Métodos Numéricos I

Tema 3:Interpolación

Parte 3: Funciones *spline*

Miguel A. Piñar
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

12 de mayo de 2022

Contenidos

Definición

Trabajo original: Schœnberg (1947)

Definición

Trabajo original: Schœnberg (1947)

Definición

Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Un spline de grado m relativo a esta partición es una función $s(x)$ que verifica:

$$
\begin{array}{rl}
i) & s(x) = p_i(x) \in \mathbb{P}_m, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1 \\
ii) & s \in \mathcal{C}^{m-1}[a, b].
\end{array}
$$

Alternativamente podemos escribir

Definición

Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Un spline de grado m relativo a esta partición es una función $s(x)$ que verifica:

$$\begin{array}{rlll} i) & s(x) = p_i(x) \in \mathbb{P}_m, & x \in [x_i, x_{i+1}], & i = 0, \dots, n-1 \\ ii') & s^{(j)}(x_i^-) = s^{(j)}(x_i^+) & i = 1, \dots, n-1, & j = 0, \dots, m-1. \end{array}$$

Teorema

Si notamos por $S_m(x_0, \dots, x_n)$ el conjunto de los splines de grado m con nodos $x_0, \dots, x_n$, este conjunto es un espacio vectorial de dimensión $n+m$

Teorema

Si notamos por $S_m(x_0, \ldots, x_n)$ el conjunto de los splines de grado m con nodos $x_0, \ldots, x_n$, este conjunto es un espacio vectorial de dimensión $n + m$

Hacen falta, por tanto, $n + m$ datos de interpolación. Observemos que el problema proporciona $n + 1$ datos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$. Necesitaremos $m - 1$ *datos adicionales*

- $m = 1$, splines lineales, con $\dim S_1(x_0, \ldots, x_n) = n + 1$, ningún dato adicional
- $m = 2$, splines cuadráticos, con $\dim S_2(x_0, \ldots, x_n) = n + 2$, un dato adicional
- $m = 3$, splines cúbicos, con $\dim S_3(x_0, \ldots, x_n) = n + 3$, dos datos adicionales
- $\ldots\ldots$

Spline lineal de interpolación ($m = 1$)

Problema de interpolación mediante splines lineales

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de hallar, si existe, un spline $s(x) \in S_1(x_0, \ldots, x_n)$ tal que

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

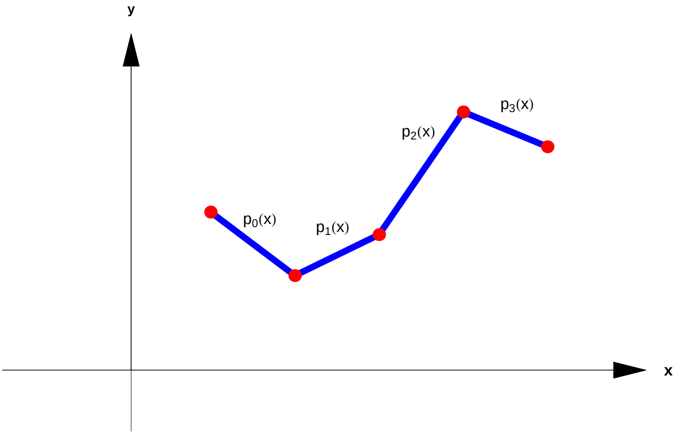
Problema de interpolación mediante splines lineales

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de hallar, si existe, un spline $s(x) \in S_1(x_0, \dots, x_n)$ tal que

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Este problema tiene una única solución. Basta tomar $p_i(x)$ como el polinomio de interpolación de grado 1 en los extremos del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Spline lineal de interpolación $(m = 1)$



Spline cuadrático de interpolación ($m = 2$)

Problema de interpolación mediante splines cuadráticos

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de hallar, si existe, un spline $s(x) \in S_2(x_0, \dots, x_n)$ tal que

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Spline cuadrático de interpolación ($m = 2$)

Problema de interpolación mediante splines cuadráticos

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de hallar, si existe, un spline $s(x) \in S_2(x_0, \ldots, x_n)$ tal que

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Necesitamos un dato adicional, que suele ser la derivada de la función en alguno de los nodos.

Spline cúbico de interpolación ($m = 3$)

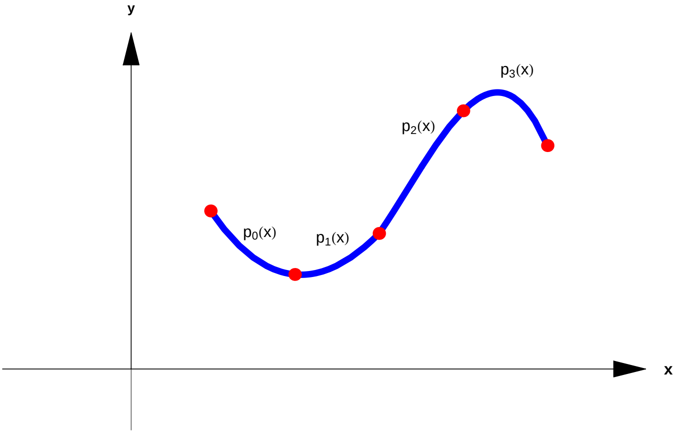
Problema de interpolación mediante splines cúbicos

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se trata de hallar, si existe, un spline $s \in S_3(x_0, \ldots, x_n)$ tal que

$$s(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Este problema tiene infinitas soluciones. Se necesitan dos condiciones adicionales. Las más habituales son:

