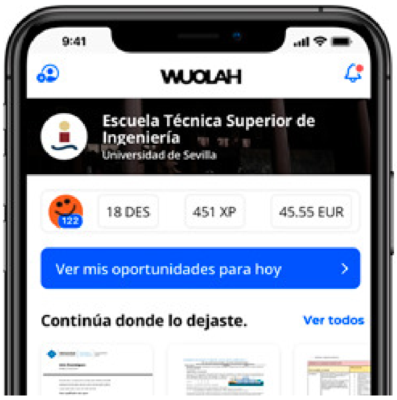
CUESTIONARIOS-ALGEBRA.pdf

jodiecomer

Álgebra I

1º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada



1 Cuestionario de Conjuntos. Axiomática.

1. **Si P y Q son proposiciones, entonces:**
   a. Si P es falsa y Q es cierta entonces $\neg(P \bigvee Q)$ es cierta.
   b. Si P es falsa y Q es falsa entonces $\neg(P \bigvee Q)$ es cierta. ★
   c. Si P es cierta y Q es falsa entonces $\neg(P \bigvee Q)$ es cierta.

2. **Sea $x \in A$, entonces:**
   a. Las otras opciones son falsas. ★
   b. $P(x) \subseteq P(A)$
   c. $P(x) \in P(A)$

3. **Sea $X = \{\{1, 2, 4\}, 5, 7\}, A = \{4, 2, 1\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$**
   a. Las otras opciones son falsas. ★
   b. $P(x) \subseteq P(A)$
   c. $P(x) \in P(A)$

4. **Sea $A = \{x, y\}$, entonces:**
   a. $z \subseteq x \Rightarrow z \subseteq A$
   b. $z \in x \Rightarrow z \in A$
   c. Ninguna de las opciones es cierta. ★

5. **Si la proposición P es falsa y la proposición Q es cierta entonces:**
   a. La proposición $P \Rightarrow Q$ es falsa.
   b. La proposición $P \Rightarrow Q$ es cierta. ★
   c. No tiene sentido considerar $P \Rightarrow Q$ si P es falsa.

6. **Sea $X = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $A = \{4, 2, 1\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, entonces:**
   a. $A \not\subseteq X, B \subseteq XyA \neq B$
   b. $A \subseteq X, B \subseteq XyA = B$ ★
   c. $A \subseteq X, B \subseteq XyA \neq B$

7. **Sea $A = \{x, y\}$, entonces:**
   a. $i \subseteq A$
   b. $\{x\} \in P(A)$ ★
   c. $x \in P(A)$

8. $\{\{\varnothing\}\}$
   a. No tiene elementos ya que el $\varnothing$ no tiene elementos.
   b. Tiene un elemento pero no es el conjunto $\varnothing$. ★
   c. Tiene un elemento que es el conjunto $\varnothing$

9. **Sea $X = \{a, b\}$ un conjunto entonces:**
   a. $a \in X$ ★

b. $a \notin X$
c. $\{a\} \in X$

10. **Supongamos $A \subseteq B$, entonces:**
a. Las otras dos opciones son falsas.
b. $P(A) \in P(B)$
c. $P(A) \subseteq P(B)$ ★

2 Producto cartesiano y aplicaciones.

11. **Sean $f : A \to B$ y $g : X \to Y$ dos aplicaciones:**
a. Si la aplicación $f \times g : A \times X \to B \times Y$ es inyectiva también lo son f y g pero el recíproco no es cierto.
b. La aplicación $f \times g : A \times X \to B \times Y$ es inyectiva, sí y solo si, f y g lo son. ★
c. Si las aplicaciones f y g son inyectivas entonces $f \times g : A \times X \to B \times Y$ también lo es pero el recíproco no es cierto.

12. **Considera el conjunto $3 = \{0, 1, 2\}$ y el conjunto $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 1)\}$. Entonces:** a. G no puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 3. ★
b. G puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 3 pero esta aplicación no es inyectiva.
c. G puede ser la gráfica de una aplicación de 3 wn 3 que es una biyección ya que tiene el mismo dominio que codominio.

