CONCEPTOS BÁSICOS DE COMBINATORIA: VARIACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Según la RAE la combinatoria es la parte de las matemáticas que estudia el número de posibilidades de ordenación, selección e intercambio de los elementos de un conjunto.

Ejemplo

Si se nos pide elegir números del 1 al 5,

1. *¿Cuántas posibles combinaciones tenemos para elegir?*
2. *Si se nos indica que queremos hacer agrupaciones de dos números, ¿tenemos las mismas combinaciones?*
3. *¿Y si se nos permite repetir números?*

1. Variaciones

1.1. Variaciones sin repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos distinguibles, se le llama variación sin repetición de p elementos, con $p < n$, elegidos entre los n a cualquier disposición ordenada de p elementos distintos del conjunto.

$$V_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n.$$

Ejemplo

¿Cuántas banderas diferentes de tres franjas horizontales de colores distintos pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

1.2. Variaciones con repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos distinguibles, se le llama variación con repetición de p elementos elegidos entre los n a cualquier disposición ordenada, con repeticiones eventuales, de p elementos del conjunto. En este caso puede ocurrir que $p \geq n$.

$$VR_n^p = n^p, \qquad n, p \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo

¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

2. Permutaciones

2.1. Permutaciones sin repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos distinguibles, se le llama permutación de n elementos a cualquier disposición ordenada de todos ellos

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo

¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse con las letras de la palabra PENA?

2.2. Permutaciones con repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos formado por m grupos distintos de elementos indistinguibles de cardinales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$, se llama permutación de los n elementos a cualquier disposición ordenada de todos ellos

$$PR_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}, \qquad \alpha_1, ..., \alpha_m, n \in \mathbb{N} / \alpha_1 + ... + \alpha_m = n.$$

Ejemplo

¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con los dígitos $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$*?*

3. Combinaciones

3.1. Combinaciones sin repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos distinguibles, se le llama combinación sin repetición de p elementos, con $p < n$, elegidos entre los n, a cualquier subconjunto de p elementos distintos del conjunto

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n.$$

Ejemplo

En una reunión de 20 participantes se intercambian saludo entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

3.2. Combinaciones con repetición

Definición

Dado un conjunto con n elementos distinguibles, se llama combinación con repetición de p elementos escogidos entre los n a cualquier colección de p elementos del conjunto, con repeticiones eventuales de algunos de ellos.

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p, \qquad n, p \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo

En una tienda se venden cinco sabores distintos de refresco. Se desea comprar 4, sin importar que se escojan varios del mismo sabor. ¿De cuántas formas se pueden elegir los sabores de refresco? ¿Y si se compran 8 refrescos?