GEOMETRÍA II

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

Tema 1

1. Diagonalización de Endomorfismos y Matrices

En la asignatura Geometría I, dedicada al Álgebra Lineal básica, se estudiaron las transformaciones naturales entre espacios vectoriales o aplicaciones lineales. Estas aplicaciones aparecen en muy diversos contextos matemáticos, por lo que el análisis detallado de su naturaleza resulta fundamental. En este tema vamos a profundizar en el conocimiento de la estructura íntima de unas aplicaciones lineales especiales, los llamados endomorfismos en un espacio vectorial, enfoncando nuestro interés en la teoría de diagonalización y su traslación natural al contexto de las matrices cuadradas. Expliquemos la idea básica que subyace debajo de esta cuestión.

1.1. Definiciones básicas

Representaremos por la letra $\mathbb{K}$ al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$. Denotaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ al espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con dimensión $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y denotemos por $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de los endomorfismos en $V(\mathbb{K})$. Recordemos que una aplicación $f\colon V \to V$ pertenece a $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ si satisface

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(u_j), \quad \forall\, \lambda_j \in \mathbb{K},\, u_j \in V,\ j = 1, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N}.$$

A cada endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ y base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se le asocia una única matriz $M(f, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que se llama *matriz del endomorfismo f en la base B*. Para representar $M(f, B)$ usaremos siempre *notación columna*, por lo que si $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, n$, entonces

$$M(f, B) = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde como siempre el índice i indica fila y el j columna. Esta matriz controla el comportamiento analítico del endomorfismo en el siguiente sentido. Si

$$V \to \mathbb{K}^n, \quad v \mapsto v_B,$$

es el isomorfismo natural de *asignación de coordenadas en la base* B con notación columna, esto es,

$$v_B = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \quad \forall\, v \in V,$$

entonces las coordenadas de $f(v)$ en B, que lógicamente se denotan $f(v)_B$, se calculan de la siguiente manera:

$$f(v)_B = M(F, B) \cdot v_B. \tag{1}$$

En particular, $f(v_j)_B$ es la j-ésima columna de $M(f, B)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

La aplicación (que depende de la base B fijada)

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto M(F, B),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para comprender mejor el comportamiento de f, lo ideal sería encontrar una base B en la que su representación analítica, esto es su matriz $M(f, B)$, sea lo más sencilla posible. Naturalmente, las matrices de estructura más simple son las de naturaleza diagonal.

Introduciremos la notación

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\lambda_j \delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

para representar la matriz diagonal con entradas ordenadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

representa como siempre la delta de Kronecker; como siempre denotaremos por

$$\mathrm{I}_n = D(1, \overset{n}{\ldots}, 1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

a la matriz identidad de orden n en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De todo lo anterior surge la siguiente pregunta natural:

Cuestión 1.1 *Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, ¿es posible encontrar una base ordenada B de V en la que $M(f, B)$ sea diagonal?*

Siendo más precisos, la anterior cuestión plantea si es posible encontrar una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ para la que

$$f(v_j) = \lambda_j v_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

esto es $M(f,B) = D(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Este problema general admite una traslación sencilla al lenguaje matricial. Para comprenderlo, hemos de recordar como cambia la matriz de un endomorfismo al cambiar de base. Dadas dos bases ordenadas B_1, B_2 de V y un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, recordemos que se satisface la siguiente fórmula:

$$M(f,B_1) = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1) \cdot M(f,B_2) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2) = P^{-1} \cdot M(f,B_2) \cdot P, \qquad (2)$$

donde

$$P = M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2) \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})$$

es la matriz del cambio de base de B_1 a B_2 en notación columna, esto es, la matriz que tiene por j-ésima columna las coordenadas del vector j-ésimo de B_1 en la base B_2. Como siempre $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})$ representa el grupo de las matrices regulares de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$. La fórmula (2) establece que las matrices $M(f,B_1)$ y $M(f,B_2)$ son *semejantes* de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.2 *Dos matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen* semejantes *si existe una matriz $P \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})$ tal que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$.*

La relación binaria de semejanza de matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es de equivalencia, esto es, satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Observación 1.3 *Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, las matrices $\{M(f,B) \colon B \text{ base ordenada de } V\}$ determinan una clase de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ bajo la relación de semejanza; ver (2).*

Atendiendo a la Oservación 1.3, la Cuestión 1.1 se puede enunciar de la siguiente forma alternativa y equivalente:

Cuestión 1.4 *Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ¿es posible encontrar una matriz diagonal en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejante a A?, o equivalentemente, ¿la clase de semejanza de A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contiene una matriz diagonal?*

Por simplicidad de lenguaje y para organizar lógicamente todo lo explicado, es conveniente introducir la siguiente definición.

Definición 1.5 *Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ se dice* diagonalizable *si existe una base $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ de V en la que $M(f,B)$ es una matriz diagonal $D(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, esto es,*

$$f(v_j) = \lambda_j v_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

En el caso de que f sea diagonalizable, al algoritmo para encontrar tal base B se le llama proceso de diagonalización *de f.*

Análogamente, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal, esto es, existe $P \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Con este lenguaje, las Cuestiones 1.1 y 1.4 se enuncian simplificadamente así:

> *¿Todo endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ y toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son diagonalizables?.*

Aunque ya está implícito en la discusión anterior, la proposición de abajo explica desde distintos enfoques la equivalencia lógica de ambas cuestiones. En efecto, asociemos a cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el endomorfismo de $\mathbb{K}^n$

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad f_A(x) = A \cdot x, \tag{3}$$

que evidentemente tiene $M(f_A, B_0) = A$, donde B_0 es la base usual de $\mathbb{K}^n$.

Proposición 1.6 *Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, B es base ordenada de V y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ entonces:*

a) *A es diagonalizable si y sólo si $f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$ es diagonalizable.*

b) *f es diagonalizable si y sólo si $A = M(f, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable.*

Demostración: Si B es una base de $\mathbb{K}^n$ y $P = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}, B, B_0)$ entonces

$$M(f_A, B) \text{ es diagonal} \iff P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ es diagonal.}$$

De la Definición 1.5 se sigue a).

Para b), observemos que f es diagonalizable si y sólo si existe B' base ordenada de V tal que $M(f, B')$ es diagonal, lo que por (2) equivale a que

$$P^{-1} \cdot M(f, B) \cdot P \text{ es diagonal para } P = M(\mathrm{Id}_V, B', B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Lo último expresa que la matriz $A = M(f, B)$ es diagonalizable según Definición 1.5. ■

Es importante reflexionar sobre los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7 *las Cuestiones 1.1 y 1.4 no han de tener en general una respuesta positiva; aquí presentamos algunos contraejemplos:*

1) *Para cada $\theta \in]0, 2\pi[$, $\theta \neq \pi$, el giro de ángulo θ en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$*

$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \colon g(x, y) = \big(\cos(\theta)x - sen(\theta)y, sen(\theta)x + \cos(\theta)y\big),$$

no es diagonalizable.

En efecto, si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, es inmediato comprobar que la ecuación

$$g(x, y) = \lambda(x, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta)x - \mathrm{sen}(\theta)y - \lambda x = 0 \\ \mathrm{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y - \lambda y = 0 \end{array} \right. ,$$

tiene por solución única $(x, y) = (0, 0)$. De aquí que sea imposible encontrar una base B de $\mathbb{R}^2$ para la que $M(g, B)$ sea diagonal.

Como consecuencia, si $B_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^2$, la Proposición 1.6 nos dice que la matriz

$$A = M(g, B_0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable, esto es, no es semejante a ninguna matriz diagonal.

2) *El endomorfismo* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, y)$, *tampoco es diagonalizable.*

En efecto, f trivialmente cumple

$$(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})^2 := (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \circ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = 0.$$

Si existiesen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f(v) = \lambda v$, tendríamos que

$$(0,0) = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})^2(v) = (\lambda - 1)^2 v$$

y por tanto $\lambda = 1$. Este razonamiento implica que si f estuviese representado en una base B por una matriz diagonal entonces $M(f, B) = \mathrm{I}_2$ y $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, lo que es absurdo.

Como antes, por la Proposición 1.6 la matriz $A = M(f, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable, esto es, no es semejante a ninguna matriz diagonal.

1.2. Vectores y valores propios

Nuestro siguiente objetivo es abordar la solución al problema de determinar si un endomorfismo (o matriz) es diagonalziable.

Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ es un endomorfismo, diagonalizar f es encontrar una base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ en la que $f(v_j)$ sea linealmente dependiente con v_j (esto es, $f(v_j)$ y v_j son colineales o múltiplos). Para ello hemos de considerar la ecuación general

$$f(v) = \lambda v, \quad v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{K},$$

donde el vector $v \in V$ y el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ han de ser interpretados como incógnitas. Claramente $v = \vec{0}$ es solución de la anterior ecuación para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, pero este caso trivial ha de ser excluido de nuestra discusión ya que ninguna base de V contiene al vector $\vec{0}$. Introduzcamos la notación precisa.

Definición 1.8 *Dado* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, *un escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *se dice un* valor propio o autovalor *de* f *si existe un vector* $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ *tal que*

$$f(v) = \lambda v. \tag{4}$$

En este caso, al vector v *se le denomina* vector propio o autovector *asociado al valor propio* λ *de* f.

Análogamente, dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *un escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *se dice un* valor propio o autovalor *de* A *si existe un vector* $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ *(notación columna) tal que*

$$A \cdot x = \lambda x, \tag{5}$$

esto es, x *es vector propio para el endomorfismo* $f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$ *asociado al valor propio* λ *de* f_A*; ver* (3)*. En este caso, al vector* x *se le denomina* vector propio o autovector *asociado al valor propio* λ *de la matriz* A.

Como consecuencia de las Definiciones 1.5 y 1.8, un endomorfismo (o matriz) es diagonalizable si y sólo si V admite una base formada por vectores propios para f, y el proceso de diagonalización consiste en determinarla.

Observación 1.9 *De la Definición 1.8, si* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$, *es inmediato observar que:*

- *λ es valor propio de f si y sólo si λ es valor propio de $A = M(f, B)$; ver* (1).
- *v es un vector propio de f asociado a λ si y sólo si $x = v_B$ es un vector propio de $A = M(f, B)$ asociado a λ; ver* (1).
- *x es un vector propio de A asociado a λ si y sólo si x es un vector propio de f_A asociado a λ; ver* (3).

Los siguientes hechos son de comprobación inmediata (ver Ejemplo 1.7):

1) Para cada $\theta \in]0, 2\pi[$, $\theta \neq \pi$, el giro de ángulo θ en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ no tiene valores propios reales.

2) El único valor propio del endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$, es $\lambda = 1$.

1.3. Polinomio característico y ecuación característica

Resolver la ecuación (4) para un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ (o su equivalente (5) para una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), pasa por encontrar todos los escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ y vectores $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ (o $x \in \mathbb{K}^n$) que la satisfacen. El siguiente procedimiento nos dará información sobre cómo detectar los valores de $\lambda \in \mathbb{K}$ viables, obviando en principio los vectores propios $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ (o $x \in \mathbb{K}^n$) asociados. Para entender el fondo del argumento hemos de recordar la definición de determinante y traza para un endomorfismo.

Definición 1.10 *Dado $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, se define*

$$\det(f) = \det\big(M(f, B)\big), \quad \mathrm{Traza}(f) = \mathrm{Traza}\big(M(f, B)\big),$$

donde B es cualquiera base ordenada de V.

Como la matriz que representa a un endomorfismo cambia por semejanza al cambiar de base, la consistencia de la anterior definición se basa en que el determinante y la traza de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no se alteran por semejanza, esto es,

$$\det(A) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P), \quad \mathrm{Traza}(A) = \mathrm{Traza}\big(P^{-1} \cdot A \cdot P\big) \quad \forall\, P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}).$$

Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y volviendo a nuestro problema, el que exista un vector $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $f(v) = \lambda v$ equivale a que $(f - \lambda \mathrm{Id}_V)(v) = \vec{0}$, esto es $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_V)$, y por tanto que

$$\det(f - \lambda \mathrm{Id}_V) = 0;$$

nótese que $v \neq \vec{0}$. Por un razonamiento análogo, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \vec{0}$ tal que $A \cdot x = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, entonces

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0.$$

Si denotamos por $\mathbb{K}[t]$ el anillo de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ en la variable t, este razonamiento nos lleva a concluir que:

Lema 1.11 *Los valores propios de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ son las raíces en $\mathbb{K}$ del polinomio en el $\mathbb{K}[t]$ definido por*

$$p_f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad p_f(t) := \det(f - t\mathrm{Id}_V). \tag{6}$$

Análogamente, los valores propios de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son las raíces en $\mathbb{K}$ del polinomio en $\mathbb{K}[t]$ definido por

$$p_A\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad p_A(t) := \det(A - t\mathrm{I}_n). \tag{7}$$

Definición 1.12 *Dado* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$*, al polinomio* $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ *dado por* (6) *se le llama* polinomio característico *de* f*. La ecuación*

$$p_f(t) = 0$$

se denomina ecuación característica *de* f*, cuyas soluciones o raíces en* $\mathbb{K}$ *son los valores propios de* f*.*

Análogamente, dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, al polinomio* $p_A(t) \in \mathbb{K}[t]$ *dado por* (7) *se le llama* polinomio característico *de* A*. La ecuación*

$$p_A(t) = 0$$

se denomina ecuación característica *de* A*, cuyas soluciones o raíces en* $\mathbb{K}$ *son los valores propios de* A*.*

Es inmediato comprobar que:

Observación 1.13 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(a) *Dos matrices semejantes en* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tienen el mismo polinomio característico.*

(b) *Si* B *es una base de* V*,* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ *y* $A = M(f, B)$*, entonces* $p_f(t) = p_A(t)$*. En particular,* $p_A(t) = p_{f_A}(t)$*.*

(c) *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *y escribimos* $p_A(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$*, entonces*

$$c_n = (-1)^n,\ c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A),\ c_0 = \det(A),$$

donde $\mathrm{Tr}(A)$ *y* $\det(A)$ *indican traza y determinante de* A*, respectivamente.*

(d) *Si* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ *con* $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ *y escribimos* $p_f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$*, entonces*

$$c_n = (-1)^n,\ c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(f),\ c_0 = \det(f),$$

donde $\mathrm{Tr}(f)$ *y* $\det(f)$ *indican traza y determinante de* f*, respectivamente.*

Demostración : Para probar (a), consideremos $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ y escribamos $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Usando que $P^{-1} \cdot A \cdot P - t\mathrm{I}_n = P^{-1} \cdot (A - t\mathrm{I}_n) \cdot P$, un cálculo elemental nos dice que

$$p_C(t) = \det(C - t\mathrm{I}_n) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - t\mathrm{I}_n) = \det\left(P^{-1} \cdot (A - t\mathrm{I}_n) \cdot P\right) =$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A - t\mathrm{I}_n) \det(P) = \det(A - t\mathrm{I}_n) = p_A(t).$$

Para probar (b), recordemos que, dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, por definición

$$\det(f) = \det\left(M(f, B)\right), \quad B \text{ base ordenada de } V,$$

expresión que no depende de la base utilizada (consecuencia inmediata de (2)). Usando este enunciado para el endomorfismo $f - t\mathrm{Id}_V$, tenemos que

$$p_f(t) = \det\left(f - t\mathrm{Id}_V\right) = \det\left(M(f - t\mathrm{Id}_V, B)\right) = \det\left(M(f, B) - M(t\mathrm{Id}_V, B)\right) =$$

$$= \det\left(M(f, B) - t\mathrm{I}_n\right) = p_{M(f,B)}(t)$$

para cualquiera base B de V. La identidad $p_A(t) = p_{f_A}(t)$ se sigue de que $A = M(f_A, B_0)$, donde B_0 es la base usual de $\mathbb{K}^n$; ver (3).

Para ver (c), recordemos que dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right), \tag{8}$$

donde $\mathcal{S}_n$ es el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, y para cada $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\mathrm{sig}(\sigma) = \pm 1$ denota su signatura ($+1$ si es par y -1 si es impar).

Escribamos $p_A(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$, $c_j \in \mathbb{K}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$.

Como $p_A(t) = \det(A - t\mathrm{Id}_n)$, el término independiente c_0 de $p_A(t)$, esto es $p_A(0)$, coincide con $\det(A)$. Por otra parte la única permutación de $\mathcal{S}_n$ que fija $n-1$ elementos es la identidad. Como las únicas entradas de la matriz $A - t\mathrm{Id}_n$ no constantes (esto es, iguales a polinomios en t de grado 1) son las posicionadas en la diagonal principal, la expresión (8) nos dice que el único sumando en el desarrollo del determinante $p_A(t)$ con monomios en t de grado $\geq n-1$ es el asociado a la permutación identidad $\sigma = \mathrm{Id} \in \mathcal{S}_n$, esto es, el sumando $(a_{11} - t) \cdots (a_{nn} - t)$. Por tanto

$$p_f(t) = (a_{11} - t) \cdots (a_{nn} - t) + q(t), \quad \text{con } \mathrm{gr}(q) \leq n - 2,$$

de donde

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj} \right) = (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(A).$$

El resultado (d) para un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ se sigue de (c) y de que

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\big(M(f, B)\big), \quad B \text{ base de } V,$$

expresión que no depende de la base utilizada. ■

Es especialmente ilustrativo el estudio del endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$. En este caso $p_f(t) = (1 - t)^2 = p_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}}(t)$, pero $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Esto demuestra que dos endomorfismos distintos pueden tener el mismo polinomio característico, o en versión matricial, que dos matrices con el mismo polinomio característico no han de ser semejantes.

Consideremos el caso más general de matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ satisfaciendo

$$a_{ij} = 0,\ 1 < j < i < n, \quad a_{jj} = \lambda \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, n.$$

No es difícil ver que una tal matriz A es diagonalizable si y sólo si $A = \lambda \mathrm{I}_n$. En efecto, como $p_A(t) = (\lambda - t)^n$ entonces λ es el único valor propio de A. Por tanto $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es diagonalizable si y sólo si f_A viene representado por la matriz $\lambda \mathrm{Id}_n$ en alguna base de $\mathbb{K}^n$, esto es, $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ y $A = M(f_A, B_0) = \lambda \mathrm{I}_n$. Por tanto, si de inicio $A \neq \lambda \mathrm{I}_n$ concluimos que f_A (o la matriz A) no es diagonalizable a pesar de que los endomorfismos f_A y $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ tengan el mismo polinomio característico.

De la anterior discusión, cobra importancia la resolución de las ecuaciones características $p_f(t) = 0$ para endomorfismos $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, o las correspondientes $p_A(t) = 0$ para matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En este contexto es conveniente recordar algún lenguaje y resultados algebraicos básicos del álgebra polinomial.

(1) Si λ es una raíz de un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces $p(t)$ es *divisible* por $t - \lambda$ en el anillo $\mathbb{K}[t]$, esto es, existe $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que $p(t) = (t - \lambda) q(t)$.

(2) Un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ se dice *irreducible* si no existen polinomios $h(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ tales que $1 \leq \mathrm{gr}(h(t)), \mathrm{gr}(q(t)) < \mathrm{gr}(p(t))$ y $p(t) = h(t)q(t)$.

(3) Se dice que $h(t) \in \mathbb{K}[t]$ es un *factor simple* de $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ si $\mathrm{gr}(h(t)) = 1$ y existe $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que $p(t) = h(t)q(t)$. De igual forma, $h(t) \in \mathbb{K}[t]$ se dice un *factor cuadrático* de $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ si $\mathrm{gr}(h(t)) = 2$ y existe $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que $p(t) = h(t)q(t)$.

(4) **Teorema Fundamental del Álgebra.** Todo polinomio $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ con $\mathrm{gr}(p(t)) \geq 1$ se descompone en $\mathbb{C}[t]$ como producto de factores simples (tantos como el grado de $p(t)$). Equivalentemente, todo polinomio $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ con $\mathrm{gr}(p(t)) \geq 1$ tiene una raíz compleja.

(5) Si $p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ $(a \neq 0)$ y llamamos $\Delta = b^2 - 4ac$, entonces $p(t)$ tiene las siguientes dos raíces como polinomio en $\mathbb{C}[t]$:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

En particular, de la expresión $p(t) = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ se deduce que:

- Si $\Delta > 0$ entonces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, y $p(t)$ descompone en $\mathbb{R}[t]$ con dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $p(t)$ descompone en $\mathbb{R}[t]$ con una sola raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$ entonces $p(t)$ es irreducible en $\mathbb{R}[t]$, y las raíces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de $p(t)$ en $\mathbb{C}$ son números complejos distintos y conjugados.

(6) Todo polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ con $\mathrm{gr}(p(t)) \geq 1$ se descompone en $\mathbb{R}[t]$ de la forma

$$p(t) = a \left(\prod_{j=1}^{r} (t - \lambda_j) \right) \left(\prod_{i=1}^{s} q_i(t) \right),$$

donde

- $a \neq 0$ es el coeficiente líder de $p(t)$.
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son las raíces reales de $p(t)$ (puede haberlas repetidas).
- $q_i(t) = t^2 + b_i t + c_i$, $i = 1, \ldots, s$, son factores quadráticos irreducibles de $p(t)$ en $\mathbb{R}[t]$ (puede haberlos repetidos).

En particular, $\mathrm{gr}(p(t)) = r + 2s$.

(7) Como consecuencia trivial del item (6), todo polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ con $\mathrm{gr}(p(t))$ impar tiene al menos una raíz real.

Para el siguiente resultado, que jugará un papel relevante para algunos cálculos futuros, necesitamos introducir la siguiente notación.

Un *cambio de signo* en una lista ordenada $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de números reales es cualquier sub-par (a_i, a_j) de coeficientes consecutivos tal que $a_i \cdot a_j < 0$ y $a_h = 0$ para todo h con $i < h < j$ (si $j = i + 1$ esta última condición es vacía). Por ejemplo, la lista $(-1, 0, 2, -2, 1, 3, -4)$ presenta exactamente 4 cambios de signo, los asociados a los sub-listas $(-1, 0, 2)$, $(2, -2), (-2, 1), (3, -4)$.

Teorema 1.14 (Criterio de Descartes) *Consideremos un polinomio*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t], \quad n \in \mathbb{N},$$

y llamemos

$c(p)$ = número de cambios de signo en la lista de coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

$r_+(p)$= número de raíces positivas (> 0) contadas con multiplicidad de $p(t)$.

Entonces el número entero $c(p) - r_+(p)$ es no negativo y par.

Es conveniente observar que si se cambia $p(t)$ por $p^*(t) = p(-t)$ y se aplica el mismo criterio, se concluye que el número $r_-(p) = r_+(p^*)$ de raíces negativas de $p(t)$ es menor o igual que el número de cambios de signo $c(p^*)$ en la lista ordenada de coeficientes de $p^*(t)$, y que $c(p^*) - r_-(p)$ es par.

Demostración : Como el número $c(p)$ no se altera si se multiplica $p(t)$ por una constante no nula, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_n = 1$. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p(0) = a_0 \neq 0$, esto es, que 0 no es raíz de $p(t)$; en otro caso podemos descomponer $p(t) = t^k q(t)$, $k \in \mathbb{N}$, donde $q(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio con $q(0) \neq 0$, y como claramente $c(q) = c(p)$ y $r_+(q) = r_+(p)$, bastaría con probar el teorema para $q(t)$.

En estas condiciones observemos que la lista de coeficientes de $p(t)$ queda

$$(a_0 = p(0) \neq 0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1 > 0).$$

Un argumento combinatorio elemental nos dice que

$$p(0) > 0 \Longleftrightarrow c(p) \text{ es par;} \tag{9}$$

basta observar que:

- cada sub-lista ordenada de coeficientes $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j)$, $i < j$, con $a_i, a_j > 0$ y $a_h \leq 0$ para todo h satisfaciendo $i < h < j$ (esa última condición es vacía cuando $j = i + 1$), contiene exactamente dos o ningún cambio de signo de la lista $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$.

- $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1)$ es unión de sub-listas como las del item anterior, sucesivas y engarzadas final de una con principio de su consecutiva, si y sólo si $a_0 > 0$.

Hagamos la demostración por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Para probar la base de la inducción supongamos que $n = 1$. En este caso $p(t) = t+a_0$ y la única raíz es $-a_0$. Si $a_0 < 0$ entonces $c(p) = 1 = r_+(p)$, y si $a_0 > 0$ entonces $c(p) = 0 = r_+(p)$, por lo que el teorema es cierto.

Admitamos como hipótesis que el teorema es cierto para polinomios de grado $n-1$, $n \geq 2$, y cerremos la inducción probándolo para polinomios de grado n.

Comencemos demostrando inductivamente que $c(p) - r_+(p)$ es par para cualquier polinomio $p(t)$ de grado n. Discutamos dos casos:

(I) Supongamos $p(0) < 0$. Entonces la ecuación (9) nos garantiza que $c(p)$ es impar; veamos que también los es $r_+(p)$. Como $p(t)$ tiene coeficiente líder 1 sabemos que $\lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty$, por lo que $p(t)$ cambia de signo en $(0, +\infty)$ y el Teorema de Bolzano nos garantiza que existe $\lambda_1 > 0$ tal que $p(\lambda_1) = 0$. Por tanto $p(t) = (t - \lambda_1)q(t)$, donde $q(t)$ es un polinomio de grado $n-1$ con coeficiente lider 1 y $q(0) = -p(0)/\lambda_1 > 0$. Por la hipótesis de inducción $c(q) - r_+(q)$ es par, y además $c(q)$ es par por (9), de donde $r_+(q)$ es par también. Como $r_+(q) = r_+(p) - 1$ (ya que detraemos la raíz $\lambda_1 > 0$ de $p(t)$), inferimos que $r_+(p)$ es impar como queríamos demostrar.

(II) Supongamos $p(0) > 0$. Entonces la ecuación (9) nos garantiza que $c(p)$ es par; veamos que también los es $r_+(p)$. Si se diese el caso $r_+(p) = 0$ claramente habríamos acabado, por lo que basta con razonar cuando $r_+(p) > 0$. Como $r_+(p) > 0$ hay al menos una raíz $\lambda_1 > 0$ de $p(t)$, y por tanto $p(t) = (t - \lambda_1)q(t)$, donde $q(t)$ es un polinomio de grado $n-1$ con coeficiente lider 1 y $q(0) = -p(0)/\lambda_1 < 0$. Por la hipótesis de inducción $c(q) - r_+(q)$ es par, y además $c(q)$ es impar por (9), de donde $r_+(q)$ es impar también. Como $r_+(q) = r_+(p) - 1$ (ya que detraemos la raíz $\lambda_1 > 0$ de $p(t)$), inferimos que $r_+(p)$ es par como queríamos demostrar.

Para acabar el proceso inductivo correctamente, hemos de comprobar que $c(p) - r_+(p) \geq 0$. Por reducción al absurdo supongamos que $c(p) - r_+(p) < 0$, y por tanto $r_+(p) \geq c(p) + 2 \geq 2$ ya que $c(p) - r_+(p)$ es par (de aquí que $p(t)$ tenga al menos dos raíces positivas). Por el Teorema de Rolle entre *cada dos raíces positivas* de $p(t)$ ha de haber una raíz (positiva) de la función derivada $p'(t)$ de $p(t)$, de donde $p'(t)$ ha de tener al menos $r_+(p) - 1$ raíces positivas, y por tanto concluimos que

$$r_+(p') \geq c(p) + 1. \tag{10}$$

Es evidente que para cada $k \in \{n-1, \ldots, 1, 0\}$ el coeficiente de t^k en $p'(t)$ tiene el mismo signo que el de t^{k+1} en $p(t)$ o son ambos nulos, por lo que $c(p') \leq c(p)$ y la ecuación (10) implica que

$$r_+(p') \geq c(p') + 1.$$

Esto genera una contradicción con nuestra hipótesis de inducción, ya que $p'(t)$ es un polinomio de grado $n-1$ y necesariamente $c(p') - r_+(p') \geq 0$.

■

1.4. Teorema Fundamental de la Diagonalización

El objetivo de esta sección será probar el Teorema fundamental de la diagonalización. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

Lema 1.15 *Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ es diagonalizable entonces su polinomio característico $p_f(t)$ tiene k raices en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades (esto es, $p_f(t)$ descompone sobre $\mathbb{K}$). Estas raíces se corresponden con los valores propios de f (ver Lema 1.11).*

Demostración: Como f es diagonalizable existe una base ordenada B de V en la que

$$M(f, B) = D(\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

donde $\{(\mu_j \in \mathbb{K} \colon j = 1 \ldots, n\}$ es el conjunto de los valores propios de f. Por tanto,

$$p_f(t) = \det(f - t\mathrm{Id}_V) = \det\big(M(f - t\mathrm{Id}_V, B)\big) = \det\big(D((\mu_1, \ldots, \mu_n) - t\mathrm{I}_n\big) =$$

$$= \det\big(D(\mu_1 - t, \ldots, \mu_n - t)\big) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (t - \mu_j).$$

■

Una vez controlados los valores propios de un endomorfismo, el proceso de diagonalización requiere también información sobre los correspondientes vectores propios.

Definición 1.16 *Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f, se define el* subespacio propio *de f asociado a λ como*

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_V).$$

En otras palabras, $V_\lambda = \{v \in V \setminus \{\vec{0}\} : v \text{ vector propio de } f \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}$.

Análogamente, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A, definimos el subespacio propio de A asociado a λ como

$$(\mathbb{K}^n)_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n : A \cdot x = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}),$$

donde $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_A(x) = A \cdot x$. Como antes

$$(\mathbb{K}^n)_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{\vec{0}\} : x \text{ vector propio de } A \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}.$$

Observación 1.17 *Sean $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial con $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, B base ordenada de V, y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de f o de la matriz $A = M(f, B)$ de f en la base B; ver Observación 1.13-*(b)*. Si V_λ y $(\mathbb{K}^n)_\lambda$ denotan los correspondientes subespacios propios de λ para f y A respectivamente, entonces*

$$v \in V_\lambda \Longleftrightarrow v_B \in (\mathbb{K}^n)_\lambda.$$

En otras palabras, $(\mathbb{K}^n)_\lambda$ es la imagen de V_λ por el isomorfismo $V \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto v_B$, de asignación de coordenadas en B.

A tenor de todo lo explicado hasta aquí, se pueden asociar dos números enteros a cada valor propio de un endomorfismo o matriz.

Definición 1.18 *Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f, llamamos:*

- Multiplicidad algebraica *de λ a la multiplicidad de λ como raíz de $p_f(t)$.*
- Multiplicidad geométrica *de λ a $\dim V_\lambda$ (dimensión de su subespacio propio).*

Análogamente, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de A, llamamos:

- Multiplicidad algebraica *de λ a la multiplicidad de λ como raíz de $p_A(t)$.*
- Multiplicidad geométrica *de λ a $\dim(\mathbb{K}^n)_\lambda$ (dimensión de su subespacio propio).*

Obsérvese que ambas multiplicidades son enteros ≥ 1 para cada valor propio. Es natural preguntarse la relación existente entre ellas.

Lema 1.19 *Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de f, la multiplicidad algebraica de λ es mayor o igual que la geométrica. El mismo enunciado es cierto para los valores propios $\lambda \in \mathbb{K}$ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Demostración: Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el enunciado se reduce a su equivalente para el endomorfismo $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$; ver Observación 1.9. Por tanto nos centraremos en tratar la prueba del lema para endomorfismos.

Tomemos $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$. Llamemos $k = \dim_k V$ a la multiplicidad geométrica de λ, y consideremos una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de V_λ. Ampliemos hasta una base $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de V ($n = \dim_k V$), y como

$$f(v_j) = \lambda v_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

es inmediato que

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_k & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right).$$

De aquí que

$$p_f(t) = \det(f - t\mathrm{Id}_V) = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_k & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) - t\mathrm{I}_n\right) =$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)\mathrm{I}_k & C \\ \hline 0 & D - t\mathrm{I}_{n-k} \end{array}\right) = (\lambda - t)^k \det\left(D - t\mathrm{I}_{n-k}\right) = (\lambda - t)^k p_D(t).$$

Esto demuestra que la multiplicidad algebraica de λ es $\geq k$, y por tanto el resultado. ■

En general no se da la igualdad de multiplicidades en el Lema 1.19. Por ejemplo, el endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$ tiene $p_f(t) = (t - 1)^2$, y por tanto el valor propio $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 2, pero el correspondiente subespacio propio

$$(\mathbb{R}^2)_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = L(\{(1, 0)\})$$

tiene dimensión 1.

Los subespacios propios asociados a los distintos valores propios dan mucha información sobre la estructura básica de un endomorfismo (o una matriz). Expliquémoslo en la siguiente proposición.

Lema 1.20 *Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$. Los siguientes enunciados son ciertos*

(1) *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f entonces $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ (la igualdad se da si y sólo si $\lambda \neq 0$).*

(2) *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ son los valores propios* distintos *de f o raíces de $p_f(t)$ entonces*

$$V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k},$$

esto es,

$$V_{\lambda_j} \bigcap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} V_{\lambda_i} \right) = \{\vec{0}\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f y $v \in V_\lambda$ entonces $f(v) = \lambda v \in V_\lambda$, esto es $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. Además $f|_{V_\lambda} = \mathrm{Id}_{V_\lambda} \colon V_\lambda \to V_\lambda$ es un automorfismo si y sólo si si $\lambda \neq 0$, lo que demuestra (1).

