Métodos Numéricos I

Tema 4:Aproximación

Miguel A. Piñar
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

19 de mayo de 2022

Contenidos

Utilidad de la aproximación

A veces, los datos de un cierto problema presentan errores de medida que hacen que los datos se presenten en forma de nube de puntos con una forma determinada (recta, parábola, exponencial, sinusoidal,...), pero no están sobre ella.

La interpolación en este caso pierde sentido, pues una función que pase por todos los datos del problema no siempre reproduce la forma exacta de la función original.

Utilidad de la aproximación

Problema de aproximación

Dados N puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$, el problema de aproximar (ajustar) dichos puntos consiste en encontrar una función $g(x)$, con unas ciertas condiciones, que esté lo más cerca posible de los puntos.

Esto es, se busca una función $g(x)$ que minimice la distancia a los puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

Utilidad de la aproximación

Problema de aproximación

Dados N puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$, el problema de aproximar (ajustar) dichos puntos consiste en encontrar una función $g(x)$, con unas ciertas condiciones, que esté lo más cerca posible de los puntos.

Esto es, se busca una función $g(x)$ que minimice la distancia a los puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

Gráficamente, esta condición significa que la curva que representa a $g(x)$ está lo más cerca posible de los puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$.

Utilidad de la aproximación

Buscamos funciones $g(x)$ que posean ciertas propiedades:

- fácil de implementar,
- fácil de evaluar,
- simple de calcular,
- suficientemente regular,
- ...

Utilidad de la aproximación

Buscamos funciones $g(x)$ que posean ciertas propiedades:

- fácil de implementar,
- fácil de evaluar,
- simple de calcular,
- suficientemente regular,
- $\dots$

¿ Cómo se formalizan los conceptos de aproximación, distancia, $\dots$?

Producto escalar

Sea V un espacio vectorial. Un producto escalar es una función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longrightarrow \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

(i) $\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V,$
(ii) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad \forall v, w \in V,$
(iii) $\langle \alpha v + \beta w, z \rangle = \alpha \langle v, z \rangle + \beta \langle w, z \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w, z \in V,$
(iv) $\langle v, v \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0.$

Un espacio vectorial V en el que se ha definido un producto escalar se llama espacio con producto escalar.

Definición

Todo producto escalar induce una norma, definida en la forma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Definición

Todo producto escalar induce una norma, definida en la forma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Todo espacio con producto escalar es normado, y, por tanto es métrico, con la distancia

$$d(v, w) := \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w\rangle}.$$

Mejor aproximación en U

Sea V un espacio con producto escalar y $U \subset V$ un subconjunto de V. Sea $f \in V$. Se dice que $u \in U$ es una mejor aproximación de f en U si u minimiza la distancia, esto es,

$$d(f,u) = d(f,U) = \text{ínf}\{d(f,w)/w \in U\}.$$

Cuestiones

- Existencia de mejor aproximación, (no siempre existe)
- Unicidad, (si existe, no siempre es única)

Mejor aproximación por mínimos cuadrados

Sea V un espacio con producto escalar y $U \subset V$ un subconjunto de V. En este caso,

$$d(f,w) = \|f-w\| = \sqrt{\langle f-w, f-w\rangle}.$$

Para calcular la mejor aproximación, se quiere minimizar, si es posible,

$$\{d(f,w)/w \in U\} = \{\sqrt{\langle f-w, f-w\rangle}/w \in U\}.$$

Para evitar el uso de raíces cuadradas, la expresión anterior es equivalente a minimizar

$$\{d(f,w)^2/w \in U\} = \{\langle f-w, f-w\rangle/w \in U\}.$$

De este modo, el problema se llama en este caso, problema de aproximación por mínimos cuadrados.

Mejor aproximación por mínimos cuadrados en subespacios de dimensión finita

Ortogonalidad

Se dice que $v, w \in V$ son ortogonales si

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Mejor aproximación por mínimos cuadrados en subespacios de dimensión finita

Ortogonalidad

Se dice que $v, w \in V$ son ortogonales si

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Teorema

Sea V un espacio con producto escalar, y U un subespacio de V. Dada $f \in V$, un elemento $u \in U$ es mejor aproximación de f en U si y sólo si

$$\langle f - u, w \rangle = 0, \quad \forall w \in U.$$

Existencia y unicidad de la mejor aproximación

Teorema

Sea V un espacio con producto escalar, y U un subespacio de dimensión finita, entoces la mejor aproximación existe y es única.

Teorema

Sea V un espacio con producto escalar, y U un subespacio de dimensión finita, entoces la mejor aproximación existe y es única.

Buscamos un elemento $u \in U = L\langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \rangle$, la envolvente lineal. De este modo,

$$u = a_0\,\varphi_0 + a_1\,\varphi_1 + \ldots + a_m\,\varphi_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k,$$

y debemos hallar los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Teorema

Sea V un espacio con producto escalar, y U un subespacio de dimensión finita, entoces la mejor aproximación existe y es única.

