Tema 12: Continuidad.

Ej. 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ¿Continuidad?

f continua en a sii $\left[\{a_n\}\to a \Rightarrow \{f(a_n)\}\to f(a)\right]$

Dem

f cont. en a, $\{x_n\}\to a$, $\{x_n\}\subset\mathbb{Q}$, $f(x_n)=x_n\longrightarrow a$

$\{y_n\}\longrightarrow a$, $\{y_n\}\not\subset\mathbb{Q}$, $f(y_n)=1-y_n\longrightarrow 1-a$

$\Big\}$ $a=1-a$, $2a=1$, $a=\frac{1}{2}$

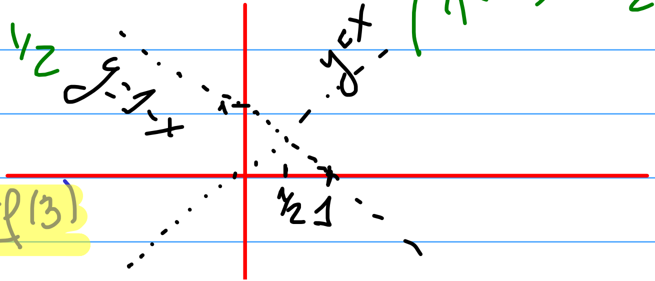
f es continua en $1/2$,

- Si $\{x_n\}\to 1/2$, $\{x_n\}\subset\mathbb{Q}$, $f(x_n)=x_n\longrightarrow 1/2=f(\frac{1}{2})$
- Si $\{y_n\}\to 1/2$, $\{y_n\}\not\subset\mathbb{Q}$, $f(y_n)=1-y_n\to 1-1/2=1/2=f(1/2)$
- $\{z_n\}$, $z_n\in\mathbb{R}$; $\{z_{\sigma(n)}\}\to 1/2$, $\in\mathbb{Q}$; $\{z_{\varphi(n)}\}\to 1/2$, $\notin\mathbb{Q}$ . . . . $\Big\{$ $\{f(z_n)\}\to\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$

Si $x\neq\frac{1}{2}$, f no es continua en x.

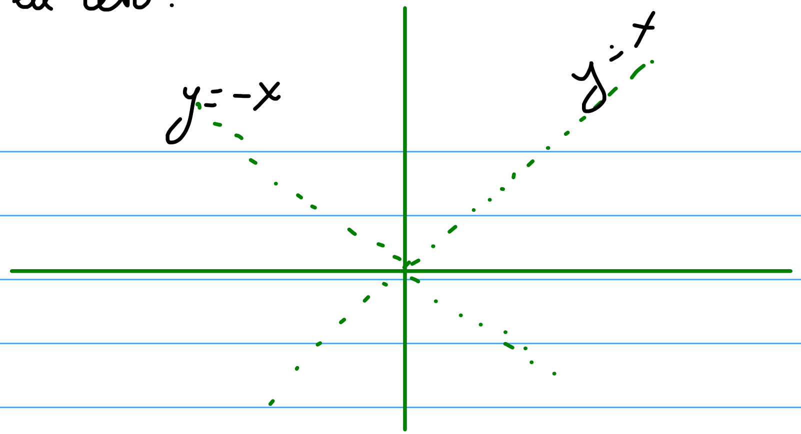
f no es continua en 3.

$\{3-\frac{e}{n}\}\to 3$ $\quad f(3-\frac{e}{n})=1-3+\frac{e}{n}=-2+\frac{e}{n}\to -2\neq 3=f(3)$



Ej. 2 Ejemplo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sólo sea continua en cero.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



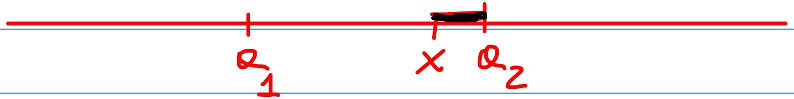
Ej. 4 $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ $\quad f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \min\{|x-a| : a \in A\}$

Probar que $|f(x)-f(y)| \le |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$|x-a| = dist(x,a)$

$A = \{a_1, a_2\}$



$f(x) = |x - a_2|$

$a \in A \quad f(a) = 0$

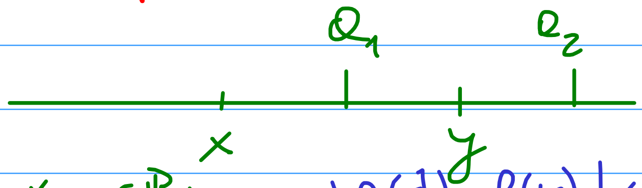
Dem

$\min\{|x-a| : a\in A\} = f(x) \le |x-a| = |x-y+y-a| \le |x-y| + |y-a|$

$a \in A$

$f(x) - |x-y| \le |y-a| \quad \forall a \in A$

$f(x) - |x-y| \le \min\{|y-a| : a \in A\} = f(y)$



$$\left.\begin{array}{l} f(x)-f(y) \le |x-y| \\ -(f(x)-f(y)) \le |y-x| = |x-y| \end{array}\right\} \underline{|f(x)-f(y)| \le |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}} \iff |f(\star)-f(\square)| \le |\star - \square|$$

Deducir que f es continua. Si $\{x_n\} \to x$ ¿$f(x_n) \to f(x)$?