Supongamos que $k \geq 2$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios *distintos* de f. Para probar (2), hemos de ver que para cualesquiera vectores $v_j \in V_{\lambda_j} \setminus \{\vec{0}\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, el sistema de vectores $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existen $v_j \in V_{\lambda_j} \setminus \{\vec{0}\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, tales que el sistema que determinan es linealmente dependiente, y consideremos una combinación lineal nula con coeficientes no todos nulos:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j v_j = \vec{0}.$$

Salvo reordenación supongamos que el escalar $a_k \neq 0$. Tenemos que

$$\vec{0} = f(\vec{0}) = f\big(\sum_{j=1}^{k} a_j v_j\big) = \sum_{j=1}^{k} a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_j v_j.$$

Como $\lambda_k\big(\sum_{j=1}^{k} a_j v_j\big) = \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_k v_j = \vec{0}$, restando esta expresión a la anterior deducimos que

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_j(\lambda_j - \lambda_k) v_j = \vec{0}.$$

Tengamos en cuenta que si se diese $a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ entonces tendríamos que $a_k v_k = \vec{0}$, esto es, $v_k = \vec{0}$ (recordemos que $a_k \neq 0$), lo que sería contradictorio con nuestras hipótesis. Por tanto no todos los coeficientes $a_1, \ldots, a_{k-1}$ pueden ser nulos, y como $\lambda_j \neq \lambda_k$ para todo $j = 1, \ldots, k-1$, no todos los coeficientes $a_1(\lambda_1 - \lambda_k), \ldots, a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)$ son nulos. Esto nos lleva a concluir que el sistema de vectores $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es también linealmente dependiente. Por un procedimiento inductivo descendiente concluiriamos que, salvo reordenaciones, los sistemas de vectores

$$\{v_1, \ldots, v_k\},\ \{v_1, \ldots, v_{k-1}\},\ \ldots, \{v_1, v_2\},\ \{v_1\}$$

son todos linealmente dependientes, y por tanto que $v_1 = \vec{0}$, lo que es absurdo. ∎

Corolario 1.21 *Si* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ *y* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *son sus valores propios* distintos *entonces*

$$f \textit{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Demostración: Supongamos que f es diagonalizable, y tomemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V ($dim_{\mathbb{K}} V = n$) en la que $M(f, B)$ sea diagonal, esto es, $f(v_j) = \mu_j v_j$, $j = 1, \ldots, n$. Denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a la lista ordenada de los escalares *distintos* en el conjunto $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ (donde podría haber repeticiones), y llamemos m_j al número de veces que aparece repetido el escalar λ_j en la lista $\mu_1, \ldots, \mu_n$, $j = 1, \ldots, k$. Como claramente $M(f, B) = D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, tenemos que

$$p_f(t) = \det\big(D(\mu_1, \ldots, \mu_n) - t\mathrm{I}_n\big) = (-1)^n \prod_{j=1}^{k} (t - \lambda_j)^{m_j}$$

(ver la prueba de Lema 1.15), de donde m_j es la multiplicidad algebraica de λ_j, $j = 1, \ldots, k$, y $\sum_{j=1}^{n} m_j = n$.

Como el conjunto $B_j = \{v \in B \colon f(v) = \lambda_j v\} \subseteq B$ contiene exactamente m_j vectores linealmente independientes, todos ellos contenidos en V_{λ_j}, inferimos que $\dim V_{\lambda_j} \geq m_j$, y por tanto $\dim V_{\lambda_j} = m_j$ por el Lema 1.19. Como coinciden multiplicidad algebraica y geométrica de λ_j concluimos que B_j es base de V_{λ_j}, $j = 1, \ldots, k$, y $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$.

Para el recíproco, supongamos que $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$ y tomemos B_j una base ordenada de V_{λ_j} para cada $j = 1, \ldots, k$. La unión ordenada $B := B_1 \cup \ldots B_k$ determina una base ordenada de V que por construcción satisface

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right),$$

de donde f es diagonalizable. ■

Teorema 1.22 (Teorema fundamental de diagonalización de endomorfismos) *Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

I) *$p_f(t)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades.*

II) *Para todo valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ de f, las multiplicidades algebraica y geométrica de λ coinciden.*

Demostración: Supongamos que f es diagonalizable, llamemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ a sus sus valores propios distintos, y por el Corolario 1.21 usemos que $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Llamemos $m_j = \dim_{\mathbb{K}} V_{\lambda_j}$ y elijamos una base ordenada B_j de V_j, $j = 1, \ldots, k$, y consideremos la base ordenada $B = B_1 \cup \ldots B_k$ de V. Claramente $\sum_{j=1}^{k} m_j = n = \dim_{\mathbb{K}} V$, y por construcción

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right).$$

Por tanto el polinomio característico

$$p_f(t) = \det(f - t\mathrm{Id}_V) = \left(\begin{array}{c|c|c} (\lambda_1 - t)\mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & (\lambda_k - t)\mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{m_j}$$

descompone en $\mathbb{K}$, y las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para cada valor propio λ_j de f, $j = 1, \ldots, k$. Esto prueba i) y ii).

Supongamos ahora que se satisfacen i) y ii). Llamemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ a los sus valores propios distintos de f, y observemos que:

- Por i), $p_f(t) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - t)^{m_j}$, y en particular $\sum_{j=1}^{k} m_j = n = \dim_{\mathbb{K}} V$.
- Por ii), la multiplicidad geométrica de λ_j coincide con m_j, esto es, $\dim_{\mathbb{K}} V_{\lambda_j} = m_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Eligiendo una base ordenada B_j de V_j, $j = 1, \ldots, k$, el sistema $B = B_1 \cup \ldots B_k$ de V es linealmente independiente; ver Lema 1.20-(2). Como B contiene exactamente $\sum_{j=1}^{k} m_j = n = \dim_{\mathbb{K}} V$ vectores, B es base de V y $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Del Corolario 1.21 deducimos que f es diagonalizable, lo que concluye el problema. ■

La serie de resultados anteriores para endomorfismos tiene su traslación natural para matrices.

Corolario 1.23 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ son sus valores propios distintos, entonces*

$$A \text{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow \mathbb{K}^n = (\mathbb{K}^n)_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{K}^n)_{\lambda_k}.$$

Demostración: Aplicar el Corolario 1.21 al endomorfismo $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_A(x) = A \cdot x$ y tener en cuenta Observación 1.9. ■

Corolario 1.24 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos siguientes condiciones:*

i) *$p_A(t)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades.*

ii) *Para todo valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ de A, las multiplicidades algebraica y geométrica de λ coinciden.*

Demostración: Aplicar el Teorema 1.22 al endomorfismo $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_A(x) = A \cdot x$ y tener en cuenta Observación 1.9. ■

Corolario 1.25 *Dos matrices* diagonalizables $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *son semejantes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración: Por la Observación 1.13-(a) sabemos que si A, C son semejantes entonces $p_A(t) = p_C(t)$. Bastará con probar la condición suficiente, esto es, si A, C son diagonalizables y $p_A(t) = p_C(t)$ veamos que A, C son semejantes. En efecto, como A, C tienen el mismo característico tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades algebraicas, y como son diagonalizables las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para cada valor propio. Esto implica que los endomorfismos f_A y f_C vienen representados por la misma matriz diagonal en ciertas bases B_A, B_C de V, respectivamente. Por tanto las matrices $A = M(f_A, B_0)$ y $C = M(f_C, B_0)$, donde B_0 representa la base usual de $\mathbb{K}^n$, son semejantes; ver Observación 1.3. ■

1.4.1. Endomorfismos diagonalizables notables

Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$, los endomorfismos diagonalizables más elementales son los de la forma $\lambda \mathrm{Id}_V$, llamados *homotecias* de razón λ cuando $\lambda \neq 0, 1$. La siguiente definición nos presenta otros ejemplos significativos.

Definición 1.26 *Dados $U, W \leq V$ subespacios vectoriales tales que $V = U \oplus W$, la* proyección sobre U en la dirección de W *es la aplicación lineal dada por*

$$\pi_{U,W} \colon V \to V \colon \pi_{U,W}(v) = u,$$

donde $v = u + w$ es la descomposición única de v como suma de vectores $u \in U$ y $w \in W$.

Análogamente, la simetría respecto de U en la dirección de W *es el isomorfismo lineal*

$$\sigma_{U,W} \colon V \to V, \quad \sigma_{U,W}(v) = u - w,$$

donde $v = u + w$ es la descomposición única de v como suma de vectores $u \in U$ y $w \in W$.

Si $V = U \oplus W$ es fácil comprobar que:

- $\pi_{U,W} \circ \pi_{U,W} = \pi_{U,W}$, $\sigma_{U,W} \circ \sigma_{U,W} = 2\pi_{U,W} - \sigma_{U,W} = \mathrm{Id}_V$, $\pi_{U,W} + \pi_{W,U} = \mathrm{Id}_V$.
- $\pi_{U,W}$ es diagonalizable con valores propios $1, 0$, siendo
$$U = V_1 = \mathrm{Ker}(\pi_{U,W} - \mathrm{Id}_V), \; W = V_0 = \mathrm{Ker}(\pi_{U,W}).$$
- $\sigma_{U,W}$ es diagonalizable con valores propios $1, -1$, siendo
$$U = V_1 = \mathrm{Ker}(\sigma_{U,W} - \mathrm{Id}_V), \; W = V_{-1} = \mathrm{Ker}(\sigma_{U,W} + \mathrm{Id}_V).$$

Las proyecciones y simetrías lineales admiten la siguiente caracterización natural.

Proposición 1.27 *Si $h\colon V\to V$ es una aplicación lineal tal que $h\circ h = r\cdot h$, $r\neq 0$, entonces $V = V_r \oplus V_0$, siendo*

$$V_r = \mathrm{Ker}(h - r\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h), \quad V_0 = \mathrm{Ker}(h).$$

En particular, h es diagonalizable con valores propios r y 0.

Como consecuencia los siguientes enunciados son ciertos:

(I) *Si $h\colon V\to V$ es lineal y $h\circ h = h$ entonces $h = \pi_{V_1,V_0}$, donde $V_1 = \mathrm{Ker}(h-\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h)$ y $V_0 = \mathrm{Ker}(h)$.*

(II) *Si $f\colon V\to V$ es lineal y $f\circ f = \mathrm{Id}_V$ entonces $f = \sigma_{V_1,V_{-1}}$, donde $V_1 = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_V)$.*

Demostración: Supongamos que $h\colon V\to V$ es lineal y $h\circ h = r\cdot h$, $r\neq 0$. Notemos que la identidad

$$h\big(h(v)\big) - rh(v) = h\big(h(v) - rv\big) = \vec{0}$$

es cierta para todo $v\in V$, y por tanto

$$\mathrm{Im}(h)\ni h(v)\in V_r = \mathrm{Ker}(h - r\mathrm{Id}_V), \quad v - h\big(r^{-1}v\big)\in V_0 = \mathrm{Ker}(h) \quad \forall\, v\in V.$$

De lo primero $\mathrm{Im}(h)\subseteq V_r$, y como la otra inclusión es trivialmente cierta ya que $v = h(r^{-1}v)\in \mathrm{Im}(h)$ para todo $v\in V_r$, deducimos que

$$\mathrm{Im}(h) = V_r.$$

La identidad

$$v = h(r^{-1}v) + \big(v - h(r^{-1}v)\big) \tag{11}$$

prueba que $V = V_r + V_0$, y de hecho la suma es directa ya que $v\in V_0\cap V_r$ si y sólo si $rv = h(v) = \vec{0}$. En particular h es diagonalizable con valores propios r y 0.

Para la segunda parte de la proposición, observemos que (i) es consecuencia de lo ya visto para $r = 1$. La identidad $h = \pi_{V_1,V_0}$ se sigue de la Definición 1.26 y de que la ecuación (11) para $r = 1$ reproduce la descomposición de un vector $v\in V$ genérico según la suma directa $V = V_1\oplus V_0$.

Para probar (ii), observemos que la aplicación $h = f + \mathrm{Id}_V$ satisface $h\circ h = 2h$. Por la primera parte de la proposición,

$$V = \mathrm{Ker}(h - 2\cdot\mathrm{Id}_V)\oplus \mathrm{Ker}(h),$$

donde ahora

$$\mathrm{Ker}(h - 2\cdot\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_V) = V_1 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_V) = V_{-1}$$

como deseábamos. Le ecuación (11) se escribe para $r = 2$ y $h = f + \mathrm{Id}_V$ como

$$v = \frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big)$$

donde claramente $\frac{1}{2}\big(v + f(v)\big)\in V_1$ y $\frac{1}{2}\big(v - f(v)\big)\in V_{-1}$. Usando que $f\circ f = \mathrm{Id}_V$ inferimos que

$$f(v) = f\left(\frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big)\right) = \frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) - \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big),$$

y por tanto $f = \sigma_{V_1,V_{-1}}$; ver Definición 1.26. ■

1.4.2. Aplicaciones de la diagonalización

El Teorema fundamental de diagonalización tiene algunas aplicaciones prácticas interesantes. Comentaremos aquí dos de ellas.

I) Calcular la potencia A^m, $m \in \mathbb{Z}$, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable.

Se procede de la siguiente manera: como A es diagonalizable podemos encontrar una matriz $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ con D una matriz diagonal. Por tanto $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, y de aquí que

$$A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Para concluir el cálculo, obsérvemos que si

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right)$$

entonces

$$D^m = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1^m \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k^m \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right),$$

por lo que

$$A^m = P \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1^m \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k^m \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right) \cdot P^{-1} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

II) Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y $m \in \mathbb{Z}$,

$$\exists h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V : \ h^m = f \Longleftrightarrow \exists \mu_j \in \mathbb{K} : \ \mu_j^m = \lambda_j \ \forall j = 1, \ldots, k.$$

Se procede de la siguiente manera: si f es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ existe una base B de V en la que

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \lambda_k \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right),$$

donde m_j es la multiplicidad (algebraica o geométrica, coinciden) de λ_j, $j = 1, \ldots, k$. Si $\mu_j^m = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, k$, el endomorfismo $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ con

$$M(h, B) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu_1 \mathrm{I}_{m_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \mu_k \mathrm{I}_{m_k} \end{array}\right)$$

satisface $h^m = f$. En recíproco es trivial por un razonamiento análogo.

Lo equivalente para endomorfismos/matrices se discutiría de forma análoga:

- *Calcular la potencia f^m, $m \in \mathbb{Z}$, de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ diagonalizable.*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \ C^m = A \Longleftrightarrow \exists \mu_j \in \mathbb{K} : \ \mu_j^m = \lambda_j \ \forall j = 1, \ldots, k.$$

1.5. El Teorema de Hamilton-Cayley

Concluiremos este tema con uno de los resultados algebraicas más sorprendentes de la teoría de matrices, que se puede enunciar de forma simplificada diciendo que toda matriz satisface su polinomio característico. Expliquemos los detalles.

Recordemos que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es un *álgebra asociativa* sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, en definitiva, podemos sumar y multiplicar matrices cuadradas, y multiplicarlas por escalares, satisfaciendo estas operaciones propiedades naturales de asociatividad, distributividad,...

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y consideremos su polinomio característico

$$p_A(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Para cada matriz $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ podemos hacer el cálculo formal

$$p_A(T) = a_n \cdot T^n + \ldots + a_1 \cdot T + a_0 \cdot \mathrm{I}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

lo que nos permite entender p_A como una aplicación

$$p_A \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Lo sorprendente es que A es una *raíz* de esa "función polinómica"matricial.

Teorema 1.28 (Hamilton-Cayley) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $p_A(t) \in \mathbb{K}[t]$ es su polinomio característico entonces*

$$p_A(A) = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sabemos se satisface la fórmula

$$C \cdot \mathrm{Adj}(C)^{\mathrm{t}} = \det C \cdot \mathrm{I}_n,$$

donde $\mathrm{Adj}(C)$ es la matriz de los adjuntos de C. Por tanto

$$(A - t \cdot \mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{Adj}(A - t \cdot \mathrm{I}_n)^{\mathrm{t}} = \det(A - t \cdot \mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{I}_n = p_A(t) \cdot \mathrm{I}_n. \tag{12}$$

De la definición de la matriz de los adjuntos $\mathrm{Adj}(A - t \cdot \mathrm{I}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se deduce que sus n^2 coeficientes son polinomios en $\mathbb{K}[t]$ con grado $\leq n-1$, y por tanto

$$\mathrm{Adj}(A - t \cdot \mathrm{I}_n)^{\mathrm{t}} = C_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot t + C_0$$

para ciertas matrices $C_{n-1}, \ldots, C_1, C_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Escribiendo

$$p_A(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$$

y sustituyendo en (12),

$$(A - t \cdot \mathrm{I}_n) \cdot (C_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot t + C_0) = (a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0) \cdot \mathrm{I}_n.$$

Operando de forma elemental

$$-C_{n-1} \cdot t^n + (A \cdot C_{n-1} - C_{n-2}) \cdot t^{n-1} + \ldots + (A \cdot C_2 - C_1) \cdot t^2 + (A \cdot C_1 - C_0) \cdot t + A \cdot C_0 =$$

$$= (a_n \cdot \mathrm{I}_n) \cdot t^n + \ldots + (a_1 \cdot \mathrm{I}_n) \cdot t + a_0 \cdot \mathrm{I}_n.$$

Como esta identidad es cierta para todo $t \in \mathbb{K}$, los coeficientes matriciales a izquierda y derecha han de coincidir:

$$\begin{array}{ccc}
A \cdot C_0 = a_0 \cdot \mathrm{I}_n & \Longrightarrow & A \cdot C_0 = a_0 \cdot \mathrm{I}_n \\
A \cdot C_1 - C_0 = a_1 \cdot \mathrm{I}_n & \stackrel{\cdot A}{\Longrightarrow} & A^2 \cdot C_1 - A \cdot C_0 = a_1 \cdot A \\
A \cdot C_2 - C_1 = a_2 \cdot \mathrm{I}_n & \stackrel{\cdot A^2}{\Longrightarrow} & A^3 \cdot C_2 - A^2 \cdot C_1 = a_1 \cdot A^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A \cdot C_{n-1} - C_{n-2} = a_{n-1} \cdot \mathrm{I}_n & \stackrel{\cdot A^{n-1}}{\Longrightarrow} & A^n \cdot C_{n-1} - A^{n-1} \cdot C_{n-2} = a_1 \cdot A^{n-1} \\
-C_{n-1} = a_n \cdot \mathrm{I}_n & \stackrel{\cdot A^n}{\Longrightarrow} & -A^n \cdot C_{n-1} = a_n \cdot A^n
\end{array}.$$

Si sumamos las ecuaciones de la columna de la derecha, y hacemos las oportunas cancelaciones, obtenemos que

$$0 = a_n \cdot A^n + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot \mathrm{I}_n = p_A(A)$$

como queríamos demostrar. ■

1.6. Ejercicios del Tema 1

1. Sean $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión n, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ y B_1 una base ordenada de V. Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es semejante a $M(f, B_1)$, entonces existe una base ordenada B_2 de V tal que $A = M(f, B_2)$.

2. Dar un ejemplo de matrices cuadradas no semejantes con el mismo polinomio característico.

3. Probar que 0 no es un valor propio de un endomosfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ si y sólo si f es un automorfismo. ¿Cuál es la propiedad correspondiente para matrices cuadradas?

4. Probar que si $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ es diagonalizable, entonces A^{-1} también lo es. ¿Qué relación hay entre los valores propios de A y los de A^{-1}? ¿Y entre sus autovectores?

5. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial n-dimensional. Si a es un valor propio de un endomorfismo f de V, probar que a^m,$m \in \mathbb{N}$, es un valor propio de f^m. Si además f es un automorfismo, demostrar que para todo $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a^p es un valor propio de f^p.

6. Determinar los vectores propios y valores propios de las siguientes matrices reales,
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
¿Es alguna de estas matrices diagonalizable en $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ $(k = 3, 4)$? ¿Hay alguna de ellas que no sea diagonalizable en $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ pero sí lo sea en $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$?

7. Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Probar que el polinomio característico de A adopta la siguiente forma:

   I) Para $n = 2$, $p_A(t) = t^2 - \mathrm{Traza}(A)t + \det A$.

   II) Para $n = 3$, $p_A(t) = -t^3 + \mathrm{Traza}(A)t^2 - \left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right] t +$ $\det A$.

   III) Para $n \in \mathbb{N}$, $p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Traza}(A)t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \ldots + c_1 t + \det A$, donde $c_1, \ldots, c_{n-2} \in \mathbb{K}$.

8. Probar que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tiene $\det A < 0$ entonces A es diagonalizable.

9. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y cada $a \in \mathbb{K}$, encontrar la relación que hay entre los valores propios de A y los de $A + a\mathrm{I}_n$. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si lo es $A + a\mathrm{I}_n$.

10. Hallar los autovalores y los subespacios propios de la siguiente matriz cuadrada de orden $n \geq 2$:
$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

¿Es A diagonalizable?

11. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Denotemos por $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V. De un endomorfismo $f \colon V \to V$ se sabe que

    - f transforma el vector $6u_1 + 2u_2 + 5u_3$ en sí mismo.
    - $U = \{(x_1, x_2, x_3)_B \colon 2x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 0\}$ es un subespacio propio de f.
    - La traza de f es 5.

    Hallar los valores propios de f y calcular la matriz de f respecto a B.

12. Sea A la siguiente matriz real que depende del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}.$$

    I) Obtener los valores de a para los que A es diagonalizable.
    II) Diagonalizar A para $a = 1$ y $a = 2$.

13. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en una base ordenada B es

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ 2+a & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    I) Obtener los valores propios de f y comprobar que no dependen de a.
    II) Obtener los subespacios propios de f en función de a y estudiar cuando f es diagonalizable. Cuando sea posible, diagonalizar f.

14. Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}), A' \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$ y $A'' \in \mathcal{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$. Se considera la matriz sobre $\mathbb{K}$ de orden n

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right).$$

    Demostrar que el polinomio característico de M es el producto de los polinomios característicos de A y A''.

15. Dar tres ejemplos de endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que, respectivamente, tengan por polinomios característicos

$$(1-t)^3, -(1-t)^2(1+t), (1-t)(t^2+1),$$

    y estudiar si los endomorfismos dados son o no diagonalizables.

16. Sea n un número entero positivo, $\mathbb{K}$ un cuerpo un $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Demostrar que la matriz A de orden n sobre $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico

$$p_A(t) = (-1)^n(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{-1} + t^n),$$

y que si $a \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A, entonces el vector $(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$ es un vector propio de A de valor propio a.

17. Comprobar que la siguiente matriz cuadrada de orden n es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y obtener su forma diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que la suma de los elementos de cada línea (fila y columna) es 1. Demostrar que 1 es un valor propio de A.

19. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\text{Traza}(A) = \det A = 0$. Probar que $A^2 = 0$. Recíprocamente, dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verificando $A^2 = 0$, demostrar que $A = 0$ o bien $\{A, \mathrm{I}_2\}$ son linealmente independientes y por tanto $\text{Traza}(A) = \det A = 0$.

20. En $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^{12} y A^{-7}. ¿Es posible encontrar $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$? ¿Es posible encontrar $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $D^2 = A$?

21. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Probar que si su ecuación característica $p_f(t) = 0$ tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ soluciones en $\mathbb{K}$ (no necesariamente distintas), entonces existe una base ordenada B de V tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

donde los escalares de la diagonal son los valores propios de f. (Indicación: Usar inducción sobre n).

22. ¿Es diagonalizable el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (-2x - y, x)$? En caso negativo, encontrar, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^2$ donde $M(f, B)$ sea del tipo del ejercicio anterior.

23. Probar que cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal son los valores propios de A.

24. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ que tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ valores propios (contando multiplicidades). Demostrar que existen $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tales que f_1 es diagonalizable, $f_2^n = 0$ y $f = f_1 + f_2$.

25. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = r^2 \mathrm{I}_n$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son r y $-r$. Probar también que A es diagonalizable.

26. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumple $A^2 = -r^2 \mathrm{I}_n$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $\imath r$ y $-\imath r$. Probar también que A es diagonalizable.

27. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, que cumple $A^2 = rA$, $r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son r y 0. Probar también que A es diagonalizable.

28. Probar los siguientes enunciados:

    I) La única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = 0$ es $A = 0$.

    II) La única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 - 2A + \mathrm{I}_n = 0$ es $A = \mathrm{I}_n$.

29. Se considera la matriz
$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estudiar para qué valores de a es $A(a)$ diagonalizable. Calcular, si es posible, una base de autovectores de $A(1)$.

Tema 2

2. Formas Bilineales y Cuadráticas

La herramienta natural para medir en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ clásico es el producto escalar usual:

$$g_0(x,y) = x^{\mathrm{t}} \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{t}},\ y = (y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{t}}.$$

Con la ayuda de este producto escalar podemos darle sentido, por ejemplo, a los conceptos de perpendicularidad, longitud o ángulo entre vectores:

- la identidad $g_0(x,y) = 0$ expresa perpendicularidad de x e y,
- las desigualdades $g_0(x,y) > 0$ o $g_0(x,y) < 0$ informan de si los vectores x e y están en un mismo semiespacio o no,
- el número $\|x\| := \sqrt{g_0(x,x)}$ mide la longitud de x,
- la identidad $\cos(\alpha) = \frac{g_0(x,y)}{\|x\|\|x\|}$ determina el ángulo (no orientado) $\alpha \in [0,\pi]$ que forman vectores x e y no nulos,...

En matemáticas es útil introducir herramientas con funciones o utilidades similares al producto escalar que ayuden a modelar problemas geométricos de distinta naturaleza en otros ambientes. Un ejemplo paradigmático es la teoría de la Relatividad especial, donde el papel que jugaba el producto escalar euclidiano lo realiza ahora la llamada métrica de Lorentz-Minkowski en el espacio-tiempo $\mathbb{R}^4$ que modela nuestro universo, y que recordemos se define así:

$$g_1\big((x_1,x_2,x_3,t),(y_1,y_2,y_3,s)\big) = -ts + \sum_{j=1}^{3} x_j y_j,$$

donde la cuarta dimensión t hace referencia al tiempo.

Haciendo un esfuerzo de abstracción, dado un espacio vectorial real V hemos de preguntarnos qué propiedades hemos de exigir a una aplicación general $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ para que sea útil como instrumento de medida. Para empezar observemos que cualquier proceso de medida exige al cuerpo base de escalares que sea ordenado, por lo que hemos de restringir nuestro interés a espacios vectoriales reales. También es plausible exigir que la métrica g se comporte de forma simétrica en sus dos variables, y que actúe sobre cada una de ellas respetando la estructura lineal de espacio vectorial V. Estas condiciones algebraicas se expresarán diciendo que g sea una aplicación bilineal y simétrica.

Para hacer un enfoque lo más general posible, comenzaremos con una breve introducción al álgebra multilineal.

2.1. Aplicaciones multilineales y tensores

En este tema vamos a introducir los rudimentos del álgebra multilineal, contexto en el que se enmarcan la teoría de espacios métricos.

2.1.1. Espacio dual

Hagamos un breve repaso de lo estudiado en la asignatura Geometría I respecto al espacio dual de un espacio vectorial.

Es conveniente recordar que si $V_1(\mathbb{K}), V_2(\mathbb{K})$ son espacios vectoriales, el conjunto

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) = \{f : V_1 \to V_2 : f \text{ aplicación lineal}\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la suma y el producto por escalares estándares para las aplicaciones lineales. Además si $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = n, \dim_{\mathbb{K}} V_2 = m$ y B_1, B_2 son bases ordenadas de V_1, V_2 respectivamente, entonces la aplicación

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) \to M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad f \mapsto M(f, B_1, B_2) \text{ (notación columna)},$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(V_1, V_2) = n \cdot m$.

Definición 2.1 *Dado un espacio vectorial* $V(\mathbb{K})$ *con* $\dim_{\mathbb{K}} V = n$*, su dual algebraico* $V^*(\mathbb{K})$ *se define como*

$$V^*(\mathbb{K}) := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \{\varphi : V \to \mathbb{K} : \varphi \textit{ lineal}\}.$$

A los elementos de $V^*(\mathbb{K})$ o aplicaciones lineales $\varphi : V \to \mathbb{K}$ se les llama *formas lineales*, y el conjunto $V^*(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares estándar de formas lineales.

Dada una base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y fijada la base usual $B_0 = \{1\}$ de $\mathbb{K}$ (espacio vectorial 1-dimensional), escribiremos como

$$\Phi_B : V^* \to M_{1\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n, \quad \Phi_B(\varphi) = M(\varphi, B, B_0) = \big(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\big),$$

el isomorfismo natural de espacios vectoriales. Denotaremos por B^* a la base trasladada de la usual en $\mathbb{K}^n$ vía Φ_B^{-1}, esto es,

$$B^* = \{\varphi^j := \Phi_B^{-1}(e_j) : j = 1, \ldots, n\}, \quad \text{donde } e_j = (0, \ldots, \overbrace{1}^{j}, \ldots, 0),$$

y la referiremos como la *base dual* de B en V^*. Cualquiera de las expresiones

$$\begin{aligned} &\varphi^j(v_i) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ &\varphi = \textstyle\sum_{j=1}^n \varphi(v_j)\varphi^j \quad \forall\, \varphi \in V^*, \\ &v = \textstyle\sum_{j=1}^n \varphi^j(v) v_j \quad \forall\, v \in V^*, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\delta_i^j \equiv \delta_{ij}$ representa la delta de Kronecker, caracteriza a la base dual B^* de B.

De todo lo anterior

$$\dim_{\mathbb{K}} V^* = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Por ejemplo, la base dual $B_0^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ en $(\mathbb{K}^n)^*$ de la base usual B_0 de $\mathbb{K}^n$ viene dada por

$$\varphi^j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad \varphi^j\left((x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}\right) = x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Proposición 2.2 *Si* B_1, B_2 *son bases de* V *con duales respectivas* B_1^*, B_2^**, entonces*

$$M(\mathrm{Id}_{V^*}, B_2^*, B_1^*)^{\mathrm{t}} = M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)^{\mathrm{t}}.$$

Demostración : Escribamos

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}, B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}, B_1^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}, B_2^* = \{\psi^1, \ldots, \psi^n\}.$$

Por definición de la matriz $M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)$ tenemos que

$$(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2),$$

mientras que de (13) sabemos que

$$\psi^i = \big(\psi^i(v_1), \ldots, \psi^i(v_n)\big) \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}}.$$

Combinando esas expresiones se deduce que

$$\psi^i = \big[\big(\psi^i(u_1), \ldots, \psi^i(u_n)\big) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)\big] \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}} =$$

$$= (\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2) \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)^{\mathrm{t}} \cdot (\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i)^{\mathrm{t}}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. De aquí que

$$(\psi^1, \ldots, \psi^n) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)^{\mathrm{t}},$$

y por tanto $M(\mathrm{Id}_{V^*}, B_2^*, B_1^*)^{\mathrm{t}} = M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)^{\mathrm{t}}$. ■

Por último, para acabar con este breve recordatorio acerca del espacio dual, mencionaremos la construcción de la traspuesta de una aplicación lineal entre espacios vectoriales.

Definición 2.3 *Si $V_1(\mathbb{K}), V_2(\mathbb{K})$ son espacios vectoriales y $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$, la aplicación traspuesta f^{t} se define*

$$f^{\mathrm{t}} \colon V_2^* \to V_1^*, \quad f^{\mathrm{t}}(\psi) := \psi \circ f.$$

Proposición 2.4 *La traspocición de aplicaciones*

$${}^{\mathrm{t}} \colon \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \to \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_2^*, V_1^*), \quad f \mapsto f^{\mathrm{t}},$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Además, si B_1, B_2 son bases ordenadas de V con duales respectivas B_1^*, B_2^*, entonces

$$M(f^{\mathrm{t}}, B_2^*, B_1^*) = M(f, B_1, B_2)^{\mathrm{t}}.$$

Demostración : La linealidad de la trasposición de aplicaciones, esto es, la identidad

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{\mathrm{t}} = \lambda_1 f_1^{\mathrm{t}} + \lambda_2 f_2^{\mathrm{t}} \quad \text{para cualesquiera} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

es un ejercicio trivial de la definición. Por otra parte, si $f^{\mathrm{t}} = 0$ entonces $\psi(f(v)) = 0$ para todo $\psi \in V_2^*$ y $v \in V$, de donde $f(v) = \vec{0}$ para todo $v \in V$ (ver (13)) y $f = 0$. Esto demuestra que la aplicación trasposición no tiene núcleo, y como

$$\dim_{\mathbb{K}} V_2^* \times \dim_k V_1^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_2^*, V_1^*) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cdot \dim_k V_2,$$

que es un isomorfismo, lo que concluye la primera parte de la proposición.