13. **Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(m) := m^2$ y los subconjuntos $Par \subseteq \mathbb{Z}$ y $Neg \subseteq \mathbb{Z}$ formados por los enteros pares (múltiplos de 2) y los enteros negativos, respectivamente. Entonces:**
a. $4 \in f_*(Neg) \cap f^*(Par)$ ★
b. $4 \in f_*(Neg)$ pero $4 \notin f^*(Par)$
c. $4 \notin f_*(Neg)$ pero $4 \in f^*(Par)$

14. **La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n, m) := \dfrac{n}{m}$, donde $\mathbb{Z}^*$ es el conjunto de los enteros distintos de cero.**
a. No es inyectiva y tampoco sobreyectiva.
b. Es sobreyectiva pero no es inyectiva. ★

c. Es inyectiva pero no es sobreyectiva.

15. **La aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ definida por $f(n) = n!$ donde el factorial se define como $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ para $n > 0$ y $0! := 1$ y $\mathbb{N}^*$ es el conjunto de los naturales positivos.**
a. No es inyectiva pero si es sobreyectiva.
b. No es sobreyectiva pero si es inyectiva.
c. No es inyectiva y tampoco sobreyectiva. ★

16. **Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$ definida por:**

$$f(n) := \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ es múltiplo de } 3 \\ 1 & si \quad n-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ 2 & si \quad n-2 \text{ es múltiplo de } 3 \end{cases}$$

a. $f^* f_*(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$
b. $f^* f_*(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ ★
c. $f^* f_*(\mathbb{N})$ no es ni $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{N}$, ya que $0 \notin f^* f_*(\mathbb{N})$.

17. **Considera la aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definida por** $f(\frac{n}{m}) := n$ a. No está bien definida. ★
b. Está bien definida y es inyectiva.
c. Está bien definida y es sobreyectiva.

18. **Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(m(:= m^2 - 1$ y los subconjuntos $Par \subseteq \mathbb{Z}$ y $Neg \subseteq \mathbb{Z}$ formados por los enteros pares (múltiplos de dos) y los enteros negativos respectivamente. Entonces:**
a. $3 \in f^* f_*(Neg)$ pero $3 \notin f^*(Par)$
b. $3 \in f^* f_*(Neg) \cap \in f^*(Par)$ ★
c. $3 \notin f^* f_*(Neg)$ pero $3 \in f^*(Par)$

19. **Considera los conjuntos $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y el conjunto $G = \{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$. Entonces:**
a. G puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 4 que además es inyectiva y no es sobreyectiva, pero no la gráfica de una aplicación de 4 en 3. ★
b. G no puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 4 ni de 4 en 3.
c. G puede ser la gráfica de una aplicación de 4 en 3 que no es sobreyectuva

pero si inyectiva, pero no puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 4.

20. **La aplicación** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ **definida por** $f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
a. Está bien definida pero no es sobreyectiva. ★
b. Está bien definida y es sobreyectiva.
c. No está bien definida pues la imagen de un entero tiene que ser un entero.

3 Relaciones de equivalencia y cocientes.

21. **Sea** X **un conjunto, en** $P(X)$ **definimos la siguiente relación:** $ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$
a.R es una relación de equivalencia.
b.R es simétrica y transitiva pero no reflexiva.
c.R es reflexiva y simétrica pero no es transitiva. ★

22. **Dada la aplicación** f **tal que** $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 4$. Entonces: (hacer representación gráfica para verlo más claro)
a. El conjunto cociente X/R_f tiene 3 elementos. ★
b. El conjunto cociente X/R_f tiene 4 elementos.
c. El conjunto cociente X/R_f tiene 5 elementos.

23. **Dadas dos aplicaciones** $f, g : A \to B$
a.Si $R_f = R_g$ entonces f y g pueden ser distintas pero sus imágenes son biyectivas. ★
b.Si $R_f = R_g$ entonces f y g pueden ser distintas y tener imágenes no biyectivas.
c.Si $R_f = R_g$ entonces f y g son iguales.

24. **Definimos** $0 = \emptyset$**,** $1 = \{0\}$**,** $2 = \{0, 1\}$**, ... ,**$n = \{0, 1, ..., n-1\}$**. En** n **definimos la siguiente relación** $aRb \Leftrightarrow a \in b$**, entonces**
a. R es transitiva pero no es simétrica ni reflexiva. ★
b. R no es transitiva ni simétrica ni reflexiva.
c. R es refleviva pero no es simétrica ni transitiva.

