Métodos Numéricos I

Tema 3:Interpolación

Parte 2: El error de interpolación

Miguel A. Piñar
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

4 de mayo de 2022

Contenidos

El error de interpolación

Teorema

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ y sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$. Sea $p_n(x)$ el polinomio de interpolación en los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Ejemplo

Ejemplo

Calcule el error cometido al estimar $f(8.4)$, usando los datos de interpolación $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, y $f(8.7) = 18.82091$, si los datos provienen de la función $f(t) = t \ln t$.

Ejemplo

Ejemplo

Calcule el error cometido al estimar $f(8.4)$, usando los datos de interpolación $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, y $f(8.7) = 18.82091$, si los datos provienen de la función $f(t) = t\,\ln\,t$.

En este caso, $x = 8.4$, $x_0 = 8.3$, $x_1 = 8.6$, $x_2 = 8.7$, luego podemos tomar el intervalo $[8.3, 8.7]$, y $n = 2$. Además, $f \in \mathcal{C}^3[8.3, 8.7]$. Así, existe $\xi \in [8.3, 8.7]$ tal que

$$e(8.4) = \frac{f^{(III)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^{n}(8.4 - x_i).$$

Ejemplo

Calcule el error cometido al estimar $f(8.4)$, usando los datos de interpolación $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, y $f(8.7) = 18.82091$, si los datos provienen de la función $f(t) = t \ln t$.

En este caso, $x = 8.4$, $x_0 = 8.3$, $x_1 = 8.6$, $x_2 = 8.7$, luego podemos tomar el intervalo $[8.3, 8.7]$, y $n = 2$. Además, $f \in \mathcal{C}^3[8.3, 8.7]$. Así, existe $\xi \in [8.3, 8.7]$ tal que

$$e(8.4) = \frac{f^{(III)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^{n} (8.4 - x_i).$$

Observemos que

$$f^{(III)}(t) = -\frac{1}{t^2}, \Rightarrow |f^{(III)}(\xi)| < \frac{1}{8.3^2} = 0.0145159.$$

De este modo,

$$|e(8.4)| < \frac{0.0145159}{3!}|(8.4-8.3)(8.4-8.6)(8.4-8.7)|,$$

De este modo,

$$|e(8.4)| < \frac{0.0145159}{3!}|(8.4-8.3)(8.4-8.6)(8.4-8.7)|,$$

$$|e(8.4)| < 0.0000145159,$$

Consideremos la función

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

dicha función es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y la función y sus derivadas están acotadas en todo $C\mathbb{R}$.
Vamos a dividir el intervalo $[-5, 5]$ en n partes iguales considerando los puntos

$$x_k = -5 + k\frac{10}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Llamamos $p_n(x)$ al polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos x_k con $k = 0, 1, \ldots, n$

El ejemplo de Runge

Consideremos la función

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

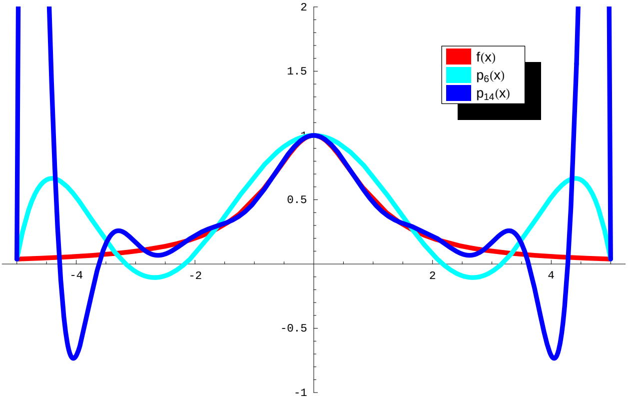
dicha función es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y la función y sus derivadas están acotadas en todo $C\mathbb{R}$.
Vamos a dividir el intervalo $[-5, 5]$ en n partes iguales considerando los puntos

$$x_k = -5 + k\frac{10}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Llamamos $p_n(x)$ al polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos x_k con $k = 0, 1, \ldots, n$

¿Que ocurre cuando n tiende a infinito?

