \cancel{b)}$

(11) ¿ Cual es verdadera?

a) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ tiene ∞ unidades.

b) $\mathbb{Z}_7$ tiene 4 unidades.

c) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tiene 2 unidades.

Resp.: $\boxed{a)}$

En $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, $(a,1)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ $a\neq 0$ es unidad en $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ con inverso $(\frac{1}{a},1)$ pues $(a,1)\cdot(\frac{1}{a},1)=(1,1)$

$\Rightarrow \{(a,1) \,/\, a\in\mathbb{Q}\}\subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z})$

~~b)~~ Falsa pues $\mathbb{Z}_7$ tiene 6 unidades

De nuevo *TRUCO* $\varphi(7)=7(1-\frac{1}{7})=7\cdot\frac{6}{7}=6$.

~~c)~~ Falsa.

$\mathcal{U}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\{(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)\}$ son 4.

en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(a,b)\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \exists (a',b')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tq $(a,b)(a',b')=(1,1)$
$\quad = (aa',bb')$

$\Rightarrow aa'=1 \Rightarrow a=\pm 1 \wedge a'=\pm 1$
$bb'=1 \Rightarrow b=\pm 1 \quad b'=\pm 1$

(12) Un subanillo A de un anillo B se dice propio si $\{0\}\subsetneq A\subsetneq B$. Es correcto:

a) El conjunto $A=\{5k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ es subanillo propio de $\mathbb{Z}$.

b) El anillo $\mathbb{Z}$ no tiene subanillos propios.

c) El cuerpo $\mathbb{Q}$ no tiene subanillos propios

Resp: $\boxed{b)}$ ~~a)~~ Falsa pues no es subanillo, no contiene al 1.
~~c)~~ Falsa pues $\mathbb{Q}$ tiene a $\mathbb{Z}$ de subanillo propio

Es b) pues: supongamos A subanillo de $\mathbb{Z}$ no trivial
$A\neq\{0\}$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow 1 \in A$

Como A cerrado para sumas, $\forall n \geq 1$:

$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} \in A$

Propiedades de subanillo

Como A es subanillo $\Rightarrow 0 \in A$

$\{n \mid n \geq 0\} \subseteq A$

Y por ser A subanillo; A es cerrado para opuestos

$\Rightarrow A = \mathbb{Z} \Rightarrow$ A no tiene sub propios.

(13) $a_1 = 2120$ $a_2 = 4825$ $b = 19 \Rightarrow$

El resto de $(-a_1)a_2 : b$ es:

a) 8

b) 18

c) 11

Resp: $\boxed{c)}$

* Otra forma: $R(4825) \cdot R(-2120) =$

$= R(4825;19)\, R(-2120;19) = R(965)\, R(5) \cdot 8 =$

$= R(193) \cdot R(5)\, R(5) \cdot 8 = [R(\underset{0}{190}) + R(3)] \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8$

$= \{190 : 19 = 10$ resto $0\} = R(3) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 = R(24;19) \cdot R(25;19) = 5 \cdot 6 = R(30;19) = \underline{\underline{11}}$

Valía usar calculadora $\Rightarrow$ Easy.

Si no valiese: $4825 \cdot 2120 = 10229000 \,\underline{|19}$

072 ... 08 $\quad$ 538369

$\Rightarrow a = bq + r \begin{cases} q = 538369 \\ r = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow -a = -bq - r + b - b = b(-q-1) + b - r \Rightarrow q' = -q-1 = -538369$

$r' = b - r = 19 - 8 = \boxed{11}$

(14) Sea $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Para cada $n \geq 2$, sea $g_n : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ dada por $g_n(x) = (x^2 + 2x + 1)^n \Rightarrow$

a) $f \neq g_{3k}$ para todo $k \geq 1$

b) $\exists n \geq 2$ para el que $f \neq g_n$

c) $\exists n \geq 2$ para el que $f = g_n$

Resp: $\boxed{c)}$ Por inducción:

vemos que $f(0) = 1$ $f(2) = 0$

$f(1) = 1$

Escaneado con CamScanner

sea $n=1 \Rightarrow f(x) = x^2+2x+1 = (x^2+2x+1)^1 = g(x)$ ✓

sup. cierto para n: $(x^2+2x+1) = (x^2+2x+1)^n$

veamos $n+1$:

$f(x) = (x^2+2x+1) = (x^2+2x+1)^{n+1} = (x^2+2x+1)^n \cdot (x^2+2x+1)$

hipótesis de inducción $\curvearrowright = (x^2+2x+1) \cdot (x^2+2x+1) = (x^2+2x+1)^2$

pero en $\mathbb{Z}_3$:
$$\left.\begin{aligned} (0^2+2\cdot 0+1)^2 &= 1^2 = 1 = f(0) \\ (1^2+2\cdot 1+1)^2 &= 1^2 = 1 = f(1) \\ (2^2+2\cdot 2+1)^2 &= 3^2 = 0 = f(2) \end{aligned}\right\} \text{ luego son iguales ✓}$$

(15) En $\mathbb{Z}_5$, la suma de 4 consigo mismo 48 veces es:

a) 2
b) 1
c) 3

Resp: $\boxed{a)}$ $4 \cdot 48 = R(4\cdot 48) = R(4)\cdot R(48; \overset{n}{5}) = 4\cdot 3 =$
$= R(12;5) = \underline{2}$

(16) Sea R rel de equiv. en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/R$ el cjto cociente

$\Rightarrow$ a) $\mathbb{Z}/R \subseteq \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z}/R \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

c) $\mathbb{Z}/R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

Resp: $\boxed{c)}$