25. **En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definimos la siguiente relación de equivalencia: $nRm \Leftrightarrow n-m$ es múltiplo de 2.**
a. El conjunto cociente $\mathbb{N}/R$ tiene infinitos elementos.
b. El conjunto cociente $\mathbb{N}/R$ tiene solo dos elementos, la clase del cero formada por todos los pares y la clase del uno formada por todos los impares. ★
c.El conjunto cociente $\mathbb{N}/R$ tiene tres elementos, la clase del cero que solo tiene al cero, la clase del uno formada por todos los impares y la clase del dos formada por todos los pares.

26. **Considerar la relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ definida por nRm sí, y solo sí, $n^2 = m^2$ y considerar el conjunto cociente $\mathbb{Z}/R$. La correspondencia $\bar{a} \mapsto a$**
a. Define una aplicación de $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{Z}$ que no es sobreyectiva pero si inyectiva.
b. Define una aplicación en $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{Z}$ que no es inyectiva pero si sobreyectiva.
c. No define una aplicación de $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{Z}$. ★

27. **Considera la relación de equivalencia R en $\mathbb{Z}$ definida por $nRm \Leftrightarrow |n| = |m|$ y la correspondencia $\overline{n} \mapsto n^2$ definida sobre el cociente $\mathbb{Z}/R$.**
a.Esa correspondencia da lugar a una aplicación bien definida de $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{N}$ que es una biyección.
b. Esa correspondencia no da lugar a una aplicación bien definida de $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{N}$.
c. Esa correspondencia da lugar a una aplicación bien definida de $\mathbb{Z}/R$ en $\mathbb{N}$ que es inyectiva pero no sobreyectiva. ★

28. **Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = |n|$, el valor absoluto y la relación de equivalencia R_f asociada a f.**
a. La aplicación $\bar{f} : \mathbb{Z}/R_f \to \mathbb{N}$; $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) = |x|$ no está bien definida ya que $\bar{f}(\overline{-1}) = 1 = \bar{f}(\bar{1})$.
b. Cada clase de equivalencia, salvo la del 0, tiene dos elementos y por tanto la aplicación $\bar{f} : \mathbb{Z}/R_f \to \mathbb{N}$; $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) = |x|$ aunque es sobreyectiva no puede ser inyectiva.
c. Cada clase de equivalencia, salvo la del 0, tiene dos elementos y $\mathbb{Z}/R_f \cong \mathbb{N}$. ★

29. **Sea $f : A \to B$ una aplicación y sea R_f la relación de equivalencia asociada a f, entonces:**
a. La aplicación f es inyectiva si, y sólo si, la clase de equivalencia de cada

elemento $a \in A$ tiene sólo al elemento a. ★
b.La aplicación f es sobreyectiva si, y sólo si, hay sólo una clase de equivalencia que corresponde a la imagen de f.
c. La aplicación f es biyectiva si, y sólo si, $A/R_f \cong Im(f)$.

4 Anillos. Definición y ejemplos.

30. **El conjunto $\mathbb{Z}[x]^*$ de los polinomios no nulos de $\mathbb{Z}[x]$**
a. Es cerrado para la suma, producto y opuestos y por tanto es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$
b. Depende de la definición de subanillo, podría ser o no subanillo de $\mathbb{Z}[x]$ ★
c. Es cerrado para la suma, producto y opuestos, pero no es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$

31. **La aplicación $f : A[x] \to A$ que asocia a cada polinommio su término independiente (es decir, el coeficiente que acompaña a x^0)**
a. no es morfismo de anillos.
b. es morfismo de anillos inyectivo pero no sobreyectivo.
c. es morfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo. ★

32. **La aplicación norma $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_i; N(a + bi) := a^2 + b^2$**
a. es un morfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo.
b. es un morfismo de anillos inyectivo pero no sobreyectivo.
c. no es morfismo de anillos. ★

33. **La inclusión $\mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}; i \mapsto i$**
a. Está bien definida pero no es un morfismo de anillos. ★
b. No está bien definida por tanto no tiene sentiido preguntarse si es un morfismo de anillos.
c. Está bien definida, lleva el 0 en el 0, el 1 en el 1 y es un morfismo de anillos.

