Métodos Numéricos I

Tema 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Parte 2: Normas vectoriales y matriciales

Miguel A. Piñar
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

8 de marzo de 2022

Contenidos

Normas vectoriales

Para medir el tamaño de los vectores se usa el concepto de norma, que generaliza el concepto de módulo para escalares.
Dado un espacio vectorial E, una norma es una aplicación

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$ siendo $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. (Definida positiva).
2. $\|cx\| = |c|\|x\|, \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in E$. (Homogeneidad).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$. (Desigualdad triangular).

Ejemplos de normas vectoriales

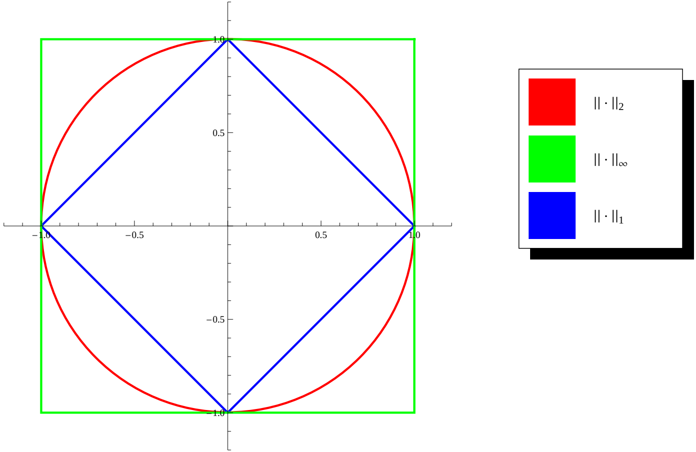
Sea E un espacio de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base suya. Cualquier vector $x \in E$ puede ser expresado de forma única en función de los vectores de la base $\mathcal{B}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

donde los escalares $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se conocen como coordenadas del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$. Utilizando esta notación, son ejemplos de normas los siguientes:

- Norma-1 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- Norma euclídea $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$
- Norma Infinito $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

La Bola unidad para las distintas normas



La norma Manhattan

Equivalencia de las normas vectoriales

Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita E todas las normas vectoriales son equivalentes, en el sentido siguiente: dadas las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$, existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\|x\|_a, \quad \forall x \in E.$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ se verifica:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Convergencia en un espacio normado

Definición

Dado un espacio normado E, decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \subset E$ converge a $x \in E$ (en norma) si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Observación

En un espacio vectorial de dimensión finita E puesto que todas las normas vectoriales son equivalentes, la convergencia es independiente la norma elegida. En particular, la convergencia es equivalente a la convergencia componente a componente.

Normas matriciales

Dado el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, una norma matricial es una aplicación

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siendo $\|\mathbf{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} = 0$. (Definida positiva).
2. $\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|, \forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Homogeneidad).
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Desigualdad triangular).
4. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Norma matricial inducida

Definición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ se define la norma matricial inducida (o subordinada)en la forma

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|}$$

Ejemplos

- Norma-1 $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- Norma Infinito $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

La norma de Frobenius

No todas las normas matriciales son normas inducidas.
La norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

no es una norma inducida.

Proposición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ y la correspondiente norma matricial inducida, se verifica

$$\|\mathbf{A}x\| \leq \|\mathbf{A}\|\|x\|$$

Normas compatibles

Definición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|_v$ y una norma matricial $\|\cdot\|_M$, decimos que ambas normas son compatibles si para toda matriz **A** y todo vector x se verifica

$$\|\mathbf{A}x\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_M \|x\|_v$$

Proposición

Dada una norma matricial $\|\cdot\|_M$ siempre existe una norma vectorial compatible con ella.

λ es valor propio de $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ si y sólo si existe un vector no nulo v tal que

$$\mathbf{A}\, v = \lambda\, v.$$

v se llama *vector propio asociado al valor propio* λ.

Cálculo de valores y vectores propios

$$\mathbf{A}\, v - \lambda\, v = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I})v = 0$$

luego buscamos soluciones no triviales al sistema anterior, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo

$$det(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I}) = 0$$

esto es, debemos calcular las raíces de este polinomio.

$\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ denota el conjunto de matrices cuadradas de orden k con entradas en $\mathbb{C}$

Valores y vectores propios

- Polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}).$$

- Ecuación característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0.$$

- Espectro:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}.$$

- Radio espectral:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : p(\lambda) = 0\}.$$

Normas matriciales y radio espectral

Proposición

Para toda matriz **A** y para toda norma matricial $\|\cdot\|_M$ se verifica $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|_M$.

Proposición

Para toda matriz **A** se verifica

$$\rho(\mathbf{A}) = \inf_{\|\cdot\|_M} \{\|\mathbf{A}\|_M\}$$

Convergencia de sucesiones matriciales

Definición

Decimos que una sucesión de matrices $\{\mathbf{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ converge a una matriz A si existe una norma matricial $\|\cdot\|_M$ para la cual se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}_n - \mathbf{A}\|_M = 0.$$

Observación

Puesto que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes, la convergencia es independiente la norma elegida. En particular, la convergencia es equivalente a la convergencia componente a componente.

Convergencia de las potencias

Proposición

Para toda matriz **A**, las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) $\{\mathbf{A}^n\}_{n\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{0}$

ii) Existe una norma matricial $\|\cdot\|_M$ para la cual se verifica $\|\mathbf{A}\|_M < 1$

iii) $\rho(\mathbf{A}) < 1$

Condicionamiento de una matriz

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = b$ para los vectores

- $b = (32, 23, 33, 31)^T$
- $b^* = (32.1, 22.9, 33.1, 30.9)^T$ (una perturbación de 0.1).

Las soluciones son

- $x = (1, 1, 1, 1)^T$
- $x^* = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1)^T$.

Esto es, se produce un enorme error relativo en la solución.

Condicionamiento de una matriz

Supongamos que **A** es una matriz regular, y consideremos el sistema

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

que tiene por solución $x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
Si alteramos el segundo término considerando un vector $\mathbf{b}^*$, obtenemos una solución distinta $x^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}^*$
Tomando normas vectoriales y matriciales compatibles, podemos calcular el error

$$\|x - x^*\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|b - b^*\| = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}x\|\frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Y por tanto

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Número de condición

Definición

El número de condición (A. Turing) de una matriz regular $\mathbf{A}$, $\kappa(\mathbf{A})$, se define como

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|,$$

donde $\|\bullet\|$ es una norma matricial.

Se tiene que $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$, y el sistema se comportará peor con respecto a la propagación de errores de redondeo cuanto mayor sea $\kappa(\mathbf{A})$.

Observaciones acerca del número de condición

- El número de condición puede ser interpretado como un factor de amplificación de los errores en los datos.
- Para $\kappa(\mathbf{A}) \approx 10^k$ podemos esperar una posible pérdida de k dígitos significativos exactos en la solución calculada, independientemente del método que utilicemos.
- En el ejemplo anterior $\kappa(\mathbf{A}) = 4488$ para la norma $\|\cdot\|_\infty$

Alan Turing (1912-1954)