Convocatoria extraordinaria - Geometría II
1^o Grado en Matemáticas
27 de junio 2019

1) (2,5 PUNTOS) En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la forma cuadrática dada por

$$\omega(A) = \text{traza}(A)^2 - 2\det(A)\,, \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

a) Calcula $\omega\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y la matriz de la métrica g_ω en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

b) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_ω.

c) Encuentra una base ortonormal de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g_u)$ que diagonalice g_ω, con $g_u(A, C) = \text{traza}(A \cdot C^t)$ la métrica usual de las matrices.

2) (2 PUNTOS) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual se considera un cubo de arista 1. Calcula el ángulo que forman las diagonales de dos caras adyacentes que concurren en un mismo vértice.

3) (3 PUNTOS) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f un endomorfismo de V que verifica

$$g(u, f(u)) = 0\,, \forall u \in V.$$

a) Prueba que la condición anterior es equivalente a

$$g(f(u), v) = -g(u, f(v))\,, \forall u, v \in V.$$

b) Prueba que f no tiene valores propios reales distintos de 0.

c) Prueba que si f es además un isomorfismo entonces $\dim(V)$ debe ser par.

d) Prueba que si $\dim(V) = 3$ existe B una base ortonormal de (V, g) y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) (2,5 PUNTOS) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ y h es el giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje OY. Clasifica la isometría resultante y encuentra una base ortonormal en la que la isometría adopte su forma canónica.