$\underset{\downarrow\, 0}{0} \le |f(x_n) - f(x)| \le \underset{\downarrow\, 0}{|x_n - x|}$, luego $|f(x_n) - f(x)| \to 0$, o sea

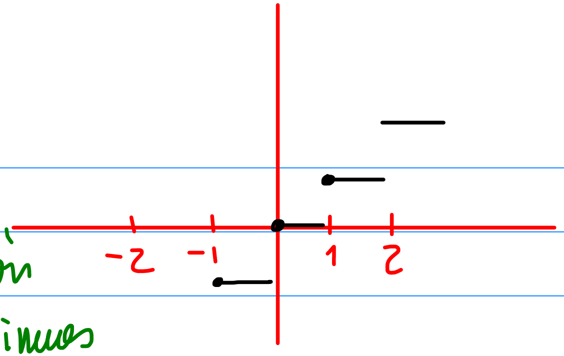
$f(x_n) \to f(x)$ ∎

Ej 5 c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=E(x^2)$ ¿Continuidad?

$x \longmapsto x^2 \overset{E}{\longmapsto} E(x^2)$

$1'5 \longmapsto 1'5^2 \longmapsto E(1'5^2)=E(2'25)=2$

Cont. Continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$



Luego f será continua $\{x : x^2\notin\mathbb{Z}\}$ por ser composición de func. continuas

¿Y si $x^2\in\mathbb{Z}$?

Ej: $x=\sqrt{2}$ $x^2=2$

$\{\sqrt{2}-\frac{1}{n}\} \longrightarrow \sqrt{2}$ $f\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)=E\left(\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)^2\right)=E\left(2-\frac{2\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\longrightarrow 1 \neq 2=E(\sqrt{2}^2)=f(\sqrt{2})$

$2 \longleftarrow 2-\frac{2\sqrt{n}}{n}+\frac{1}{n^2}=2-\frac{2\sqrt{n}\,n-1}{n^2}<2$

$1<$

$n\geq m$

Luego f no es continua en $\sqrt{2}$

En general, sea $x\in\mathbb{R}$ / $x^2\in\mathbb{Z}$

$\{x-\frac{1}{n}\}\longrightarrow x$ $x^2 \leftarrow \left(x-\frac{1}{n}\right)^2 < x^2$ $f\left(x-\frac{1}{n}\right)=E\left(\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\right)=x^2-1 \longrightarrow x^2-1 < x^2=E(x^2)=f(x)$

Por tanto, $\exists m /$ $\mathbb{Z}\ni x^2-1<\left(x-\frac{1}{n}\right)^2<x^2\in\mathbb{Z}$

$E(x^2)$ x^2

$E(x^2) < x^2$ $\mathbb{Z}$

Ej. 3 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas verificando que $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$

Probar que $f = g$

Decimos que f es continua en $a \in \mathrm{dom}(f)$ sii $\left[\text{Dado } \{a_n\} \to a,\ a_n \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(a)\right]$

$$f(a) = \lim_{a_n \to a} f(a_n)$$

Dem $\forall x \in \mathbb{Q}\quad f(x) = g(x)$

¿$f = g$? No basta probar que $f(y) = g(y)\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

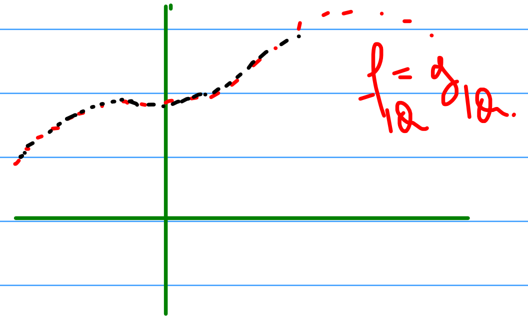
Tomemos $\{a_n\} \subset \mathbb{Q} \to y$ (lo podemos asegurar por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$)

Por ser f continua $f(y) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} g(a_n) = g(y)$

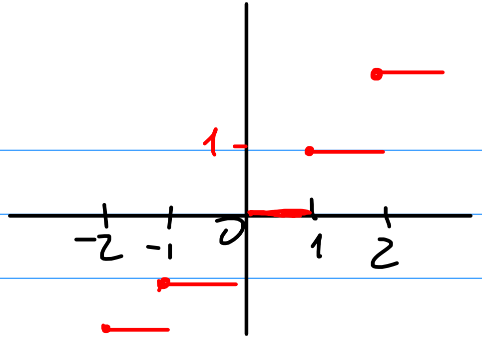
$a_n \in \mathbb{Q}$

$f(a_n) = g(a_n)$

Por ser g continua



Ej. 5b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ $\quad$ Estudiar su continuidad



$$0\neq x \xmapsto{\text{Cont.}} \frac{1}{x} \xmapsto[\text{Cont. si } \frac{1}{x}\notin\mathbb{Z}]{E(\cdot)} E\left(\frac{1}{x}\right) \xmapsto{\text{Cont.}} xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x=0 \xmapsto[g]{} 1$$

Si $x\neq 0$, $\frac{1}{x}\notin\mathbb{Z}$, g es continua por ser composición de func. continuas.

