Tema 3. ESPACIO DE PROBABILIDAD: DEFINICIÓN AXIOMÁTICA Y PROPIEDADES BÁSICAS DE LA PROBABILIDAD

En este tema se va a estudiar lo que es un espacio de probabilidad para lo cual habrá que definir previamente lo que es la probabilidad. En particular se van a estudiar la definición clásica, frecuentista y axiomática de la probabilidad así como sus propiedades básicas. Previo a ello se van a introducir una serie de conceptos necesarios para el tema.

1. Conceptos previos.
2. Definición axiomática de probabilidad.
3. Propiedades básicas de la probabilidad.

1. Conceptos previos

- Experimento aleatorio

Se dice que un **experimento** o **prueba** es una acción que se realiza con el propósito de recoger algún tipo de observación sobre los resultados.

Los experimentos se pueden clasificar en:

- Determinístico: al repetir el experimento en idénticas condiciones, siempre presenta el mismo resultado. En estos fenómenos es posible saber el resultado final si se conocen el estado inicial y las condiciones de realización.
- Aleatorio: cuando su resultado es impredecible, es decir, aunque el experimento se repita de la misma forma y bajo idénticas condiciones puede dar lugar a diferentes resultados.

Esto lleva a plantear el problema de la medida de la incertidumbre que se dan en estos fenómenos y el interés en evaluarla numéricamente. El cálculo de probabilidad se encarga de ello.

- Suceso elemental
  Cada posible resultado que pueda observarse tras la realización de un experimento aleatorio y que no pueda descomponerse en otros más simples.
- Espacio muestral ($\boldsymbol{\Omega}$)
  Conjunto formado por todos los posibles sucesos elementales de un experimento aleatorio.
  El espacio muestral puede ser:
  - Finito: Se sabe cuántos sucesos elementales lo componen. Por ejemplo, $\Omega = \{A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_5,\, A_6\}$.
  - Infinito numerable: Está compuesto por infinitos sucesos elementales que se corresponden con los números naturales.
  - Infinito no numerable: Está compuesto por infinitos sucesos elementales que no se corresponden con los números naturales.

- Suceso
  Es cualquier resultado del experimento. Está compuesto por uno o más sucesos elementales.
- Suceso seguro (Ω)
  Es el formado por todos los resultados posibles del experimento, es decir, el propio espacio muestral Ω.
- Suceso imposible ($\emptyset$)
  Es aquel que no contiene ningún resultado, es decir, el conjunto vacío $\emptyset$.

Ejemplo

Se considera el experimento del lanzamiento de un dado y la observación del número que aparece. Indica el espacio muestral. Indica un suceso elemental, otro compuesto y uno imposible.

Operaciones con sucesos

- Unión ($A \cup B$)
  Si A y B son dos sucesos, el suceso unión $A \cup B$ es el conjunto de todos los sucesos elementales de A y los de B.

1. Intersección $(A \cap B)$
   Si A y B son dos sucesos, el suceso intersección $A \cap B$ es el formado por todos los sucesos elementales que pertenecen simultáneamente a A y B.
2. Diferencia $(A - B)$: Si A y B son dos sucesos, el suceso diferencia es el formado por todos los sucesos elementales de A que no son sucesos de B. Se tiene, por tanto, que $A - B = A - A \cap B = A \cap \bar{B}$.
3. Complementación $(\bar{A}$ o $A^c)$: Dado un suceso A, se define el complementario de dicho suceso, como el suceso formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles** si al ocurrir uno no puede ocurrir el otro, es decir $A \cap B = \emptyset$.
Si A y B son dos sucesos, se dice que el suceso A **está contenido** en el suceso B, y se denota por $A \subseteq B$, si todos los sucesos elementales de A también están en B.

Propiedades: Con las operaciones anteriores, puede demostrarse que se verifican las siguientes propiedades.

	$\bar{\emptyset} = \Omega$	$\bar{\Omega} = \emptyset$
	Unión	Intersección
	$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Leyes de De Morgan	$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Ejemplo

Sean A, B, C tres sucesos de un espacio muestral Ω. Expresar los siguientes sucesos en términos de ellos:

1. *Los tres sucesos ocurren.*
2. *No ocurre ninguno de los tres.*
3. *Exactamente ocurre uno.*
4. *Exactamente ocurren dos.*
5. *Ocurren A y B o C, pero no ambos.*
6. *Ocurre B o C pero no A.*

- Partes de un conjunto Ω ($\mathcal{P}(\Omega)$)
  Es el conjunto formado por todos los subconjuntos de Ω:
  $\mathcal{P}(\Omega) = \{A/A \subseteq \Omega\}$ o, equivalentemente, $A \in \mathcal{P}(\Omega) \Leftrightarrow A \subseteq \Omega$.
- Clase de conjuntos de Ω
  Cualquier subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ se denomina una clase de conjuntos de Ω:
  $$C \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$
  Una clase de conjuntos C es cerrada para una determinada operación (unión, intersección,...) si al efectuar esa operación con elementos de C, el conjunto resultante está también en C.

- Álgebra de conjuntos de Ω

Una clase no vacía de conjuntos de Ω $(C \subseteq \mathcal{P}(\Omega), C \neq \emptyset)$ tiene estructura de álgebra si:

- Es cerrada para uniones finitas: $A_1, ..., A_n \in C \Rightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i \in C$.
- Es cerrada para la formación de complementarios: $A \in C \Rightarrow \bar{A} \in C$.