El ejemplo de Runge



Clickbait is getting weird

Polinomios de Chebyshev

Partiendo de la fórmula del coseno para el ángulo suma, tenemos que para $\theta \in [0, \pi]$

$$cos((m+n)\theta) = cos(m\theta)cos(n\theta) - sen(m\theta)sen(n\theta)$$
$$cos((m-n)\theta) = cos(m\theta)cos(n\theta) + sen(m\theta)sen(n\theta)$$

De la suma de las ecuaciones anteriores, resulta

$$cos((m+n)\theta) + cos((m-n)\theta) = 2cos(m\theta)cos(n\theta);$$

Haciendo $m = 1$, se tiene

$$cos((n+1)\theta) + cos((n-1)\theta) = 2cos(\theta)cos(n\theta),$$

Sustituyendo ahora $x = cos(\theta)$, definimos

$$T_n(x) = cos(n\theta)$$

entonces los $T_n(x)$ satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{para } n \geq 1$$

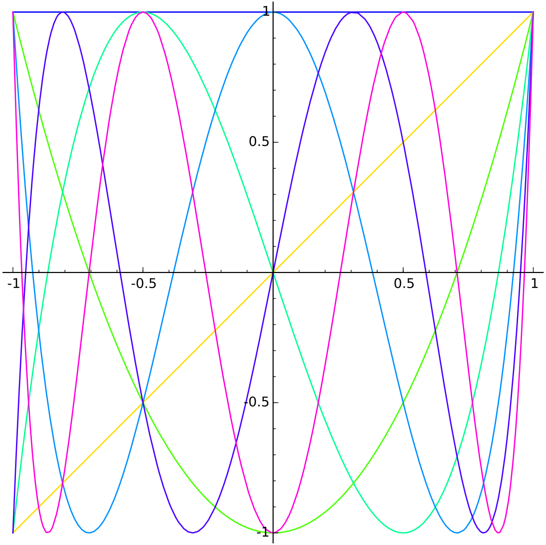
Tomando $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$, obtenemos así los polinomios de la forma $T_n(x)$, con variable x y grado n.
Estos polinomios son conocidos como polinomios de Chebyshev de primera especie y verifican

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots \qquad |T_n(x)| \leqslant 1, \forall x \in [-1, 1]$$

Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894)

Trascripciones alternativas:

1. Inglés: Chebychev, Chebysheff, Chebyshov
2. Francés: Tchebychev, Tchebycheff
3. Alemán: Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff.



1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

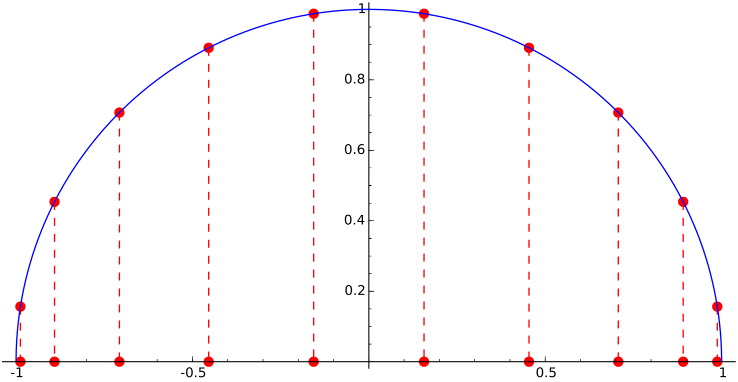
Ceros de los polinomios de Chebyshev

Proposición

El polinomio de Chebyshev de grado n tiene exactamente n ceros reales, distintos y contenidos en el intervalo $[-1, 1]$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Ceros de los polinomios de Chebyshev



Ceros de los polinomios de Chebyshev

Si tomamos como puntos de interpolación los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ en el intervalo $[-1,1]$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

entonces

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

y por tanto, si la derivada $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M \ \forall x \in [-1,1]$, se tiene

$$|e_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

$$\leqslant \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!2^n} \leqslant \frac{M}{(n+1)!2^n} \longrightarrow 0$$

Ejemplo de Runge con ceros de Chebyshev