En $\mathbb{R}\setminus\left[\{0\}\cup\left\{\pm\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}\right]$

Si $x=0$ $\quad \{x_n\}\to 0$ $\quad$ ¿$g(x_n)\to g(0)=1$?

si $x_n\neq 0$ $\quad E\left(\frac{1}{x_n}\right)\le\frac{1}{x_n}<E\left(\frac{1}{x_n}\right)+1$ $\quad |x_n|\left|\frac{1}{x_n}-E\left(\frac{1}{x_n}\right)\right|\le 1.|x_n|$ o sea

$$0\le|1-g(x_n)|=\left|1-x_nE\left(\frac{1}{x_n}\right)\right|\le|x_n|\longrightarrow 0$$

Luego $|1-g(x_n)|\longrightarrow 0$ o sea $g(x_n)\to 1=g(0)$

O sea g es continua en $x=0$

Si $0\neq x$ / $\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$

Entonces $x < x+\frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$, $\quad x+\frac{1}{n}\longrightarrow x$

$$\frac{1}{x+\frac{1}{n}} < \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{x}$$

Luego a partir de un índice $\quad \frac{1}{x}-1\in\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}\ni\frac{1}{x}-1\leq\frac{1}{x+\frac{1}{n}}<\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{x+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

$$E\left(\frac{1}{x+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{x}-1$$

$$g\left(x+\frac{1}{n}\right)=\left(x+\frac{1}{n}\right)E\left(\frac{1}{x+\frac{1}{n}}\right)=\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)\longrightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-x \neq g(x)$$

$1-x\neq 1$ $\Big\}$ Luego g es discontinua en x

$$g(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right)=x\cdot\frac{1}{x}=1$$

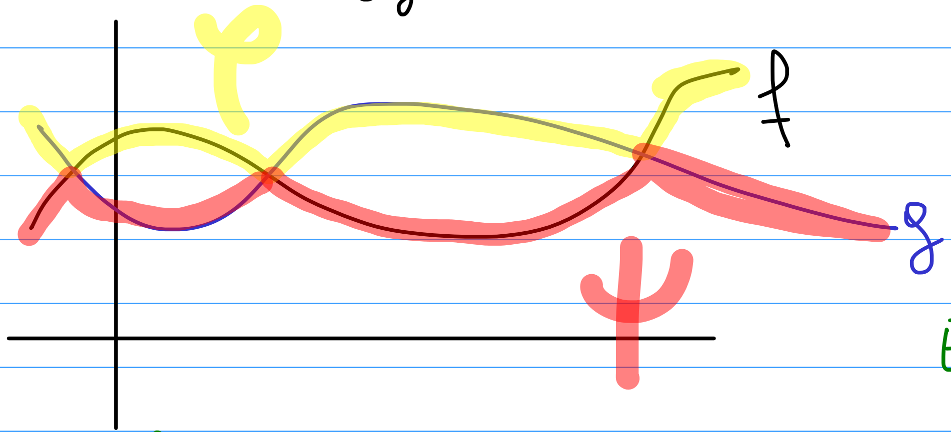
En resumen g es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$. ∎

Ej. 6 Dados $f, g : A \to \mathbb{R}$, sean

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Probar que si f y g son continuas en $B \subset A$, entonces también φ, ψ son continuas en B.

Ej.



Demostración: $b \in B$

Si $\{x_n\} \to b$, entonces

¿ $\varphi(x_n) = \max\{f(x_n), g(x_n)\} \longrightarrow \varphi(b) = \max\{f(b), g(b)\}$?

¿ $\psi \quad = \min \longrightarrow \psi \quad = \min$?

En esencia: $\max\{f_n, g_n\} \longrightarrow \max\{f, g\}$, $\quad f_n \downarrow f, \ g_n \downarrow g$

$\min\{\quad\} \longrightarrow \min\{f, g\}$

Por ser f continua en b: $\{f(x_n)\} \to f(b)$

g — — $\{g(x_n)\} \to g(b)$

Probemos que $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ $\quad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

Dem $\quad \max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x+y \quad$ (Obvio si $x=y$)

$\quad \max\{x,y\} - \min\{x,y\} = |x-y| \quad$ (")

Sumo $\quad 2\max\{x,y\} = x+y+|x-y| \quad \forall (x,y)$ $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Resto $\quad 2\min\{x,y\} = x+y-|x-y| \quad \forall (x,y)$ $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

Con estas expresiones: Si $\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \to x \\ \{y_n\} \to y\end{array}\right\}$ $\max\{x_n,y_n\} = \frac{1}{2}(x_n+y_n+|x_n-y_n|) \to \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \max\{x,y\}$

$\min\{x_n,y_n\} = \frac{1}{2}(x_n+y_n-|x_n-y_n|) \to \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \min\{x,y\}$

■