34. **El elemento $2 + \sqrt{3}$**
a. es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ y su inverso es $2 - \sqrt{3}$. ★
b. no es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ ya que este no es un cuerpo.
c. no es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ ya que su inverso sería un conjugado y al ser real

coincide con el mismo pero $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+3+8\sqrt{3}\neq 1$

35. **Considerar los anillos $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Q}[i]$**
   a. Ambos $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Q}[i]$ son cuerpos.
   b. $\mathbb{Z}[i]$ no es un cuerpo sólo tiene cuatro unidades, pero $\mathbb{Q}[i]$ si que es un cuerpo. ★
   c. Ni $\mathbb{Z}[i]$ ni $\mathbb{Q}[i]$ son cuerpos, solo tienen cuatro unidades, 1, .1, i y $-i$.

36. **Si A es un anillo y $B\subseteq A$ es un subanillo. Entonces:**
   a. si A no es un cuerpo, como la estructura de B es heredada de la de A, no puede tener una estructura más rica y por tanto B no puede ser un cuerpo.
   b. puede ser B un cuerpo aunque no lo sea A y puede ser A un cuerpo y no serlo B. ★
   c. B hereda la estructura de A por tanto si A es un cuerpo B también tiene que ser un cuerpo.

37. **La aplicación $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_3$ definida como $f(n):=$ resto de dividir n entre 3, para $n=0,1,2,3,4,5$.**
   a. Es un morfismo de anillos. ★
   b. Está bien definida pero no es un mmorfismo de anillos.
   c. No está bien definida.

38. **La aplicación $f:\mathbb{Z}_9\to\mathbb{Z}_6$ definida como $f(n):=$ resto de dividir n entre 6, para $n=0,1,2,3,4,5,6,7,8$.**
   a. Está bien definida pero no es un morfismo de anillos. ★
   b. Está bien definida y es un morfismo de anillos.
   c. No está bien definida.

39. **Las unidades del anillo $\mathbb{Z}_5$ son:**
   a. $U(\mathbb{Z}_5)=\{1,-1\}$
   b. $U(\mathbb{Z}_5)=\{1,2,3,4\}$. ★
   c. $U(\mathbb{Z}_5)=\{1\}$

5 Congruencias, ideales y cocientes.

40. **En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos la siguiente relación:**
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - c$ **es un múltiplo de 2 y** $b = d$
a. es una congruencia. ★
b. es relación de equivalencia.
c. no es de equivalencia y por tanto no puede ser congruencia.

41. **En el anillo $\mathbb{Q}$ definimos la siguiente relación:**
$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$
a. no es de equivalencia y por tanto no puede ser congruencia.
b. es congruencia.
c. es de equivalencia pero no es una congruencia. ★

42. **Considera el morfismo $E_1 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ que evalúa cada polinomio en 1, $E_1(f(x)) := f(1)$ y sea $I =< x - 1 >\leq \mathbb{Z}[x]$ el ideal generado por $x - 1$. Entonces:**
a. $I \subseteq \ker E_1$ y $\mathbb{Z}[x] / \ker E_1 \cong \mathbb{Z}$. ★
b. $I \subseteq \ker E_1$ y $\mathbb{Z}[x] / \ker E_1 \cong Im(E_1) \neq \mathbb{Z}$.
c. ninguna de las opciones es correcta.

43. **En el anillo de los polinomios $\mathbb{Z}[x]$ considera el conjunto P con elementos los polinomios de grado par, notar que los polinomios constantes tienen grado cero que es par.**
a. P no es un ideal pero si es un subanillo.
b. P es un ideal pero no es un subanillo.
c. P no es un ideal y tampoco un subanillo. ★

44. **El cuerpo de los números complejos**
a. es infinito y tiene infinitos ideales e infinitos subanillos.
b. aunque es infinito, solo tiene un número finito de ideales y un número finito de subanillos.
c. solo tiene dos ideales, que son el trivial y el total, pero tiene infinitos subanillos. ★

45. **Sea A un anillo**
a. todo ideal de A tiene al cero y al 1.

b. todo ideal de A tiene al cero y puede haber ideales que tienen al 1 sin que sean el propio anillo.
c. todo ideal de A tiene al cero y el único ideal que tiene al 1 es el propio anillo. ★

46. **Dados los ideales $I, J \leq A$**
a. la intersección $I \cap J$ no es un ideal pero la unión $I \cup J$ si lo es.
b. ni la intersección $I \cap J$ ni la unión $I \cup J$ son ideales.
c. la intersección $I \cap J$ es un ideal pero la unión $I \cup J$ no lo es. ★

47. **Elige la correcta:**
a. Todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$ son principales. ★
b. Todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales pero hay ideales de $\mathbb{Q}$ que no lo son.
c. Todos los ideales de $\mathbb{Q}$ son principales pero hay ideales de $\mathbb{Z}$ que no son principales.

