4. Características de una variable

El estudio y comparación de la distribución de probabilidad de distintas variables aleatorias es más sencillo mediante el uso de constantes (medidas características de la variable) que caracterizan la posición, ya sea central o no central, la dispersión, la forma, etc...

Todas las características que estudiamos en este tema son la extensión de las equivalentes que se estudian en estadística descriptiva, solo que ahora, en lugar de obtenerlas para una variable estadística se van a obtener para una variable aleatoria.

4.1. Esperanza matemática

La esperanza matemática o el valor esperado es una característica de posición central denotada por $E[X]$, definida de la siguiente forma:

Esperanza matemática de una variable aleatoria discreta

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una v.a. discreta que toma valores en $E_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, ...\}$. Existe la **esperanza matemática**, esperanza o media de la v.a. X, si

$$\sum_{x \in E_X} |x| P(X = x) < +\infty$$

y, si existe, se define como

$$E[X] = \sum_{x \in E_X} x P(X = x).$$

Ejemplo

Calcular, si existe, la esperanza de la variable aleatoria que contabiliza el número de caras en el lanzamiento de tres monedas.

Esperanza matemática de una variable aleatoria continua

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una v.a. continua con función de de densidad f_X. Existe la **esperanza matemática**, esperanza o media de la v.a. X, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\, dx < +\infty$$

y, si existe, se define como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Ejemplo

Calcular, si existe, la esperanza de la variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$.

Esperanza matemática de una función de una variable aleatoria

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una v.a. que toma valores en E_X y $g : E_X \to \mathbb{R}$ una función medible.

- X discreta: $\exists E[g(X)] \Leftrightarrow \sum_{x \in E_X} |g(x)| P(X = x) < +\infty$ y, si

$$\exists E[g(X)] \Rightarrow E[g(X)] = \sum_{x \in E_X} g(x) P(X = x).$$

- X continua: $\exists E[g(X)] \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x)\, dx < +\infty$ y, si

$$\exists E[g(X)] \Rightarrow E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

Ejemplo

Calcular, si existe, la esperanza de X^2 para las dos variables de los ejemplos anteriores.

Propiedades de la esperanza matemática

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, X e Y variables aleatorias, entonces:

1. $\exists E[X] \Leftrightarrow \exists E[|X|]$.
2. Si $X = c \Rightarrow \exists E[X] = c$.
3. Si $X \geq 0$ y $\exists E[X] \Rightarrow E[X] \geq 0$.
4. Si $X \geq 0$ y $\exists E[X]$, $E[X] = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$.
5. Si $\exists E[X] \Rightarrow |E[X]| \leq E[|X|]$.
6. Si X está acotada ($\exists M \in \mathbb{R}^+ \ / \ |X| \leq M$) $\Rightarrow \exists E[X]$ y $|E[X]| \leq M$.
7. Si $\exists E[X] \Rightarrow \exists E[aX + b] = aE[X] + b$.

8. **Linealidad:** Si $h_1(X), ..., h_n(X)$ son variables tales que $\exists E[h_i(X)]$, $\forall i = 1, ..., n$, entonces $\forall a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$

$$\exists E[a_1 h_1(X) + \cdots + a_n h_n(X) + b] = a_1 E[h_1(X)] + \cdots + a_n E[h_n(X)] + b.$$

9. Si $g(X)$ y $h(X)$ son dos funciones medibles de la v.a. X tales que $\exists E[g(X)]$ y $\exists E[h(X)]$, entonces
$$\exists E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)].$$

10. **Conservación del orden:** Si $h(X)$ y $g(X)$ son variables aleatorias tales que $h(X) \leq g(X)$, $\exists E[h(X)]$ y $\exists E[g(X)]$, entonces:

$$E[h(X)] \leq E[g(X)].$$

4.2. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos son características numéricas definidas como la esperanza de ciertas funciones de la variable aleatoria. En caso de existir, describen propiedades generales de la distribución.

Momentos no centrados (o centrados en el origen)

Si X es una variable aleatoria y $k \in \mathbb{N}$, se define el momento no centrado de orden k como

$$m_k = E[X^k]$$

siempre que exista dicha esperanza. En particular $m_1 = E[X]$.

Como los momentos no centrados se definen a partir de la esperanza, si existe el momento no centrado de orden k este se calcula de la siguiente forma:

- Si X es discreta, $m_k = \displaystyle\sum_{x \in E_X} x^k P(X = x)$.
- Si X es continua, $m_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx$.

Ejemplo

Calcula, si existen, los momentos no centrados de orden 1 al 4 de las variables de los ejemplos anteriores.