Propiedades: Si $C \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un álgebra de conjuntos de Ω, se tiene:

- Es cerrada para intersecciones finitas: $A_1, ..., A_n \in C \Rightarrow \cap_{i=1}^{n} A_i \in C$.
- $\Omega \in C$, $\emptyset \in C$.
- Es cerrada para diferencias: $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A_1 - A_2 \in C$.

Ejemplo

Consideremos el espacio muestral $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ *y la clase* $C = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$. *Probar que* C *es un álgebra y construye la menor álgebra que contenga a los sucesos* $\{a\}$ *y* $\{b, c\}$.

- $\sigma-$Álgebra de conjuntos de Ω

  Una clase no vacía de conjuntos de Ω $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{A} \neq \emptyset)$ tiene estructura de $\sigma-$álgebra si:

  - Es cerrada para uniones numerables: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
  - Es cerrada para la formación de complementarios: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$.

  Propiedades: Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un $\sigma-$álgebra de conjuntos de Ω, se tiene:

  - Es cerrada para intersecciones finitas: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
  - $\Omega \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  - Es un álgebra, es decir, es cerrada para uniones e intersecciones finitas y para diferencias.

- $(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

  Todo par $(\Omega, \mathcal{A})$ formado por un conjunto arbitrario y una clase $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ con estructura de $\sigma-$álgebra se denomina un **espacio medible**.

Por lo tanto, un par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde Ω es el espacio muestral asociado a un experimento y $\mathcal{A}$ es una clase de subconjuntos de Ω con estructura de $\sigma-$álgebra, que contiene a todos los sucesos de interés en el experimento, es un conjunto medible y tiene sentido cuantificar la incertidumbre acerca de la posibilidad de ocurrencia de cada suceso mediante una medida, la **probabilidad**.

2. Definición axiomática de probabilidad

Definición clásica de probabilidad

Sea un experimento aleatorio cuyo correspondiente espacio muestral es finito, $\Omega = \{A_1, ..., A_n\}$, y se cumple el principio de la razón insuficiente, es decir, no hay razón para suponer que cualquier suceso elemental tiene más posibilidad de aparecer en cada realización del experimento que cualquier otro.
En este caso, la probabilidad de cualquier suceso $B = \{A_{i1}, ..., A_{im}\}$ se define de la siguiente forma:

$$P : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \to \mathbb{R}$$

$$B \to P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso } B}{\text{nº total de casos posibles en } \Omega} = \frac{m}{n}.$$

Para usar esta definición de probabilidad es necesario conocer, antes de realizar el experimento aleatorio, el espacio muestral y el número de resultados o sucesos elementales que forman parte del suceso.

Propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ entonces $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $A_1, ..., A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$, es cualquier sucesión finita numerable de sucesos incompatibles, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ entonces

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + \cdots + P(A_k).$$

Ejemplo

En una caja hay 5 bolas, 3 son de color rojo, 1 de color blanco y otra de color azul. Si se extrae una bola al azar,

a) *¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja? ¿Y blanca o azul?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída no sea roja?*

Definición frecuentista de probabilidad

Sea un experimento aleatorio con espacio muestral arbitrario, Ω, y que se puede repetir indefinidamente bajo idénticas condiciones.

Definición

Se define la **frecuencia relativa** *de un suceso $A \subseteq \Omega$ en N repeticiones, bajo idénticas condiciones, como la fracción:*

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$$

donde N_A es el número de veces que ocurre A en las N repeticiones del experimento.

En este caso, la probabilidad de cualquier suceso A se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) = \lim_{N \to \infty} f_N(A). \end{aligned}$$

Propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ entonces $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)$, es cualquier sucesión numerable de sucesos incompatibles, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Ejemplo

He lanzado una moneda una serie de veces y he obtenido los siguientes resultados:

nº de lanzamientos	*10*	*100*	*1000*	*10000*
nº de caras	*6*	*47*	*517*	*4986*

Determina las frecuencias relativas del suceso $A = \{\text{salir cara}\}$ y define, a partir de ellas, su probabilidad.

Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov)

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se define la probabilidad como una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que verifica los siguientes axiomas:

1. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, es cualquier sucesión infinita numerable de sucesos incompatibles, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ entonces
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Nota: La definición axiomática de la probabilidad generaliza las dos definiciones anteriores ya que ambas cumplen los tres axiomas considerando como $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

A $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ se le denomina **espacio de probabilidad** y $P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, se interpreta como la probabilidad de que ocurra el suceso A.

3. Propiedades básicas de la probabilidad

i) $P(\emptyset)$=0.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

iii) Si A y $B \in \mathcal{A}$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

- Si $A \subset B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$ y $P(A) \leq P(B)$.

iv) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $0 \leq P(A) \leq 1$.

v) Regla de adición (o Teorema de la suma): Si A y $B \in \mathcal{A}$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- Si A y B son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, (la función P es subaditiva).

vi) Subaditividad finita: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
En general, sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

vii) Subaditividad numerable: Dada una colección numerable de sucesos $A_i\,_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

viii) Principio de inclusión-exclusión: $\forall A_1, A_2 \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1<i_2}}^{n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1<i_2<i_3}}^{n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

La propiedad anterior para tres sucesos sería: Si $A, B, C \in \mathcal{A}$ entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

ix) Desigualdad de Boole. Dados $A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$P(A \cup B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$$

.

Ejemplo

Se sabe que la probabilidad de que ocurra el suceso A es de 0.6, la de que ocurra el suceso B es de 0.7 y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es de 0.4. Se pide calcular:

a) *La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos.*
b) *La probabilidad de no ocurra el suceso A.*
c) *La probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el A.*