Escribamos

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}, B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}, B_1^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}, B_2^* = \{\psi^1, \ldots, \psi^n\}.$$

Por definición de la matriz $M(f, B_1, B_2)$ tenemos que

$$\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot M(f, B_1, B_2),$$

mientras que de (13) sabemos que

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{t}}(\psi^i) &= \big(f^{\mathrm{t}}(\psi^i)(v_1), \ldots, f^{\mathrm{t}}(\psi^i)(v_n)\big) \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}} = \\ &= \big(\psi^i(f(v_1)), \ldots, \psi^i(f(v_n))\big) \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

Combinando esas expresiones se deduce que

$$f^{\mathrm{t}}(\psi^i) = \big[\big(\psi^i(u_1), \ldots, \psi^i(u_n)\big) \cdot M(f, B_1, B_2))\big] \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}} =$$
$$= (\delta^i_j)_{j=1,\ldots,n} \cdot M(f, B_1, B_2) \cdot (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^{\mathrm{t}} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \cdot M(f, B_1, B_2)^{\mathrm{t}} \cdot (\delta^i_j)^{\mathrm{t}}_{j=1,\ldots,n}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. De aquí que

$$\big(f^{\mathrm{t}}(\psi^1), \ldots, f^{\mathrm{t}}(\psi^n))\big) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \cdot M(f, B_1, B_2)^{\mathrm{t}},$$

y por tanto $M(f^{\mathrm{t}}, B_2^*, B_1^*)^{\mathrm{t}} = M(f, B_1, B_2)^{\mathrm{t}}$. ■

Corolario 2.5 *Sean $V_1(\mathbb{K}), V_2(\mathbb{K}), V_3(\mathbb{K})$ espacios vectoriales. Los siguientes enunciados son ciertos:*

a) *Si $f_1 \colon V_1 \to V_2, f_2 \colon V_2 \to V_3$ son lineales entonces $(f_2 \circ f_1)^{\mathrm{t}} = f_1^{\mathrm{t}} \circ f_2^{\mathrm{t}}$.*

b) ${\mathrm{Id}_{V_1}}^{\mathrm{t}} = {\mathrm{Id}_{V_1^*}}^{\mathrm{t}}$.

Demostración: Para cualquiera $\psi \in V_3^*$ tenemos que

$$(f_2 \circ f_1)^{\mathrm{t}}(\psi) := \psi \circ (f_2 \circ f_1) = (\psi \circ f_2) \circ f_1 = f_2^{\mathrm{t}}(\psi) \circ f_1 = f_1^{\mathrm{t}}\big(f_2^{\mathrm{t}}(\psi)\big) = (f_1^{\mathrm{t}} \circ f_2^{\mathrm{t}})(\psi),$$

lo que prueba a). Item b) es trivial por la definición de trasposición. ■

Por último repasaremos el teorema de reflexividad, que esencialmente expresa que todo espacio vectorial V puede ser *canónicamente identificado* con su doble dual $V^{**} \equiv (V^*)^*$. Observemos que V y V^{**} son espacios de la misma dimensión, luego no es nada sorprendente que sean isomorfos, lo relevante de la siguiente construcción es que existe un isomorfismo estructural entre ambos de naturaleza canónica.

Para cada $v \in V$ definamos la aplicación

$$\theta_v \colon V^* \to \mathbb{K}, \quad \theta_v(\psi) = \psi(v), \tag{14}$$

que de forma natural es lineal y por tanto $\theta_v \in (V^*)^* \equiv V^{**}$.

Teorema 2.6 (Teorema de reflexividad) *La aplicación natural o canónica*

$$\Theta \colon V \to V^{**}, \quad \Theta(v) = \theta_v,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración: La linealidad de Θ es evidente por definición

$$\theta_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 \theta_{v_1} + \lambda_2 \theta_{v_2} \quad \forall\, v_1, v_2 \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}.$$

Veamos que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{\vec{0}\}$. Para ello tomemos $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ y por el teorema de ampliación de la base construyamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V con $v_1 = v$. Si $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ es su dual, entonces $\varphi^1(v) = \varphi^1(v_1) = 1 \neq 0$, por lo que $\theta_v(\varphi^1) \neq 0$ y $v \notin \mathrm{Ker}(\Theta) = \{\vec{0}\}$. De aquí que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{\vec{0}\}$, y al ser $\dim_{\mathbb{K}} V^{**} = \dim_{\mathbb{K}} V$, que Θ sea un isomorfismo. ■

2.1.2. Concepto de aplicación multilineal y tensor

Definición 2.7 *Sean $V_1, \ldots, V_m$, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $F\colon V_1 \times \cdots V_m \to W$ se dice* multilineal *si es lineal en cada una de las m variables, esto es,*

$$F(w_1, \ldots, w_{i-1}, \overset{i}{\smile}{\lambda v + \mu u}, w_{i+1}, \ldots, w_m) =$$
$$= \lambda F(w_1, \ldots, w_{i-1}, \overset{i}{\breve{v}}, w_{i+1}, \ldots, w_m) \ + \mu F(w_1, \ldots, w_{i-1}, \overset{i}{\breve{u}}, w_{i+1}, \ldots, w_m)$$

para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, m\}$, $w_j \in V_j, j \neq i$, $v, u \in V_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Una forma sencilla de construir aplicaciones multilineales es tomar $f_j \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_j, W_j)$, $j = 1, \ldots, m$, llamar $W = W_1 \times \ldots \times W_m$ al espacio vectorial producto, y definir

$$F\colon V_1 \times \cdots V_m \to W, \quad F = f_1 \times \ldots \times f_m.$$

Las aplicaciones multilineales más relevantes son las llamadas *tensores*.

Definición 2.8 *Sean $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial y $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ enteros. Un* tensor r veces covariante y s veces contravariante, o de tipo (r, s), *sobre V es una aplicación multilineal*

$$T\colon V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{K}, \quad (u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) \mapsto T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s)$$

Llamaremos $\mathcal{T}_r^s(V)$ al conjunto de los tensores de tipo (r, s) sobre V; por convenio $\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{K}$.

Por ejemplo, $\mathcal{T}_1^0(V) = V^*$ y $\mathcal{T}_0^1(V) = V^{**} \equiv V$.

El conjunto de tensores $\mathcal{T}_r^s(V)$ puede ser dotado de las siguientes operaciones:

- **Suma:** Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_r^s(V)$, el tensor $T_1 + T_2\colon V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{K}$ viene dado por

$$(T_1 + T_2)(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) =$$
$$= T_1(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) + T_2(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s).$$

- **Producto por escalares:** Si $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, el tensor $\lambda T\colon V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{K}$ viene dado por

$$(\lambda T)(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) = \lambda \cdot T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s).$$

Las anteriores operaciones están bien definidas y la tripleta $(\mathcal{T}_r^s(V), +, \cdot\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. El vector nulo de $\mathcal{T}_r^s(V)$ es el tensor nulo o constante 0, que se denotará por $T_0\colon V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{K}$

$$T_0(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) = 0 \quad \forall (u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) \in V^r \times (V^*)^s.$$

La siguiente construcción es una herramienta muy útil para construir tensores.

Definición 2.9 *Si $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$ y $T' \in \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V)$ son tensores sobre $V(\mathbb{K})$, el producto tensorial $T \otimes T' \in \mathcal{T}_{r+r'}^{s+s'}(V)$ de T y T' es el tensor dado por*

$$T \otimes T'\colon V^{r+r'} \times (V^*)^{s+s'} \to \mathbb{K}, \quad (T \otimes T')(v_1 \ldots, v_{r+r'}, \phi_1, \ldots, \phi_{s+s'}) =$$

$$= T(v_1 \ldots, v_r, \phi_1, \ldots, \phi_s) \cdot T'(v_{r+1} \ldots, v_{r+r'}, \phi_{s+1}, \ldots, \phi_{s+s'}),$$

para todo $(v_1 \ldots, v_{r+r'}, \phi_1, \ldots, \phi_{s+s'}) \in V^{r+r'} \times (V^*)^{s+s'}$.

La comprobación de que $T \otimes T' \in \mathcal{T}_{r+r'}^{s+s'}(V)$ para cualesquiera $T \in \mathcal{T}_r^s(V), T' \in \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V)$ es rutinaria.

Proposición 2.10 *Dado $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial, la aplicación*

$$\otimes \colon \mathcal{T}_r^s(V) \times \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V) \to \mathcal{T}_{r+r'}^{s+s'}(V)$$

es multilineal.

Demostración : De la definición son inmediatas las siguientes identidades

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) \otimes T' = \lambda_1 (T_1 \otimes T') + \lambda_2 (T_2 \otimes T')$$

$$T \otimes (\lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2') = \lambda_1 (T \otimes T_1') + \lambda_2 (T \otimes T_2').$$

para cualesquiera $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}_r^s(V), T', T_1', T_2' \in \mathcal{T}_{r'}^{s'}(V), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, que prueban el enunciado. ■

Ejemplo 2.11 *Veamos algunos ejemplos:*

a) *El producto vectorial o producto cruz, usando la notación simbólica clásica*

$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1),$$

para las tres direcciones canónicas de $\mathbb{K}^3$, viene dado por

$$\times . \colon \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

es una aplicación multilineal.

b) *Si $\varphi, \psi \in V^*$ y $v, w \in V$ entonces*

$$\varphi \otimes \psi \in \mathcal{T}_2^0(V),\ \ v \otimes w \in \mathcal{T}_0^2(V),\ \ \varphi \otimes v \in \mathcal{T}_1^1(V).$$

Además,

- $(\varphi \otimes \psi)(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$ *para todo* $(v, w) \in V^2$,
- $(v \otimes w)(\varphi, \psi) = \varphi(v)\psi(w)$ *para todo* $(\varphi, \psi) \in (V^*)^2$ *y*
- $(\varphi \otimes v)(w, \psi) = \varphi(w)\psi(v)$ *para todo* $(w, \psi) \in V \times V^*$.

c) *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la aplicación $T_A \colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ T_A(x, y) = x^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot y$, es multilineal. En particular, si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz cuadrada entonces $T_A \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{K}^n)$ y*

$$T_A = \sum_{i,j=1,\ldots,n} a_{ij} \varphi^j \otimes \varphi^i,$$

donde $B_0^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ es la base dual de la canónica B_0 de $\mathbb{K}^n$, esto es,

$$\varphi^j \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ \ \varphi^j\big((x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}\big) = x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

d) *La aplicación determinante*

$$\det\colon (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K},\ \det(c_1,\ldots,c_n) := \det(c_1|\cdots|c_n),$$

es un tensor de tipo $(n,0)$ *sobre* $\mathbb{K}^n$. *Es más, si como antes* $B_0^* = \{\varphi^1,\ldots,\varphi^n\}$ *es la base dual de la canónica* B_0 *de* $\mathbb{K}^n$, *entonces*

$$\det = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma)\varphi^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\varphi^{\sigma(n)}.$$

e) *Si* $B_0^* = \{\varphi^1\varphi^2,\varphi^3\}$ *es la base dual de la canónica* B_0 *de* $\mathbb{R}^3$, *esto es,*

$$\varphi^j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi^j(x_1,x_2,x_3) = x_j,\quad j=1,2,3,$$

entonces el tensor $2\varphi^1\otimes\varphi^3 - 3\varphi^2\otimes\varphi^2 \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^3)$ *viene dado por la expresión*

$$(2\varphi^1\otimes\varphi^3 - 3\varphi^2\otimes\varphi^2)\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = 2x_1y_3 - 3x_2y_2.$$

Es fácil comprobar que no todo tensor en $\mathcal{T}_2^0(V)$ es de la forma $\varphi\otimes\psi$ para algunas $\varphi,\psi \in V^*$. Por ejemplo, si $\varphi^j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la forma lineal $\varphi^j(x_1,x_2,x_3) = x_j$, $j=1,2,3$, el tensor $\varphi^1\otimes\varphi^1+\varphi^2\otimes\varphi^2$ en $\mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^3)$ no coincide con ninguna expresión $\varphi\times\psi$, $\varphi,\psi\in(\mathbb{R}^3)^*$. Basta con recordar que $\{\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3\}$ es base de $(\mathbb{R}^3)^*$ (la dual de la usual B_0), y observar que no es posible encontrar escalares $\lambda_j,\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2,3$, para los que las formas lineales $\varphi=\sum_{j=1}^3\lambda_j\varphi^j$, $\psi=\sum_{j=1}^3\mu_j\varphi^j$ satisfagan

$$\varphi\otimes\psi = \big(\sum_{j=1}^3\lambda_j\varphi^j\big)\otimes\big(\sum_{j=1}^3\mu_j\varphi^j\big) = \sum_{i,j=1}^3\lambda_i\mu_j\varphi^i\otimes\varphi^j = \varphi^1\otimes\varphi^1+\varphi^2\otimes\varphi^2.$$

2.1.3. Construcción de bases y dimensión de $\mathcal{T}_r^s(V)$

Sea $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, fijemos una base $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y llamemos $B^*=\{\varphi^1,\ldots,\varphi^n\}$ a su base dual en V^*. Construyamos la siguiente familia de n^{r+s} tensores de tipo (r,s):

$$B_r^s = \big\{\varphi^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi^{i_r}\otimes v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_s}\colon i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\in\{1,\ldots,n\}\big\}.$$

Teorema 2.12 *El conjunto* B_r^s *es base de* $\mathcal{T}_r^s(V)$ *para toda base* B *de* V; *en particular* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{T}_r^s(V) = n^{r+s}$. *Además, si* $T\in\mathcal{T}_r^s(V)$ *entonces*

$$T = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\le n} t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\varphi^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi^{i_r}\otimes v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_s},$$

donde las coordenadas $(t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s})_{1\le i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\le n}$ *de* T *en* B_r^s *siguen la fórmula*

$$t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = T(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_r},\varphi^{j_1}\otimes\cdots\otimes\varphi^{j_s}),\quad 1\le i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\le n.$$

Demostración : Tomemos $T\in\mathcal{T}_r^s(V)$ tensor arbitrario, y consideremos

$$u_i = \sum_{k=1}^n a_i^k v_k \in V,\ \ \psi^j = \sum_{k=1}^n b_k^j\varphi^k\in V^*,\quad i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,s,$$

vectores y formas lineales arbitrarios escritos con sus coordenadas en las bases B y B^* respectivamente.

Hagamos el siguiente cálculo general.

Por multilinealidad se tiene que

$$T(u_1, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^s) =$$

$$= T\big(\textstyle\sum_{k=1}^n a_1^k v_k, \ldots, \sum_{k=1}^n a_r^k v_k, \sum_{k=1}^n b_k^1 \varphi^k, \ldots, \sum_{k=1}^n b_k^s \varphi^k \big) = \tag{15}$$

$$= \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r} b_{j_1}^1 \cdots b_{j_r}^r T(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}, \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_s}).$$

Por simplicidad llamemos

$$t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = T(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}, \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_s}), \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n,$$

y definamos

$$T_1 = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s}.$$

Es inmediato comprobar que

$$T_1(v_{h_1} \otimes \cdots \otimes v_{h_r}, \varphi^{l_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{l_s}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} \big(\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s}\big)(v_{h_1} \otimes \cdots \otimes v_{h_r}, \varphi^{l_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{l_s})$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} \varphi^{i_1}(v_{h_1}) \cdots \varphi^{i_r}(v_{h_r}) \varphi^{l_1}(v_{j_1}) \cdots \varphi^{l_s}(v_{j_s})$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} \delta_{h_1}^{i_1} \cdots \delta_{h_r}^{i_r} \delta_{j_1}^{l_1} \cdots \delta_{j_s}^{l_s} = t_{h_1\ldots h_r}^{l_1\ldots l_s} =$$

$$= T(v_{h_1} \otimes \cdots \otimes v_{h_r}, \varphi^{l_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{l_s}),$$

y por tanto renombrando equivalentemente índices

$$(T - T_1)(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}, \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_s}) = 0, \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n.$$

Usando la fórmula (15) para el tensor $T - T_1$ concluimos que

$$(T - T_1)(u_1, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^s) = 0 \quad \forall\, u_1, \ldots, u_r \in V, \psi^1, \ldots, \psi^s \in V^*,$$

esto es, que $T - T_1$ es el tensor nulo T_0. De aquí que $T = T_1$ y que B_r^s sea un sistema de generadores de $\mathcal{T}_r^s(V)$. La independencia lineal de B_r^s es también inmediata, toda vez que si el tensor

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^n t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s}$$

es el nulo T_0, entonces por lo visto antes

$$t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = T(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}, \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_s}) = T_0(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}, \varphi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{j_s}) = 0$$

para todo $1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n$. ■

Las fórmulas analíticas del cambio de base en $\mathcal{T}_r^s(V)$ se detallan en la siguiente proposición. Recordamos que en estas notas se sigue siempre la *notación columna* para las matrices de cambio de base.

Proposición 2.13 *Sean* $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}, B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ *bases de* $V(\mathbb{K})$ *y* $B_1^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}, B_2^* = \{\psi^1, \ldots, \psi^n\}$ *sus correspondientes duales en* V^**, y sea* $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$*. Escribamos*

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n} t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s} \quad \text{en } (B_1)_r^s \text{ y}$$

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1}^{n} \bar{t}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \psi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \psi^{i_r} \otimes w_{j_1} \otimes \cdots \otimes w_{j_s} \quad \text{en } (B_2)_r^s.$$

Entonces

$$\bar{t}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = \sum_{1 \leq h_1, \ldots, h_r, l_1, \ldots, l_s \leq n} a_{i_1}^{h_1} \cdots a_{i_r}^{h_r} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_s}^{j_s} \cdot t_{h_1 \ldots h_r}^{l_1 \ldots l_s}, \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n,$$

donde

$$(a_i^j)_{i,j=1,\ldots,n} = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1) \quad (i \text{ indica fila, } j \text{ columna})$$

$$(b_i^j)_{i,j=1,\ldots,n} = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)^{-1} \quad (i \text{ indica fila, } j \text{ columna})$$

Demostración: Escribamos $M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1) = (a_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ de acuerdo al convenio de la notación columna:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j v_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

De la Proposición 2.2, $M(\mathrm{Id}_{V^*}, B_1^*, B_2^*) = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)^{\mathrm{t}}$, y por tanto

$$\varphi^j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \psi^i \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Análogamente, si escribimos $M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2) = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)^{-1} = (b_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ de acuerdo al convenio

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} b_i^j w_j \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

se deduce que $M(\mathrm{Id}_{V^*}, B_2^*, B_1^*) = \big(M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)^{-1}\big)^{\mathrm{t}}$ y por tanto

$$\psi^j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j \varphi^i \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} &= T(w_{i_1}, \ldots, w_{i_r}, \psi^{j_1}, \ldots, \psi^{j_s}) = \\
&= T\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i_1}^k v_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{i_r}^k v_k, \sum_{k=1}^{n} b_k^{j_1} \varphi^k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} b_k^{j_s} \varphi^k\Big) = \\
&= \sum_{1 \leq h_1, \ldots, h_r, l_1, \ldots, l_s \leq n} a_{i_1}^{h_1} \cdots a_{i_r}^{h_r} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_s}^{j_s} T(v_{h_1}, \ldots, v_{h_r}, \varphi^{l_1}, \ldots, \varphi^{l_s}) = \\
&= \sum_{1 \leq h_1, \ldots, h_r, l_1, \ldots, l_s \leq n} a_{i_1}^{h_1} \cdots a_{i_r}^{h_r} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_s}^{j_s} t_{h_1 \ldots h_r}^{l_1 \ldots l_s}.
\end{aligned}$$

■

2.1.4. Los espacios $\mathcal{T}_2^0(V)$, $\mathcal{T}_0^2(V)$ y $\mathcal{T}_1^1(V)$

El siguiente corolario es caso particular del Teorema 2.12.

Corolario 2.14 *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada en V y $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ su base dual en V^*. Se tiene que:*

1) *$B_2^0 = \{\varphi^i \otimes \varphi^j : 1 \leq i, j \leq n\}$ es base de $\mathcal{T}_2^0(V)$, y si $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ entonces*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j, \text{ donde } t_{i,j} = T(v_i, v_j),\ 1 \leq i, j \leq n.$$

La matriz $M_B(T) = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es conocida como la matriz de T en la base B.

2) *$B_0^2 = \{v_i \otimes v_j : 1 \leq i, j \leq n\}$ es base de $\mathcal{T}_0^2(V)$, y si $T \in \mathcal{T}_0^2(V)$ entonces*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t^{ij} v_i \otimes v_j, \text{ donde } t^{ij} = T(\varphi^i, \varphi^j),\ 1 \leq i, j \leq n.$$

La matriz $M_B(T) = (t^{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es conocida como la matriz de T en la base B.

3) *$B_1^1 = \{\varphi^i \otimes v_j : 1 \leq i, j \leq n\}$ es base de $\mathcal{T}_1^1(V)$, y si $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ entonces*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t_i^j \varphi^i \otimes v_j, \text{ donde } t_i^j = T(v_i, \varphi^j),\ 1 \leq i, j \leq n.$$

La matriz $M_B(T) = (t_i^j)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donde i indica fila y j columna, es conocida como la matriz de T en la base B.

Corolario 2.15 *Sean B_1, B_2 bases ordenadas de $V(\mathbb{K})$, B_1^*, B_2^* sus correspondientes duales en V^*, y escribamos $P = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)$. Se tiene que:*

1) *Si $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ entonces $M_{B_2}(T) = P^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_1}(T) \cdot P$.*
2) *Si $T \in \mathcal{T}_0^2(V)$ entonces $M_{B_2}(T) = P^{-1} \cdot M_{B_1}(T) \cdot (P^{-1})^{\mathrm{t}}$.*
3) *Si $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ entonces $M_{B_2}(T) = P^{-1} \cdot M_{B_1}(T) \cdot P$.*

Demostración : Escribamos

$$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\},\ B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\},\ B_1^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\},\ B_2^* = \{\psi^1, \ldots, \psi^n\}.$$

Tomemos $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ y pongamos

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{t}^{ij} \psi^i \otimes \psi^j.$$

De la Proposición 2.13,

$$\bar{t}_{ij} = \sum_{1 \leq h,k \leq n} a_i^h a_j^k \cdot t_{hk}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

donde $P = (a_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ (i indica fila, j columna). De aquí se sigue 1).
Si $T \in \mathcal{T}_0^2(V)$ y

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t^{ij} v_i \otimes v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{t}^{ij} w_i \otimes w_j,$$

un razonamiento análogo usando Proposición 2.13 da

$$\bar{t}^{ij} = \sum_{1 \leq h,k \leq n} b_h^i b_k^j \cdot t^{hk}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

donde $P^{-1} = (b_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$ (i indica fila, j columna). De aquí se sigue 2).
Por último, si $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ y

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t_i^i j \varphi^i \otimes v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{t}_i^j \psi^i \otimes w_j,$$

razonando igual que antes y con las mismas notaciones matriciales

$$\bar{t}_i^j = \sum_{1 \leq h,k \leq n} a_i^h b_k^j \cdot t_h^k, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

de donde se sigue 3). ■

Hay una conexión canónica entre los espacios $\mathcal{T}_1^1(V)$ y $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$.

Definición 2.16 *Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, su tensor asociado $T_f \in \mathcal{T}_1^1(V)$ viene dado por la expresión*

$$T_f \colon V \times V^* \to \mathbb{R}, \quad T_f(v, \phi) = \phi\big(f(v)\big).$$

La comprobación de la bilinealidad de T_f, esto es de que $T_f \in \mathcal{T}_1^1(V)$, es rutinaria. Lo interesante está encerrado en el siguiente teorema.

Teorema 2.17 *Dado $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial, la aplicación*

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V \to \mathcal{T}_1^1(V), \quad f \mapsto T_f,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además si B es una base ordenada de V entonces

$$M(f, B) = M_B(T).$$

DEMOSTRACIÓN : La linealidad está encerrada en la siguiente fórmula

$$T_{\lambda f + \mu h} = \lambda T_f + \mu T_h \quad \forall\, f, h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En efecto, para cualesquiera $v \in V, \phi \in V^*$ tenemos que

$$T_{\lambda f + \mu h}(v, \phi) = \phi\big((\lambda f + \mu h)(v)\big) = \phi\big(\lambda f(v) + \mu h(v)\big) =$$

$$= \lambda \phi\big(f(v)\big) + \mu \phi\big(h(v)\big) = \lambda T_f(v, \phi) + \mu T_h(v, \phi) = \big(\lambda T_f + \mu T_h\big)(v, \phi),$$

de donde se sigue la fórmula anterior.

Por otra parte, la transformación lineal $f \mapsto T_f$ no tiene núcleo. En efecto, si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ es tal que T_f es el tenso nulo T_0, entonces

$$0 = T_f(v, \phi) = \phi\big(f(v)\big) \quad \forall\, v \in V, \phi \in V^*.$$

Pero entonces $\theta_{f(v)} = 0$ (ver (14)) y el Teorema de Reflexividad 2.6 nos garantiza que $f(v) = \vec{0}$, todo $v \in V$. De aquí que $f = 0$ como queríamos demostrar.

Como $\dim_k \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{T}_1^1(V) = n^2$, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, la transformación $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V \to \mathcal{T}_1^1(V)$, $f \mapsto T_f$, es un isomorfismo, lo que concluye la primera parte del teorema.

Para la segunda, tomemos $B = \{v_1, \ldots, n\}$ base de V y escribamos $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i^j v_j$ para todo $i = 1, \ldots, n$; por tanto

$$M(f, B) = (a_i^j)_{i,j=1,\ldots,n},$$

donde según nuestro convenio (notación columna) i indica fila y j columna. Igualmente llamemos $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ a la base dual de B, y recordemos que

$$M_B(T_f) = (t_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}, \quad \text{donde } t_i^j = T_f(v_i, \varphi^j) \text{ para todo } i, j = 1, \ldots, n.$$

Por tanto,

$$t_i^j = T_f(v_i, \varphi^j) = \varphi^j\big(f(v_i)\big) = \varphi^j\big(\sum_{k=1}^n a_i^k v_k\big) = \sum_{k=1}^n a_i^k \varphi^j(v_k) = \sum_{k=1}^n a_i^k \delta_k^j = a_i^j$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$ y $M(f, B) = M_B(T)$, lo que concluye el teorema. ∎

Observación 2.18 *Dado un tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ es natural preguntarse quién es el endomorfismo $f_T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ tal que $T_{f_T} = T$. Para responder a esta cuestión, consideremos para cada $v \in V$ la forma lineal en V^**

$$T_v \colon V^* \to \mathbb{K}, \quad T_v(\phi) := T(v, \phi),$$

y observemos que

$$T_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 T_{v_1} + \lambda_1 v_2 T_{v_2} \quad \forall\, v_1, v_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}.$$

Atendiendo a al Teorema 2.6, si definimos

$$f_T \colon V \to V,\ f_T(v) := \Theta(T_v), \quad \forall\, v \in V, \tag{16}$$

deducimos que f_T es lineal, y por tanto $f_T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$.

Por construcción, para todo $v \in V$ y $\varphi \in V^*$

$$T_{f_T}(v, \varphi) = \varphi\left(f_T(v)\right) = \varphi\left(\Theta(T_v)\right) = T_v(\varphi) = T(v, \varphi),$$

de donde finalmente $T_{f_T} = T$.

2.1.5. Contracción tensorial

Sabemos que la traza de una matriz no varía por semejanza. Este hecho básico permite definir para cada $V(\mathbb{K})$ espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$

$$\mathrm{Traza}(f) = \mathrm{Traza}\big(M(f, B)\big),$$

expresión que no depende de la base B de V elegida. Análogamente se puede introducir el concepto de traza para tensores $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$; basta considerar el único endomorfismo $f_T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ tal que $T = T_{f_T}$ y definir

$$\mathrm{Traza}(T) = \mathrm{Traza}(T_{f_T});$$

ver (16). Por el Teorema 2.17,

$$\mathrm{Traza}(T) = \mathrm{Traza}\big(M(f, B)\big) = \mathrm{Traza}\big(M_B(T)\big),$$

esto es, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V ($\dim_{\mathbb{K}} V = n$) y $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ su base dual,

$$\mathrm{Traza}(T) = \sum_{k=1}^{n} T(v_k, \varphi^k) \in \mathbb{K} \equiv \mathcal{T}_0^0(V),$$

y esta expresión no depende de la base B elegida.

Lo que hemos hecho es *contraer*, reduciendo en una unidad la covarianza y la contravarianza, los tensores $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ de acuerdo con la siguiente fórmula

$$C_1^1(T) := \mathrm{Traza}(T) \in \mathbb{K} \equiv \mathcal{T}_0^0(V).$$

Esta construcción se puede extender a tensores $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$, $r, s \in \mathbb{N}$, a través de un concepto de contracción tensorial más general. En efecto, si $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$ y fijamos índices $i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, s\}$, es claro que para cada lista de vectores y formas lineales

$$u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r \in V,\ \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s \in V^*,$$

la aplicación

$$T_{u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_r}^{\psi^1,\ldots,\psi^{j-1},\psi^{j+1},\ldots,\psi^s} \colon V \times V^* \to \mathbb{K},$$

$$= T_{u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_r}^{\psi^1,\ldots,\psi^{j-1},\psi^{j+1},\ldots,\psi^s}(v, \phi) = T(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, v, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \phi, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s),$$

es un tensor de tipo $(1, 1)$:

$$T_{u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_r}^{\psi^1,\ldots,\psi^{j-1},\psi^{j+1},\ldots,\psi^s} \in \mathcal{T}_1^1(V).$$

Definición 2.19 *Dado $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$, $r, s \in \mathbb{N}$, la contracción de T con respecto a la i-esima variable convariante y j-esima contravariante es el tensor $C_i^j(T) \in \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}(V)$ dado por:*

$$C_i^j(T)\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s\big) = C_1^1\big(T_{u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_r}^{\psi^1,\ldots,\psi^{j-1},\psi^{j+1},\ldots,\psi^s}\big)$$

para todo $\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s\big) \in V^{r-1} \times V^{s-1}$.

Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ su base dual, es claro que

$$C_i^j(T)\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s\big) =$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^n T(u_1, \ldots, u_{i-1}, \overset{i}{\smile}{v_k}, u_{i+1}, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \overset{i}{\smile}{\varphi^k}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s)$$

para todo $\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r, \psi^1, \ldots, \psi^{j-1}, \psi^{j+1}, \ldots, \psi^s\big) \in V^{r-1} \times V^{s-1}$.

2.1.6. Tensores covariantes simétricos y antisimétricos

Vamos a estudiar una familia de tensores con propiedades de simetría especiales que simplifican su comprensión.

Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Comencemos con la siguiente definición.

Definición 2.20 *Sea $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ un tensor r veces covariante.*

- *T se dice* simétrico *si para toda permutación $\sigma \in \mathcal{S}_r$ y vectores $v_1, \ldots, v_r \in V$,*

$$T\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\big) = T(v_1, \ldots, v_r).$$

- *T se dice* antisimétrico *si para toda permutación $\sigma \in \mathcal{S}_r$ y vectores $v_1, \ldots, v_r \in V$,*

$$T\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\big) = \mathrm{sig}(\sigma) T(v_1, \ldots, v_r).$$

Como toda permutación es composición de trasposiciones, es evidente que

- $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ es simétrico si y sólo si para todo par de índices $1 \leq i < j \leq r$ y vectores $v_1, \ldots, v_r \in V$,

$$T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v_j}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v_i}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = T(v_1, \ldots, v_r).$$

- $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ es antisimétrico si y sólo si para todo par de índices $1 \leq i < j \leq r$ y vectores $v_1, \ldots, v_r \in V$,

$$T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v_j}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v_i}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = -T(v_1, \ldots, v_r).$$

Definición 2.21 *Un tensor $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ se dice* alternado *si para todo par de índices $1 \leq i < j \leq r$ y vectores $v, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n \in V$,*

$$T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = 0.$$

Es fácil ver que todo tensor antisimétrico es alternado. En efecto si $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ es antisimétrico, $1 \leq i < j \leq r$ y $v, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n \in V$,

$$T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) =$$

$$= -T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n),$$

y de aquí que $T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = 0$ ya que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ tiene característica distinta de 2. Curiosamente lo recíproco es también cierto y ambos conceptos son equivalentes. Para comprobarlo tomemos $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ alternado y observemos que para cualesquiera $1 \leq i < j \leq r$ y $v, w, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n \in V$,

$$0 = T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overbrace{v + w}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \overbrace{v + w}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) =$$

$$= T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) +$$
$$+T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{w}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) +$$
$$+T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{w}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) +$$
$$+T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{w}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{w}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) =$$
$$= T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{v}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{w}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n) +$$
$$+T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underbrace{w}^{i}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \underbrace{v}^{j}, v_{j+1}, \ldots, v_n),$$

y de ahí la antisimetría de T.

No es difícil ver que si $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$, $r \geq 1$ es antisimétrico y $u_1, \ldots, u_r$ son linealmente dependientes entonces

$$T(u_1, \ldots, u_r) = 0.$$

En efecto, el caso $r = 1$ es trivial. Supongamos que $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ es antisimétrico, $r \geq 2$ y $u_1, \ldots, u_r$ son linealmente dependientes, lo que es equivalente a que un vector de la lista es combinación lineal del resto; por comodidad pondremos $u_r = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k u_k$ (un razonamiento similar se haría si fuese otro vector). Tenemos que

$$T(u_1, \ldots, u_r) = T(u_1, \ldots, u_{r-1}, \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k u_k) = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k T(u_1, \ldots, u_{r-1}, u_k) = 0$$

por ser T alternado.