Momentos centrados (o centrados en la media)

Si X es una variable aleatoria tal que $\exists E[X]$ y $k \in \mathbb{N}$, se define el momento centrado de orden k como

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k]$$

siempre que exista dicha esperanza.

En particular $\mu_1 = 0$ y μ_2 se denomina varianza de la variable, $\mu_2 = Var[X]$.

Al igual que antes, como los momentos centrados se definen a partir de la esperanza, si existe el momento centrado de orden k este se calcula de la siguiente forma:

- Si X es discreta, $\mu_k = \sum_{x \in E_X} (x - E[X])^k P(X = x)$.
- Si X es continua, $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^k f_X(x)\, dx$.

Ejemplo

Calcula, si existen, los momentos centrados de orden 1 al 4 de las variables de los ejemplos anteriores.

Como, por definición, los momentos de una variable aleatoria son esperanzas de funciones de la variable, su existencia está sujeta a la convergencia absoluta de la serie o la integral que los define, es decir:

- $\exists m_k \Leftrightarrow \exists E[|X|^k]$.
- $\exists \mu_k \Leftrightarrow \exists E[|X - E[X]|^k]$.

Además, la existencia del momento de orden k garantiza la existencia de los momentos de órdenes inferiores, tanto en los momentos centrados como en los no centrados:

- $\exists m_k \Rightarrow \exists m_j \;\; j = 1, ..., k$.
- $\exists \mu_k \Rightarrow \exists \mu_j \;\; j = 1, ..., k$.

Relación entre los momentos centrados y no centrados

- Si $\exists m_k \Rightarrow \exists \mu_k$ y $\mu_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} m_{k-j}\, m_1^j$.
- Si $\exists \mu_k \Rightarrow \exists m_k$ y $m_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu_{k-j}\, m_1^j$.

En particular:

- $\mu_2 = m_2 - m_1^2$.
- $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$.
- $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$.

Ejemplo

Calcula los momentos centrados de orden 3 y 4 de las variables de los ejemplos anteriores usando la relación que hay entre ellos y los no centrados.

Desigualdades relacionadas con los momentos

- Teorema de Markov (Desigualdad básica): Si X es una v.a. no negativa tal que $\exists E[X]$, entonces

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E[X]}{\epsilon}, \ \forall \epsilon > 0.$$

- Desigualdad de Chebychev: Si X es una v.a. tal que $\exists E[X^2]$, entonces

$$P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}, \ \forall k > 0.$$

Existen expresiones alternativas de esta desigualdad que se obtienen de ella:

  - $P(|X - E[X]| \geq k\sqrt{Var[X]}) \leq \dfrac{1}{k^2}$.
  - $P(|X - E[X]| < k) = P(E[X] - k < X < E[X] + k) \geq 1 - \dfrac{Var[X]}{k^2}$.
  - $P(|X - E[X]| < k\sqrt{Var[X]}) =$
    $P(E[X] - k\sqrt{Var[X]} < X < E[X] + k\sqrt{Var[X]}) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$.

De la última expresión de la desigualdad de Chebychev se puede ver que:

- Para $k = 4$ la desigualdad nos indica que

$$P(E[X]-4\sqrt{Var[X]} < X < E[X]+4\sqrt{Var[X]}) \geq 1-\frac{1}{4^2} = 0.9375$$

- Para $k = 5$ la desigualdad nos indica que

$$P(E[X]-5\sqrt{Var[X]} < X < E[X]+5\sqrt{Var[X]}) \geq 1-\frac{1}{5^2} = 0.96$$

Ejemplo

Para una variable X con $E[X] = 0$ y $Var[X] = 1$, encontrar intervalos que la contengan con probabilidad no menor que 0.9375, 0.96 y 0.99.

4.3. Función generatriz de momentos

Si X es una v.a. tal que $\exists E[e^{tX}],\ \forall t \in (-t_0, t_1),\ t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, se define su **función generatriz de momentos** como:

$$\begin{array}{cccc} M_X : & (-t_0, t_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longrightarrow & E[e^{tX}]. \end{array}$$

Ejemplo

Calcula, si existe, la función generatriz de momentos de las siguientes variables aleatorias:

1. X *una v.a. discreta con f.m.p.* $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$
2. X *una v.a. continua con f.d.d.* $f_X(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{2},\ x > 0.$

Propiedades:

- Teorema de unicidad: Si existe, la función generatriz de momentos de una variable aleatoria determina unívocamente su distribución de probabilidad.
- Relación con los momentos: Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, $M_X(t)$, $\forall t \in (-t_0, t_1)$, se tiene:
  - *i*) $\exists E[X^k], \ \forall k \in \mathbb{N}$.
  - *ii*) $M_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} E[X^j], \ \forall t \in (-t_0, t_1)$.
  - *iii*) $E[X^k] = \left. \frac{d^k M_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$.

