Métodos Numéricos I (curso 21/22)

Relación de Ejercicios 1

1 Determina el número de operaciones necesario para evaluar un polinomios de grado n mediante los siguientes métodos:

i) Evaluación directa de las potencias.

ii) El esquema de Horner.

2 Demuestra que al aplicar el método de Horner dos veces consecutivas se obtiene el valor del polinomio y el de su derivada.

3 Determina el número de operaciones necesario para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas mediante los siguientes métodos:

i) La regla de Cramer:

ii) El método de Gauss (sin elección de pivotes).

Sugerencia: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4 Usa el método de Gauss (sin intercambio de filas), sustitución hacia atrás y aritmética exacta para resolver, si es posible, los sistemas lineales $\mathbf{A}x = b$ siguientes

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -1 \\ x_1 + x_2 & = & 3 \end{array} \right. \qquad (b) \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

5 ¿Es posible aplicar el método de Gauss (sin intercambio de filas) al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}?$$

¿Por qué?

6 Determina la factorización LU en su forma de Crout de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos independientes $[0, 2, -1, -2]^T$.

7 Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & -6 \\ 4 & -2 & -8 & -10 \\ 2 & 2 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

y los vectores

$$b_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

resuelve los cuatro sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}x = b_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método que consideres más eficiente. ¿Puede usarse esta misma técnica para calcular la inversa de una matriz?

8 Supongamos que una matriz regular y tridiagonal

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

admite una factorización LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes matrices triangulares adoptan la forma

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ell_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ell_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

con $d_1 = a_1$ y para $i = 2, \dots, n$ se verifica $\ell_i = \dfrac{b_i}{d_{i-1}},\ d_i = a_i - \ell_i c_{i-1}$.

9 Decide razonadamente si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

es o no definida positiva, y utiliza tu razonameinto para resolver el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}x = b$ donde $b = (-1, 5, 1, 9)^T$.

10 Determina el número de operaciones necesario para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas mediante los siguientes métodos:

i) La factorizaci:ón LU en la forma de Doolittle.

ii) La factorización de Cholesky (suponiendo que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva).

11 Demuestra que toda matriz simétrica $\mathbf{A}$ cuyos menores principales son no nulos admite una factorización en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^t$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal regular y $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior unitaria, es decir, con unos en la diagonal principal.

12 Demuestra que la función definida en $\mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

realmente es una norma vectorial.

13 *a)* Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

y que las igualdades pueden darse, incluso para vectores no nulos.

b) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

14 Demuestra que el número de condición, $\kappa(\mathbf{A})$, para toda matriz $\mathbf{A}$ verifica

a) $\kappa(\mathbf{A}) \geqslant 1$.

b) $\kappa(\alpha\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A})$ para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

15 El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 0{,}999999y &= 1, \end{aligned}$$

tiene solución exacta $x = 10^6$, $y = -10^6$. Encuentra la solución exacta del sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 1{,}000001y &= 1. \end{aligned}$$

Comenta los resultados.

16 La matriz de Hilbert $H_n = (h_{ij})_{n\times n}$ definida por $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ es un importante ejemplo en el álgebra lineal numérica. Encuentra la matriz H_4, demuestra que

$$\mathbf{H}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}.$$

y calcula $\kappa_\infty(\mathbf{H}_4)$. ¿Que puede esperarse al resolver una ecuación en la forma $\mathbf{H}_4 x = b$?

17 Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que la matriz $\mathbf{A}$ no es estrictamente diagonal dominante (por filas), pero que los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen, para resolver cualquier sistema $\mathbf{A}x = b$.

18 Demuestra que para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

las iteraciones del método de Jacobi convergen y las del método de Gauss-Seidel divergen.

19 Considera el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

a) Comprueba que la matriz de coeficientes del sistema no es estrictamente diagonal dominante (por filas).

b) Partiendo de $x^{(0)} = (0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T$, muestra que las iteraciones del método de Jacobi oscilan entre los valores $(1{,}2, 1{,}2, 1{,}2)^T$ y $(0{,}8, 0{,}8, 0{,}8)^T$

c) Muestra que las iteraciones del método de Gauss-Seidel convergen a la solución $x = (1, 1, 1)^T$, calculando iteraciones hasta que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-3}$.

20 Para el sistema del ejercico anterior, ¿se mantienen los resultados de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel si intercambiamos las ecuaciones segunda y tercera?