48. **Considera la aplicación $T : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ que asocia a cada polinomio su término independiente (aquel que no tiene x), y el ideal $I =< x > \leq \mathbb{Z}[x]$ generado por x.**
a. Es un morfismo de anillos que además induce un morfismo $\bar{T} : \mathbb{Z}[x]/I \to \mathbb{Z}$, tal que $\bar{T}f(\bar{x}) = T(f(x))$. ★
b. Es un morfismo de anillos que no induce un morfismo $\bar{T} : \mathbb{Z}[x]/I \to \mathbb{Z}$, tal que $\bar{T}f(\bar{x}) = T(f(x))$.
c. no es morfismo.

49. **En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ considera el ideal I generado por el elemento i, entonces:**
a. $I = \{ni; n \in \mathbb{Z}\}$
b. $I = \mathbb{Z}[i]$ ★
c. ninguna de las otras opciones es cierta.

6 DI

50. **El anillo $\mathbb{Z}_{11}[x]$**
a. es un DI con infinitas unidades.
b. no es DI.

c. es un DI con 10 unidades. ★

51. **En** $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$
a. 2 y $2-2\sqrt{2}$ son asociados y tienen la misma norma.
b. 2 y $2-2\sqrt{2}$ no son asociados porque no tienen la misma norma.
c. 2 y $2-2\sqrt{2}$ son asociados pero no tienen la misma norma. ★

52. **En** $\mathbb{Q}[x]$ **el polinomio** x^2+1
a. tiene infinitos asociados e infinitos divisores propios. ★
b. tiene infinitos asociados pero no tiene divisores propios.
c. tiene un número finito de asociados y un número finito de divisores propios.

53. **Sea** A **un dominio de integridad. Dados** $a, b \in A$ **escribo** $a \sim_{as} b$ **si son asociados.**
a. Si $a \sim_{as} b$ y $c \sim_{as} d$ no tiene por qué cumplirse que $ac \sim_{as} bd$ y tampoco que $a+c \sim_{as} b+d$
b. Si $a \sim_{as} b$ y $c \sim_{as} d$ entonces $ac \sim_{as} bd$ y también $a+c \sim_{as} b+d$
c. Si $a \sim_{as} b$ y $c \sim_{as} d$ entonces $ac \sim_{as} bd$ pero no tiene por qué ser cierto que $a+c \sim_{as} b+d$ ★

54. **Elige la correcta**
a. Cualquier subanillo de un cuerpo es un DI y cualquier DI es un subanillo de un cuerpo. ★
b. Todo DI es un subanillo de un cuerpo pero no todo subanillo de un cuerpo es un DI.
c. Cualquier subanillo de un cuerpo es un DI pero no todo DI es un subanillo de un cuerpo.

55. **En** $\mathbb{Z}[i]$
a. $1+2i$ y $1-2i$ tienen la misma norma y por tanto son asociados.
b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
c. $3+i$ y $1-3i$ son asociados y por tanto tienen la misma norma. ★

56. **El anillo** $\mathbb{Z}[i][x]$
a. no tiene sentido hablar del cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[i][x]$ porque hay demasiados corchetes.
b. es un DI pero su cuerpo de fracciones no es $\mathbb{Q}[i][x]$ ★

c. es un DI y su cuerpo de fracciones es $\mathbb{Q}[i][x]$

57. **Sea A un DI y $a \in A$ un elemento no nulo. Considera la aplicación $f : A \to A$ definida como $f(x) := ax$, entonces**
a. f es inyectiva y sobreyectiva.
b. f no tiene porqué ser inyectiva ni sobreyectiva.
c. f es inyectiva pero no tiene que ser sobreyectiva. ★

58. **En $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $x^3 + 1$**
a. tiene infinitos asociados e infinitos divisores propios. ★
b. tienen un número finito de asociados y un número finito de divisores propios.
c. tienen un número finito de asociados y un número finito de divisores propios.

59. **El cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es**
a. $\mathbb{C}[\sqrt{-2}] = \mathbb{C}$
b. $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ ★
c. $\mathbb{R}[\sqrt{-2}]$