Definición 2.22 *Si $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con $\dim_k V = n$ y $r \in \mathbb{N}$, denotaremos por:*

$$\mathrm{S}_r(V) = \{T \in \mathcal{T}_r^0(V) \colon T \text{ simétrico}\}.$$
$$\Lambda_r(V) = \{T \in \mathcal{T}_r^0(V) \colon T \text{ antisimétrico}\}.$$

Ambos subconjuntos de $\mathcal{T}_r^0(V)$ son subespacios vectoriales de forma trivial. Nótese que $\mathrm{S}_1(V) = \Lambda_1(V) = V^*$, y convengamos que $\Lambda_0(V) = \mathbb{K}$. Los tensores antisimétricos en $\Lambda_r(V)$, $r \geq 0$, se les llama r-formas, y ocupan un lugar relevante en la literatura. Hagamos un estudio detallado de los mismos.

Si $\psi^1, \ldots, \psi^r \in V^*$ son 1-formas sobre V, definimos su producto exterior como:

$$\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma) \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)} \in \mathcal{T}_r^0(V).$$

De la multilinealidad del producto tensorial se sigue la de la aplicación producto exterior

$$(V^*)^2 \to \mathcal{T}_r^0(V), \quad (\psi^1, \cdots, \psi^r) \mapsto \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r. \tag{17}$$

Proposición 2.23 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

I) *Si $\psi^1, \ldots, \psi^r \in V^*$ entonces $\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r \in \Lambda_r(V)$.*

II) *Si $\psi^1, \ldots, \psi^r \in V^*$ y $\sigma \in \mathcal{S}_r$ entonces $\psi^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \psi^{\sigma(r)} = \mathrm{sig}(\sigma) \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r$.*

En particular si $\psi^1, \ldots, \psi^r$ son linealmente dependientes entonces $\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r = T_0$.

Demostración: Para i), notemos que para toda $\tau \in \mathcal{S}_r$ y cualesquiera $v_1, \ldots, v_r \in V$

$$(\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r)\big(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(r)}\big) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)(\psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)})\big(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(r)}\big) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{\sigma(1)}(v_{\tau(1)}) \cdots \psi^{\sigma(r)}(v_{\tau(r)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(\tau(1))}(v_{\tau(1)}) \cdots \psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(\tau(r))}(v_{\tau(r)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(1)}(v_1) \cdots \psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(r)}(v_r) =$$

$$= \mathrm{sig}(\tau)\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma\circ\tau^{-1})\psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(1)}(v_1) \cdots \psi^{(\sigma\circ\tau^{-1})(r)}(v_r)\right) =$$

$$= \mathrm{sig}(\tau)\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{(\sigma)(1)}(v_1) \cdots \psi^{(\sigma)(r)}(v_r)\right) = \mathrm{sig}(\tau)(\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r)(v_1, \ldots, v_r).$$

Para probar ii) tomemos $\tau \in \mathcal{S}_r$ y observemos que

$$\psi^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \psi^{\tau(r)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{\sigma(\tau(1))} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(\tau(r))} =$$

$$= \mathrm{sig}(\tau) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma\circ\tau)\psi^{(\sigma\circ\tau)(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{(\sigma\circ\tau)(r)} =$$

$$= \mathrm{sig}(\tau) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sig}(\sigma)\psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)} = \mathrm{sig}(\tau)(\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r).$$

Además, si $\psi^1, \ldots, \psi^r$ son linealmente dependientes, razonando como en i) y suponiendo que $\psi^r = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k \psi^k$, tenemos que

$$\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^r = \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^{r-1} \wedge \big(\sum_{k=1}^{r-1} \mu_k \psi^k\big) = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k(\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^{r-1} \wedge \psi^k) = T_0,$$

donde para la última identidad hemos usado la identidad

$$\psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^{r-1} \wedge \psi^k = T_0,$$

una consecuencia inmediata de la primera parte de ii) aplicada a la trasposición $r \leftrightarrow k$, $k = 1, \ldots, r-1$. ■

Teorema 2.24 *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y denotemos por $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ a su base dual. Entonces el conjunto*

$$B_r^{\Lambda} := \{\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} \colon 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

es una base de $\Lambda_r(V)$; en particular $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda_r(V) = \binom{n}{r}$. Además, para todo $T \in \Lambda_r(V)$ se tiene que

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} t_{i_1,\ldots,i_r} \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r},$$

donde $t_{i_1,\ldots,i_r} = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ para todo $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

Demostración: Tomemos $T \in \Lambda_r(V)$, y recordemos que del Teorema 2.12

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r},$$

donde $t_{i_1,\ldots,i_r} = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ para todo $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$.

Dados $i_1, \ldots, i_r, \in \{1, \ldots, r\}$ tenemos que:

- Si $\sharp\{i_1, \ldots, i_r\} < r$ (hay al menos dos índices repetidos) entonces

$$t_{i_1,\ldots,i_r} = 0;$$

  ver Proposición 2.23-i).

- Si $\sharp\{i_1, \ldots, i_r\} = r$ (no hay índices repetidos) entonces

$$t_{\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_r)} = \operatorname{sig}(\sigma) t_{i_1,\ldots,i_r} \quad \forall\, \sigma \in \mathcal{S}_r;$$

  usar Definición 2.20.

Por tanto inferimos que

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} t_{i_1,\ldots,i_r} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \operatorname{sig}(\sigma) \varphi^{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \varphi^{\sigma(i_r)} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} t_{i_1,\ldots,i_r} \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r},$$

lo que prueba que $\{\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$ es sistema generador de $\Lambda_r(V)$. Para acabar comprobemos que son linealmente independientes. Para ello tomemos una combinación lineal nula

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r = 1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} = T_0.$$

Si tomamos $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r} \in B$ tales que $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, tenemos que

$$0 = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r = 1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} \right) (v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}) =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r = 1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \big[(\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r})(v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}) \big] =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r = 1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \big[\varphi^{i_1}(v_{j_1}) \cdots \varphi^{i_r}(v_{j_r}) \big] = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r = 1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_r} \delta_{j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_r}^{i_r} = t_{j_1,\ldots,j_r},$$

lo que demuestra que los coeficientes de la combinación lineal son todos nulos, y por tanto la independencia lineal. ■

Consideremos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ su dual, enteros $1 \leq r, s \leq n$, y formas $\tau = \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} \in \Lambda_r(V)$, $\omega = \varphi^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{j_s} \in \Lambda_s(V)$. Definamos el producto exterior de τ y ω con la $(r+s)$-forma

$$\tau \wedge \omega := \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} \wedge \varphi^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{j_s} \in \Lambda_{r+s}(V).$$

Como B_r^Λ es base de $\Lambda_r(V)$ para todo $1 \leq r \leq n$ (ver Teorema 2.24), este producto se puede extender por bilinealidad a una aplicación

$$\wedge\colon \Lambda_r(V) \times \Lambda_s(V) \to \Lambda_{r+s}(V),$$

conocida en la literatura como *producto exterior* de formas. La multilinealidad en (17) y el Teorema 2.24 implican que el producto exterior está canónicamente construído, esto es, no depende de la base B auxiliar utilizada para su definición para todo $r, s \geq 1$. Como $\Lambda_0(V) = \mathbb{R}$, el producto exterior se puede extender

$$\wedge\colon \Lambda_0(V) \times \Lambda_s(V) \to \Lambda_s(V), \quad (\lambda, \omega) \mapsto \lambda\omega,$$

y análogamente con $\wedge\colon \Lambda_s(V) \times \Lambda_0(V) \to \Lambda_s(V)$, para todo entero $s \geq 0$.

2.1.7. Elementos de volumen

El Teorema 2.24 tiene esta consecuencia elemental:

Corolario 2.25 *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V y denotemos por $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ a su base dual. El tensor alternado*

$$\det_B := \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n$$

es conocido como tensor determinante en la base B, *y genera (es una base de) $\Lambda_n(V)$. Además:*

1) $\det_B(w_1, \ldots, w_n) = \det\big((w_1)_B, \ldots, (w_n)_B\big)$.

2) *Para toda base ordenada $\bar{B}$ de V,* $\det_{\bar{B}} = \det\big(M(\mathrm{Id}_V, B, \bar{B})\big) \cdot \det_B$.

3) *Para todo $\Psi \in \Lambda_n(V)$, $\Psi = \Psi(v_1, \ldots, v_n) \cdot \det_B$.*

Demostración: Primero notemos que $\det_B \neq T_0$ ya que

$$\det_B(v_1, \ldots, v_n) = (\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n)(v_1, \ldots, v_n) = 1.$$

Como del Teorema 2.24 sabemos que $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda_n(V) = 1$, inferimos que $\det_B$ es base de $\Lambda_n(V)$. Por otra parte, un cálculo elemental nos da

$$\det_B(w_1, \ldots, w_n) = (\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n)(w_1, \ldots, w_n) =$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma)(\varphi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi^{\sigma(n)}(w_1, \ldots, w_n).$$

Como $\varphi^j(w)$ es la j-esima coordenada de w_B para todo $j = 1, \ldots, n$, $w \in V$, si escribimos $(w_j)_B = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ par todo $j = 1, \ldots, n$, queda

$$\det_B(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det\big((w_1)_B, \ldots, (w_n)_B\big),$$

lo que demuestra 1).

Para probar item 2), recordemos que $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda_n(V) = 1$ y por tanto $\det_{\bar{B}} = \lambda \det_B$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pongamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y observemos que de 1)

$$\det_{\bar{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det\big((v_1)_{\bar{B}}, \ldots, (v_n)_{\bar{B}}\big) = \det M(\mathrm{Id}_V, B, \bar{B}).$$

Como $\det_B(v_1, \ldots, v_n) = 1$ deducimos que $\lambda = \det M(\mathrm{Id}_V, B, \bar{B})$.

Item 3) se sigue del mismo razonamiento de 2) (ya que $\Psi = \lambda \det_B$, , $\lambda \in \mathbb{K}$) o directamente del Teorema 2.24. ■

Definición 2.26 *A toda n-forma no nula $\Psi \in \Lambda_n(V)$ se le llama un* elemento de volumen *sobre el espacio vectorial $V(\mathbb{K})$.*

En particular, $\det_B$ es un elemento de volumen en V para toda base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Definición 2.27 *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$. Dado $T \in \mathcal{T}_r^0(V)$, se define el* pull-back *de T según f como el tensor $f^*T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ dado por:*

$$(f^*T)(v_1, \ldots, v_n) = T\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big) \quad \forall\, v_1, \ldots, v_n \in V.$$

La comprobación de que $f^*T \in \mathcal{T}_r^0(V)$ es rutinaria.

Proposición 2.28 *Si B es una base ordenada de $V(\mathbb{K})$ entonces*

$$f^*\det_B = \det(f) \cdot \det_B.$$

Demostración: Escribiendo $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, del Corolario 2.25 se tiene que

$$f^*\det_B = (f^*\det_B)(v_1, \ldots, v_n) \cdot \det_B = \det_B\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big) \cdot \det_B =$$

$$= \det\big(f(v_1)_B, \ldots, f(v_n)_B\big) \cdot \det_B = \det\big(M(f, B)\big) \cdot \det_B,$$

y de ahí la proposición. ∎

2.1.8. Tensores simétricos y antisimétricos de tipo $(2, 0)$

Comencemos con la siguiente definición.

Definición 2.29 *Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ y un tensor $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$, el* tensor traspuesto *$T^{\mathrm{t}} \in \mathcal{T}_2^0(V)$ de T se define como*

$$T^{\mathrm{t}} \colon V \times V \to \mathbb{K}, \quad T^{\mathrm{t}}(v, w) = T(w, v) \quad \forall\, v, w \in V.$$

Claramente la trasposición de tensores es lineal:

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^{\mathrm{t}} = \lambda_1 T_1^{\mathrm{t}} + \lambda_2 T_2^{\mathrm{t}} \quad \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0(V),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}.$$

Como además es una involución, esto es, $(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = T$ para todo $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$, la aplicación

$${}^{\mathrm{t}} \colon \mathcal{T}_2^0(V) \to \mathcal{T}_2^0(V)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Teorema 2.30 *Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y denotemos por $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ a su base dual. Entonces:*

a) *$\mathcal{T}_2^0(V) = \mathrm{S}_2(V) \oplus \Lambda_2(V)$.*

b) *$B_2^A = \{\varphi^i \wedge \varphi^j = \varphi^i \otimes \varphi^j - \varphi^j \otimes \varphi^i \colon 1 \leq i < j \leq n\}$ es base de $\Lambda_2(V)$; en particular*

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda_2(V) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

c) *$B_2^S = \{\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i \colon 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\varphi^i \otimes \varphi^i \colon i = 1, \ldots, n\}$ es base de $\mathrm{S}_2(V)$; en particular*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{S}_2(V) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

DEMOSTRACIÓN: Si $T \in \mathrm{S}_2(V) \cap \Lambda_2(V)$ entonces

$$T(v,w) = T(w,v) = -T(v,w) \quad \forall\, v,w \in V,$$

y por tanto $T(v,w) = 0$ para todo $v,w \in V$, esto es $T = T_0$ tensor nulo. Además, para todo $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ tenemos que

$$T = \frac{1}{2}(T + T^{\mathrm{t}}) + \frac{1}{2}(T - T^{\mathrm{t}}),$$

y como claramente $\frac{1}{2}(T + T^{\mathrm{t}}) \in \mathrm{S}_2(V)$ y $\frac{1}{2}(T - T^{\mathrm{t}}) \in \Lambda_2(V)$, lo anterior demuestra que $\mathcal{T}_2^0(V) = \mathrm{S}_2(V) + \Lambda_2(V)$. En consecuencia se sigue a).

Item b) es corolario del Teorema 2.24; en particular

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda_2(V) = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Para probar c) observemos que del Teorema 2.12, a) y b),

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{S}_2(V) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{T}_2^0(V) - \dim_{\mathbb{K}} \Lambda_2(V) = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Como trivialmente $B_2^S \subset \mathrm{S}_2(V)$ y $\sharp B_2^S = \frac{1}{2}n(n+1)$, bastará con probar que los tensores en son B_2^S son linealmente independientes. Si tomamos una combinación lineal nula

$$\Big(\sum_{1\le i<j\le n} t_{ij}(\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^n t_{ii}\varphi^i \otimes \varphi^i\Big) = T_0,$$

un cálculo sencillo nos dice que

$$0 = \left(\left(\sum_{1\le i<j\le n} t_{ij}(\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i)\right) + \left(\sum_{i=1}^n t_{ii}\varphi^i \otimes \varphi^i\right)\right)(v_k, v_h) = t_{kh}, \quad 1 \le k < h \le n$$

y

$$0 = \left(\left(\sum_{1\le i<j\le n} t_{ij}(\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i)\right) + \left(\sum_{i=1}^n t_{ii}\varphi^i \otimes \varphi^i\right)\right)(v_k, v_k) = t_{kk}, \quad 1 \le k \le n,$$

de donde todos los coeficientes han de ser nulos. Esto prueba c) y concluye el teorema.
■

2.2. Formas bilineales y métricas

Presentemos formalmente el concepto de forma bilineal sobre un espacio vectorial real.

Definición 2.31 *Dado un espacio vectorial real $V(\mathbb{R})$, a los elementos del espacio vectorial $\mathcal{T}_2^0(V)$ de los tensores de tipo $(2,0)$ se les llama* formas bilineales *sobre V.*

A los elementos del espacio vectorial $\mathrm{S}_2(V)$ de los tensores simétricos (o formas bilineales simétricas) se les llama métricas *sobre V. Si g es una métrica en V al par (V,g) se le llama* espacio vectorial métrico *(abreviadamente, EVM).*

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las *matrices simétricas reales de orden n.*

Ejemplo 2.32 *Veamos algunos ejemplos de EVMs (usaremos notación columna para los vectores $x \in \mathbb{R}^n$):*

1) $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $g_0(x,y) = x^{\mathrm{t}} \cdot y$ (producto escalar usual). A este espacio métrico lo referiremos como el espacio vectorial euclidiano usual.

2) Si $V(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real y B una base de V, la aplicación

$$g_B(w,w) = {v_B}^{\mathrm{t}} \cdot w_B$$

es una métrica en V.

3) Dada una matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, el par $(\mathbb{R}^n, g_A)$ para

$$g_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g_A(x,y) = x^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot y, \tag{18}$$

es trivialmente un EVM. En efecto, la bilinealidad de g_A es evidente, y la condición $A^{\mathrm{t}} = A$ garantiza que $g_A(v,w) = g_A(w,v)$ para todo $v, w \in V$. Si $A = \mathrm{I}_n$ entonces $g_A = g_0$, y si

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

entonces g_A es la llamada *métrica de Lorentz-Minkowski* en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ que aparece en la teoría de la Relatividad espacial. Esta métrica se suele denotar como g_1.

4) Sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ de las funciones continuas en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ se define el producto L^2 como

$$g \colon \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad g(f,h) = \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

El par $\big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), g\big)$ es claramente un EVM.

5) Sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define $g_0(A,C) = \mathrm{Traza}(A^{\mathrm{t}} \cdot C)$.
Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, es claro que

$$g_0(A,C) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ij},$$

por lo que g_0 no es sino el producto escalar clásico en $\mathbb{R}^{n^2} \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y el par $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), g_0)$ es un EVM.

6) Si (V,g) es un espacio métrico y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial entonces

$$g|_{U\times U} \colon U \times U \to \mathbb{R}$$

es una métrica en U, esto es, $(U, g|_{U\times U})$ es un EVM. Se dice que $g|_{U\times U}$ es la *métrica inducida* por g en el subespacio U.

7) Si (V_i, g_i), $i = 1,2$, son dos EVM, entonces en $V_1 \times V_2$ se define la *métrica producto* como

$$g \colon (V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \to \mathbb{R}, \quad g\big((v_1,v_2),(u_1,u_2)\big) = g_1(v_1,u_1) + g_2(v_2,u_2).$$

Claramente $(V_1 \times V_2, g_1 \times g_2)$ es un EVM.

La siguiente definición redunda con la notación introducida en el Corolario 2.14.

Definición 2.33 *Si* (V, g) *es un EVM con* $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ *y* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base ordenada de* V*, se define la* matriz de g en B *como la matriz simétrica de orden* n

$$M_B(g) = \big(g(v_i, v_j)\big)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La matriz $M_B(g)$ nos permite calcular fácilmente la acción de la métrica g sobre un par de vectores $v, w \in V$ en términos de sus coordenadas en B. En efecto, si escribimos

$$v_B = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}, \quad w_B = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}},$$

entonces

$$g(v, w) = g\big(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\big) = \sum_{i=1}^n x_i g\left(v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j g(v_i, v_j)\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g(v_i, v_j).$$

Por tanto

$$g(v, w) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B. \tag{19}$$

Proposición 2.34 *Fijada una base ordenada* B *de* V*, la aplicación*

$$\mathrm{S}_2(V) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad g \mapsto M_B(g),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{S}_2(V) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$*; ver Teorema 2.30*-c).

Demostración: La identidad

$$M_B(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 M_B(g_1) + \lambda_2 M_B(g_2)$$

para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{S}_2(V)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, es trivial por definición y prueba la linealidad. Además, si para cada $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definimos

$$g_A \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad g_A(v, w) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot w_B,$$

la aplicación

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{S}_2(V), \quad A \mapsto g_A,$$

es también lineal e inversa de la dada en el enunciado. Para concluir, basta recordar que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$. ■

En el Corolario 2.15-1) se explicó cómo cambia la matriz $M_B(g)$ cuando cambiamos de base. Repetiremos ese cálculo en el siguiente lema por completitud de la exposición.

Lema 2.35 *Si* (V, g) *es un EVM y* B_1, B_2 *son bases de* V *entonces*

$$M_{B_2}(g) = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_1}(g) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1).$$

Demostración: Por simplicidad llamemos $P = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)$, y recordemos que para cualquier $u \in V$ se tiene $u_{B_2} = P \cdot u_{B_1}$ (ecuaciones del cambio de base). Por tanto, si tomamos $v, w \in V$ arbitrarios y usamos (19), deducimos que

$$g(v,w) = (v_{B_2})^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_2}(g) \cdot w_{B_2} = (P \cdot v_{B_1})^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_2}(g) \cdot (P \cdot w_{B_1}) =$$

$$= (v_{B_1}^{\mathrm{t}} \cdot P^{\mathrm{t}}) \cdot M_{B_2}(g) \cdot (P \cdot w_{B_1}) = v_{B_1}^{\mathrm{t}} \cdot \big(P^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_2}(g) \cdot P\big) \cdot w_{B_1}.$$

Como esta identidad es cierta para cualesquiera $v, w \in V$, inferimos que

$$M_{B_2}(g) = P^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_1}(g) \cdot P,$$

lo que completa la prueba. ■

Es conveniente aquí comparar con la fórmula paralela que se estableció para endomorfismos $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$, en ese caso el cambio era por semejanza

$$M_{B_2}(f) = P^{-1} \cdot M_{B_1}(f) \cdot P.$$

La discusión anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.36 *Dos matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dicen* congruentes *si existe $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $C = P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P$.*

La relación binaria en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de congruencia de matrices es de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva). El lema 2.35 expresa que las matrices que representan en distintas bases a una métrica g en un espacio vectorial V son congruentes. De hecho, si $A = M_{B_1}(g)$ y $C = P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz congruente a A ($n = \dim_{\mathbb{R}} V$), entonces existe una base B_2 de V tal que $M_{B_2}(g) = C$; basta con elegir B_2 para que $P = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_1)$. Por tanto,

$$\{M_B(g) \colon B \text{ base de } V\}$$

es una clase de congruencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (esto es, de equivalencia para la relación "ser congruentes").

2.3. Formas cuadráticas

Existe un artificio matemático que conecta de manera equivalente el concepto de métrica con el de forma cuadrática. Su introducción es meramente retórica y es herencia de formulaciones clásicas.

Definición 2.37 *Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, una* forma cuadrática *en V es una aplicación $F \colon V \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

i) *$F(\lambda v) = \lambda^2 F(V)$ para todo $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

ii) *$g_F \colon V \times V \to \mathbb{R}$, $g_F(v,w) = \frac{1}{2}\big(F(v+w) - F(v) - F(w)\big)$, es una métrica en V (métrica asociada a F).*

Ejemplo 2.38 *Veamos algunos ejemplos sencillos de formas cuadráticas:*

i) Si (V, g) es un EVM entonces

$$F_g \colon V \to \mathbb{R}, \quad F_g(v) = g(v,v)$$

es una forma cuadrática en V.

II) Si $C=(c_{ij})_{i,j=1\dots,n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A=\frac{1}{2}(C+C^{\mathrm{t}})\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ entonces

$$F_A\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad F_A(x)=x^{\mathrm{t}}\cdot C\cdot x=x^{\mathrm{t}}\cdot A\cdot x,$$

es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Para probar i) basta con observar que para cualesquiera vectores $v,w\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$:

- $F_g(\lambda v)=g(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2 g(v,v)=\lambda^2F_g(v)$.
- $g_{F_g}=g$, esto es, para cualesquiera vectores $v,w\in V$

$$\frac{1}{2}\big(F_g(v+w)-F_g(v)-F_g(w)\big)=\frac{1}{2}\big(g(v+w,v+w)-g(v,v)-g(w,w)\big)=g(v,w).$$

En la última identidad se ha tenido en cuenta la bilinealidad y simetría de g.

En cuanto a ii), nótese previamente que

$$x^{\mathrm{t}}\cdot C\cdot x=\big(x^{\mathrm{t}}\cdot C\cdot x\big)^{\mathrm{t}}=x^{\mathrm{t}}\cdot C^{\mathrm{t}}\cdot x,$$

y por tanto $x^{\mathrm{t}}\cdot(C+C^{\mathrm{t}})\cdot x=2\,x^{\mathrm{t}}\cdot A\cdot x$. Por lo demás, es inmediato que F_A es la forma cuadrática asociada a g_A (y por tanto $g_{F_A}=g_A$); ver (18). ∎

Nótese que el Ejemplo 2.38-ii) nos dice que para definir formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ a partir de matrices es suficiente con restringirse a las simétricas.

La conexión íntima entre formas cuadráticas y métricas está recogida en la siguiente proposición. Llamemos

$$\mathcal{F}(V)=\{F\colon V\to\mathbb{R}\colon\ F \text{ es forma cuadrática sobre } V\},$$

y observemos que $\mathcal{F}(V)$ es un espacio vectorial real con la suma y producto por escalares naturales.

Proposición 2.39 *Dado V espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{R}}V=n$, la aplicación*

$$\Phi\colon \mathrm{S}_2(V)\to\mathcal{F}(V),\quad \Phi(g)=F_g,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales con inverso

$$\Psi\colon\mathcal{F}(V)\to\mathrm{S}_2(V),\quad \Psi(F)=g_F.$$

En particular, $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(V)=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{S}_2(V)=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Demostración: La identidad

$$\Phi(\lambda_1g_1+\lambda_2g_2)=F_{\lambda_1g_1+\lambda_2g_2}=\lambda_1F_{g_1}+\lambda_2F_{g_2}=\lambda_1\Phi(g_1)+\lambda_2\Phi(g_2).$$

para todo $g_1,g_2\in\mathrm{S}_2(V)$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, prueba la linealidad de Φ.

Para comprobar que $\Phi\circ\Psi=\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(V)}$, tomemos $F\in\mathcal{F}(V)$, $v\in V$, y observemos que

$$\big((\Phi\circ\Psi)(F)\big)(v)=F_{g_F}(v)=g_F(v,v)=\frac{1}{2}\big(F(2v)-F(v)-F(v)\big)=F(v).$$

Análogamente, para comprobar que $\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}_{\mathrm{S}_2(V)}$ tomemos $g\in\mathrm{S}_2(V)$, $v,w\in V$, y observemos que

$$\big((\Psi\circ\Phi)(g)\big)(v,w)=g_{F_g}(v,w)=\frac{1}{2}\big(F_g(v+w)-F_g(v)-F_g(w)\big)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(g(v+w,v+w)-g(v,v)-g(w,w)\big)=g(v,w),$$

donde como antes para la última identidad se ha tenido en cuenta la bilinealidad y simetría de g.

La fórmula $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(V)=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{S}_2(V)=\frac{1}{2}n(n+1)$ se sigue de la Proposición 2.34. ∎

2.4. Ortogonalidad: clasificación de las métricas

El concepto moderno de ortogonalidad en EVM descansa en la idea de perpendicularidad clásica en el espacio euclidiano.

Definición 2.40 *Sea (V, g) un EVM. Dos vectores $v, w \in V$ se dicen* ortogonales o perpendiculares *respecto de g (y se escribe $v \perp w$) si $g(v, w) = 0$. Igualmente, dos subespacios vectoriales $U, W \leq V$ se dicen ortogonales respecto de g, y se escribe $U \perp W$, si $u \perp w = 0$ para todo $u \in U, w \in W$.*

La relación binaria en V de ortogonalidad respecto a una métrica g es simétrica, pero en general no es reflexiva ni transitiva. Por la bilinealidad de las métricas, el vector $\vec{0}$ es ortogonal a cualquier vector $w \in V$ respecto de cualquier métrica g en V.

En el plano vectorial euclidiano $(\mathbb{R}^2, g_0)$ se tiene $(1, -1) \perp (1, 1)$, sin embargo los vectores $(1, -1), (1, 1)$ no son ortogonales respecto a la métrica de Lorentz-Minkowski g_1 en $\mathbb{R}^2$. Es obvio que el vector nulo es ortogonal a sí mismo en cualquier EVM. Una cuestión curiosa es que el único vector ortogonal a si mismo en $(\mathbb{R}^2, g_0)$ es el nulo $(0, 0)$, pero no así en $(\mathbb{R}^2, g_1)$ donde $(1, 1) \perp (1, 1)$. Es más, en $(\mathbb{R}^2, g_0)$ sabemos que $g_0\big((x, y), (x, y)\big) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pero esa desigualdad general no es cierta en $(\mathbb{R}^2, g_1)$:

$$0 < 1 = g_1\big((1, 0), (1, 0)\big) = -g_1\big((0, 1), (0, 1)\big).$$

Sirva esta pequeña discusión para motivar la siguiente definición.

Definición 2.41 (Tipos de métricas) *Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial.*

(I) *Una métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ se dice* no degenerada *si $v \perp w \ \forall\, w \in V \Rightarrow v = \overrightarrow{0}$.*

Una métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ no degenerada pueden ser:

- definida positiva (o euclídea) *si $F_g \geq 0$.*
- definida negativa *si $F_g \leq 0$.*
- indefinida *si F_g cambia de signo.*

(II) *Una métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ se dice* degenerada *si $\exists\, v \in V \setminus \{\vec{0}\} : v \perp w \ \forall\, w \in V$.*

Una métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ degenerada puede ser:

- semidefinida positiva *si $F_g \geq 0$.*
- semidefinida negativa *si $F_g \leq 0$.*
- semi-indefinida *si F_g cambia de signo.*

Observación 2.42 *Si $g \in \mathrm{S}_2(V)$ es no degenerada y definida (positiva o negativa) entonces*

$$F_g(v) = g(v, v) = 0 \Longleftrightarrow v = \vec{0}.$$

Demostración: $\Leftarrow$) Si $v = \vec{0}$ de la bilinealidad de g se sigue que $g(v, v) = 0$.

$\Rightarrow$) Para el recíproco supongamos que g es definida positiva (análogamente se razonaría si fuese definida negativa). Tomemos $v \in V$ tal que $g(v, v) = 0$, y consideremos $w \in V$ arbitrario. Como $g(w + \lambda v, w + \lambda v) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por bilinealidad y simetría de g se deduce que

$$g(w, w) + 2\lambda g(v, w) + \lambda^2 g(v, v) = 2\lambda g(v, w) + g(w, w) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La anterior expresión es un polinomio de grado ≤ 1 en λ que no cambia de signo, de donde necesariamente ha de ser constante y $g(v,w) = 0$, esto es, $v \perp w$. Como $w \in V$ es cualquier vector, de la no degeneración de g concluimos que $v = \vec{0}$.

■

Proposición 2.43 *Si* $g \in \mathrm{S}_2(V)$ *es una métrica en* $V(\mathbb{R})$ *y* B *es una base de* V*,*

$$g \text{ es no degenerada} \Longleftrightarrow M_B(g) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}).$$

Demostración: Basta con ver que g es no degenerada si y sólo si $M_B(g)$ es no regular. En efecto, sabemos que g es degenerada si y sólo si existe $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $g(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, esto es, de (19),

$$(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B = 0 \quad \text{para todo } w \in V.$$

Lo anterior equivale a que $(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = 0 \in \mathbb{R}^n$, o lo que es lo mismo, a que las filas de la matriz $M_B(g)$ sean linealmente dependientes (recordemos que $v_B \neq 0$), esto es, a que $M_B(g)$ sea una matriz no regular. El resultado se sigue. ■

Para comprender mejor la naturaleza de una métrica resulta útil la siguiente definición.

Definición 2.44 *Si* $(V(\mathbb{R}), g)$ *es un EVM, llamaremos* radical *de la métrica* g *al subespacio vectorial de* V

$$\mathrm{Rad}(g) = \{v \in V : g(v,w) = 0 \ \ \forall w \in V\}.$$

En otras palabras, $\mathrm{Rad}(g)$ consta de aquellos vectores en V que son ortogonales a *todos* los vectores de V; en particular $g|_{\mathrm{Rad}(g) \times \mathrm{Rad}(g)} = 0$. Es claro que

$$g \in \mathrm{S}_2(V) \text{ es no degenerada} \Longleftrightarrow \mathrm{Rad}(g) = \{\vec{0}\}. \tag{20}$$

La siguiente proposición expresa que, fuera del radical, toda métrica es no degenerada.

Proposición 2.45 *Sea* $\big(V(\mathbb{R}), g\big)$ *un EVM, y sea* $U \leq V$ *un suplementario algebraico de* $\mathrm{Rad}(g)$*, esto es, cualquier subespacio de* V *tal que* $V = \mathrm{Rad}(g) \oplus U$*.*

Entonces $g|_{U \times U}$ *es una métrica no degenerada en* U*. Además, si* B_1 *es una base ordenada de* $\mathrm{Rad}(g)$*,* B_2 *es una base ordenada de* U*, y llamamos* B *a la base ordenada* $B_1 \cup B_2$ *de* V*, entonces*

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M_{g|_{U \times U}}(B_2) \end{array}\right).$$

Demostración: Para la primera parte de la proposición bastará con ver que

$$\mathrm{Rad}(g|_{U \times U}) \subseteq \mathrm{Rad}(g),$$

ya que entonces $\mathrm{Rad}(g|_{U \times U}) \subseteq \mathrm{Rad}(g) \cap U = \{\vec{0}\}$ y por tanto $\mathrm{Rad}(g|_{U \times U}) = \{\vec{0}\}$, esto es $g|_{U \times U}$ es no degenerada.

En efecto, si $v \in \mathrm{Rad}(g|_{U \times U})$ se tiene que:

- $g(v,u) = 0$ para todo $u \in U$ ya que $v \in \mathrm{Rad}(g|_{U \times U})$, y
- $g(v,w) = 0$ para todo $w \in \mathrm{Rad}(g)$ por definición de $\mathrm{Rad}(g)$.

Como $V = \mathrm{Rad}(V) \oplus U$, deducimos que $g(v,x) = 0$ para todo $x \in V$, y por tanto que $v \in \mathrm{Rad}(g)$ como queríamos demostrar.