Ejemplo

Calcula la media y varianza de las variables del ejemplo anterior, a partir de la función generatriz de momentos.

4.4. Otras características

Medidas de posición central Son características numéricas asociadas a la distribución de probabilidad de una variable, que proporcionan indicadores de la localización de sus valores en $\mathbb{R}$.

Media

La esperanza, o media, de una variable aleatoria, $E[X]$, representa un valor central de los valores de la variable.

Tiene el inconveniente de que puede no existir y, además, verifica:

- Está comprendida entre los valores extremos de la variable: $a \leq X \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ y $\exists E[X] \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$.
- Es el centro de gravedad de la distribución: $E[X - E[X]] = 0$.
- Se ve afectada por transformaciones lineales en el mismo sentido: $E[aX + b] = aE[X] + b$.
- Minimiza la media de las desviaciones cuadráticas: $E[(X - E[X])^2] < E[(X - b)^2], \ \forall b \neq E[X]$.

Ejemplo

Se te propone el siguiente juego: Lanzas una moneda tres veces y por cada cara que saques se te dan dos euros pero para jugar debes pagar tres euros. ¿Es justo el juego?

Mediana

La mediana es cualquier número real verificando:

$$P(X \leq M_e) \geq \frac{1}{2} \text{ y } P(X \geq M_e) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow F_X(M_e^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(M_e).$$

Si la distribución es continua la mediana es cualquier número real que verifique $F_X(M_e) = 1/2$.

La mediana minimiza la media de las desviaciones absolutas:

$$E[|X - M_e|] < E[|X - b|], \ \forall b \neq M_e.$$

Ejemplo

Calcular la mediana de las siguientes variables:

1. X *v.a. que contabiliza el número de caras en el lanzamiento de tres monedas.*
2. X *v.a. con función de densidad* $f_X(x) = 2x$ *si* $0 \leq x \leq 1$.

Moda

La moda se define como el valor (o valores) más probables de la distribución de probabilidad, por lo tanto se corresponde con el máximo, si existe, de la f.m.p. o de la f.d.d., según el tipo de variable aleatoria que se esté considerando. Se representa por M_o.

Ejemplo

Calcular la moda de las variables de los ejemplos anteriores.

Medidas de posición no central

Cuantiles

Se define el cuantil de orden q con $q \in (0,1)$, que se denota por C_q, como cualquier valor real que verique:

$$P(X \leq C_q) \geq q \text{ y } P(X \geq C_q) \geq 1-q \Leftrightarrow F_X(C_q^-) \leq q \leq F_X(C_q).$$

Si la distribución es continua se cumple que $F(C_q) = q$.

Al igual que en estadística descriptiva, los cuantiles reciben denominaciones según el número de partes con igual probabilidad en que divida a la distribución:

- **Percentiles:**

$$P_1 = C_{0.01};\ \ldots;\ P_{99} = C_{0.99} \Rightarrow P_r = C_{r/100},\ r = 1, ..., 99.$$

- **Deciles:**

$$D_1 = P_{10} = C_{0.1};\ \ldots;\ D_9 = P_{90} = C_{0.9}.$$

- **Cuartiles:**

$$Q_1 = P_{25} = C_{0.25};\ Q_2 = P_{50} = M_e = D_5 = C_{0.5};\ Q_3 = P_{25} = C_{0.25}.$$

Ejemplo

Calcular $Q_1,\ Q_3,\ D_2,\ C_{0.65}$ *en las variables de los ejemplos anteriores.*

Medidas de dispersión absolutas

Varianza

La varianza es otra medida característica que mide la distancia cuadrática promedio a la media para representar la dispersión de una v.a. en torno a su media y se representa por $Var[X]$ o σ_X^2.

Su raíz cuadrada positiva se denomina desviación típica y se denota por σ_X.

En general se define, si existe, como:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

La varianza cumple las siguientes propiedades:

- $Var[X] \geq 0$ y $Var[X] = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \;/\; P(X = c) = 1$.
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X], \;\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $E[(X - b)^2] > Var[X], \;\forall b \in \mathbb{R} \;/\; b \neq E[X]$.
- Tipificación de una variable aleatoria: Sea $Z = \dfrac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}} \Rightarrow E[Z] = 0, \;Var[Z] = 1$.

Ejemplo

Calcular la varianza y desviación típica de las variables aleatorias de los ejemplos anteriores y de la variable que mide la ganancia del juego propuesto.

