# Algebra-Parcial-Manana-Nov-19.pdf

Anónimo

Álgebra I

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

**1.** Resolver la ecuación en congruencias:

$$43^{79} \cdot x \equiv 22 \ (mod\ 40)$$

Tomando clases en $\mathbb{Z}_{40}$ tenemos la ecuación (1):

$$[43]^{79} \cdot [x] = [22]$$

En $\mathbb{Z}_{40}$, evidentemente se tiene: $[43]^{79} = [3]^{79}$.
Puesto que $mcd(3, 40) = 1$ y $\varphi(40) = 16$, por el Teorema de Euler obtenemos que: $[3]^{16} = [1]$.
(Alternativamente, por comprobación directa $[3]^4 = [1]$).

Y entonces, $[3]^{79} = [3]^{(16\times4+15)} = [3]^{15}$ y su inverso es $[3]$ ya que $[3]^{15} * [3] = [3]^{16} = [1]$
Multiplicando por $[3]$ la ecuación (1), obtenemos:

$$[x] = [3] * [22] = [66] = [26]$$

Es decir:

$$\boxed{x \equiv 26 \ (mod\ 40)}$$

**2.** Resolver la ecuación en congruencias:

$$35 \cdot x \equiv 10 \ (mod\ 1500)$$

El máximo común divisor de 35 y 1500 es 5. Puesto que 5 también divide a 10, podemos dividir todos los coeficientes de la ecuación por 5 y obtenemos la ecuación equivalente:

$$7 \cdot x \equiv 2 \ (mod\ 300)$$

En $\mathbb{Z}_{300}$: $[7] \cdot [x] = [2]$
Ahora, para calcular el inverso de $[7]$ en $\mathbb{Z}_{300}$, usamos el algoritmo extendido de Euclídes:

| | | $u_i$ | $v_i$ |
|---|---|---|---|
| | 300 | 1 | 0 |
| | 7 | 0 | 1 |
| 42 | 6 | 1 | -42 |
| 1 | 1 | -1 | 43 |

Obtenemos:
$300 \cdot (-1) + 7 \cdot (43) = 1$
Tomando clases en $\mathbb{Z}_{300}$:
$[7] \cdot [43] = [1]$
Y por tanto:
$[7]^{-1} = [43]$

Así pues, multiplicando la ecuación en $\mathbb{Z}_{300}$ por $[43]$, obtenemos:

$$[x] = [43] \cdot [2] = [86]$$

Es decir:

$$\boxed{x \equiv 86 (mod\ 300)}$$

**3.** Resolver el sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\begin{cases} 43^{79} \cdot x & \equiv & 22\ (mod\ 40) \\ 35 \cdot x & \equiv & 10\ (mod\ 1500) \end{cases}$$

Por los apartados anteriores, el sistema es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x & \equiv & 26\ (mod\ 40) \\ x & \equiv & 86\ (mod\ 300) \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $x = 26 + 40r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos:

$26 + 40r \equiv 86\ (mod\ 300)$

$40r \equiv 60\ (mod\ 300)$

O equivalentemente:

$2r \equiv 3\ (mod\ 15)$

Multiplicando por 8:

$r \equiv 9\ (mod\ 15)$

Por tanto, para cierto $s \in \mathbb{Z}$, se tiene $r = 9 + 15s$.

Sustituyendo obtenemos:

$$x = 26 + 40 \cdot (9 + 15s) = 386 + 600s$$

Es decir:

$$\boxed{x \equiv 386\ (mod\ 600)}$$