

Relación de Problemas: *Funciones spline*

- 1** Determine a , b y c para que la siguiente función sea un spline cúbico:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

- 2** Obtenga el spline lineal que interpola los siguientes datos:

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	0	2	3	2	4

- 3** Halle, si es posible, $s \in S_2(-1, 0, 3, 4)$ tal que:

$$-s(-1) = s(2) = s(4) = 1, \quad s(0) = s(3) = 0.$$

- 4** Calcule el spline cuadrático que interpola los siguientes datos:

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-2	0	2	3	4

y tal que $s'(1) = 0$.

- 5** Obtenga el spline cúbico $s(x)$ con nodos -1, 0, 1, que verifica:

$$s''(-1) = s''(1) = s(-1) = s(1) = 0, \quad s(0) = 1.$$

- 6** Calcule el spline cúbico $s(x) \in S_3(1, 2, 3, 4)$ natural que interpola los siguientes datos:

$$s(1) = 1, \quad s(2) = 2, \quad s(3) = -1, \quad s(4) = 3.$$

- 7** Halle el spline cúbico periódico $s(x) \in S_3(1, 2, 3, 4)$ que interpola los siguientes datos:

$$s(1) = 1, \quad s(2) = 2, \quad s(3) = -1, \quad s(4) = 1.$$

- 8** Obtenga el spline $s(x) \in S_3^1(-1, 0, 2)$ que interpola:

$$\begin{array}{lll} s(-1) = -6 & s(0) = -3 & s(2) = 33 \\ s'(-1) = 9 & s'(0) = 0 & s'(2) = 48 \end{array}$$

- 9** Deduzca el spline cúbico $s(x) \in S_3(-1, 0, 1, 3)$ que interpola los siguientes datos:

$$s(-1) = -2, \quad s'(-1) = 2, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \quad s(1) = 2, \quad s(3) = 30.$$

- 10** Calcule la expresión del spline cúbico de clase uno que interpola los siguientes datos.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	0	1	1
f'_i	0	0	0	0

Dibuje su gráfica.

- 11** Halla el spline cúbico $s(x)$ que interpola los datos $s(0) = 8$, $s(2) = 0$, $s(4) = 8$ y satisface las dos condiciones adicionales $s'(0) = -12$, $s'(4) = 12$.

Nota: este tipo de spline cúbico se denomina de extremo sujeto.

- 12** Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

“Todo polinomio de grado menor o igual que tres es un spline cúbico natural para el conjunto de nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ”.

- 13** ¿Cuál es el spline cúbico que interpola los datos

x_i	-2	1	1	2
f_i	2	1	5	10

y satisface las condiciones adicionales $s(0) = s'(0) = 2$? Justifique su respuesta.

- 14** Para cierta función $f(x) : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se obtiene la tabla de datos

x_i	-2	-1	1
f_i	4	3	5

a) Calcule el spline cuadrático $s(x)$ que interpola tales datos y, además, satisface la condición $s(0) = 3$.

b) A partir de lo obtenido en el apartado anterior, halle una aproximación de $\int_{-2}^0 f(x)dx$.

- 15** Se considera la función

$$s(x) = \begin{cases} -3x^2 + 9x - 7 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ p(x) & \text{si } x \in [1, 3], \\ -x^3 + 12x^2 - 42x + 46 & \text{si } x \in [3, 5]. \end{cases}$$

a) Determine $p(x)$ para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.

b) ¿Puede ser $s(x)$ un spline cúbico natural? Justifique tu respuesta.

c) ¿Cuánto valen $s'(0)$ y $s''(2)$?

- 16** Se considera la siguiente tabla de datos

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	1
f'_i	1	0	2	1

a) Calcule el spline cúbico de clase uno $s(x)$ que interpola los datos de la tabla anterior.

b) ¿Es $s(x)$ un spline cúbico periódico? Justifique su respuesta.

- 17** Se considera la siguiente tabla de valores de una cierta función f

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	3	-1	4

a) Calcule un spline cuadrático $s(x)$ que interpole los datos de la tabla.

b) Utilice el spline obtenido para estimar los valores de $f(-0,5)$, $f'(0,5)$ y $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

- 18** La función

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ x^3 - 3x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \in [0, 1], \end{cases}$$

- a)* es un spline cúbico de clase 1.
- b)* es un spline cúbico de clase 2.
- c)* es un spline cúbico natural.

19 Se considera la función

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 - 12x^2 + 20x & -2 \leq x \leq 0, \\ 7x^3 - 12x^2 + 20x & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + 12x^2 - 4x + 8 & 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Entonces ...

- a)* $s(x)$ es un spline cúbico.
- b)* $s(x)$ es un spline cúbico natural.
- c)* $s(x)$ es un spline cúbico periódico.