Buscamos un elemento $u \in U = L\langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \rangle$, la envolvente lineal. De este modo,

$$u = a_0\,\varphi_0 + a_1\,\varphi_1 + \ldots + a_m\,\varphi_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k,$$

y debemos hallar los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_m$.

$$0 = \langle f - u, w \rangle = \langle f, w \rangle - \langle u, w \rangle, \quad \forall w \in U.$$

De este modo, se tiene

$$\langle \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k, \varphi_i \rangle = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Cálculo de la mejor aproximación

La expresión anterior es un sistema de m+1 ecuaciones

$$\begin{array}{rcl}
a_0\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle + a_1\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle + \ldots + a_m\langle\varphi_m,\varphi_0\rangle & = & \langle f,\varphi_0\rangle \\
a_0\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle + a_1\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle + \ldots + a_m\langle\varphi_m,\varphi_1\rangle & = & \langle f,\varphi_1\rangle \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & & \ldots \\
a_0\langle\varphi_0,\varphi_m\rangle + a_1\langle\varphi_1,\varphi_m\rangle + \ldots + a_m\langle\varphi_m,\varphi_m\rangle & = & \langle f,\varphi_m\rangle
\end{array}$$

con incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

La matriz de coeficientes del sistema anterior

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_m, \varphi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_0, \varphi_m \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_m \rangle & \cdots & \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{pmatrix}$$

se denomina matriz de Gram y es simétrica y definida positiva, y, por tanto, el sistema tiene solución única.

Ejemplo 1

Calcular la mejor aproximación de la función x^3 en $\mathcal{P}_1$ utilizando el producto escalar

$$\langle v, w\rangle = \int_{-1}^{1} v(x)w(x)dx.$$

En este caso, $U = \mathcal{P}_1$, cuya dimensión es finita. Una base para este espacio puede ser $\{1, x\}$, esto es, $\varphi_0 = 1$, y $\varphi_1 = x$. La mejor aproximación será $u = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 = a_0 + a_1 x$, donde a_0 y a_1 son la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1\rangle a_0 + \langle x, 1\rangle a_1 &= \langle x^3, 1\rangle \\ \langle 1, x\rangle a_0 + \langle x, x\rangle a_1 &= \langle x^3, x\rangle \end{aligned}$$

Funciones peso

- Estudiar la distancia inducida por el “producto escalar"

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) g(x_i),$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números reales y $\omega_i > 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Estudiar la distancia inducida por el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \omega(x)\, dx,$$

donde $[a, b]$ es un intervalo real y ω es una función integrable verificando $\omega(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Ejemplo 1

Los productos escalares son:

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2, \quad \langle x,1\rangle = \langle x,1\rangle = \langle x^3,1\rangle = 0,$$
$$\langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \langle x^3,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

De este modo, el sistema queda

$$\begin{array}{rcl} 2a_0 & = & 0 \\ \frac{2}{3}a_1 & = & \frac{2}{5} \end{array}$$

cuya solución es $a_0 = 0$ y $a_1 = 3/5$. La recta de mínimos cuadrados es $u = 3/5x$.

Ejemplo 2

Calcular la recta que mejor aproxima por mínimos cuadrados los datos $(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)$
En este caso, una base de $U = \mathcal{P}_1$ es $\{1, x\}$, y el producto escalar es

$$\langle v, w\rangle = v(1)w(1) + v(2)w(2) + v(3)w(3) + v(4)w(4) + v(5)w(5).$$

No tenemos la expresión analítica de la función $f(x)$ que queremos aproximar. Sin embargo, conocemos los valores de esta función en ciertos puntos: $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 4$.

Ejemplo 2

La mejor aproximación será $u = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 = a_0 + a_1 x$, donde a_0 y a_1 son la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \langle 1,1\rangle a_0 + \langle x,1\rangle a_1 &= \langle f,1\rangle \\ \langle 1,x\rangle a_0 + \langle x,x\rangle a_1 &= \langle f,x\rangle \end{aligned}$$

Los productos escalares son:

$$\begin{aligned} &\langle 1,1\rangle = 5, \\ &\langle x,1\rangle = \langle x,1\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 15, \\ &\langle x,x\rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot 5 = 55, \\ &\langle f,1\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 10, \\ &\langle f,x\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 = 40. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

De este modo, el sistema queda

$$\begin{aligned} 5a_0 + 15a_1 &= 10, \\ 15a_0 + 55a_1 &= 40, \end{aligned}$$

cuya solución es $a_0 = -1$ y $a_1 = 1$. La recta de mínimos cuadrados es $u = -1 + x$.

Tipos de aproximación por mínimos cuadrados

Atendiendo al tipo de producto escalar

- Aproximación por mínimos cuadrados continua

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

  donde $w(x)$ es una función peso: $w(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

- Aproximación por mínimos cuadrados discreta

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)w(x_i),$$

  donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son nodos fijos, y $w_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, son los pesos.

