
Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 6

Ejercicio 6.1: Calcular las siguientes integrales:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$ | b) $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$ | c) $\int (\operatorname{tg}^3(x) + \operatorname{tg}^5(x)) dx$ |
| d) $\int \operatorname{sen}^3(x) dx$ | e) $\int \operatorname{tg}^2(x) dx$ | f) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx$ |
| g) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx$ | h) $\int \frac{x^2}{9+x^6} dx$ | i) $\int \ln(x) dx$ |
| j) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ | k) $\int \operatorname{tg}(2x) dx$ | l) $\int (x^2 + 5)e^{-x} dx$ |
| ll) $\int x^3 \operatorname{sen}(3x) dx$ | m) $\int x \ln(1+x^2) dx$ | n) $\int \frac{x+1}{(x^4-1)} dx$ |
| ñ) $\int \frac{x-2}{x(x+1)(x-1)} dx$ | o) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$ | p) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+3} dx$ |
| q) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x)+2\cos^2(x) \operatorname{sen}(x)} dx$ | r) $\int \operatorname{sen}(3x) \cos(4x) dx$ | s) $\int \sec(x) dx$ |
| t) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ | u) $\int \frac{1}{x[\ln^3(x)-2\ln^2(x)-\ln(x)+2]} dx$ | v) $\int \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) \cos^2(x)} dx$ |

Ejercicio 6.2: Sean a y b dos números reales no nulos. Calcular:

- a) $\int \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2(x) + b^2 \cos^2(x)} dx$ b) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

Ejercicio 6.3: Obtener una fórmula recurrente para las siguientes integrales:

- a) $\int x^n e^{-x} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$

Ejercicio 6.4: Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t) dt}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\operatorname{sen}(t)} dt}{x^2}$

Ejercicio 6.5: Calcular las siguientes integrales:

- | | | |
|--|--|---------------------------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$ | b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(x)} \operatorname{sen} x dx$ | c) $\int_1^2 \frac{x^2}{1-2x^3} dx$ |
| d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ | e) $\int_0^1 x e^{ax^2+b} dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$ | f) $\int_0^1 a^{2x} dx \quad (a > 0)$ |

$$\begin{array}{lll}
\text{g)} \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx & \text{h)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin x}{\cos^2(x)} dx & \text{i)} \int_0^1 \frac{x}{x^4+3} dx \\
\text{j)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(x)} dx & \text{k)} \int_0^1 e^x \cos(e^x) dx & \text{l)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx \\
\text{ll)} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. & \text{m)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}} dx & \text{n)} \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx \\
\text{ñ)} \int_0^1 x^3 e^{2x} dx. & \text{o)} \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx. & \text{p)} \int_1^e \ln(x) dx. \\
\text{q)} \int_a^b \frac{dx}{(x+a)(x+b)} dx \quad (0 < a < b) & \text{r)} \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx & \text{s)} \int_1^2 \frac{x-1}{x(x^2+1)^2} dx
\end{array}$$

Ejercicio 6.6: Estudiar la convergencia y, cuando la haya, calcular el valor las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int_a^{+\infty} x^n dx \quad (a > 0) & \text{b)} \int_{-\infty}^0 e^x dx & \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx \\
\text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx \quad (a \in \mathbb{R}) & \text{e)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \quad (a, b \in \mathbb{R}) & \text{f)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^8} dx \\
\text{g)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x} dx & \text{h)} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx & \text{i)} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}) \\
\text{j)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx & \text{k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx & \text{l)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\
\text{ll)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx & \text{m)} \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}, a < b) & \text{n)} \int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx \\
\text{ñ)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{o)} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx & \text{p)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx \\
\text{q)} \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx. & \text{r)} \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx
\end{array}$$

Ejercicio 6.7: Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente integral converge, calculando el valor de la misma: $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx$.

Ejercicio 6.8: Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+\beta x+\alpha}{x(2x+\alpha)} - 1 \right) dx = 1$.

Ejercicio 6.9: Se define la función gamma como la función $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (i) Probar que dicha integral converge para $x > 0$ y diverge para $x \leq 0$.
- (ii) Probar que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, para cada $x > 0$.
- (iii) Deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.10: Justificar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales (sin necesidad de resolverlas):

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}} dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

g) $\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}} dx$

h) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} dx$

i) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(x)}{x^m} dx \quad (m \in \mathbb{N}).$