1. $s'(a) = \alpha, \quad s'(b) = \beta$ spline ligado o de extremo sujeto
2. $s''(a) = s''(b) = 0$ spline natural
3. $s'(a) = s'(b), \quad s''(a) = s''(b)$ spline periódico


y
$p_3(x)$
$p_2(x)$
$p_0(x)$
$p_1(x)$
x

Para calcular un spline cúbico es necesario obtener n polinomios de grado 3:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Para calcular un spline cúbico es necesario obtener n polinomios de grado 3:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Dado el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $p_i(x)$ sería el polinomio de interpolación de Hermite para los datos:

$$p_i(x_i) = f_i, \qquad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

$$p_i'(x_i) = d_i, \qquad p_i'(x_{i+1}) = d_{i+1}$$

Para calcular un spline cúbico es necesario obtener n polinomios de grado 3:

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Dado el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $p_i(x)$ sería el polinomio de interpolación de Hermite para los datos:

$$p_i(x_i) = f_i, \qquad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

$$p_i'(x_i) = d_i, \qquad p_i'(x_{i+1}) = d_{i+1}$$

¡ si conocieramos las derivadas d_i !

Cálculo del spline cúbico de interpolación

Supongamos que conocemos las derivadas d_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, y notemos

Longitud del intervalo:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

Pendiente en el intervalo:

$$\Delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

El polinomio $p_i(x)$ se puede calcular mediante la tabla

$$
\begin{array}{ccccc}
x_i & f_i & & & \\
 & & d_i & & \\
x_i & f_i & & \frac{\Delta_i - d_i}{h_i} & \\
 & & \Delta_i & & \frac{(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i}{h_i^2} \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & \frac{d_{i+1} - \Delta_i}{h_i} & \\
 & & d_{i+1} & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & & &
\end{array}
$$

De este modo, el polinomio $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, se escribe en la forma:

$$\begin{aligned} p_i(x) &= f_i + d_i(x - x_i) + \frac{\Delta_i - d_i}{h_i}(x - x_i)^2 \\ &\quad + \frac{(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i}{h_i^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1}) \end{aligned}$$

Por construcción, tenemos garantizado que $s(x)$ es clase $\mathcal{C}^1[a, b]$.

Cálculo del spline cúbico de interpolación

Para obtener la clase $\mathcal{C}^2$, imponemos

$$p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Para obtener la clase $\mathcal{C}^2$, imponemos

$$p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Como

$$\begin{aligned} p_i''(x_{i+1}) &= 2\,\frac{d_i + 2d_{i+1} - 3\Delta_i}{h_i}, \\ p_{i+1}''(x_{i+1}) &= -2\,\frac{2d_{i+1} + d_{i+2} - 3\Delta_{i+1}}{h_{i+1}}, \end{aligned}$$

igualando se obtiene

$$\frac{1}{h_i}d_i + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)d_{i+1} + \frac{1}{h_{i+1}}d_{i+2} = 3\left(\frac{\Delta_i}{h_i} + \frac{\Delta_{i+1}}{h_{i+1}}\right)$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-2$.

Cálculo del spline cúbico de interpolación

igualando se obtiene

$$\frac{1}{h_i}d_i + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)d_{i+1} + \frac{1}{h_{i+1}}d_{i+2} = 3\left(\frac{\Delta_i}{h_i} + \frac{\Delta_{i+1}}{h_{i+1}}\right)$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-2$.
que es un sistema de $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incognitas

igualando se obtiene

$$\frac{1}{h_i} d_i + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) d_{i+1} + \frac{1}{h_{i+1}} d_{i+2} = 3\left(\frac{\Delta_i}{h_i} + \frac{\Delta_{i+1}}{h_{i+1}}\right)$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-2$.
que es un sistema de $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incognitas
Si $s(x)$ es un spline cúbico natural

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= 0 \Longrightarrow 2\,\frac{1}{h_0} d_0 + \frac{1}{h_0} d_1 = 3\,\frac{\Delta_0}{h_0}, \\ s''(x_n) &= 0 \Longrightarrow \frac{1}{h_{n-1}} d_{n-1} + 2\,\frac{1}{h_{n-1}} d_n = 3\,\frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}. \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h_0} & \frac{1}{h_0} & & & \\ \frac{1}{h_0} & 2\left(\frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \\ & & & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{2}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Términos independientes

$$3\left(\frac{\Delta_0}{h_0}, \left(\frac{\Delta_0}{h_0}+\frac{\Delta_1}{h_1}\right), \ldots, \left(\frac{\Delta_{n-2}}{h_{n-2}}+\frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}\right), \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}\right)^t$$

Como la matriz es tridiagonal y estrictamente diagonal dominante el sistema tiene una única solución.

Splines de extremo sujeto (o ligados)

En los otros dos casos (spline ligado y periódico) la situación es análoga, sólo cambian la primera y la última de las ecuaciones

Splines de extremo sujeto (o ligados)

En los otros dos casos (spline ligado y periódico) la situación es análoga, sólo cambian la primera y la última de las ecuaciones

En el caso de los splines de extremo sujeto (o ligados), puesto que $s'(a)$ y $s'(b)$ son conocidos, la primera ecuación se sustituye por

$$d_0 = s'(a)$$

y la última por

$$d_n = s'(b)$$

Splines periódicos

En el caso de los splines periódicos, puesto que debe verificarse

$$s'(a) = s'(b),$$
$$s''(a) = s''(b),$$

la primera ecuación se sustituye por

$$d_0 - d_n = 0,$$

y la última ecuación quedaría

$$\frac{1}{h_0} d_1 + 2\left(\frac{d_0}{h_0} + \frac{d_n}{h_{n-1}}\right) + \frac{1}{h_{n-1}} d_{n-1} = 3\left(\frac{\Delta_0}{h_0} + \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$