Otras características de dispersión absolutas

- La desviación absoluta media respecto de la media: $E[|X - E[X]|]$.
- La desviación absoluta media respecto de la mediana: $E[|X - M_e|]$.
  - $E[|X - M_e|] \geq 0$ y $E[|X - M_e|] = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \;/\; P(X = c) = 1$.
  - $E[|X - M_e|] < E[|X - b|], \; \forall b \in \mathbb{R} \;/\; b \neq M_e$.
- Rango o Recorrido: Diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.
- Rango o recorrido intercuartílico: $Q_3 - Q_1$.

Medidas de dispersión relativas

- Coeficiente de variación de Pearson: Si $E[X] \neq 0$, entonces

$$CV_X = \frac{\sqrt{Var[X]}}{|E[X]|}.$$

  Se verifica que $CV_{aX} = \pm CV_X \ \forall a \neq 0$.

- Índice de dispersión respecto de la mediana:

$$\frac{E[|X - M_e|]}{M_e}, \text{ si } M_e \neq 0.$$

- Coeficiente de apertura: Cociente entre el mayor y el menor valor de la variable.
- Rango o Recorrido relativo: Cociente entre el rango y la media.
- Rango o recorrido semiintercuartílico: $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_1 + Q_3}$.

Medidas de forma

Distribuciones simétricas: Una variable aleatoria X (o, equivalentemente, su distribución) es simétrica alrededor de $\alpha \in \mathbb{R}$ si:

$$P(X \leq \alpha + x) = P(X \geq \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, las variables $X - \alpha$ y $\alpha - X$ tienen la misma distribución.

- Si X es una v.a. discreta, se dice que es simétrica alrededor de α si $P(X = \alpha + x) = P(X = \alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Si X es una v.a. continua, se dice que es simétrica alrededor de α si $f_X(\alpha + x) = f_X(\alpha - x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Si X es una v.a. simétrica alrededor de α, entonces:

- Si $\exists E[(X - \alpha)^r]$ con r impar, entonces $E[(X - \alpha)^r] = 0$.
- Si $\exists E[X]$, entonces $E[X] = \alpha$.
- α es mediana de X.
- Si X es unimodal, α es la moda.

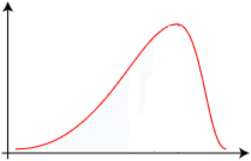
Coeficiente de asimetría de Fisher: Si X es una v.a. tal que $\exists E[X^3]$, entonces se define este coeficiente como

$$\gamma_{1,X} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(\sqrt{Var[X]})^3}.$$

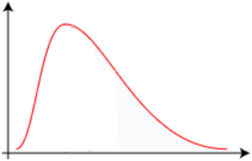
Este coeficiente es adimensional e invariante, salvo por el signo, frente a cambios de origen y escala: $\gamma_{1,aX+b} = \pm\gamma_{1,X}$ según el signo de a.

Interpretación:

- Si $\gamma_{1,X} = 0$, entonces la distribución de X es simétrica respecto a $E[X] = M_e = M_o$.
- Si $\gamma_{1,X} > 0$, entonces la distribución de X es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si $\gamma_{1,X} < 0$, entonces la distribución de X es asimétrica negativa o a la izquierda.



Asimetría negativa



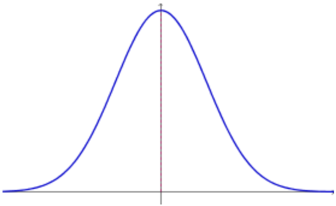
Asimetría positiva

Para distribuciones unimodales simétricas o moderadamente asimétricas se puede medir la curtosis o apuntamiento de la función masa de probabilidad o de la función de densidad según la variable sea discreta o continua.

Coeficiente de curtosis de Fisher: Si X es una v.a. tal que $\exists E[X^4]$, entonces se define este coeficiente como

$$\gamma_{2,X} = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(Var[X])^2} - 3.$$

Este coeficiente mide el apuntamiento de la distribución de X en relación a una distribución patrón, denominada normal estándar, para la que el coeficiente es nulo.



Este coeficiente es adimensional e invariante frente a cambios de origen y escala: $\gamma_{2,aX+b} = \gamma_{2,X}$.

Interpretación:

- Si $\gamma_{2,X} = 0$, entonces la distribución de X es mesocúrtica o igual de apuntada que la normal estándar.
- Si $\gamma_{2,X} > 0$, entonces la distribución de X es leptocúrtica o más apuntada que la normal estándar.
- Si $\gamma_{2,X} < 0$, entonces la distribución de X es platicúrtica o menos apuntada que la normal estándar.