La identidad $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M_{g|_{U\times U}}(B_2) \end{array}\right)$ es trivial de la definición de $M_B(g)$, $\mathrm{Rad}(g)$ y $M_{g|_{U\times U}}(B_2)$. ■

Corolario 2.46 *Si $g \in \mathrm{S}_2(V)$ y $U \leq V$ es un suplementario algebraico de* $\mathrm{Rad}(g)$ *entonces:*

$$\begin{array}{rcl} g \text{ semidefinida } + & \Longleftrightarrow & g|_{U\times U} \text{ definida } + \\ g \text{ semidefinida } - & \Longleftrightarrow & g|_{U\times U} \text{ definida } - \\ g \text{ semi-indefinida} & \Longleftrightarrow & g|_{U\times U} \text{ indefinida} \end{array}$$

Acabaremos estas sección con algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 2.47 *Sean $U_0, U^-, U^+ \subseteq V(\mathbb{R})$ subespacios con $V = U_0 \oplus U^- \oplus U^+$. Llamemos*

$$s = \dim_{\mathbb{R}} U_0, \quad k = \dim_{\mathbb{R}} U^-, \quad t = \dim_{\mathbb{R}} U^+, \quad y \quad n = s + k + t = \dim_{\mathbb{R}} V,$$

fijemos bases ordenadas B_0 de U_0, B^- de U^- y B^+ de U^+, y pongamos $B = B_0 \cup B^- \cup B^+$ base de V. Se tiene que:

- *Si $s = k = 0$ $(t = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = \mathrm{I}_n$ es definida positiva.*
- *Si $s = t = 0$ $(k = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = -\mathrm{I}_n$ es definida negativa.*
- *Si $s = 0 < k, t$ $(k + t = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_t \end{array}\right)$ es semidefinida.*
- *Si $s > 0 = k \leq t$ $(s + t = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_t \end{array}\right)$ es semidefinida positiva.*
- *Si $s > 0 = t \leq k$ $(s + k = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0_s & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right)$ es semidefinida positiva.*
- *Si $0 < s, k, t$ $(s + k + t = n)$, la métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ con $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_t \end{array}\right)$ es semi-indefinida.*

Definición 2.48 *Dado $V(\mathbb{R})$ espacio vectorial real, una métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ se dice* euclidiana *si es no degenerada y definida positiva. En este caso se dice que (V, g) es un espacio vectorial métrico euclidiano (abreviadamente* EVME*).*

2.5. Bases ortonormales en EVM

Las bases naturales en los EVM serán las que denominaremos ortonormales, su existencia se abordará más adelante. Precisemos la definición.

Definición 2.49 *Supongamos que (V, g) es un EVM. Un vector $v \in V$ se dice* unitario *si $|g(v,v)| = 1$ y nulo si $g(v,v) = 0$. Un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ se dice* ortogonal *si $g(v_i, v_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ se dice* ortonormal *si es ortogonal y todos sus vectores son unitarios o nulos. Una* base ortonormal *de (V, g) es una base que demás es un subconjunto ortogonal.*

Más adelante comprobaremos que todo EVM admite bases ortonormales, también llamadas de Sylvester.

El siguiente lema analiza la naturaleza de las bases ortonormales de EVMEs.

Lema 2.50 *Si (V, g) es un espacio vectorial métrico no degenerado, y supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de (V, g). Son equivalentes:*

1) *(V, g) es un EVME.*

2) *Para todo $v \in V$ se tiene que $v_B = \big(g(v, v_1), \ldots, g(v, v_n)\big)^{\mathrm{t}}$.*

3) *$M_B(g) = \mathrm{I}_n$.*

4) *Dados $v, w \in V$, $g(v, w) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot w_B$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). Como B es base ortonormal y g es euclídea o definida positiva

$$g(v_i, v_j) = 0 \text{ para todo } i \neq j \quad \text{y} \quad g(v_j, v_j) = |g(v_j, v_j)| = 1 \text{ para todo } i.$$

Por tanto, si $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ entonces

$$g(v, v_i) = g\Big(\sum_{j=1}^n a_j v_j, v_i\Big) = \sum_{j=1}^n g(a_j v_j, v_i) = \sum_{j=1}^n a_j g(v_j, v_i) = a_i g(v_i, v_i) = a_i.$$

Esto prueba que $v_B = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}} = \big(g(v, v_1), \ldots, g(v, v_n)\big)^{\mathrm{t}}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Como $(v_j)_B = (\delta_{ij})_{i=1,\ldots,n}$, de 2) inferimos que $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$, esto es, $M_B(g) = \mathrm{I}_n$.

3) $\Longleftrightarrow$ 4). De la ecuación (19) se tiene que $M_B(g) = \mathrm{I}_n$ si y sólo si $g(v, w) = (v_B)^t \cdot w_B$ para todo $v, w \in V$.

3) $\Rightarrow$ 1). Como $M_B(g) = \mathrm{I}_n$, de la Proposición 2.43 se sigue que g es no degenerada. Además, si $v \in V$ y $v_B = (a_1, \ldots, a_n)$, de (19) se tiene que

$$g(v, v) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{I}_n \cdot v_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot v_B = \sum_{j=1}^n a_j^2 \geq 0,$$

por lo que g es definida positiva, y por tanto euclidiana. ■

En lo que sigue (V, g) indicará un EVME.

Definición 2.51 *Si (V, g) es un EVME, definimos la* norma *de un vector $v \in V$ como*

$$\|v\| = +\sqrt{g(v, v)} \geq 0.$$

Es inmediato comprobar que si $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ entonces $\frac{1}{\|v\|} v$ es unitario en (V, g).

La clave de la existencia de bases ortonormales en los EVME reside en el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, un algoritmo que permite generar bases ortonormales a parte de una base arbitraria del espacio vectorial.

Teorema 2.52 *Sea (V, g) es un EVME y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de V. Definamos:*

$$u_1 = w_1, \quad u_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{g(w_k, u_j)}{\|u_j\|^2} u_j, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Entonces $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base ortogonal de (V,g), y por tanto

$$\left\{\frac{1}{\|u_1\|}u_1,\ldots,\frac{1}{\|u_n\|}u_n\right\}$$

es una base ortonormal de (V,g). Como consecuencia, todo EVME admite bases ortonormales.

DEMOSTRACIÓN : Comprobemos que $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es un sistema de vectores ortogonal. En efecto, es claro que $u_1 \perp u_2$ ya que

$$g(u_1,u_2)=g\big(u_1,w_2-\frac{g(w_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1\big)=g(u_1,w_2)-g\big(u_1,\frac{g(w_2,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1\big)=$$

$$=g(u_1,w_2)-\frac{g(w_2,u_1)}{\|u_1\|^2}g\big(u_1,u_1\big)=g(u_1,w_2)-g(w_2,u_1)=0.$$

Suponiendo inductivamente que $u_i \perp u_j$, $i\neq j$, $1\leq i,j\leq k$, se tiene que

$$g(u_i,u_{k+1})=g\big(u_i,w_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{g(w_{k+1},u_j)}{\|u_j\|^2}u_j\big)=g(u_i,w_{k+1})-g\big(u_i,\sum_{j=1}^{k}\frac{g(w_{k+1},u_j)}{\|u_j\|^2}u_j\big)=$$

$$=g(u_i,w_{k+1})-\sum_{j=1}^{k}\frac{g(w_{k+1},u_j)}{\|u_j\|^2}g\big(u_i,u_j\big)=g(u_i,w_{k+1})-\frac{g(w_{k+1},u_i)}{\|u_i\|^2}g(u_i,u_i)=0,$$

y por tanto $u_i \perp u_j$, $i\neq j$, $1\leq i,j\leq k+1$. Esto cierra la inducción y prueba la ortogonalidad de $\{u_1,\ldots,u_n\}$. Para concluir, bastará con probar $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base de V. Para ello, observemos que

$$(w_1,\ldots,w_n)^{\mathrm{t}}=(u_1,\ldots,u_n)\cdot A$$

para la matriz triangular superior $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coeficientes

$$a_{ij}=\left\{\begin{array}{cl} 1 & \text{si}\quad i=j\\ \frac{g(w_i,u_j)}{\|u_j\|^2} & \text{si}\quad i<j\\ 0 & \text{si}\quad i>j\end{array}\right. .$$

Como $\det A=1\neq 0$ y $\{w_1,\ldots,w_n\}$ es base de V, deducimos que $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es también base de V. Esto concluye la prueba. ■

Es natural preguntarse qué de especial tiene la matriz del cambio de base entre bases ortonormales de EVMEs.

Lema 2.53 *Sea (V,g) un EVME, B_1 una base ortonormal en (V,g) y B_2 una base cualquiera en V. Entonces B_2 es ortonormal si y sólo si $M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1)\in\mathrm{O}(n)$.*

Recordemos que el grupo ortogonal de las matrices cuadradas reales orden n se define como

$$\mathrm{O}(n)=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon A\cdot A^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}\cdot A=\mathrm{I}_n\}.$$

DEMOSTRACIÓN : Recordemos que del Lema 2.35

$$M_{B_2}(g)=M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1)^{\mathrm{t}}\cdot M_{B_1}(g)\cdot M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1).$$

Como $M_{B_1}(g)=\mathrm{I}_n$ (ver Lema 2.50), deducimos que

$$M_{B_2}(g)=M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1)^{\mathrm{t}}\cdot M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1).$$

De aquí que $M_{B_2}(g)=\mathrm{I}_n$, o equivalentemente B_2 es ortonormal en (V,g), si y sólo si $M(\mathrm{Id}_V,B_2,B_1)\in\mathrm{O}(n)$. ■

2.6. Subespacio ortogonal en un EVM

La definición fundamental de esta sección es la siguiente:

Definición 2.54 *Si (V, g) es un EVM y $U \leq V$ un subespacio vectorial, se define como el* subespacio ortogonal *de U respecto de g como*

$$U^\perp = \{v \in V : g(v, u) = 0 \ \ \forall u \in U\} = \{v \in V : v \perp u \ \ \forall u \in U\}.$$

De la bilinealidad de g es inmediato comprobar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V para todo $U \leq V$.

Proposición 2.55 *Si (V, g) es un EVM y $U = L\big(\{u_1, \ldots, u_k\}\big)$ entonces:*

$$U^\perp = \{v \in V : g(v, u_j) = 0 \ \ \forall j = 1, \ldots, k\} = \{v \in V : v \perp u_j \ \ \forall j = 1, \ldots, k\}.$$

Demostración: La inclusión $U^\perp \subseteq \{v \in V : g(v, u_j) = 0 \ \ \forall j = 1, \ldots, k\}$ es trivial toda vez que $u_j \in U$ para todo j.

Para la inclusión contraria, tomemos $v \in V$ tal que $g(v, u_j) = 0$ para todo j. Como todo vector $u \in U$ es de la forma $u = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j$, tenemos que

$$g(u, v) = g\big(v, \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j\big) = \sum_{j=1}^k \lambda_j g(v, u_j) = 0$$

y por tanto $v \in U^\perp$. ■

Por ejemplo, en $(\mathbb{R}^2, g)$ siendo $M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B_0 base usual de $\mathbb{R}^2$), si $U = L\big(\{(1, 0)\}\big)$ entonces

$$U^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1, 0)^{\mathrm{t}} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = L\big(\{(1, -2)\}\big).$$

Proposición 2.56 *Sea (V, g) es un EVM y $U \leq V$ un subespacio vectorial. Los siguientes enunciados son ciertos:*

I) $U \cap U^\perp = \mathrm{Rad}(g|_{U \times U})$.

II) $(U, g|_{U \times U})$ *es un EVM no degenerado si y sólo si* $V = U \oplus U^\perp$.

III) $\mathrm{Rad}(g) = V^\perp \subseteq U^\perp$ *y* $U \subseteq V = \{\vec{0}\}^\perp$.

IV) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

V) *Si* $(U, g|_{U \times U})$ *y* $(U^\perp, g|_{U^\perp \times U^\perp})$ *son EVM no degenerados entonces* $U = (U^\perp)^\perp$.

VI) *Si* $U, W \leq V$ *y* $U \subseteq W$ *entonces* $W^\perp \subseteq U^\perp$.

VII) *Si* $U, W \leq V$ *entonces* $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

VIII) *Si* $U, W \leq V$ *y los EVMs*

$$(U, g|_{U \times U}), \ (W, g|_{W \times W}), \ (U \cap W, g|_{U \cap W \times U \cap W}), \ (U + W, g|_{(U+W) \times (U+W)})$$

son no degenerados, entonces $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Demostración: Es claro que $v \in U \cap U^{\perp}$ si y sólo si $v \in U$ y $g(v,u) = 0$ para todo $u \in U$, esto es, si y sólo si $v \in \mathrm{Rad}(g|_{U\times U})$, lo que prueba i).

Para probar ii), observemos que si $V = U \oplus U^{\perp}$ entonces $U \cap U^{\perp} = \varnothing$, y de i) se sigue que $(U, g|_{U\times U})$ es no degenerado. Para el recíproco supongamos que $(U, g|_{U\times U})$ es no degenerado. Como de i) se sigue que $U \cap U^{\perp} = \mathrm{Rad}(g|_{U\times U}) = \{\vec{0}\}$, ya que $(U, g|_{U\times U})$ es un EVM no degenerado, para garantizar que $V = U \oplus U^{\perp}$ bastará con ver que

$$\dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} = n - k = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U.$$

En efecto, tomemos una base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de U y ampliémosla a una base

$$B = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$$

de V. De la Proposición 2.55 podemos escribir

$$U^{\perp} = \{v \in V \colon (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot (u_j)_B = 0 \ \ \forall\, j = 1, \ldots, k\}.$$

Veamos que el sistema de ecuaciones lineales

$$x^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot (u_j)_B = 0 \ \ \forall\, j = 1, \ldots, k,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de las n incógnitas en notación columna, consta de k ecuaciones *linealmente independientes*. En efecto, de otra forma existirían $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$x^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot (\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j)_B = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

lo que claramente implicaría que

$$\vec{0} \neq u := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j \in \mathrm{Rag}(g) \cap U \subseteq \mathrm{Rad}(g|_{U\times U})$$

y contradiría que $(U, g|_{U\times U})$ es un EVM no degenerado. Por tanto el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineal (21) tiene dimensión $n-k$, o equivalentemente, $\dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} = n - k = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U$ como queríamos ver. Esto prueba ii).

Items iii) y iv) son triviales de las definiciones.

Para probar v), téngase en cuenta que de ii) se sigue que

$$V = U \oplus U^{\perp} = U^{\perp} \oplus (U^{\perp})^{\perp}.$$

Por tanto $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} (U^{\perp})^{\perp}$, y el resultado se sigue de iv).

Item vi) es trivial de la definición de subespacio ortogonal.

Un vector v pertenece a $(U+W)^{\perp}$ si y sólo si $g(v, u+w) = 0$ para todo $u \in U, w \in W$, o equivalentemente $g(v,u) = g(v,w) = 0$ para todo $u \in U, w \in W$, lo que prueba vii).

Probemos viii). Por nuestras hipótesis y ii) tenemos que

$$V = U \oplus U^{\perp},\ V = W \oplus W^{\perp},\ V = (U \cap W) \oplus (U \cap W)^{\perp},\ V = (U+W) \oplus (U+W)^{\perp},$$

de donde

$$\dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} + \dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} + \dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} V$$

y

$$\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)^{\perp}+\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)=\dim_{\mathbb{R}}(U+W)^{\perp}+\dim_{\mathbb{R}}(U+W)=\dim_{\mathbb{R}}V.$$

Uniendo toda esa información y la fórmula clásica de dimensiones,

$$\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)^{\perp}=\dim_{\mathbb{R}}V-\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)=\dim_{\mathbb{R}}V-\dim_{\mathbb{R}}U-\dim_{\mathbb{R}}W+\dim_{\mathbb{R}}(U+W)=$$

$$=\dim_{\mathbb{R}}U^{\perp}+\dim_{\mathbb{R}}W^{\perp}-\dim_{\mathbb{R}}(U+W)^{\perp}.$$

Usando vii) y la fórmula clásica de dimensiones de nuevo

$$\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)^{\perp}=\dim_{\mathbb{R}}U^{\perp}+\dim_{\mathbb{R}}W^{\perp}-\dim_{\mathbb{R}}(U^{\perp}\cap W^{\perp})=\dim_{\mathbb{R}}(U^{\perp}+W^{\perp}).$$

Para acabar, basta con observar que de las definiciones $U^{\perp}+W^{\perp}\subseteq(U\cap W)^{\perp}$, y por tanto $U^{\perp}+W^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$. ■

Corolario 2.57 *Si (V,g) es un EVME y $U,W\leq V$ son subespacios vectoriales, entonces:*

I) $V=U\oplus U^{\perp}$.

II) $U=(U^{\perp})^{\perp}$, $V^{\perp}=\{\vec{0}\}$, $\{\vec{0}\}^{\perp}=V$.

III) *Si $U\subseteq W$ entonces $W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$.*

IV) $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$ *y* $(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.

Demostración: Téngase en cuenta que, para cualquier subespacio $U\leq V$, el par $(U,g|_{U\times U})$ es un EVME y por tanto no degenerado. Úsese la Proposicion 2.56. ■

Definición 2.58 *Sea (V,g) un EVM y $U\leq V$ un subespacio no degenerado, i.e., tal que $(U,g|_{U\times U})$ es no degenerado. Definimos la* proyección ortogonal *de V sobre U según g como la aplicación*

$$\pi_U^{\perp}\colon V\to V,\quad \pi_U^{\perp}(v)=u,$$

*donde $v=u+w$, $u\in U,w\in U^{\perp}$ (esta descomposición es única por ser $V=U\oplus U^{\perp}$; ver Proposición 2.56-*ii)*). En otras palabras, $\pi_U^{\perp}=\pi_{U,U^{\perp}}$; ver Definición 1.26*

Proposición 2.59 *Si (V,g) es un EVM y $U\leq V$ un subespacio suyo no degenerado entonces:*

a) $\pi_U^{\perp}\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$.

b) $\pi_U^{\perp}\circ\pi_U^{\perp}=\pi_U^{\perp}$, $\mathrm{Im}(\pi_U^{\perp})=U$, $\mathrm{Ker}(\pi_U^{\perp})=U^{\perp}$ *y* $\pi_U^{\perp}|_U=\mathrm{Id}_U$.

c) *Si $U^{\perp}\leq V$ es no degenerado entonces $\pi_U^{\perp}+p_{U^{\perp}}=\mathrm{Id}_V$.*

Demostración: De las hipótesis y la Proposición 2.56 sabemos que $V=U\oplus U^{\perp}$. Si $v_1,v_2\in V$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, y $v_j=u_j+w_j$, $u_j\in U,w_j\in U^{\perp}$, $j=1,2$, entonces

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)+(\lambda_1w_1+\lambda_2w_2)$$

es la descomposición única de $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2$ según la suma directa $V=U\oplus U^{\perp}$, esto es, $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in U$, $\lambda_1w_1+\lambda_2w_2\in U^{\perp}$. Por tanto

$$\pi_U^{\perp}(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=\lambda_1\pi_U^{\perp}(v_1)+\lambda_2\pi_U^{\perp}(v_2).$$

Esto prueba a).

Si $v \in V$ y $v = u+w$, $u \in U, w \in U^\perp$, es evidente que $u = u+\vec{0}$ es la descomponsión única de u según la suma directa $V = U \oplus U^\perp$. Por tanto,

$$(\pi_U^\perp \circ \pi_U^\perp)(v) = \pi_U^\perp\big(\pi_U^\perp(v)\big) = \pi_U^\perp(u) = \pi_U^\perp(v),$$

lo que prueba que $\pi_U^\perp \circ \pi_U^\perp = \pi_U^\perp$. Si $w \in U^\perp$ tenemos que $w = \vec{0}+w$ es la descomposición de w de acuerdo a la suma directa $V = U \oplus U^\perp$, y por tanto $\pi_U^\perp(w) = \vec{0}$ y $U^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_U^\perp)$. De la definición de $\pi_U^\perp$ se sigue que $\pi_U^\perp(v) = \ vec0$ si y sólo si $v \in U^\perp$, de donde $\mathrm{Ker}(\pi_U^\perp) \subseteq U^\perp$ y por tanto $U^\perp = \mathrm{Ker}(\pi_U^\perp)$. Por otra parte, es claro por definición que $\mathrm{Im}(\pi_U^\perp) = \pi_U^\perp(V) \subseteq U$. Para la otra inclusión tomemos $u \in U$ y como antes observermos que $u = u + \vec{0}$ es la descomponsión única de u según la suma directa $V = U \oplus U^\perp$, por lo que $\mathrm{Im}(\pi_U^\perp) \ni \pi_U^\perp(u) = u$. Esto prueba que $\pi_U^\perp(V) = U$ y $\pi_U^\perp|_U \colon U \to U$ coincide con Id_U, probando b).

Finalmente, si $v \in V$ y $v = u + w$, $u \in U, w \in U^\perp$,, es evidente por definición que

$$\pi_U^\perp(v) = u, \ \ p_{U^\perp}(v) = w;$$

nótese que la aplicación $p_{U^\perp}$ tiene sentido ya que $U^\perp$ es no degenerado. Por tanto,

$$(\pi_U^\perp + p_{U^\perp})(v) = \pi_U^\perp(v) + p_{U^\perp}(v) = u + w = v,$$

lo que prueba c). ∎

Corolario 2.60 *Si (V, g) es un EVME y $U \leq V$ un subespacio entonces:*

a) $\pi_U^\perp \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$.

b) $\pi_U^\perp \circ \pi_U^\perp = \pi_U^\perp$, $\mathrm{Im}(\pi_U^\perp) = U$, $\mathrm{Ker}(\pi_U^\perp) = U^\perp$ *y* $\pi_U^\perp|_U = \mathrm{Id}_U$.

c) $\pi_U^\perp + \pi_{U^\perp}^\perp = \mathrm{Id}_V$.

Proposición 2.61 *Si (V, g) es un EVME y $U \leq V$ un subespacio, entonces:*

a) $g\big(\pi_U^\perp(v), w\big) = g\big(v, \pi_U^\perp(w)\big)$ *para todo* $v, w \in V$.

b) $\pi_U^\perp$ *es un endomorfismo diagonalizable con valores propios* 1 *y* 0*, siendo sus correspondientes subespacios propios* $V_1 = \mathrm{Im}(U) = U$ *y* $V_0 = \mathrm{Ker}(\pi_U^\perp) = U^\perp$.

c) *Existe B base ortonormal en (V, g) tal que $M(\pi_U^\perp, B)$ es diagonal.*

Demostración: Tomemos $v_1, v_2 \in V$, y de acuerdo a la descomposición $V = U \oplus U^\perp$, escribamos

$$v_j = u_j + w_j, \quad u_j \in U, \ w_j \in U^\perp.$$

Tenemos que

$$g\big(\pi_U^\perp(v_1), v_2\big) = g\big(u_1, v_2\big) = g\big(u_1, u_2 + w_2\big) = g(u_1, u_2) + g\big(u_1, w_2\big) = g(u_1, u_2),$$

donde hemos tenido en cuenta que $u_1 \perp w_2$. De forma análoga $g\big(v_1, \pi_U^\perp(v_2)\big) = g(u_1, u_2)$, y de aquí a).

Como $(U, g_{U\times U})$ es un EVME, el Teorema 2.52 garantiza que existe $B_1 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ base ortonormal de $(U, g_{U\times U})$. Análogamente podemos encontrar una base ortonormal $B_2 = \{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de $(U^\perp, g_{U^\perp \times U^\perp})$, y es claro que

$$B = B_1 \cup B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

es una base ortonormal de (V, g). Como del Corolario 2.60

$$\pi_U^\perp(u_j) = u_j, \;\; j = 1, \ldots, k, \quad \pi_U^\perp(u_j) = \vec{0}, \;\; j = k+1, \ldots, n,$$

inferimos que

$$M(\pi_U^\perp, B) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

lo que claramente prueba b) y c). ∎

2.7. Métricas versus endomorfismos autoadjuntos

Las métricas euclidianas en un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ son las de más importancia para la geometría. Como vamos a ver a continuación, a cada métrica euclidiana g se le asocia un embebimiento lineal natural del espacio $\mathrm{S}_2(V)$ dentro de $\mathrm{End}_\mathbb{R} V$. El concepto de endomorfismo autoadjunto respecto de g será la clave para comprender esta construcción. Explicaremos los detalles más adelante.

Si (V, g) un EVM no degenerado con dimensión finita, la métrica g permite conectar el espacio V y su dual V^* mediante unos isomorfismos naturales, que denominaremos *musicales*. Lo detallamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.62 *La transformación* $^\flat \colon V \to V^*, \quad v \mapsto v^\flat$, *donde*

$$v^\flat \colon V \to \mathbb{R}, \; v^\flat(w) = g(v, w), \text{ para todo } w \in V,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración: Como $g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 g(v_1, w) + \lambda_2 g(v_2, w)$, la identidad

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)^\flat = \lambda_1 v_1^\flat + \lambda_2 v_2^\flat$$

es evidente para todo $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De aquí que $^\flat$ sea lineal. Para ver que $^\flat \colon V \to V^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, basta con comprobar que $\mathrm{Ker}(^\flat) = \{\vec{0}\}$ ya que $\dim_\mathbb{R} V = \dim_\mathbb{R} V^*$. En efecto, $v^\flat = 0$ si y sólo si $g(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, de donde $v = \vec{0}$ al ser g no degenerada (y por tanto con radical trivial $\mathrm{Rad}(g) = \{\vec{0}\}$). Esto concluye la prueba. ∎

Definición 2.63 *Denotaremos* $\sharp \colon V^* \to V$ *al isomorfismo inverso de* $^\flat \colon V \to V^*$, *esto es, al que asigna a cada* $\varphi \in V^*$ *el único* $\varphi^\sharp \in V$ *tal que* $g(\varphi^\sharp, w) = \varphi(w)$ *para todo* $w \in V$.

A $^\flat, ^\sharp$ *se les lama* isomorfismos musicales *de la métrica no degenerada* g *en* V.

> **En lo que sigue $V(\mathbb{R})$ será un espacio vectorial real y $g \in \mathrm{S}_2(V)$ una *métrica euclidiana.***

La identificación natural $^\flat \colon V \to V^*$ entre V y V^* inducida por la métrica euclidiana g (es no degenerada!!) nos va a permitir asociar a cada métrica $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ un único endomorfismo $f_{g'} \in \mathrm{End}_\mathbb{R} V$ por un procedimiento canónico.

Definición 2.64 *Para cada* $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ *(no necesariamente euclídea!!) y vector* $v \in V$ *consideremos la forma lineal en* V^*

$$g'_v \colon V \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto g'(v, w),$$

y definamos el vector $f_{g'}(v) := (g'_v)^\sharp \in V$. *Por la Definición 2.63, el vector* $f_{g'}(v)$ *está unívocamente determinado por satisfacer la identidad*

$$g\big(f_{g'}(v), w\big) = g'(v, w) \quad \forall w \in V.$$

Proposición 2.65 *La aplicación $f_{g'} \colon V \to V$ es un endomorfismo satisfaciendo la condición de simetría*

$$g\big(f_{g'}(v), w\big) = g\big(v, f_{g'}(w)\big) \quad \forall v, w \in V$$

Demostración: De la bilinealidad de g', es inmediato comprobar que

$$g'_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 g'_{v_1} + \lambda_2 g'_{v_2} \quad \forall v_1, v_2 \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, de nuestra definición y usando que $^\sharp$ es lineal,

$$f_{g'}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (g'_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2})^\sharp = (\lambda_1 g'_{v_1} + \lambda_2 g'_{v_2})^\sharp =$$

$$= \lambda_1 (g'_{v_1})^\sharp + \lambda_2 (g'_{v_2})^\sharp = \lambda_1 f_{g'}(v_1) + \lambda_2 f_{g'}(v_2)$$

para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Esto prueba que $f_{g'} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$.

La condición de simetría es de comprobación trivial usando que g' es un tensor simétrico:

$$g\big(f_{g'}(v), w\big) = g'(v, w) = g'(w, v) = g\big(f_{g'}(w), v\big) \quad \forall v, w \in V.$$

■

Definición 2.66 *Denotaremos $\mathcal{A}_g(V)$ al subespacio vectorial de* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ *formado por los endomorfismos $f \colon V \to V$ satisfaciendo la condición*

$$g\big(f(v), w\big) = g\big(v, f(w)\big) \quad \forall v, w \in V.$$

Los endomorfismos de $\mathcal{A}_g(V)$ se referirán como autoadjuntos respecto a la métrica euclidiana *g.*

Por ejemplo, de la Proposición 2.61-a) se sigue que la proyección ortogonal $\pi_U^\perp \in \mathcal{A}_g(V)$ para todo $U \leq V$.

Teorema 2.67 *La aplicación $\Phi_g \colon \mathrm{S}_2(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$, $\Phi_g(g') = f_{g'}$, es un monomorfismo de espacios vectoriales con imagen $\mathcal{A}_g(V)$.*

Demostración: Para ver que Φ_g es lineal comprobemos la identidad

$$f_{\lambda_1 g'_1 + \lambda_2 g'_2} = \lambda_1 f_{g'_1} + \lambda_2 f_{g'_2}.$$

En efecto, para todo $v_1, v_2, w \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$g\big((f_{\lambda_1 g'_1 + \lambda_2 g'_2})(v), w)\big) = (\lambda_1 g'_1 + \lambda_2 g'_2)(v, w) = \lambda_1 g'_1(v, w) + \lambda_2 g'_2(v, w) =$$

$$= \lambda_1 g\big(f_{g'_1}(v), w\big) + \lambda_2 g\big(f_{g'_2}(v), w\big) = g\big(\lambda_1 f_{g'_1}(v) + \lambda_2 f_{g'_2}(v), w\big),$$

y por tanto

$$g\big(f_{\lambda_1 g'_1 + \lambda_2 g'_2})(v) - \lambda_1 f_{g'_1}(v) - \lambda_2 f_{g'_2}(v), w\big) = 0$$

para todo $w \in V$. Como g es euclidiana y no tiene radical

$$(f_{\lambda_1 g'_1 + \lambda_2 g'_2})(v) - \lambda_1 f_{g'_1}(v) - \lambda_2 f_{g'_2}(v) = \vec{0}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, y de ahí la linealidad de Φ_g.

Respecto a la segunda parte del Teorema, recordemos que la Proposición 2.65 nos dice que $\mathrm{Im}(\Phi_g) \subseteq \mathcal{A}_g(V)$.

Para la otra inclusión tomemos $f \in \mathcal{A}_g(V)$ y veamos que $f \in \Phi_g\big(\mathrm{S}_2(V)\big)$. Para ello definamos

$$g'_f \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad g'_f(v,w) := g\big(f(v),w\big) = g\big(v,f(w)\big).$$

La identidad $g'_f(v,w) = g'_f(w,v)$ para todo $v,w \in V$ es inmediata. Como f es lineal y g bilineal, es un ejercicio sencillo comprobar que g'_f es bilineal y por tanto $g'_f \in \mathrm{S}_2(V)$. La identidad

$$g\big(f_{g'_f}(v),w\big) = g'_f(v,w) = g(f(v),w)$$

implica que $g\left(f_{g'_f}(v) - f(v),w\right) = 0$ para todo $v,w \in V$, y por tanto que $f_{g'_f}(v) = f(v)$ para todo $v \in V$ ya que g no tiene radical por ser euclídea. Deducimos pues que $\Phi_g(g'_f) = f_{g'_f} = f$ y $f \in \Phi_g\big(\mathrm{S}_2(V)\big)$. Esto demuestra que $\mathrm{Im}(\Phi_g) = \mathcal{A}_g(V)$ y el teorema. ■

El Teorema 2.67 nos dice que los endomorfismos autoadjuntos en V respecto a la métrica euclidiana g forman un subespacio vectorial de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ isomorfo de forma natural a $\mathrm{S}_2(V)$. En otras palabras, estudiar métricas sobre V es esquivalente a estudiar endomorfismos autoadjuntos en V respecto a la métrica euclidiana g.

El siguiente lema da el criterio matricial para reconocer un endomorfismo autoadjunto respecto de g.

Lema 2.68 *Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ y B es una base ordenada en V, entonces:*

$$f \in \mathcal{A}_g(V) \Longleftrightarrow M(f,B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f,B).$$

Además, si $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ se tiene que

$$M_B(g') = M(f_{g'},B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f_{g'},B).$$

Demostración : Tomemos $v,w \in V$ arbitrarios. Como $f(v)_B = M(f,B) \cdot v_B$ y $f(w)_B = M(f,B) \cdot w_B$, la equación (19) nos dice que

$$g\big(f(v),w\big) = \big(f(v)_B\big)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B =$$

$$\big(M(f,B) \cdot v_B\big)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M(f,B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B$$

y análogamente

$$g\big(v,f(w)\big) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot M(f,B) \cdot w_B,$$

de donde usando la identidad $g\big(f(v),w\big) = g\big(v,f(w)\big)$ inferimos que

$$(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M(f,B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot M(f,B) \cdot w_B.$$

Como es cierto para todo $v,w \in V$ finalmente $M(f,B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f,B)$, lo que prueba la primera parte del lema.