Bases ortogonales

Si la base del subespacio U es ortogonal, esto es,

$$\langle \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle = 0, \qquad i \neq j,$$

el sistema de ecuaciones se convierte en diagonal:

$$\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k \rangle a_k = \langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Por tanto

$$a_k = \frac{\langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k \rangle} \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

y la mejor aproximación se calcula en la forma

$$u = \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k \rangle} \tilde{\varphi}_k.$$

Suma de Fourier

A la expresión

$$u = \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k \rangle} \, \tilde{\varphi}_k.$$

se le llama m-ésima suma de Fourier de f asociada a la base ortogonal $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m\}$.

A la cantidad

$$a_k = \frac{\langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k \rangle} \qquad k = 0, 1, \dots, m.$$

se le denomina k-ésimo coeficiente de Fourier de f asociado a la base ortogonal $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m\}$.

Algoritmo de Gram–Schmidt

Si $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ es una base dada de U, es posible obtener una base ortogonal $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_m\}$ en la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 &= \varphi_0 \\ \tilde{\varphi}_k &= \varphi_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle \varphi_k, \tilde{\varphi}_j \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_j \rangle} \tilde{\varphi}_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Consecuencia: Las bases ortogonales existen siempre.

Polinomios ortogonales

Dado un producto escalar (continuo o discreto), $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una familia de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) si verifica:

(i) grado $P_n = n, \quad n \geq 0$,

(ii) $\langle P_n, P_m \rangle = 0, \quad n \neq m$.

De este modo, $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ es una base de $\mathbb{P}_m, \quad m \geq 0$.

Polinomios ortogonales

Dado un producto escalar (continuo o discreto), $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una familia de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) si verifica:

(i) grado $P_n = n, \quad n \geq 0$,

(ii) $\langle P_n, P_m \rangle = 0, \quad n \neq m$.

De este modo, $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ es una base de $\mathbb{P}_m, \quad m \geq 0$.

Una sucesión de polinomios ortogonales mónica (coeficiente lider 1) puede obtenerse aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{P}_m$

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$$

Polinomios ortogonales

Dado un producto escalar (continuo o discreto), $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una familia de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ se dice que es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) si verifica:

(i) grado $P_n = n, \quad n \geq 0$,

(ii) $\langle P_n, P_m \rangle = 0, \quad n \neq m$.

De este modo, $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ es una base de $\mathbb{P}_m, \quad m \geq 0$.

Una sucesión de polinomios ortogonales mónica (coeficiente lider 1) puede obtenerse aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{P}_m$

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$$

Las sucesiones de polinomios ortogonales son únicas salvo constante multiplicativa.

Teorema

Dado un producto escalar (continuo o discreto), $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la correspondiente **SPOM** (sucesión de polinomios ortogonales mónicos), entonces existen $\{c_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, con $\lambda_n > 0 \quad \forall n$, tales que

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - \lambda_{n+1}P_{n-1}(x).$$

$\forall n \geqslant 0$. $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$. En particular

$$c_{n+1} = \frac{\langle xP_n(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle}$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)\rangle}$$

Polinomios de Jacobi

K. G. J. Jacobi (1804–1851)

Polinomios de Jacobi

Se obtienen como la familia de polinomios ortogonales asociados a la función de peso dada por

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

en $[-1,1]$ y verificando $\alpha, \beta > -1$.
Denotamos por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ a los polinomios de Jacobi, que verifican la condición de normalización

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Polinomios de Jacobi

Presentan como casos particulares a las familias de polinomios de:

- $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ (Chebyshev primera especie)
- $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ (Chebyshev segunda especie)
- $\alpha = \beta = 0$ (Legendre)
- $\alpha = \beta$ (Gegenbauer o ultraesféricos)

Coeficiente líder

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{2n!} x^n + \dots$$

- Fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}) \quad \alpha, \beta >$$

- Ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx = \begin{cases} \tau_n \delta_{mn} & n = m \\ = 0 & n \neq m \end{cases}.$$

$$\tau_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}$$

Polinomios de Jacobi

- Fórmula de recurrencia

$$
\begin{aligned}
xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = {} & \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\
& + \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\
& + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)
\end{aligned}
$$

E. N. Laguerre (1834–1886)

Polinomios de Laguerre

Se obtienen para la función de peso $\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ en $[0, \infty)$ con $\alpha > -1$. Los correspondientes momentos existen y verifican

$$\int_0^{+\infty} x^n x^{\alpha} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(n+\alpha)$$

Notemos por $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\geq 0}$ a los polinomios de Laguerre con coeficiente líder $L_n^{(\alpha)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots$

Polinomios de Laguerre

- Fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x D^n (x^{n+\alpha} e^{-x}); \quad \alpha > -1.$$

- Ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{mn} & n = m \end{cases}$$

Polinomios de Laguerre

- Relación de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Polinomios de Hermite

C. Hermite (1822–1901)

Se obtienen para la función peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ definida en el intervalo $I = (-\infty, \infty)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, notaremos por $H_n(x)$ el polinomio ortogonal con respecto a $\omega(x)$ y cuyo coeficiente líder es

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

entonces se verifican las siguientes propiedades.

- Fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$$

Polinomios de Hermite

- Ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm} & n = m \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Relación de recurrencia

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2nH_{n-2}(x)$$