Para probar la segunda, tomemos $g' \in \mathrm{S}_2(V)$. De la definición de $\Phi_g(g') = f_{g'}$ sabemos que $g'(v,w) = g\big(f_{g'}(v),w\big)$ para todo $v,w \in V$, y por tanto de la ecuación (19)

$$(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g') \cdot w_B = (f_{g'}(v)_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B.$$

Usando que $f_{g'}(v)_B = M(f_{g'},B) \cdot v_B$, deducimos que

$$(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g') \cdot w_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M(f_{g'},B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B.$$

Como es cierto para todo $v,w \in V$ finalmente $M_B(g') = M(f_{g'},B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g)$, lo que concluye el lema. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.69 *Son equivalentes:*

a) $f \in \mathcal{A}_g(V)$ *(autoadjunto respecto de g).*

b) *Existe B base ortonormal en (V, g) tal que $M(f, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (simétrica).*

c) *Para toda base ortonormal B en (V, g), $M(f, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (simétrica).*

Demostración: Recordemos que, dada una base B de V, el Lema 2.68 dice que $f \in \mathcal{A}_g(V)$ si y sólo si

$$M(f, B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f, B).$$

Si B es ortonormal en (V, g), el Lema 2.50 nos dice que $M_B(g) = \mathrm{I}_n$. Por tanto f es autoadjunto respecto de g si para una base B ortonormal de (V, g) (y por el mismo razonamiento para todas)

$$M(f, B)^{\mathrm{t}} = M(f, B)^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \cdot M(f, B) = M(f, B).$$

Esto prueba el resultado. ■

2.8. Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos

En esta sección probaremos que todo endomorfismo autoadjunto respecto a una métrica euclídea es diagonalizable en una base ortonormal. Este resultado es equivalente en lenguaje matricial a que cualquier matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable.

Lema 2.70 *Toda matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene al menos un valor propio real.*

Demostración: Sea $p_A(t) = \det(A - t\mathrm{I}_n) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ el polinomio característico de A. El Teorema Fundamental del Algebra nos garantiza que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p_A(\lambda) = 0$. Bastará con demostrar que $\lambda \in \mathbb{R}$. En efecto, como $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ como matriz compleja, existe $z = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que $A \cdot z = \lambda z$, y por tanto

$$\bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot z = \bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot (\lambda z) = \lambda(\bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot z) \in \mathbb{C}.$$

Como A es real y simétrica,

$$\overline{\bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot z} = z^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot \bar{z} = z^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot \bar{z} = (z^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot \bar{z})^{\mathrm{t}} = \bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot z.$$

Se deduce que $\bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot z \in \mathbb{R}$, y como también $\bar{z}^{\mathrm{t}} \cdot z = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ como habíamos afirmado. ■

En lo que sigue g será una métrica euclidiana en un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$.

Proposición 2.71 *Si $f \in \mathcal{A}_g(V)$ entonces son ciertos los siguientes enunciados:*

1) *Si $U \leq V$ cumple $f(U) \subseteq U$ entonces $f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$.*

2) *f tiene al menos un valor propio real.*

3) *Si λ, μ son dos valores propios reales distintos de f entonces sus correspondientes subespacios propios son ortogonales: $V_\lambda \perp V_\mu$.*

Demostración : Para todo $u \in U$ se tiene que $f(u) \in U$. Por tanto, si $w \in U^\perp$ inferimos que
$$0 = g\big(f(u), w\big) = g\big(u, f(w)\big)$$
para todo $u \in U$, esto es, $f(w) \in U^\perp$, lo que prueba 1).

Por otra parte, si B es una base ortonormal de (V, g) (que siempre existe gracias al Teorema 2.52) entonces el Corolario 2.69 garantiza que
$$A = M(f, B) \in \mathrm{S}_n(V) \quad (n = \dim_{\mathbb{R}} V).$$
Por el Lema 2.70 la matriz A tiene un valor propio real $\lambda \in \mathbb{R}$, o equivalentemente el endomorfismo $f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ tiene un valor propio real $\lambda \in \mathbb{R}$; ver (3). Por tanto existe $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $f_A(z) = \lambda z$. Equivalentemente, el vector $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ con $v_B = z$ satisface $f(v) = \lambda v$, y por tanto λ es valor propio de f. Esto demuestra 2).

Finalmente, si $\lambda \neq \mu$ son dos valores propios reales f y tomamos vectores arbitrarios $v \in V_\lambda \setminus \{\vec{0}\}, w \in V_\mu \setminus \{\vec{0}\}$, se tiene que
$$\lambda g(v, w) = g(\lambda v, w) = g\big(f(v), w\big) = g\big(v, f(w)\big) = g(v, \mu w) = \mu g(v, w).$$
Por tanto $(\lambda - \mu) g(v, w) = 0$, y como $\lambda \neq \mu$, $g(v, w) = 0$. Esto prueba 3). ■

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema fundamental de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Teorema 2.72 *Sea (V, g) un EVME y sea $f \in \mathcal{A}_g(V)$. Entonces existe una base ortonormal B de (V, g) en la que $M(f, B)$ es diagonal.*

Demostración : Haremos la prueba por inducción en $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Si $n = 1$ entonces $M(f, B)$ es diagonal para toda base B (ortonormal o no) y endomorfismo f en V, por lo que el resultado es trivial.

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier endomorfismo autoadjunto sobre un EVME de dimensión $\leq n-1$. Para cerrar la inducción, consideremos (V, g) EVME con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $f \in \mathcal{A}_g(V)$. Por la Proposición 2.71, f tiene un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomemos el subespacio propio V_λ y recordemos la descomposición en suma directa $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$; ver el Corolario 2.57. Como de la Proposición 2.71 tenemos $f(V_\lambda^\perp) \subseteq V_\lambda^\perp$ y $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda^\perp = n - \dim_{\mathbb{R}} V_\lambda < n$, podemos aplicar la hipótesis de inducción para al EVME $(V_\lambda^\perp, g_{V_\lambda^\perp \times V_\lambda^\perp})$ y el endomorfismo autoadjunto $f|_{V_\lambda^\perp} : V_\lambda^\perp \to V_\lambda^\perp$ respecto a $g_{V_\lambda^\perp \times V_\lambda^\perp}$. Por tanto existe una base ordenada B_2 ortonormal en $(V_\lambda^\perp, g_{V_\lambda^\perp \times V_\lambda^\perp})$ en la que $M(f|_{V_\lambda^\perp}, B_2)$ es diagonal. Tomemos B_1 base ordenada ortonormal en $(V_\lambda, g_{V_\lambda \times V_\lambda})$, que siempre existe por el Teorema 2.52. La descomposición $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ garantiza que $B = B_1 \cup B_2$ es una base ordenada ortonormal de (V, g), y es obvio que
$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & M(f|_{V_\lambda^\perp}, B_2) \end{array} \right),$$
donde $k = \dim_{\mathbb{R}} V_\lambda$. Claramente $M(f, B)$ es diagonal, lo que cierra la inducción y prueba el teorema. ■

Corolario 2.73 *Lo siguientes enunciados son ciertos:*

i) *Toda matriz simétrica real es ortogonalmente diagonalizable, esto es, para toda $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ existe $P \in \mathrm{O}(n)$ tal que $P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P$ es diagonal.*

II) *Si* (V, g) *es un EVME y* $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ *es una métrica entonces existe una base ortonormal* B *de* (V, g) *tal que* $M_B(g')$ *es diagonal.*

III) *Si* (V, g) *es un EVME con* $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ *y* $F \in \mathcal{F}(V)$ *es una forma cuadrática, entonces existen* B *base ortonormal de* (V, g) *y* $r_1, \ldots, r_n$ *números reales tales que*

$$F(v) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j^2, \quad \text{donde } (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} = v_B \text{ para todo } v \in V.$$

Demostración: Consideremos el EVME clásico $(\mathbb{R}^n, g_0)$, donde g_0 es el producto escalar canónico. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la identidad

$$g_0(A \cdot x, y) = (A \cdot x)^{\mathrm{t}} \cdot y = x^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot y = x^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot y = g_0(x, A \cdot y)$$

prueba que el endomorfismo $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(x) = A \cdot x$, es autoadjunto respecto a g_0, esto es, $f_A \in \mathcal{A}_{g_0}(\mathbb{R}^n)$.

Por el Teorema 2.72, existe una base ortonormal B de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ tal que $M(f_A, B)$ es diagonal. Observemos que $P = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B, B_0) \in \mathrm{O}(n)$; ver Lema 2.53. Como $A = M(f_A, B_0)$, la identidad

$$M(f_A, B) = P^{-1} \cdot M(f_A, B_0) \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P$$

prueba i).

Para probar ii), tomemos $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ y consideremos el endomorfismo $f_{g'} \in \mathcal{A}_g(V)$, esto es, el único tal que

$$g'(v, w) = g\big(f_{g'}(v), w\big), \quad \forall\, v, w \in V.$$

Recordemos que, del Lema 2.68,

$$M_B(g') = M(f_{g'}, B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f_{g'}, B)$$

para cualquier base $B \in V$. Por el Teorema 2.72, existe B base ortonormal en (V, g) en la que $f_{g'}$ diagonaliza. Como $M_B(g) = \mathrm{I}_n$, de la anterior identidad

$$M_B(g') = M(f_{g'}, B)$$

es diagonal, lo que prueba ii).

Finalmente, tomemos $F \in \mathcal{F}(V)$ y consideremos la métrica $g_{F} \in \mathrm{S}_2(V)$ asociada a F. Por el item ii) sabemos que existe B base ortonormal de (V, g) en la que

$$M(g_{F}, B) = D(r_1, \ldots, r_n)$$

es diagonal. Por tanto, si $v \in V$ y escribimos $v_B = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$, tenemos que

$$F(v) = g_F(v, v) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g_{F}) \cdot v_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot D(r_1, \ldots, r_n) \cdot v_B = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j^2,$$

lo que prueba iii). ■

2.9. El Teorema de Sylvester

El Teorema 2.52 garantiza que todo EVME admite una base ortonormal. Este resultado es cierto para EVM generales como demuestra el siguiente teorema debido a Sylvester.

Teorema 2.74 (Sylvester) *Sea (V, g') un EVM con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Entonces existe una base ordenada B en V en la que*

$$M_B(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(matriz de Sylvester).}$$

Los enteros $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r + s \leq n$, son únicos y dependen solo de *g', no de la base ortonormal B de (V, g') en la que $M_B(g')$ adopta la forma anterior.*

Con esta notación:

- *Al entero s se le llama* índice *de g' (o de (V, g')).*
- *Al entero $r + s$ se le llama* rango *de g' (o de (V, g')).*
- *Al entero $n - (r + s)$ se le llama* nulidad *de g' (o de (V, g')).*
- *La tripleta $\big(n - (r + s), r, s\big)$ es conocida como la* signatura *de g' (o de (V, g')).*

Las bases ortonormales B de (V, g') en las que $M_B(g')$ adopta la forma de Sylvester anterior se llaman bases de Sylvester *para g'.*

Demostración : Fijemos una base auxiliar B_0 de V y consideremos la única métrica $g \in \mathrm{S}_2(V)$ tal que

$$M_{B_0}(g) = \mathrm{I}_n;$$

ver Ejemplo 2.47. Por el Lema 2.50, el par (V, g) es un EVME.

Consideremos el endomorfismo $f_{g'} \in \mathcal{A}_g(V)$ asociado a la métrica $g' \in \mathrm{S}_2(V)$, esto es, el único endomorfismo que satisface

$$g'(v, w) = g\big(f_{g'}(v), w\big), \quad \forall\, v, w \in V.$$

Por el Teorema 2.72 existe una base ortonormal $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de (V, g) para la que $M(f_{g'}, B_1) = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es diagonal. Salvo reordenar los vectores en B_1 podemos suponer que

$$\lambda_j < 0, \ \ j = 1, \ldots, s, \quad \lambda_j > 0, \ \ j = s + 1, \ldots, r + s, \quad \lambda_j = 0, \ \ j = r + s + 1, \ldots, n.$$

El Lema 2.68 garantiza que

$$M_{B_1}(g') = M(f_{g'}, B_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_1}(g) = M_{B_1}(g) \cdot M(f_{g'}, B_1) = M(f_{g'}, B_1) = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

toda vez que $M_{B_1}(g) = \mathrm{I}_n$.

Consideremos la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ definida por

$$v_j = \frac{1}{|\lambda_j|^{1/2}} u_j, \ \ j = 1, \ldots, r + s, \quad v_j = u_j, \ \ j = r + s + 1, \ldots, n.$$

Es claro que

$$g(v_i, v_j) = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} & si \quad i = j = 1, \ldots, r+s \\ 0 & si \quad i = j = r+s+1, \ldots, n \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases},$$

o en otras palabras

$$M_B(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Para concluir falta comprobar que r, s sólo dependen de g'. Para ello consideremos otra base $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ para la que

$$M_{B'}(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_{s'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde $r', s' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sabemos por el Lema 2.35 que $M_{B'}(g')$ y $M_B(g')$ son congruentes, y por tanto tienen el mismo rango, de aquí que $r+s = r'+s'$. Para acabar, bastaría con demostrar que $s = s'$. En efecto, supongamos que $s > s'$ (simétricamente se razonaría si $s' > s$) y lleguemos a una contradicción. Para ello consideremos los subespacios vectoriales

$$U_1 = L\big(\{v_1, \ldots, v_s\}\big), \quad U_2 = L\big(\{v_{s'+1}, \ldots, v_n'\}\big).$$

Se tiene que

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = \dim_{\mathbb{R}} U_1 + \dim_{\mathbb{R}} U_2 - \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) =$$

$$= s + n - s' - \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) \geq s + n - s' - n = s - s' > 0.$$

Por tanto ha de existir $v \in (U_1 \cap U_2) \setminus \{\vec{0}\}$, pero de la definición de U_1 y U_2

$$\begin{cases} g(v, v) < 0 \quad \text{ya que} \quad v \in U_1 \\ \\ g(v, v) \geq 0 \quad \text{ya que} \quad v \in U_2 \end{cases},$$

lo que es absurdo y prueba el teorema. ■

Observación 2.75 *El tipo de una métrica $g' \in \mathrm{S}_2(V)$ según la Definición 2.41 de deduce del Teorema 2.74 y el Ejemplo 2.47. Si $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ y $\big(n - (r+s), r, s\big)$ es la signatura de g', nos queda la siguiente tabla:*

$$\begin{cases} s = 0,\ r = n & \text{no degenerada definida positiva} \\ r = 0,\ s = n & \text{no degenerada definida negativa} \\ 0 < s, r < s + r = n & \text{no degenerada indefinida} \\ s = 0,\ r < n & \text{degenerada semi-definida positiva} \\ r = 0,\ s = n & \text{degenerada semi-definida negativa} \\ 0 < s, r < s + r < n & \text{degenerada semi-indefinida} \end{cases}.$$

Corolario 2.76 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

1) *Dada $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, existen $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de A (con $r + s =$ $\mathrm{rango}(A)$) y existe $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tales que*

$$P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2) *Si V es un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $F \in \mathcal{F}(V)$ una forma cuadrática sobre V, entonces existen $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s + r \leq n$, que sólo dependen de F y existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tales que*

$$F(v) = -\sum_{j=1}^{s} x_j^2 + \sum_{j=s+1}^{s+r} x_j^2 \quad \forall\, v \in V,$$

donde $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} = v_B$.

Demostración: Para probar 1), consideremos la métrica g_A en $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo

$$M_{B_0}(g_A) = A,$$

donde B_0 es la base usual de $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema 2.74 existe una base de Sylvester B para g_A, esto es, una base de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$M_B(g_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde los números r, s sólo dependen de g_A, esto es, de A. Por el Lema 2.35

$$M_B(g_A) = P^{\mathrm{t}} \cdot M_{B_0}(g_A) \cdot P = P^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot P,$$

donde $P = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, B, B_0) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, lo que prueba 1).

Para probar 2), tomemos $F \in \mathcal{F}(V)$ y consideremos la métrica $g_F \in \mathrm{S}_2(V)$ asociada a F. Por el Teorema 2.74 sabemos que existe B base ortonormal de Sylvester de (V, g_F), en la que

$$M(g_F, B) = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde los números r, s sólo dependen de g_F, esto es, de F. Por tanto, si $v \in V$ y escribimos $v_B = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ tenemos que

$$F(v) = g_F(v, v) = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g_F) \cdot v_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot v_B = -\sum_{j=1}^{s} x_j^2 + \sum_{j=s+1}^{s+r} x_j^2,$$

lo que prueba 2). ■

2.10. Isometrías

Las transformaciones naturales entre EVM se llamarán isometrías, y como es natural se corresponderán con los isomorfismos lineales que preservan las métricas.

Definición 2.77 *Se dice que una aplicación $f \colon (V, g) \to (V', g')$ entre EVM es una* isometría *si es lineal, biyectiva y satisface*

$$g'\big(f(v), f(w)\big) = g(v, w) \quad \forall\, v, w \in V.$$

Algunas propiedades de inmediata comprobación son las siguientes.

Proposición 2.78 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

I) *Si $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V y $f\colon (V,g)\to (V',g')$ un isomorfismo lineal entonces*

$$f \textit{ isometría} \Longleftrightarrow g\big(f(v_j),f(v_i)\big)=g(v_j,v_i),\ 1\le i,j\le n, \tag{22}$$

o equivalentemente $M_B(g)=M_{f(B)}(g')$, donde $f(B)$ es la base $\{f(v_1),\ldots,f(v_n)\}$ de V'.

II) *Si $f_1\colon (V_1,g_1)\to(V_2,g_2)$, $f_2\colon (V_2,g_2)\to(V_3,g_3)$ son isometrías entre EVM entonces la composición $f_2\circ f_2\colon (V_1,g_1)\to(V_3,g_3)$ es una isometría.*

III) $\mathrm{Id}_V\colon (V,g)\to(V,g)$ *es una isometría.*

IV) *Si $f\colon (V,g)\to(V',g')$ es una isometría entonces $f^{-1}\colon (V',g')\to(V,g)$ es una isometría.*

Demostración : Items ii),iii) y iv) son triviales. Comentaremos sólo la prueba de i). Sean $u,v\in V$ vectores arbitrarios, y escribamos $u=\sum_{j=1}^n x_jv_j$, $v=\sum_{i=1}^n y_iv_i$. Como g es bilineal,

$$g(u,v)=g\left(\sum_{j=1}^n x_jv_j,\sum_{i=1}^n y_iv_i\right)=\sum_{i,j=1}^n x_jy_jg(v_j,v_i).$$

Análogamente, como f es lineal y g' bilineal

$$g'\big(f(u),f(v)\big)=g'\left(f\left(\sum_{j=1}^n x_jv_j\right),f\left(\sum_{i=1}^n y_iv_i\right)\right)=$$

$$=g'\left(\sum_{j=1}^n x_jf(v_j),\sum_{i=1}^n y_if(v_i)\right)=\sum_{i,j=1}^n x_jy_jg'\left(f(v_j),f(v_i)\right).$$

Por tanto, f es isometría si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^n x_jy_jg(v_j,v_i)=\sum_{i,j=1}^n x_jy_jg'\left(f(v_j),f(v_i)\right)\quad \forall\,(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

lo que equivale a que $g\big(f(v_j),f(v_i)\big)=g(v_j,v_i)$, $1\le i,j\le n$. ■

Definición 2.79 *Dos espacios vectoriales métricos $(V,g),(V',g')$ se dicen* isométricos *si existe una isometría $f\colon (V,g)\to(V',g')$. La relación binaria* 'ser isométrico a' *es de equivalencia en el conjunto de los EVM.*

Por ejemplo, dos EVME $(V,g),(V',g')$ son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión, En efecto, si $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $B'=\{v_1',\ldots,v_n'\}$ son bases ortonormales (o de Sylvester) en (V,g) y (V',g'), respectivamente, entonces $M_B(g)=M_{B'}(g')=\mathrm{I}_n$, y por (22) el único isomorfismo $f\colon V\to V'$ tal que $f(v_j)=v_j'$, $j=1,\ldots,n$, hace isométricos a (V,g) y (V',g'). Este resultado no es cierto con EVM generales, pero el siguiente corolario nos da la respuesta general.

Corolario 2.80 *Sean $(V,g),(V',g')$ dos EVM. Entonces son equivalentes:*

1) *$(V,g),(V',g')$ son isométricos.*

2) $(V, g), (V', g')$ *tienen la misma signatura, esto es,*

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V', \ \text{Indice}(V, g) = \text{Indice}(V', g') \ \textit{y} \ \text{Rango}(V, g) = \text{Rango}(V', g');$$

en particular $\text{Nulidad}(V, g) = \text{Nulidad}(V', g')$.

DEMOSTRACIÓN: Si $(V, g), (V', g')$ son isométricos y B es una base ortonormal de Sylvester para (V, g) es obvio que $f(B)$ es base ortonormal de Sylvester para (V', g'); ver (22). Por tanto $(V, g), (V', g')$ tienen la misma signatura.

Para el recíproco, supongamos que $(V, g), (V', g')$ son EVM con la misma signatura $(n-(r+s), r, s)$. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ son bases ortonormales de Sylvester para (V, g) y (V', g'), respectivamente, tenemos que

$$M_B(g) = M_{B'}(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathrm{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De nuevo por (22) el único isomorfismo $f\colon V \to V'$ tal que $f(v_j) = v'_j$, $j = 1, \ldots, n$, hace isométricos a (V, g) y (V', g'). ■

Finalmente explicaremos una caracterización analítica de las isometrías.

Proposición 2.81 *Sea* (V, g) *un EVM y* B *una base ordenada de* V*. Entonces:*

I) *Si* $f\colon V \to V$ *es un automorfismo entonces*

$$f \textit{ es isometría de } (V, g) \iff M(f, B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot M(f, B) = M_B(g).$$

II) *El conjunto* $\text{Iso}(V, g) = \{f\colon (V, g) \to (V, g) \colon f \text{ isometría}\}$ *es un grupo con la composición, y la aplicación*

$$F_B\colon \text{Iso}(V, g) \to \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \colon A^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot A = M_B(g)\}, \quad F_B(f) = M(f, B),$$

es un isomorfismo de grupos multiplicativos.

III) *Si* (V, g) *es un EVME y* B *es ortonormal en* (V, g)*, entonces*

$$f \textit{ es isometría de } (V, g) \iff M(f, B) \in \mathrm{O}(n).$$

Además, la aplicación

$$F_B\colon \text{Iso}(V, g) \to \mathrm{O}(n), \quad F_B(f) = M(f, B),$$

es un isomorfismo de grupos multiplicativos.

DEMOSTRACIÓN: Un automorfismo $f\colon V \to V$ es isometría de (V, g) si y sólo si

$$g\big(f(v), f(w)\big) = g(v, w) \quad \forall\, v, w \in V,$$

esto es, por (19),

$$(v_B)^{\mathrm{t}} \cdot \big(M(f, B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot M(f, B)\big) \cdot w_B = (v_B)^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot w_B \quad \forall\, v, w \in V.$$

De aquí se sigue 1).

Para 2), observemos que $\text{Iso}(V, g)$ y $\{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \colon A^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot A = M_B(g)\}$ son grupos con la composición de aplicaciones y multiplicación de matrices, respectivamente. Por 1) la aplicación F_B está bien definida y claramente es un isomorfismo de grupos.

El item 3) es consecuencia de 2) y de que, como $M_B(g) = \mathrm{I}_n$,

$$\{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \colon A^{\mathrm{t}} \cdot M_B(g) \cdot A = M_B(g)\} = \mathrm{O}(n).$$

■

2.11. Ejercicios del Tema 2

1. Demuestra que las siguientes aplicaciones son multilineales:

   a) $T\colon (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}V)^m \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, $\quad T(f_1,\dots,f_m) := f_1\circ\cdots\circ f_m$, donde V es un espacio vectorial y $m\in\mathbb{N}$.

   b) $T\colon \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^m \to M_n(\mathbb{R})$, $\quad T(A_1,\dots,A_m) := A_1\cdots A_m$, donde $m\in\mathbb{N}$.

   c) $T\colon \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(f,u,v) = f(u\times v)$, conde $u\times v$ indica producto mixto o vectorial.

   d) $T\colon \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^m \to \mathbb{R}$, $\quad T(A_1,\dots,A_m) := \mathrm{Traza}(A_1\cdots A_m)$, donde $m\in\mathbb{N}$.

   e) $T\colon (\mathbb{R}_2[t])^m \to \mathbb{R}$, $\quad T(p_1(t),\dots,p_m(t)) := \int_0^1 (p_1(t)\cdots p_m(t))\,dt$, donde $\mathbb{R}_2[t]$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales.

2. En $\mathbb{R}_1[t]$ espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 con coeficientes reales, consideramos las aplicaciones

$$T_1\colon (\mathbb{R}_1[t])^2 \to \mathbb{R},\quad T_1(p(t),q(t)) = p(0)q(1)$$

$$T_2\colon (\mathbb{R}_1[t])^2 \to \mathbb{R},\quad T_2(p(t),q(t)) = p(1)q(0).$$

   Probar que:

   a) T_1 y T_2 son tensores de $\mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}_1[t])$.

   b) $\{T_1,T_2\}$ son tensores linealmente independientes, y ampliar el sistema $\{T_1,T_2\}$ hasta una base de $T_2^0(\mathbb{R}_2[t])$.

3. En el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 consideramos la bases

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   a) Si $T\in\mathcal{T}_2^0(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ viende dado por $T\colon \mathcal{S}_2(\mathbb{R})^2\to\mathbb{R}$, $T(A_1,A_2)) := \mathrm{Traza}(A_1A_2)$, calcula $M(T,B_0)$ y $M(T,B)$.

   b) Si $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_0^2(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$, calcula $M(T,B_0)$ y $M(T,B)$.

   c) Si $f\colon \mathcal{S}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $M(T_f,B_0)$ y $M(T_f,B)$.

   d) Si $\varphi\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = a-b+c$, determina el único endomorfismo $f\in\mathrm{End}(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ tal que $T_f = \varphi\otimes\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula $M(f,B_0)$ y $M(f,B)$.

4. En $\mathbb{R}_2[t]$ se consideran las bases

$$B = \{1-t, 1+t, 1-t^2\} \quad \overline{B} = \{-1-t+t^2, t+t^2.t-t^2\}.$$

   Determina:

a) Las coordenadas de $T\colon \mathbb{R}_2[t]\times\mathbb{R}_2[t]\to\mathbb{R}$, $T(p(t),q(t)) = p'(1)q'(-1)$, en las bases B_2^0 y $\overline{B}_2^0$ de $\mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}_2[t])$ inducidas por B y $\overline{B}$, respectivamente.

b) Las ecuaciones del cambio de base de B_2^0 a $\overline{B}_2^0$ en $\mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}_2[t])$.

c) las coordenadas de $(1-t)\otimes(2t+t^2) - 2t\otimes(1+3t)$ en las bases B_0^2 y $\overline{B}_0^2$ de $\mathcal{T}_0^2(\mathbb{R}_2[t])$ inducidas por B y $\overline{B}$, respectivamente.

d) Las ecuaciones del cambio de base de $\overline{B}_0^2$ a B_0^2 en $\mathcal{T}_0^2(\mathbb{R}_2[t])$.

5. Dados V un espacio vectorial, $T\in\mathcal{T}_2^0(V)$ y B, $\overline{B}$ dos bases de V, demuestra que

$$\det M(T,B) = 0 \Longleftrightarrow \det M(T,\overline{B}) = 0.$$

Probar que el mismo enunciado es cierto cuando $T\in\mathcal{T}_0^2(V)$ y $T\in\mathcal{T}_1^1(V)$.

6. Fijemos $w\in\mathbb{R}^3$ y consideremos la siguiente aplicación:

$$T\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \quad T(u,v) := \langle u\times v, w\rangle,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ indica producto escalar euclidiano.

a) Probar que $T\in\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$, esto es, T es un tensor alternado.

b) Si $B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_0^* = \{\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3\}$ su base dual, expresar T como combinación lineal de la base $\{\varphi^1\wedge\varphi^2, \varphi^1\wedge\varphi^3, \varphi^2\wedge\varphi^3\}$ de $T_2^A(\mathbb{R}^3)$.

7. Sea $T\in\mathcal{T}_2^0(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ es el tensor dado por la expresión

$$T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}, \quad T(\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right) = ab' + bc' + ac',$$

determinar:

a) El tensor traspuesto $T^t\in\mathcal{T}_2^0(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

b) El simetrizado $T^S := \frac{1}{2}(T+T^t)$ de T.

c) El antisimetrizado $T^A := \frac{1}{2}(T-T^t)$ de T.

Expresar los anteriores tensores en las bases naturales de $\mathcal{T}_2^0(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, $\mathrm{S}_2(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ y $\Lambda_2(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, respectivamente, inducidas por la base canónica

$$B_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial real de dimensión n, $g\in\mathrm{S}_2(V)$ y B_1 una base ordenada de V. Probar que si $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es congruente a $M_{B_1}(g)$ entonces existe una base B_2 de V tal que $M_{B_2}(g) = C$.

9. Demuestra que todo espacio vectorial real admite una métrica euclídea.

10. En $\mathbb{R}^2$ se considera la base usual $B_0 = \{e_1,e_2\}$ y las métricas g_k, $k = -2,-1,0,1,2$, dadas por

$$M_{B_0}(g_k) = \begin{pmatrix} k & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}.$$

Estudiar en función de k de qué tipo es la métrica g_k.

11. Construye una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $(1,-2)$ sea ortogonal a todos los vectores, esto es, esté en su radical.

12. Sea (V,g) un EVME. Probar que todo conjunto $\{v_1,\ldots,v_k\}\subset V$ de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es linealmente independiente.

13. Prueba que durante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, no se cambian los subespacios generados por cada subconjunto ordenado de la base original. Es decir, si $\{w_1,\ldots,w_n\}$ es la base original de V y $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es la base ortonormal obtenida por ortonormalización de Gram-Schmidt a partir de ella, entonces

$$L(\{w_1\})\oplus\cdots\oplus L(\{w_i\})=L(\{v_1\})\oplus\cdots\oplus L(\{v_i\}),\quad \forall i=1\ldots,n.$$

14. Es posible que la restricción de una métrica no degenerada a un subespacio sea degenerada (esto no ocurre para métricas euclídeas). Prueba que la métrica g sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual B_0 es

$$M_{B_0}(g)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

es no degenerada, pero que la restricción de g a $U=L(\{(1,0)\})$ es degenerada.

15. Sean g,g' dos métriicas sobre el mismo espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, tales que dados $x,y\in V$, $g(x,y)=0$ si y sólo si $g'(x,y)=0$. ¿Tienen que coincidir g y g'?

16. En $(\mathbb{R}^3,g_0)$ (producto escalar usual) se consideran los planos vectoriales cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base usual son $U_1=\{a_1+a_2-a_3=0\},U_2=\{a_1+a_2+2a_3=0\}$. Probar que $U_1^\perp\subset U_2$ y que $U_2^\perp\subset U_1$, pero estas inclusiones no son igualdades.

17. Sea (V,g) un EVME y $p\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ tal que $p\circ p=p$ (es decir, p es una proyección). Demostrar que $V=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$ y que si p es autoadjunto respecto a g, entonces p es la proyección ortogonal de V sobre el subespacio $U=\mathrm{Im}(p)$.

18. Sea $V=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\colon \mathrm{gr}\big(p(x)\big)\leq 2\}$. Consideremos el producto L^2 dado por

$$g\colon V\times V\to\mathbb{R},\quad g\big(p(x),q(x)\big)=\int_{-1}^{1}p(t)q(t)dt.$$

   I) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V.
   II) Demuestra que la base $\{1,x,x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$ no es ortonormal respecto de g, y obtén a partir de ésta una base ortonormal de $(\mathbb{R}[x],g)$ por el procedimiento de Gram-Schmidt.

19. Sea V un espacio vectorial real, y U,W subespacios vectoriales de V tales que $V=U\oplus W$. Demuestra que existe una métrica euclídea g sobre V tal que W es el suplemento ortogonal de U respecto a g.

20. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V,g) de dimensión finita. Prueba que V es suma directa ortogonal de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

21. En el espacio vectorial $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ con el producto L^2

$$g\colon V\times V\to\mathbb{R},\quad g\big(f,h\big)=\int_{-1}^{1}f(t)h(t)dt,$$

que lo dota de estructura de EVME, probar que el suplemento ortogonal del subespacio de las funciones pares coincide con el subespacio de las funciones impares.

22. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con la métrica $g(A,B)=\mathrm{Traza}(A^{\mathrm{t}}\cdot B)$, calcular el suplemento ortogonal del subespacio vectorial formado por las matrices diagonales.

23. Supongamos que (V,g) es un EVM no degenerado de dimensión n, y $U\leq V$ es un subespacio vectorial de dimensión $k\leq n$ tal que $g|_{U\times U}$ es no degenerada. Probar que $V=U\oplus U^{\perp}$.

24. Sea (V,g) un EVM con dimensión n y B una base de V. Probar que un automorfismo f de V es una isometría de (V,g) en sí mismo si y sólo si

$$M(f,B)^{\mathrm{t}}\cdot M_B(g)\cdot M(f,B)=M_B(g).$$

25. Sea (V,g) un EVM y $f\colon V\to V'$ un isomorfismo de V en otro espacio vectorial real V'. Prueba que existe una única métrica g' sobre V' que hace a f una isometría de (V,g) en (V',g').

26. Sea (V',g') un EVM y $f:V\to V'$ un monomorfismo de otro espacio vectorial real V en V'. Prueba que existe una única métrica g sobre V que hace a f una isometría de (V,g) en $\big(f(V),g'|_{f(V)\times f(V)}\big)$.

27. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1,g_2,g_3 definidas por sus respectivas matrices de coordenadas respecto de la base ordenada usual B_0:

$$M_{B_0}(g_1)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad M_{B_0}(g_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad M_{B_0}(g_3)=\begin{pmatrix}0&1\\1&5\end{pmatrix}.$$

Discutir razonadamente las posibles isometrías que existan entre $(\mathbb{R}^2,g_1),(\mathbb{R}^2,g_2)$ y $(\mathbb{R}^2,g_3)$.

28. Sea $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, B una base de $V(\mathbb{R})$ espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{R}}V=n$, y g la única métrica sobre V tal que $M_B(g)=A$. Demuestra que g es euclídea si y sólo si existe $Q\in\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ tal que $A=Q^{\mathrm{t}}\cdot Q$.

29. Probar que un isomorfismo f entre dos EVM $(V,g),(V',g')$ es isometría si y sólo si conserva las formas cuadráticas asociadas a g,g'.

30. Probar que la composición de dos isometrías entre EVM es una isometría.

31. En $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar usual y los subespacios vectoriales

$$U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon x-y=z+t=0\},W=L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}).$$

Sea $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una isometría que verifica las condiciones

(a) $f(U)=W$,
(b) $f(1,-1,0,0)=(1,1,0,0)$,

(c) $\det f = 1$.

¿Existe alguna isometría f como la anterior que sea diagonalizable? Si existe, calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ con que esté formada por vectores propios de f.

32. Resolver las siguientes cuestiones:

    (A) Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$. Demostrar que f es autoadjunto respecto al producto escalar usual g_0 y calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$ formada por autovectores de f.

    (B) Idem para $f(x,y,z) = (y, x+2z, 2y)$.

33. Sea (V,g) un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión 4, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ordenada ortonormal de (V,g) y $f, h_a \colon V \to V$ (a es un parámetro real) los endomorfismos autoadjuntos respecto de g dados por las matrices

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(h_a, B) = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 & 0 \\ -2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Encontrar bases ortonormales de (V,g) formadas por vectores propios de f y de h_a.

34. Encuentra una matriz $P \in \mathrm{O}(3)$ tal que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal.

35. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V,g), tal que $g(f(x),x) \geq 0$ $\forall x \in V$. Prueba que $\exists h$ endomorfismo autoadjunto de (V,g) tal que $h \circ h = f$. ¿Es h único?

36. Sea (V,g) un espacio vectorial métrico euclídeo con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $f, h \colon V \to V$ dos endomorfismos g-autoadjuntos. Razonar cuáles de los siguientes endomorfismos son necesariamente autoadjuntos:

$$f + h, \quad f \circ h, \quad f \circ f, \quad f \circ h + h \circ f, \quad f \circ h \circ f + 3f - 21_V.$$

37. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las formas cuadráticas

$$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz + yz, \quad F_2(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz.$$

    Encontrar bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual que diagonalicen a F_1 y a F_2.

38. En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g cuya matriz en la base usual B es $M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

    (A) Probar que g es euclídea y encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$.

    (B) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que f es autoadjunto respecto a g y entontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$ formada por autovectores de f.

39. Criterio de los menores para saber si una métrica es euclídea. Sea (V, g) un EVM y B una base ordenada de V. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea A_k el menor de $M_B(g)$ formado por las k primeras filas y columnas de A. Demuestra que g es euclídea si y sólo si $\forall k$, $\det(A_k) > 0$.

    Indicación para la condición suficiente: Razona por inducción sobre $\dim V$ y encuentra una base ortonormal $B_U = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $g|_U$, donde $U \subset V$ está generado por los primeros $n-1$ vectores de B. Amplía B_U a $B_1 = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ y expresa

$$M_{B_1}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & a^t \\ \hline a & a_n \end{array} \right)$$

    para cierto $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Define $B_2 = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i)$ y prueba que

$$M_{B_2}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \end{array} \right).$$

    Finalmente, prueba que $a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$, por lo que g será euclídea.

40. Sea (V, g) un EVM no degenerado con dimensión finita, y tengamos presentes los isomorfismos musicales $^\flat \colon V \to V^*$, $^\sharp \colon V^* \to V$ asociados a g; ver Definición 2.63.

    (a) Definiendo $g^* \colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ mediante $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^\sharp, \psi^\sharp)$, probar que g^* es una métrica no degenerada sobre V^*, y que g^* es la única métrica sobre V^* que hace a $^\flat \colon (V, g) \to (V^*, g^*)$ una isometría.

    (b) Probar que si cambiamos la hipótesis 'g es no degenerada' por 'g es euclídea', entonces g^* para a ser euclídea también.

    (c) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V, y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base ordenada dual. Probar que $M_B(g) = M(^\flat, B, B^*)$ y que $M_{B^*}(g^*) = M(^\sharp, B^*, B)$. Deducir que $M_{B^*}(g^*) = M_B(g)^{-1}$.

    (d) Demostrar que si g es euclídea y B es una base ordenada ortonormal de (V, g), entonces B^* es base ordenada ortonormal para (V^*, g^*).

41. Sea (V, g) un EVM y $U \leq V$ un subespacio vectorial. Demostrar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V y que $(U, g|_{U \times U})$ es no degenerado si y sólo si $U \cap U^\perp = \{0\}$. Probar que si (V, g) es no degenerado, entonces $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$.

42. Diagonalización simultánea de dos endomorfismos autoadjuntos. Sean f, h endomorfismos autoadjuntos de un EVME (V, g) con dimensión n, tales que $f \circ h = h \circ f$.

    (a) Probar que los subespacios propios de f (resp. de h) son invariantes por h (resp. por f).

    (b) Demostrar que existe una base ordenada ortonormal de B de (V, g) tal que $M(f, B)$ y $M(h, B)$ son matrices diagonales.

43. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, B una base de V y g la métrica sobre V dada por

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular el rango y la signatura de g, y encontrar una base B' de V tal que $M_{B'}(g)$ sea diagonal.

44. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, B una base de V y g la métrica sobre V dada por

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular el rango y la signatura de g.

45. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 4, B una base de V y g_a la métrica sobre V dependiendo de un parámetro $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$M_B(g_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular el rango y la signatura de g_a para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Para los valores $a = 0, 1, -1, 2$, encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^T M_B(g_a) P$.

46. Probar que todas las matrices simétricas reales A de orden $n \in \mathbb{N}$ verificando $A^2 = A$ y $\mathrm{Traza}(A) = 1$ son semejantes entre sí mediante una matriz ortogonal.

47. Sean A, C dos matrices simétricas reales de orden $n \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que A, C son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura, es decir, la misma cantidad de valores propios positivos, negativos y cero.

(b) Probar que A, C son congruentes mediante una matriz ortogonal si y sólo si tienen los mismos valores propios y multiplicidades.

48. Para cada una de las siguientes matrices simétricas reales, calcular su signatura.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(a) Demostrar que A y C son matrices congruentes.

(b) Encontrar una matriz $P \in \mathrm{Gl}(3, \mathbb{R})$ tal que $C = P^t A P$.

(c) ¿Existe una matriz ortogonal $P \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ tal que $C = P^t A P$?

Tema 3

3. Espacios Vectoriales Métricos Euclídeos

En este tema vamos a profundizar en el estudio de los EVME, que esencialmente reproducen lo ya conocido para el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, g_0)$ clásico, donde $g_0 \equiv \langle \, , \, \rangle$ es el producto escalar usual, esto es, si $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}, y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$,

$$g_0(x, y) = \langle x, y \rangle = x^{\mathrm{t}} \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

3.1. Ángulo y norma en un EVME

Comenzaremos introduciendo el concepto de orientación en un espacio vectorial real.

En lo que sigue $V(\mathbb{R})$ será un espacio vectorial real de $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Denotemos por $\mathcal{B}$ la familia de todas las bases ordenadas de V.

Definición 3.1 *Se dice que dos bases ordenadas $B, B' \in \mathcal{B}$ inducen la misma* orientación *o tienen el mismo* carácter de orientabilidad*, y se escribe $B \sim B'$, si*

$$\det M(\mathrm{Id}_V, B, B') > 0.$$

Proposición 3.2 *La relación binaria $\sim$ es de equivalencia en $\mathcal{B}$ y el cociente $\mathcal{B}/\sim$ tiene exactamente dos clases de equivalencia.*

Demostración: Dadas $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$, la identidad

$$M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_3) = M(\mathrm{Id}_V, B_2, B_3) \cdot M(\mathrm{Id}_V, B_1, B_2)$$

y las propiedades básicas del determinante implican trivialmente que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Además, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathcal{B}$ y definimos $B' = \{-v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in \mathcal{B}$, se tiene que $-1 = \det M(\mathrm{Id}_V, B, B') < 0$, esto es, $B \not\sim B'$, por lo que las clases $[B]$ de B y $[B']$ de B' en $\mathcal{B}/\sim$ son distintas. Claramente si $B'' \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$-1 = \det M(\mathrm{Id}_V, B, B') = \det M(\mathrm{Id}_V, B'', B') \cdot \det M(\mathrm{Id}_V, B, B''),$$

por lo que $B'' \in [B]$ o $B'' \in [B']$, y por tanto $\mathcal{B}/\sim = \{[B], [B']\}$. ■

Definición 3.3 *Una orientación en V es una clase de equivalencia* O *de $\mathcal{B}/\sim$. Un par (V, O), donde* O *es una orientación en V, es un espacio vectorial orientado.*

Una base ordenada B de V se dice positiva en un espacio vectorial orientado (V, O) si $[B] = \mathrm{O}$, y negativa si $[B] \neq \mathrm{O}$.

En lo que sigue (V, g) será un EVME. Recordemos que la norma de un vector $v \in V$ se definió como

$$\|v\| = +\sqrt{g(v, v)} \geq 0;$$

ver Definición 3.4.

Definición 3.4 *Diremos que*

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad \|v\| = +\sqrt{g(v,v)},$$

es la aplicación norma asociada a (V,g) como EVME.

Proposición 3.5 *Sea (V,g) un EVME. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$, *y la igualdad se da si y solo si y* $v = \overrightarrow{0}$.

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

(c) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $|g(u,v)| \leq \|u\| \|v\| \ \forall u, v \in V$, *y la igualdad se da si y solo si* $\{u, v\}$ *son linealmente dependientes.*

(d) **Desigualdad triangular:** $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in V$.

Demostración: Items (a) y (b) son inmediatos de la definición de $\|\cdot\|$ y del hecho de que g sea definida positiva; véase Observación 2.42.

Sean $u, v \in V$ vectores arbitrarios. Si $v = \vec{0}$ la desigualdad en (c) es trivial; en este caso se da la igualdad y $\{u, v = \vec{0}\}$ son linealmente dependientes. Supongamos que $v \neq \vec{0}$ y consideremos la combinación lineal $u + \lambda v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$0 \leq \|u + \lambda v\|^2 = g(u + \lambda v, u + \lambda v) = g(u,u) + 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v).$$

La función polinómica $p(\lambda): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado dos definida por

$$p(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2 = g(u,u) + 2\lambda g(u,v) + \lambda^2 g(v,v) \in \mathbb{R}[\lambda]$$

es no negativa, y por tanto o no tiene raices reales o tiene una única raiz real doble. En consecuencia su discriminante es no positivo

$$\Delta = 4g(u,v)^2 - 4g(v,v)g(u,u) \leq 0,$$

lo que prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Además, en la desigualdad anterior se da la igualdad si y sólo si $\Delta = 0$, esto es, si y sólo si existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(\lambda) = g(v,v)(\lambda - \lambda_0)^2,$$

y por tanto $p(\lambda_0) = \|u + \lambda_0 v\|^2 = 0$. Por (a) esto equivale a que $u + \lambda_0 v = \vec{0}$ y a la dependencia lineal de $\{u, v\}$, lo que prueba (c).

Por último, es claro que

$$\|u+v\|^2 = g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|g(u,v)| \overset{(c)}{\leq}$$

$$\overset{(c)}{\leq} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

de donde se sigue (d). ■

Denotaremos por $2\pi\mathbb{Z}$ al subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ de los múltiplos enteros de 2π:

$$2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Nótese que las funciones trigonométricas clásicas $(\text{sen}, \cos, ...)$ están bien definidas sobre el grupo aditivo cociente $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ de los reales módulo 2π.

Definición 3.6 *Sea (V, g, O) un plano vectorial métrico euclídeo orientado ($\dim V = 2$), sea $\{u_1, u_2\}$ una dupla ordenada de vectores de $V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, y sea $B = \{w_1, w_2\}$ la única base ortonormal positiva en (V, g, O) con $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$ (basta con elegir el único $w_2 \in L(\{w_1\})^\perp$ unitario tal que $\{w_1, w_2\} \in \mathrm{O}$).*

Por definición, el ángulo orientado *que forman u_1 y u_2 en (V, g, O) es el único real $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ tal que*

$$u_2 = \|u_2\|\big(\cos(\alpha)w_1 + sen(\alpha)w_2\big).$$

Si se escribe $\alpha \in \mathbb{R}$, el ángulo se entenderá determinado salvo la suma de un múltiplo entero de 2π. También usaremos la notación

$$\alpha = \measuredangle_o(u_1, u_2) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

La existencia y unicidad del ángulo orientado es consecuencia del siguiente argumento. Como $\{w_1, w_2\}$ es base ortonormal de V, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = xw_1 + yw_2, \text{ donde } x^2 + y^2 = \big\|u_2/\|u_2\|\big\| = 1;$$

La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ garantiza, gracias al análisis real, la existencia de un único $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ con

$$\cos(\alpha) = x, \operatorname{sen}(\alpha) = y.$$

Siempre es posible tomar una determinación del ángulo $\alpha = \measuredangle_o(u_1, u_2)$ en el intervalo $[0, 2\pi[$, que suele ser referida como *determinación principal* del ángulo orientado que forman u_1 y u_2 en (V, O).

De nuestra definición es inmediato que

$$u_1 \perp u_2 \iff \measuredangle_o(u_1, u_2) = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}.$$

Propiedades 3.7 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) *Si $u_1, u_2, u_3 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ entonces $\measuredangle_o(u_1, u_2) + \measuredangle_o(u_2, u_3) = \measuredangle_o(u_1, u_3)$. En particular, $\measuredangle_o(u_1, u_2) = -\measuredangle_o(u_2, u_1)$ para todo $u_1, u_2 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.*

(II) *Si B es una base ortonormal positiva de (V, g, O) y $u_1, u_2 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, entonces*

$$\det{}_B(u_1, u_2) = \det\big((u_1)_B, (u_2)_B\big) = \|u_1\|\|u_2\| sen\big(\measuredangle_o(u_1, u_2)\big),$$

donde $\det_B = \varphi^1 \wedge \varphi^2 \in \Lambda_2(V)$ siendo $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2\}$ la base dual de B en V^*.

Demostración: Escribamos $\alpha = \measuredangle_o(u_1, u_2)$ y $\beta = \measuredangle_o(u_2, u_3)$

Si $B = \{w_1, w_2\}$ es la única base ortonormal positiva en (V, g, O) con $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$, sabemos que

$$\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \big(\cos(\alpha)w_1 + \operatorname{sen}(\alpha)w_2\big).$$

Observemos que la base

$$B' = \{w_1' = \frac{1}{\|u_2\|}u_2, w_2' = -\operatorname{sen}(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2\}$$

es ortonormal en (V, g) y satisface $\det M(\mathrm{Id}_V, B, B') = \operatorname{sen}(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 > 0$, por lo que es también positiva en (V, O). Por tanto, de nuestra definición,

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \big(\cos(\beta)w_1' + \operatorname{sen}(\beta)w_2'\big),$$

esto es

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \big(\cos(\beta)\big(\cos(\alpha)w_1 + \operatorname{sen}(\alpha)w_2\big) + \operatorname{sen}(\beta)\big(-\operatorname{sen}(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2\big)\big) =$$

$$= \big(\big(\cos(\beta)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)\big)w_1 + \big(cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)\big)w_2\big),$$

de donde

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \big(\cos(\alpha+\beta)w_1 + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)w_2\big).$$

Como $B = \{w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1, w_2\}$ es positiva en (V, O), de nuevo por definición

$$\measuredangle_o(u_1, u_3) = \alpha + \beta,$$

lo que prueba (i).

Para demostrar (ii), observemos que por el Corolario 2.25

$$\det{}_B(u_1, u_2) := \det\big((u_1)_B, (u_2)_B\big) = \det\begin{pmatrix} \|u_1\| & \|u_2\|\cos(\alpha) \\ 0 & \|u_2\|\operatorname{sen}(\alpha) \end{pmatrix} = \|u_1\|\|u_2\|sin(\alpha).$$

■

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|g(u_1, u_2)| \leq \|u_1\|\|u_2\|$ existe de un único número real $\beta \in [0, \pi]$ tal que $g(u_1, u_2) = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\beta)$ para cualesquiera $u_1, u_2 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 3.8 *Dados dos vectores $u_1, u_2 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ en un espacio vectorial euclidiano (V, g), el* ángulo no orientado *que forman es el único número real $\beta \in [0, \pi]$ tal que $g(u_1, u_2) = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\beta)$. Se denotará*

$$\beta = \measuredangle(u, v).$$

Proposición 3.9 *Dados $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, se tiene que:*

(I) $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(v, u)$ *y* $\measuredangle(u, -v) = \pi - \measuredangle(u, v)$.

(II) $u \perp v \iff \measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$.

(III) *Si* O *es una orientación en (V, g) y $\measuredangle_o(u, v)$ es la determinación en $[0, 2\pi[$ del ángulo orientado que forman u y v, entonces*

$$\measuredangle(u, v) = \min\{\measuredangle_o(u, v), 2\pi - \measuredangle_o(u, v)\};$$

en particular $\cos\big(\measuredangle(u, v)\big) = \cos\big(\measuredangle_o(u, v)\big)$.

Demostración: Items (i) y (ii) son triviales de la definición.

En cuanto a (iii), observemos que si fijamos la determinación principal

$$\measuredangle_o(u, v) \in [0, 2\pi[$$

del ángulo orientado que forman u, v en (V, O), el número real

$$\beta := \min\{\measuredangle_o(u, v), 2\pi - \measuredangle_o(u, v)\}$$

pertenece al intervalo $[0, \pi]$ y claramente satisface $cos(\beta) = \cos\big(\measuredangle_o(u, v)\big)$. Como de la Definición 3.6 siempre se tiene que

$$\frac{g(u, v)}{\|u\|\|v\|} = \cos\big(\measuredangle_o(u, v)\big),$$

concluimos que $\cos(\beta) = \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}$ y $\beta = \measuredangle(u, v)$. ■

El Corolario 2.60 da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.10 *Sean (V, g) EVME y $U \leq V$ subespacio vectorial, y consideremos $\pi_U^\perp \colon V \to V$ la proyección ortogonal sobre U. A la aplicación*

$$\sigma_U^\perp := 2\pi_U^\perp - \mathrm{Id}_V$$

se le llama simetría ortogonal *en (V, g) respecto de U. En otras palabras, $\sigma_U^\perp = \sigma_{U,U^\perp}$; ver Definición 1.26.*

Proposición 3.11 *Sea (V, g) un EVME, $U \leq V$ un subespacio vectorial y $\sigma_U^\perp \colon (V, g) \to (V, g)$ la simetría ortogonal en (V, g) respecto de U. Se tiene que:*

(a) $\sigma_U^\perp \circ \sigma_U^\perp = \mathrm{Id}_V$.

(b) $\sigma_U^\perp \colon (V, g) \to (V, g)$ *es una isometría.*

(c) $\sigma_U^\perp \in \mathcal{A}_g(V)$.

Demostración: Tengamos presente el Corolario 2.57 y recordemos que $V = U \oplus U^\perp$. Tomemos $v_1 v_2 \in V$ vectores arbitrarios y escribamos de forma única

$$v_j = u_j + w_j, \quad u_j \in U,\ w_j \in U^\perp,\ j = 1, 2.$$

Tenemos que $\pi_U^\perp(v_j) = u_j$, y por tanto

$$\sigma_U^\perp(v_j) = u_j - w_j, \quad j = 1, 2.$$

De aquí se sigue trivialmente (a). Usando que $g(u_1, w_2) = g(w_1, u_2) = 0$, se tiene que

$$g\big(\sigma_U^\perp(v_1), \sigma_U^\perp(v_2)\big) = g(u_1 - w_1, u_2 - w_2) = g(u_1, u_1) - g(u_1, w_2) - g(w_1, u_2) + g(w_1, w_2) =$$

$$= g(u_1, u_1) + g(u_1, w_2) + g(w_1, u_2) + g(w_1, w_2) = g(u_1 + w_1, u_2 + w_2) = g(v_1, v_2),$$

de donde se concluye (b). Para (c), obsérvemos que para cualesquiera $u, v \in V$, teniendo en cuenta (b),

$$g\big(\sigma_U^\perp(u), v\big) \overset{\text{(b)}}{=} g\left(\sigma_U^\perp\left(\sigma_U^\perp(u)\right), \sigma_U^\perp(v)\right) \overset{\text{(a)}}{=} g\big(u, \sigma_U^\perp(v)\big).$$

■

3.2. Producto vectorial en un EVME tridimensional

Sea (V, g) un EVME con $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$. Sabemos de la Propsición 2.62 que la transformación ${}^\flat \colon V \to V^*, \quad v \mapsto v^\flat$, donde

$$v^\flat \colon V \to \mathbb{R},\ v^\flat(w) = g(v, w), \text{ para todo } v \in V,$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Fijemos una orientación O en V y tomemos una base ordenada positiva $B \in \mathrm{O}$ que sea ortonormal en (V, g). El tensor determinante $\det_B \in \Lambda_3(V)$ en la base B satisfacía

$$\det_B(u, v, w) = \det(u_B, v_B, w_B) \quad \forall\, u, v, w \in V.$$

Tengamos en cuenta que, como $\det_B$ es multilineal, para cada $u, v \in V$ la aplicación

$$\det_B(u, v, \cdot) \colon V \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto \det_B(u, v, w),$$

es una forma lineal de V^*. Por tanto existe un único vector de $u \times v \in V$ tal que $(u \times v)^\flat = \det_B(u, v, \cdot)$, esto es,

$$\det_B(u, v, w) = g(u \times v, w) \quad \forall\, w \in V. \tag{23}$$

Curiosamente el vector $u \times v \in V$ así determinado no depende de la base ortonormal positiva $B \in \mathrm{O}$ elegida. En efecto, si B' es otra base ordenada ortonormal en (V, g) induciendo la misma orientación O en V, entonces $M(\mathrm{Id}_V, B', B) \in \mathrm{O}(n)$ y tiene determinante positivo, por lo que $\det\left(M(\mathrm{Id}_V, B', B)\right) = 1$ y

$$\det_B = \det\left[M(\mathrm{Id}_V, B', B)\right]\det_{B'} = \det_{B'}.$$

De ahí lo afirmado.

Definición 3.12 *Si (V, g, O) es un EVME orientado y $u, v \in V$, al único vector $u \times v \in V$ tal que*

$$(u \times v)^\flat = \det_B(u, v, \cdot) \in V \quad \forall\ B \in \mathrm{O} \ \textit{ortonormal}$$

se le llamará producto vectorial o cruz *de u y v respecto de la orientación* O*.*

Observación 3.13 *El vector $u \times v$ depende de forma esencial de la orientación* O *fijada en V: si se adoptase la orientación contraria entonces $u \times v$ cambiaría de signo. Téngase en cuenta que si B y B' son bases ordenadas ortonormales en (V, g) induciendo orientaciones opuestas entonces*

$$\det_B = \det\left[M(\mathrm{Id}_V, B', B)\right]\det_{B'} = -\det_{B'}.$$

La siguiente proposición recoge las propiedades básicas del producto vectorial.

Proposición 3.14 *Sean (V, g, O) un EVME orientado con $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$. Tenemos que:*

a) *Si $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \in \mathrm{O}$ es una base ortonormal positiva, $u, v \in V$ y escribimos sus coordenadas como $u_B = (x_1, x_2, x_3), v_B = (y_1, y_2, y_3)$, entonces*

$$(u \times v)_B = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2),$$

esto es, formalmente

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

b) *$\times \colon V \times V \to V$ es una aplicación multilineal antisimétrica, esto es, para cualesquiera $u, v, w, u', v' \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que:*

- *$(\lambda u + \mu u') \times v = \lambda(u \times v) + \mu(u' \times v)$, $u \times (\lambda v + \mu v') = \lambda(u \times v) + \mu(u \times v')$.*
- *$u \times v = -v \times u$.*

c) *$g(u \times v, u' \times v') = g(u, u')g(v, v') - g(u, v')g(v, u')$.*

d) *$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - g(u, v)^2$.*

e) *Si* $u, v \neq \vec{0}$,
$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen\big(\measuredangle(u,v)\big),$$
donde $\measuredangle(u,v) \in [0,\pi]$ *es el ángulo no orientado que forman* u, v *en el plano vectorial euclídeo que engendran (dotado de la métrica inducida por* g*).*

f) $u \times (v \times w) = g(u,w)v - g(u,v)w$.

Demostración: Observemos que de (23)

$$g(u \times v, \vec{i}) = \det_B(u,v,\vec{i}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{pmatrix} = x_2y_3 - y_2x_3$$

$$g(u \times v, \vec{j}) = \det_B(u,v,\vec{j}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{pmatrix} = x_3y_1 - y_3x_1$$

$$g(u \times v, \vec{k}) = \det_B(u,v,\vec{k}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Por el Lema 2.50-2) se concluye a).

Item b) se sigue de que $\det_B$ es un tensor alternado y Definición 3.12.

Para probar c), consideremos los tensores $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_4^0(V)$ definidos por:

$$T_1 \colon V^4 \to \mathbb{R}, \quad T_1(u,v,u',v') = g(u \times v, u' \times v'),$$

$$T_2 \colon V^4 \to \mathbb{R}, \quad T_2(u,v,u',v') = g(u,u')g(v,v') - g(u,v')g(v,u').$$

Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\} \in \mathrm{O}$ cualquier base ortonormal.

Tomemos $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1,2,3\}$. Si $i_1 = i_2$ o $j_1 = j_2$ es trivial comprobar de las anteriores definiciones que

$$T_1(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) = T_2(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) = 0;$$

téngase en cuenta que $w \times w = \vec{0}$ para todo $w \in V$.

Si $\{h,k,j\} = \{1,2,3\}$ escribiremos

$$\mathrm{sig}(h,k) = +1\ (-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & k & l \end{pmatrix} \text{ es permutación par (impar)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{v_h, v_k, v_l\} \in \mathrm{O} \ \ (\{v_h, v_k, v_l\} \notin \mathrm{O}).$$

Supongamos ahora que $i_1 \neq i_2$ e $j_1 \neq j_2$, y llamemos

$$\{i\} = \{1,2,3\} \setminus \{i_1, i_2\}, \quad \{j\} = \{1,2,3\} \setminus \{j_1, j_2\}.$$

Como de la Definición 3.12 (o lo probado en a)) se tiene que

$$v_{i_1} \times v_{i_2} = \mathrm{sig}(i_1,i_2)i, \quad v_{j_1} \times v_{j_2} = \mathrm{sig}(j_1,j_2)j,$$

se sigue que

$$T_1(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) = g(v_{i_1} \times v_{i_2}, v_{j_1} \times v_{j_2}) =$$
$$= g\big(\mathrm{sig}(i_1,i_2)i, \mathrm{sig}(j_1,j_2)j\big) = \mathrm{sig}(i_1,i_2)\mathrm{sig}(j_1,j_2)g\big(i,j\big) = \mathrm{sig}(i_1,i_2)\mathrm{sig}(j_1,j_2)\delta_{ij}.$$

Análogamente

$$T_2(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) = g(v_{i_1}, v_{j_1})g(v_{i_2}, v_{j_2}) - g(v_{i_1}, v_{j_2})g(v_{i_2}, v_{j_1}) =$$
$$= \delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2}\delta_{i_2 j_1} = \mathrm{sig}(i_1, i_2)\mathrm{sig}(j_1, j_2)\delta_{ij},$$

donde para establecer la última igualdad solo hay que hacer una discusión de casos.

En conclusión de todo lo anterior

$$T_1(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) = T_2(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{j_1}, v_{j_2}) \quad \forall\, i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\},$$

y de aquí que $T_1 = T_2$ por el Teorema 2.12, lo que prueba c).

Para probar d) basta con usar c) en el siguiente cálculo

$$\|u \times v\|^2 = g(u \times v, u \times v) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)g(v, u) = \|u\|^2\|v\|^2 - g(u, v)^2.$$

De d) y la Definición 3.8 se sigue que

$$\|u \times v\|^2 = g(u \times v, u \times v) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)g(v, u) = \|u\|^2\|v\|^2 - g(u, v)^2 =$$
$$= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos\big(\measuredangle(u, v)\big)^2 = \|u\|^2\|v\|^2\big(1 - \cos\big(\measuredangle(u, v)\big)^2\big) = \|u\|^2\|v\|^2 \mathrm{sen}\big(\measuredangle(u, v)\big)^2,$$

lo que prueba e) (recuérdese que ($\measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$, y por tanto $\mathrm{sen}\big(\measuredangle(u, v)\big) \geq 0$).

Por último, para probar f) recordemos que de la Definición 3.12

$$g\big(u \times (v \times w), z\big) = \det_B(u, v \times w, z) \quad \forall z \in V.$$

Por otra parte, para cualquier $z \in V$ tenemos que

$$g\big(g(u, w)v - g(u, v)w, z\big) = g(u, w)g(v, z) - g(u, v)g(w, z) = g(u, w)g(z, v) - g(u, v)g(w, z) \overset{\text{c)}}{=}$$
$$\overset{\text{c)}}{=} g(u \times z, w \times v) \overset{(23)}{=} \det_B(u, z, w \times v) = \det_B(u, v \times w, z).$$

De aquí que

$$g\big(u \times (v \times w), z\big) = g\big(g(u, w)v - g(u, v)w, z\big) \quad \forall z \in V$$

y $u \times (v \times w) = g(u, w)v - g(u, v)w$, lo que concluye la prueba. ■

Corolario 3.15 *Si* (V, g, O) *es un EVME orientado con* $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ *y* $u, v \in V$ *son vectores linealmente independientes, entonces* $u \times v$ *es el único vector de* V *tal que*

i) $u \times v \in L\{u, v\}^\perp$,

ii) $\{u, v, u \times v\} \in \mathrm{O}$, *y*

iii) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \mathit{sen}\big(\measuredangle(u, v)\big)$.

Demostración: Comprobemos que $u \times v$ satisface las tres propiedades del enunciado del corolario.

Item i) se sigue trivialmente de (23) ya que

$$0 = \det_B(u, v, u) = g(u \times v, u), \quad 0 = \det_B(u, v, v) = g(u \times v, v).$$

De la Proposición 3.14-d) inferimos que $u \times v \neq \vec{0}$ (en otro caso se daría la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y $u, v \in V$ serían linealmente dependientes); también se puede llegar a la misma conclusión usando Proposición 3.14-a). Por tanto, usando de nuevo (23),

$$\det_B(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0$$

y $\{u, v, u \times v\} \in \mathrm{O}$, lo que prueba ii).

Finalmente iii) se corresponde con Proposición 3.14-e).

El que $u \times v$ sea el único vector de V satisfaciendo i)-ii)-iii) se sigue de que i) determina la dirección de $u \times v$, ii) su sentido, y iii) su norma. ■

3.3. Clasificación de isometrías lineales en EVME

Sean (V, g), $(V,' g')$ espacios vectoriales métricos euclídeos. Recordemos que una aplicación

$$h \colon (V, g) \to (V', g')$$

es una isometría lineal o vectorial si es un isomorfismo lineal y satisface

$$g'\big(h(v), h(u)\big) = g(v, u) \quad \forall v, u \in V;$$

ver Definición 2.77. Si $\dim V = \dim V' = n$, el grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ gobierna este tipo de transformaciones, en el sentido de que si B, B' son bases ortonormales de (V, g), (V', g') entonces:

$$h \colon (V, g) \to (V', g') \text{ es isometría vectorial} \Longleftrightarrow M(h, B, B') \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R});$$

en la Proposición 2.81-iii) se probó este enunciado cuando $V = V'$, hágase en general como ejercicio.

Las isometrías dejan invariante la norma de vectores (ver Definición 3.4), esto es,

$$\|h(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Como consecuencia, también preservan ángulos no orientados

$$\measuredangle\big(h(v), h(u)\big) = \arccos\left(\frac{g\big(h(u), h(v)\big)}{\|h(u)\|\|h(v)\|}\right) = \arccos\left(\frac{g(u, v)}{\|u\|\|v\|}\right) = \measuredangle\big(v, u\big);$$

ver Definición 3.8. Igual ocurre con los orientados (ver Definición 3.6) si $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V' = 2$ y h preserva orientaciones fijadas O en V y O$'$ e V'.

Las isometrías por tanto respetan la ortogonalidad

$$u \perp v \Longleftrightarrow h(u) \perp h(v) \quad \forall u, v \in V,$$

de donde

$$h(U^{\perp}) = h(U)^{\perp} \text{ para todo subespacio } U \subseteq V. \tag{24}$$

Centremos nuestro interés en los endomorfismos isométricos $h \colon (V, g) \to (V, g)$. La siguiente proposición no da información sobre su estructura básica.

Proposición 3.16 *Sea (V, g) un EVME y $h \colon (V, g) \to (V, g)$ una isometría vectorial. Los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) $\det(h) = \pm 1$.

(II) *Los únicos posibles valores propios de h son 1 y -1.*

(III) *Si $V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$ entonces $V_1 \perp V_{-1}$.*

(IV) $h\big((V_1 + V_{-1})^{\perp}\big) = (V_1 + V_{-1})^{\perp}$.

(V) $\dim(V_1 + V_{-1})^{\perp}$ *es par y* $\det(h) = (-1)^{\dim V_{-1}}$.

(VI) $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN: Escribamos $\dim V = n$. Si $A \in \mathrm{O}(n)$ es una matriz ortogonal sabemos que $1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det(A \cdot A^{\mathrm{t}}) = \det(A)^2$, y por tanto $\det(A) = \pm 1$. Como

$$M(h, B) \equiv M(h, B, B) \in \mathrm{O}(n)$$

para cualquier base B ortonormal de (V, g), se sigue que $\det(h) = \det\big(M(h, B)\big) = \pm 1$, probando (i).

Si λ es un valor propio de h y $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ un vector propio asociado, esto es, tal que $h(v) = \lambda v$, entonces $\lambda^2 \|v\|^2 = \|\lambda v\|^2 = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2$. Como $\|v\|^2 \neq 0$ deducimos que $\lambda^2 = 1$, probando (ii).

Si $v \in V_1$ y $u \in V_{-1}$ entonces

$$g(v, u) = g\big(h(v), h(u)\big) = g(v, -u) = -g(v, u),$$

esto es $g(v, u) = 0$ y $v \perp u$, lo que prueba (iii).

Usando que $h(V_1) = V_1$ y $h(V_{-1}) = V_{-1}$, es claro que

$$h\big((V_1 + V_{-1})^{\perp}\big) = \big(h(V_1 + V_{-1})\big)^{\perp} = \big(h(V_1) + h(V_{-1})\big)^{\perp} = (V_1 + V_{-1})^{\perp},$$

de donde se sigue (iv).

Como $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^{\perp}$ y h deja invariantes los tres sumandos de esa suma directa, es claro que

$$\det(h) = \det\left(h|_{V_1}\right) \det\left(h|_{V_{-1}}\right) \det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right) = (-1)^{\dim V_{-1}} \det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right), \quad (25)$$

donde consideramos $h|_{V_{\pm 1}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V_{\pm 1}$, $h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_1 + V_{-1})^{\perp}$.

Para probar v), de (25) bastaría con ver que

$$dim(V_1 + V_{-1})^{\perp} \text{ es par y } \det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right) = 1.$$

La isometría lineal $h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}$ no tiene valores propios (los únicos valores propios posibles de h son 1 y -1 y $(V_1 + V_{-1})^{\perp} \cap V_{\pm 1} = \varnothing$), y por tanto su polinomio característico

$$p(t) = \det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}} - t\mathrm{Id}_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right)$$

no tiene raíces reales, esto es, $p(t)$ no cambia de signo. Por el Teorema de Bolzano:

- $p(t)$ ha de ser un polinomio de grado $k = \dim(V_1 + V_{-1})^{\perp}$ par.
- Como el término líder de $p(t)$ es t^k, k par, el término independiente de $p(t)$, a saber $\det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right)$, ha de ser necesariamente positivo.

Por (i) sabemos que $\det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right) = \pm 1$, ya que $h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}$ es una isometría, de donde se concluye que $\det\left(h|_{(V_1+V_{-1})^{\perp}}\right) = 1$ probando (v).

Finalmente, para probar vi) consideremos $v \in \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$ y $u \in \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)$ y observemos que

$$h(v) = v \quad \text{y} \quad u = h(w) - w \text{ para algún } w \in V,$$

de donde usando que h es una isometría vectorial

$$g(v, u) = g\left(v, h(w) - w\right) = g\left(v, h(w)\right) - g(v, w) = g\left(h(v), h(w)\right) - g(v, w) = 0,$$

lo que prueba que $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) \subseteq \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp}$. Si comprobamos que $\dim \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = \dim \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp}$, ambos subespacios serían iguales y acabaríamos la proposición.

En efecto, como $h - \mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ el primer teorema de isomorfia implica que

$$\dim \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) + \dim \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V) = \dim V,$$

y como siempre $V = \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V) \oplus \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp}$, también tenemos que

$$\dim \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V) + \dim \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp} = \dim V.$$

Por tanto $\dim \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = \dim \mathrm{Im}(h - \mathrm{Id}_V)^{\perp}$, lo que concluye la prueba.

■

Definición 3.17 *En un espacio vectorial métrico euclídeo (V, g), las isometrías vectoriales $h\colon V \to V$ con* $\det(h) = 1$ *son llamadas* positivas o directas*, y las de* $\det(h) = -1$ negativas o inversas*.*

3.3.1. Isometrías en EVME bidimensionales

En esta sección (V, g) será un EVME de dimensión 2.

Proposición 3.18 *Sea $h\colon V \to V$ una isometría con* $\det(h) = 1$*, y sea* O *una orientación en V. Entonces existe un único $\theta \in]0, 2\pi[$ tal que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

en cualquier base ortonormal B positiva de (V, g, O).

La isometría h se dice un **giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$ respecto de la orientación O en V***.*

Demostración: Si escribimos $B = \{v_1, v_2\}$ y

$$h(v_j) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} v_i, \quad j = 1, 2,$$

al ser

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$$

deducimos que

$$\|(a_{11}, a_{21})\| = \|(a_{12}, a_{22})\| = 1, \quad g_0\left((a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})\right) = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1,$$

donde $\| \cdot \|$ y g_0 son la norma y métrica euclidiana clásicas en $\mathbb{R}^2$.

Como $\|(a_{11}, a_{21})\| = 1$, por las propiedades de las funciones trigonométricas existe un único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $a_{11} = \cos\theta$, $a_{21} = \mathrm{sen}\theta$. Despejando arriba deducimos que $a_{12} = -\mathrm{sen}\theta$, $a_{22} = \cos\theta$ como habíamos afirmado. ■

Nótese que si h es un giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$ en V respecto de una orientación O, para todo vector $v \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ el ángulo orientado $\measuredangle_o\big(v, h(v)\big)$ respecto de O coincide con θ. Si no se enfatiza la orientación, el correspondiente ángulo no orientado $\theta \in [0, \pi]$ del giro h se determina a través de la ecuación $\mathrm{Traza}(h) = 2\cos(\theta)$. El elemento geométrico que determina un giro vectorial es su ángulo. Obsérvese que si se elige la orientación contraria a O, el ángulo θ del giro h cambia a $2\pi - \theta$. Además si $h \neq \mathrm{Id}_V$ (esto es, $\theta \in]0, 2\pi[$), entonces 1 no es valor propio de h.

Proposición 3.19 *Sea* $h \colon V \to V$ *una isometría con* $\det(h) = -1$. *Entonces existe una base ortonormal* B *en* (V, g) *en la que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, h *es la* **simetría ortogonal** $\sigma_U^\perp$ **en** (V, g) **respecto de la recta vectorial**

$$U = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V).$$

Demostración: Recordemos que el polinomio característico de h es de la forma

$$p(t) := \det\big(M(h, B) - t\mathrm{I}_2\big) = t^2 - \mathrm{Traza}(h)t + \det(h)$$

para cualquier base B de V, donde

$$\mathrm{Traza}(h) = \mathrm{Traza}\big(M(h, B)\big) \quad \text{y} \quad \det(h) = \det\big(M(h, B)\big)$$

no dependen de la base B. Al ser el término independiente del polinomio $p(t)$ igual a $\det(h) = -1 < 0$, inferimos que $p(t)$ ha de descomponer en los reales. Como además $\det(h)$ es el producto de las raíces de $p(t)$ (valores propios de h) y h es una isometría, esas raíces han de ser justamente 1 y -1. Por el Teorema 1.22, h es un endomorfismo diagonalizable con valores propios 1 y -1, ambos de multiplicidad 1. Elegidos vectores propios *unitarios* (de norma 1) v_1 y v_{-1} para los valores propios 1 y -1, respectivamente, la Proposición 3.16-(iii) garantiza que la base $B = \{v_1, v_{-1}\}$ es ortonormal. Claramente

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de donde h es la simetría ortogonal respecto de la recta vectorial $U = V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V)$; ver Definición 3.10. ■

El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal es la recta vectorial respecto a la cual se simetriza.

3.3.2. Isometrías en EVME tridimensionales

En esta sección (V, g) será un EVME de dimensión 3.

Proposición 3.20 *Si* $h \colon (V, g) \to (V, g)$ *una isometría lineal con* $\det(h) = 1$ *entonces*

$$V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) \neq \{0\}.$$

Además, fijados O *una orientación en* V *y* $v_3 \in V_1$ *vector unitario, existe un único* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tal que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en cualquier base ortonormal positiva B *en* (V, g, O) *que tenga a* v_3 *como tercer vector.*

La isometría h *se dice un* **giro de eje** V_1 **y ángulo** $\theta \in [0, 2\pi[$ **respecto de la orientación** O.

Demostración: Si $h = \mathrm{Id}_V$ el resultado es trivial para cualquier $v_3 \in V_1$ unitario con $\theta = 0$. Supongamos que $h \neq \mathrm{Id}_V$ y veamos que

$$\dim_{\mathbb{R}} V_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = 1.$$

En efecto, si llamamos $V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V)$, como $\det(h) = 1$ de la Proposición 3.16-(v) deducimos que necesariamente $\dim V_{-1} = 0, 2$. Veamos que $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$ en ambos casos:

- Si $\dim V_{-1} = 2$ entonces -1 es raíz al menos doble del polinomio característico $p(t)$ de h, y por tanto éste ha de descomponer sobre $\mathbb{R}$. Como $\det(h) = 1$ es el término independiente de $p(t)$, y por tanto el producto de sus tres raíces, necesariamente $p(t)$ tiene por raíces a -1 doble y 1 simple. En particular $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$.

- Si $\dim V_{-1} = 0$ entonces por la Proposición 3.16-(ii) el único posible valor propio real de h es 1. Como $p(t)$ es de grado impar, y por tanto tiene al menos una raíz real (Teorema de Bolzano), concluimos que necesariamente 1 es raíz de $p(t)$. Si tomamos $v \in V_1$ no nulo y llamamos $U = L(\{v\})$ es claro que $h(U) = U$, y de (24) deducimos que $h(U^\perp) = U^\perp$. Como $h \neq \mathrm{Id}_V$ y la isometría $h|_{U^\perp} \colon U^\perp \to U^\perp$ tiene $\det(h|_{U^\perp}) = 1$ (recordemos que $\det(h) = 1$), inferimos que $h|_{U^\perp}$ es un giro no trivial (ver Proposición 3.18) y no aporta nuevos autovalores a h. Por tanto $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$.

Elijamos $v_3 \in V_1$ unitario. Como arriba, h deja invariante el plano $V_1^\perp$ y $h|_{V_1^\perp} : V_1^\perp \to V_1^\perp$ tiene $\det(h|_{V_1^\perp}) = 1$. Elijamos cualquier base ortonormal ordenada $\{v_1, v_2\}$ de $V_1^\perp$ de forma que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea positiva en (V, O). Llamando O' a la orientación inducida por $\{v_1, v_2\}$ en $V_1^\perp$ (que no depende de la base $\{v_1, v_2\}$ de $V_1^\perp$ elegida en las condiciones anteriores), la Proposición 3.18 nos dice que $h|_{V_1^\perp}$ es un giro de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ en el plano orientado $(V_1^\perp, \mathrm{O}')$. Para la base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V así construida se tiene que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

probando la proposición. ■

Si no se desea enfatizar orientación, el *ángulo no orientado* $\theta \in]0, \pi]$ de un giro $h \colon V \to V$ se determina por la ecuación

$$\mathrm{Traza}(h) = 1 + 2\cos(\theta).$$

Los elementos geométricos que determinan un giro son su eje y su ángulo.

Proposición 3.21 *Si $h \colon (V, g) \to (V, g)$ es una isometría vectorial con $\det(h) = -1$ entonces*

$$V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V) \neq \{\vec{0}\}.$$

Eligiendo $v_3 \in V_{-1}$ unitario solo se dan dos casos:

(i) $V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) \neq \{\vec{0}\}$: *en este caso* $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 2$ *y en cualquier base ortonormal B de (V, g) que tenga a v_3 como tercer vector se tiene que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La isometría h es la **simetría ortogonal $\sigma^{\perp}_{V_1}$ respecto del plano vectorial** *V_1; ver Definición 3.10.*

(II) $V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = \{\vec{0}\}$: *en este caso para cada orientación* O *en V existe un único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en cualquier base ortonormal positiva B en (V, g, O) con v_3 de tercer vector.

La isometría h es la **composición del giro de eje $U = L\{v_3\}$ y ángulo θ respecto a la orientación O, y la simetría ortogonal $\sigma^{\perp}_{U^{\perp}}$**.

Demostración: Como $\det(h) = -1$, de la Proposición 3.16-(v) deducimos que -1 es valor propio de h y podemos elegir $v_3 \in V$ vector propio unitario para el valor propio -1 de h. Llamemos

$$U = L\{v_3\} \subseteq V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V).$$

Como U es invariante por la isometría h, el plano $U^{\perp}$ es invariante por h (ver (24)), y viendo $h|_{U^{\perp}}$ como isometría en $U^{\perp}$ se tiene que $\det(h|_{U^{\perp}}) = 1$. De la Proposición 3.18 surge una dicotomía:

$$h|_{U^{\perp}} = \mathrm{Id}_{U^{\perp}} \quad \text{o} \quad h|_{U^{\perp}} \text{ es un giro no trivial.}$$

Supongamos que $h|_{U^{\perp}} = \mathrm{Id}_{U^{\perp}}$, y por tanto

$$U^{\perp} = V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) \quad \text{y} \quad U = V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V).$$

En este caso h diagonaliza con valores propios -1 y 1 de multiplicidades 1 y 2, respectivamente. Elegida cualquier base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de V_1, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de V en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y h es la simetría ortogonal $\sigma^{\perp}_{V_1}$ respecto del plano vectorial V_1; ver Definición 3.10. Este caso se corresponde con (i).

Supongamos ahora que $h|_{U^{\perp}}$ es un giro no trivial en $U^{\perp}$, en cuyo caso $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 0$. Fijemos una orientación O en V y consideremos cualquier base ortonormal ordenada $\{v_1, v_2\}$ de $(U^{\perp}, g)$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea positiva en (V, O). Llamemos O' a la orientación que $\{v_1, v_2\}$ induce en $U^{\perp}$ y $\theta \in]0, 2\pi[$ al correspondiente ángulo orientado del giro $h|_{U^{\perp}}$ respecto de O'. Entonces, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de V con

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

lo que prueba (ii).

■

El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal repecto de un plano (caso Proposición 3.21-(i)) es el plano vectorial respecto del cual se simetriza.

En el caso Proposición 3.21-(ii) (giro más simetría), $L\{v_3\} = V_{-1}$ si y solo si $\theta \neq \pi$, y si $\theta = \pi$ entonces $h = -\mathrm{Id}_V = V_{-1}$. Los elementos geométricos de un giro más simetría son los mismos que los del giro involucrado.

3.3.3. Clasificación general de isometrías en EVME

Para acabar vamos a estudiar la estructura básica de las isometrías en EVME de dimensión arbitraria. Para ello será fundamental la Proposición 3.16 y el siguiente lema.

Lema 3.22 *Si* (V, g) *un EVME con* $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$ *y* $f\colon V \to V$ *una isometría en* (V, g) *tal que*

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_V) = \{\vec{0}\},$$

entonces existe $U \leq V$ *plano vectorial tal que* $f(U) = U$*. En particular,* $f|_U\colon U \to U$ *es un giro no trivial en* $(U, g|_{U\times U})$*.*

Demostración: Fijemos B base ortonormal en (V, g) y llamemos $A = M(f, B) \in \mathrm{O}(n)$, donde $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Llamemos

$$p(t) = \det(f - t\mathrm{Id}_V) = \det(A - t\mathrm{I}_n)$$

al polinomio característico de f, del que por nuestras hipótesis sabemos no tiene raices reales. Por el Teorema Fundamental del Álgebra existe $a \in \mathbb{C}$ *raíz compleja* de $p(t)$, $a \neq \bar{a}$, y como $p(t)$ tiene coeficientes reales también $\bar{a} \in \mathbb{C}$ es raíz compleja de $p(t)$. Por tanto existe $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $A \cdot z = a \cdot z$ (notación columna), y por tanto $A \cdot \bar{z} = \bar{a} \cdot \bar{z}$. Llamemos

$$u_0 = 2\Re(z) \in \mathbb{R}^n, \quad v_0 = 2\Im(z) \in \mathbb{R}^n,$$

y observemos que $\{u_0, v_0\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$; en efecto, si fuesen linealmente dependientes entonces $z = \mu x$ para ciertos $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y la ecuación $A \cdot z = a \cdot z$ nos diría que $A \cdot x = a \cdot x$, lo que contradice que $a \neq \bar{a}$.

Por tanto $U_0 = L(\{u_0, v_0\})$ es un plano vectorial en $\mathbb{R}^n$. Además

$$A \cdot u_0 = A \cdot (z + \bar{z}) = A \cdot z + A \cdot \bar{z} = a \cdot z + \bar{a} \cdot \bar{z} =$$

$$= 2\big(\Re(a) \cdot \Re(z) - \Im(a)\Im(z)\big) = \Re(a) \cdot u_0 - \Im(a) \cdot v_0 \in U_0,$$

y análogamente

$$A \cdot v_0 = A \cdot \imath(\bar{z} - z) = \imath(A \cdot \bar{z} - A \cdot z) = \imath(\bar{a} \cdot \bar{z} - a \cdot z) =$$

$$= 2\big(\Re(a) \cdot \Im(z) + \Im(a)\Re(z)\big) = \Re(a) \cdot v_0 + \Im(a) \cdot u_0 \in U_0.$$

Lamemos $u, v \in V$ a los únicos vectores tales que $u_B = u_0, v_B = v_0$, y $U = L(\{u, v\})$ al plano que generan. Veamos que $f(U) = U$.

Claramente

$$w \in U \Longleftrightarrow w_B \in U_0.$$

Por tanto si $w = \lambda u + \mu v \in U$ entonces

$$f(w)_B = f(\lambda u + \mu v)_B = \lambda f(u)_B + \mu f(v)_B = \lambda(A \cdot u_B) + \mu(A \cdot v_B) =$$

$$= \lambda(A \cdot u_0) + \mu(A \cdot v_0) \in U_0,$$

esto es, $f(w) \in U$. Esto prueba que $f(U) \subseteq U$, y como $\dim_{\mathbb{R}} f(U) = \dim_{\mathbb{R}} U = 2$ que $f(U) = U$ como deseabamos.

Como f no tiene valores propios, $f|_U\colon U \to U$ es una isometría sin valores propios en el plano vectorial euclídeo $(U, g|_{U\times U})$, y por tanto un giro no trivial (de ángulo distinto de cero respecto a una orientación fijada, o diferente de la identidad). Esto concluye la prueba. ■

Teorema 3.23 *Sea (V, g) un EVME con $\dim_{\mathbb{R}} V = n \geq 1$ y sea $h\colon V \to V$ una isometría en (V, g). Entonces existe una base ortonormal B de (V, g) en la que:*

$$M(h, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{I}_s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\theta_m} \end{array}\right),$$

donde $s, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son enteros tales que $s + k + 2m = n$ y

$$R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -sen(\theta_j) \\ sen(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}, \quad \theta_j \in]0, 2\pi[, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Demostración : Llamemos

$$V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V),\ s = \dim_{\mathbb{R}} V_1, \quad V_{-1} = \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}_V),\ k = \dim_{\mathbb{R}} V_{-1}.$$

También denotemos por

$$W_1 = (V_1 + V_{-1})^{\perp}.$$

De la Proposición 3.16 tenemos que $h(W_1) = W_1$, $\dim_{\mathbb{R}} W_1 = 2m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$h_1\colon W_1 \to W_1, \quad h_1 = h|_{W_1},$$

es una isometría en $(W_1, g|_{W_1 \times W_1})$ sin valores propios. Observemos que

$$V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus W_1,$$

siendo los subespacios en esa suma directa ortogonales dos a dos.

Si $m \geq 1$ el Lema 3.22 puede aplicarse a h_1 y existe $U_1 \leq W_1$ plano vectorial tal que

$$h_1(U_1) = h(U_1) = U_1 \text{ y } h_1|_{U_1} \equiv h|_{U_1} \text{ es un giro no trivial en } (U_1, g|_{U_1 \times U_1}).$$

Si ocurriese que $m - 1 \geq 1$, llamaríamos

$$W_2 = (V_1 + V_{-1} + U_1)^{\perp} = W_1 \cap U_1^{\perp},$$

y de forma análoga comprobaríamos que $h_1(W_2) = W_2$, siendo

$$h_2\colon W_2 \to W_2, \quad h_2 = h_1|_{W_2} = h|_{W_2},$$

una isometría en $(W_2, g|_{W_2 \times W_2})$ sin valores propios. Como en el caso anterior existiría $U_2 \leq W_2$ plano vectorial tal que

$$h_2(U_2) = h(U_2) = U_2 \text{ y } h_2|_{U_2} \equiv h|_{U_2} \text{ es un giro no trivial en } (U_2, g|_{U_2 \times U_2}).$$

Nótese que necesariamente

$$W_1 = U_1 \otimes W_2 = U_1 \oplus U_2 \oplus W_3$$

donde

$$W_3 = (V_1 + V_{-1} + U_1 + U_2)^{\perp} = W_2 \cap U_2^{\perp} = W_1 \cap U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp},$$

siendo los subespacios involucrados en la suma directa anterior ortogonales dos a dos.

Estas ideas explican que, tras un procedimiento inductivo, podemos descomponer W_1 en suma directa por planos vectoriales ortogonales dos a dos

$$W_1 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

de forma que

$$h(U_j) = U_j \text{ y } h|_{U_j} \text{ es un giro no trivial en } (U_j, g|_{U_j \times U_j})$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. En consecuencia,

$$V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus W_1 = V_1 \oplus V_{-1} \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_m,$$

siendo todos los subespacios en la suma directa ortogonales dos a dos.

Elijamos bases ortonormales

$$B_1 \text{ de } (V_1, g|_{V_1 \times V_1}),\ B_{-1} \text{ de } (V_{-1}, g|_{V_{-1} \times V_{-1}}),\ B'_j \text{ de } (U_j, g|_{U_j \times U_j}),\ j = 1, \ldots, m,$$

y llamemos θ_j al ángulo del giro $h|_{U_j}$ en la orientación inducida por B'_j en U_j, $j = 1, \ldots, m$. Definiendo la base ortonormal de (V, g)

$$B = B_1 \cup B_{-1} \cup B'_1 \cup \cdots B'_m,$$

la matriz $M(h, B)$ es la del enunciado. ■

3.4. Ejercicios del Tema 3

1. Caracteriza la igualdad en la desigualdad triangular.

2. Sea (V, g) un EVME y $x, y \in V$. Demostrar la *ley del paralelogramo,*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

y el Teorema de Pitágoras,

$$x, y \text{ son ortogonales } \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

3. Desigualdad de Bessel. Sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un subconjunto ortogonal de vectores no nulos en un EVME (V, g). Probar que dado $x \in V$, se tiene

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)^2}{\|x_i\|^2},$$

y que la igualdad es cierta si y sólo si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)}{\|x_i\|^2} x_i$.

4. Escribe las desigualdades de Schwarz y triangular en los casos particulares de $(\mathbb{R}^n, g_0)$, y en $\mathcal{C}([a, b])$ (funciones continuas en $[a, b]$) con el producto L^2.

5. Prueba que dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

y que la igualdad se da si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$.

6. Demuestra que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es cualquier función continua, entonces

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx,$$

y que la igualdad se da si y sólo si f es constante.

7. Demuestra que si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $|\text{Traza}(A)| \leq \sqrt{n}\, \|A\|$, donde

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2},$$

y la igualdad se da si y sólo si A es un múltiplo de la identidad.

8. Sea U un subespacio vectorial de un EVME (V, g). Prueba que dado $x \in V$, $\pi_U^\perp(x)$ en el único vector de U que minimiza $\|x-u\|$, $\forall u \in U$.

9. Endomorfismo adjunto. Sea (V, g) un EVME y $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$. Definamos el *endomorfismo adjunto* de f respecto a g es el único endomorfismo $\widehat{f} \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$ tal que $g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y))$, $\forall x, y \in V$.

   (a) Probar que $\widehat{f}$ está bien definido y es efectivamente un endomorfismo en V.

(b) Probar que la aplicación $H\colon \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ dada por $H(f) = \widehat{f}$ es un automorfismo de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ con inversa $H^{-1} = H$, y que $H(f \circ h) = H(h) \circ H(f)$, $\forall f, h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$.

(c) Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ se dice *anti-autoadjunto* respecto a g si $\widehat{f} = -f$. Demostrar que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ se escribe como suma directa del subespacio de los endomorfismos autoadjuntos y del subespacio de los endomorfismos anti-autoadjuntos.

10. (Descomposición polar de una matriz). Sea (V, g) un EVME y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ un *automorfismo* de V. Consideremos el endomorfismo adjunto $\widehat{f}\colon V \to V$ de f respecto de g, definido mediante la expresión $g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y))$, $\forall x, y \in V$.

    (a) Prueba que $f \circ \widehat{f}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V, g), con todos sus valores propios positivos.

    (b) Encuentra un endomorfismo autoadjunto h de (V, g) con todos sus valores propios positivos tal que $h \circ h = f \circ \widehat{f}$.

    (c) Prueba que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de (V, g).

    (d) Aplica lo anterior para probar que toda matriz $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ puede escribirse como $A = P \cdot R$ donde $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene todos sus valores propios positivos y $R \in \mathrm{O}(n)$.

11. Sea (V, g) un EVME de dimensión n y $U \leq V$ con $0 < \dim U < n$. Probar que para cada $f \in \mathrm{Iso}(U, g|_{U\times U})$, existe $F \in \mathrm{Iso}(V, g)$ tal que $F(x) = f(x)$ $\forall x \in U$. Demostrar que F siempre puede tomarse como una rotación.

12. Sea $(V, g, [B])$ un EVME tridimensional orientado. Probar que dados $x, y \in V$, su producto vectorial $x \times y$ es perpendicular a x y a y, y que si x, y son unitarios y perpendiculares, entonces $\{x, y, x \times y\}$ es una base ortonormal de (V, g) inducidendo en V la misma orientación que B.

13. Sea (V, g) un EVME tridimensional con una orientación $[B]$, inducida por B base de V. Para cada $x \in V - \{0\}$ se define $F_x \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ mediante $F_x(y) = x \times y$, $\forall y \in V$, donde el producto vectorial $\times$ es el asociado a la orientación $[B]$.

    (a) Caracterizar $\mathrm{Ker}(F_x)$ e $\mathrm{Im}(F_x)$.

    (b) Dado $z \in \mathrm{Im}(F_x)$, ¿existe más de un vector $y \in V$ tal que $F_x(y) = z$?

    (c) Demostrar que el endomorfismo de V adjunto de F_x respecto de g (en el sentido del Ejercicio 9) es $F_{-x} = -F_x$. Por tanto, F_x es anti-autoadjunto.

14. Sea V un plano vectorial en $\mathbb{R}^3$, y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$. Demostrar que para toda base $\{u, v\}$ de V se cumple $f(u) \times f(v) = (\det f) u \times v$. En particular, si $\{u, v\}$ se toma ortonormal respecto de la restricción a $V \times V$ del producto escalar usual, deducir que $|\det f| = \|f(u) \times f(v)\|$.

15. Dentro de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tenemos los subconjuntos $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ y $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

    (a) Probar que $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ son subgrupos de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ y que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ es normal en $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ se llama el *grupo especial lineal*).

    (b) Al grupo $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ se le llama *grupo especial ortogonal*. Probar que $\mathrm{SO}(n)$ es normal en $\mathrm{O}(n)$.

De ahora en adelante, (V, g) será un EVME.

(a) Probar que dos bases ordenadas ortonormales de (V, g) representan la misma orientación de V si y sólo si $M(1_V, B', B) \in \mathrm{SO}(n)$.

(b) Sea $\mathrm{Iso}^+(V, g) = \{f \in \mathrm{Iso}(V, g) \mid f$ conserva la orientación$\}$. Probar que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ conserva la orientación si y sólo si $\det f = 1$, que $\mathrm{Iso}^+(V, g)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Iso}(V, g)$.

(c) Sea B una base ordenada ortonormal de (V, g). Demostrar que la aplicación $F_B \colon \mathrm{Iso}^+(V, g) \to \mathrm{SO}(n)$ dada por $F_B(f) = M(f, B)$ es un isomorfismo de grupos.

16. Sean U_1, U_2 dos rectas vectoriales en un EVME bidimensional (V, g). Llamemos S_i a la simetría respecto de U_i, $i = 1, 2$. Probar que S_1 y S_2 conmutan si y sólo si $U_1 = U_2$ ó $U_1 = U_2^{\perp}$.

17. Sean U_1, U_2 dos planos vectoriales en un EVME tridimensional (V, g). Llamemos S_i a la simetría respecto de U_i, $i = 1, 2$. Probar que S_1 y S_2 conmutan si y sólo si $U_1 = U_2$ ó $U_1^{\perp} \subseteq U_2$ (indicación: probar que S_2 lleva $U_1^{\perp}$ en sí mismo).

18. Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo autoadjunto respecto al producto escalar o métrica usual g_0, $f \neq \pm 1_{\mathbb{R}^2}$. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f \circ f = 0$, entonces $f = 0$.

(b) Si $\|f(u) - v\|^2 = \|f(v) - u\|^2 \ \forall u, v \in \mathbb{R}^2$, entonces f es la simetría respecto de una recta vectorial.

(c) Si existe una base ortonormal $\{x_1, x_2\}$ de $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ tal que $g_0\big(f(x_i), x_i\big) = 0$, $i = 1, 2$, entonces f es la simetría respecto de una recta vectorial.

19. Probar que el endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la bases usual es

$$M(f, B_u) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

es una isometría de $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ en sí mismo (producto escalar usual), y clasificarla.

20. Sea (V^3, g) un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión 3, y L, U la recta y el plano vectoriales dados en coordenadas respecto de una base ortonormal B, por

$$L = L(\{(1, 2, -1)\}), \quad U \equiv 3x - y + z = 0.$$

Encontrar las expresiones matriciales respecto de B de las reflexiones respecto de esos subespacios vectoriales.

21. Estudiar las isometrías de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar o métrica usual g_0 que respecto de la base usual tienen una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

(h) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

(i) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(j) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(k) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

22. Encontrar las matrices de las siguientes isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, g_0 métrica usual, respecto de la base usual:

    (a) La simetría respecto del plano $\Pi \equiv 4y - 3z = 0$.

    (b) La simetría respecto de la recta $L \equiv 7x + 4y + 4z = 0,\ 4x + y + 8z = 0$.

    (c) El giro de eje $L = L(\{(1, 0, 1)\})$ y ángulo $\pi/2$.

    (d) El giro de eje $L = L(\{(1, 1, 1\})$ y ángulo $\pi/2$.

    (e) El giro de eje $L = L(\{(1, 0, 1\})$ y ángulo $\pi/3$.

    (f) El giro de eje $L = L(\{(1, 1, 1)\})$ y ángulo $\pi/3$.

23. Sean f, h dos isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, g_0 métrica usual. Si f es la simetría respecto de un plano vectorial Π, demostrar que $h \circ f \circ h^{-1}$ es la simetría respecto de $h(\Pi)$.

24. Sean f, h dos isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, g_0 métrica usual. Si f es un giro de eje una recta vectorial L y ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$, demostrar que $h \circ f \circ h^{-1}$ es un giro de eje $h(L)$ y angulo θ.

25. Clasificar todas las isometrías f de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, g_0 métrica usual, que verifican cada una de las siguientes condiciones:

    (a) $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^3}$.

    (b) $f \circ f = S_\Pi$, siendo S_Π la simetría respecto de un plano vectorial Π.

    (c) $f \circ f = S_L$, siendo S_L la simetría respecto de una recta vectorial L.

26. Sea f una isometría de $(\mathbb{R}^2, g_0)$, g_0 métrica usual. Demostrar que son equivalentes:

    (a) f es un giro de ángulo θ, $|\theta| \leq \pi/3$.

    (b) $\|f(v) - v\| \leq \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

27. Sea f una isometría de $(\mathbb{R}^3, g_0)$, g_0 métrica usual. Demostrar que son equivalentes:

    (a) f es un giro de ángulo θ, $|\theta| < \pi/2$.

    (b) $\|f(v) - v\| < \sqrt{2}\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$.