Álgebra Básica (Primer parcial - Soluciones, Tema 1) Grupo D
16-11-2021

APELLIDOS NOMBRE

DNI FIRMA

Instrucciones. Durante la realización del examen se podrá usar exclusivamente material cuya única función sea la escritura. Hay que entregar **cada ejercicio por separado**. Habrán de dejarse encima de la mesa con sus hojas ordenadas comenzando por los enunciados.
Se recomienda leer primeramente los enunciados completos y abordar los apartados comenzando por los que parezcan más asequibles.

Ejercicio 1. (10 puntos) Conteste razonadamente a los siguientes apartados.

1. (2,5 puntos) ¿Qué les tiene que ocurrir a los conjuntos A y B para que $A \cup (B \setminus A) = B$? Dé un ejemplo sencillo en que dicha igualdad no se verifique.

2. (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $f(m) = m^2$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. ¿Existe una aplicación $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$?

3. (2,5 puntos) Consideremos la siguiente relación $\mathscr{R}$ en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x \equiv x' \pmod 2 \quad \wedge \quad y \equiv y' \pmod 3.$$

Pruebe que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y describa el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathscr{R}$, especificando su cardinal.

4. (2,5 puntos) Sean X e Y conjuntos y consideremos la aplicación:

$$\Phi : \mathscr{P}(X \cup Y) \longrightarrow \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y), \quad \Phi(A) := (A \cap X, A \cap Y) \quad \forall A \in \mathscr{P}(X \cup Y).$$

Pruebe que Φ es inyectiva y demuestre que

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \{(B, C) \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y) \mid B \cap Y = C \cap X\}.$$

Concluya que Φ es sobreyectiva si y sólo si $X \cap Y = \emptyset$.

Solución.-

1. Si $A \cup (B \setminus A) = B$, puesto que $A \subset A \cup (B \setminus A)$, se deberá cumplir que $A \subset B$.

De hecho también es cierto en el otro sentido, es decir, si $A \subset B$ entonces se tiene la igualdad $A \cup (B \setminus A) = B$. Veámoslo por doble inclusión:

-) $A \cup (B \setminus A) \subset B \cup (B \setminus A) = B$.

-) Si $x \in B$, entonces o bien $x \in A$ o bien $x \notin A$, pero en este último caso $x \in B \setminus A$. Por tanto $B \subset A \cup (B \setminus A)$.

2. Si existiera una aplicación $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, entonces f sería inyectiva, ya que:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Longrightarrow x = y,$$

pero sabemos que f no es inyectiva, pues por ejemplo $f(1) = f(-1)$. Así pues no existe ninguna aplicación $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

3. Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de quivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es muy fácil sabiendo que las congruencias módulo un número entero son relaciones de equivalencia en $\mathbb{Z}$:

Propiedad reflexiva: Para todo $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se tiene que $x \equiv x \pmod 2$ y $y \equiv y \pmod 3$, y por tanto $(x, y)\mathscr{R}(x, y)$.

Propiedad simétrica: Si $(x, y)\mathscr{R}(x', y')$, entonces $x \equiv x' \pmod 2$ e $y \equiv y' \pmod 3$, de donde $x' \equiv x \pmod 2$ e $y' \equiv y \pmod 3$, y por tanto $(x', y')\mathscr{R}(x, y)$.

Propiedad transitiva: Si $(x, y)\mathscr{R}(x', y')$ y $(x', y')\mathscr{R}(x'', y'')$, entonces por una parte $x \equiv x' \pmod 2$ y $x' \equiv x'' \pmod 2$, de donde deducimos que $x \equiv x'' \pmod 2$. Por otra parte y de modo completamente similar deducimos que $y \equiv y'' \pmod 2$ y por tanto concluimos que $(x, y)\mathscr{R}(x'', y'')$.

Denotemos por $\overline{(x, y)}$ la clase de equivalencia de cada $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y recordeemos que $x + \mathbb{Z}2$ y $x + \mathbb{Z}3$ son las clases de equivalencia de cada $x \in \mathbb{Z}$ con respecto a la congruencia módulo 2 y a la congruencia módulo 3 respectivamente.

La siguiente igualdad es fácil de probar (se deja como ejercicio): $\overline{(x, y)} = (x + \mathbb{Z}2) \times (y + \mathbb{Z}3)$.

Por tanto las clases de equivalencia respecto de $\mathscr{R}$ serán exactamente los productos cartesianos de cada clase de equivalencia respecto de la congruencia módulo 2, i.e. de cada elemento del conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$, por cada clase de equivalencia respecto de la congruencia módulo 3, i.e. de cada elemento del conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$. Así pues, las clases de equivalencia respecto de $\mathscr{R}$ serán:

$$\overline{(0,0)} = (0 + \mathbb{Z}2) \times (0 + \mathbb{Z}3),\ \overline{(0,1)} = (0 + \mathbb{Z}2) \times (1 + \mathbb{Z}3),\ \overline{(0,2)} = (0 + \mathbb{Z}2) \times (2 + \mathbb{Z}3),$$

$$\overline{(1,0)} = (1 + \mathbb{Z}2) \times (0 + \mathbb{Z}3),\ \overline{(1,1)} = (1 + \mathbb{Z}2) \times (1 + \mathbb{Z}3),\ \overline{(1,2)} = (1 + \mathbb{Z}2) \times (2 + \mathbb{Z}3),$$

y en particular $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathscr{R}$ tendrá 6 elementos.

4. Sean $A, B \in \mathscr{P}(X \cup Y)$ y supongamos que $\Phi(A) = \Phi(B)$. Entonces $(A \cap X, A \cap Y) = (B \cap X, B \cap Y)$, o lo que es lo mismo: $A \cap X = B \cap X$ y $A \cap Y = B \cap Y$.

Ahora bien, como $A, B \subset X \cup Y$, se tiene:

$$A = A \cap (X \cup Y) = (A \cap X) \cup (A \cap Y) = (B \cap X) \cup (B \cap Y) = B \cap (X \cup Y) = B,$$

y por tanto Φ es inyectiva.

Probemos $\mathrm{Im}(\Phi) = \{(B, C) \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y) \mid B \cap Y = C \cap X\}$ por doble inclusión:

($\subset$): Si $(B, C) \in \mathrm{Im}(\Phi)$, entonces existe $A \in \mathscr{P}(X \cup Y)$ tal que $(B, C) = \Phi(A) = (A \cap X, A \cap Y)$ y por tanto

$$B \cap Y = (A \cap X) \cap Y = (A \cap Y) \cap X = C \cap X.$$

($\supset$): Sea $(B,C) \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$ con $B \cap Y = C \cap X$. Veamos que $(B,C) = \Phi(A)$ con $A = B \cup C$:

$$\Phi(A) = (A \cap X, A \cap Y) = ((B \cup C) \cap X, (B \cup C) \cap Y) =$$
$$((B \cap X) \cup (C \cap X), (B \cap Y) \cup (C \cap Y) = (B \cup (C \cap X), (B \cap Y) \cup C) =$$
$$(B \cup (B \cap Y), (C \cap X) \cup C) = (B, C),$$

y por tanto $(B,C) \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

Probemos ahora que Φ es sobreyectiva si y sólo si $X \cap Y = \emptyset$.

Si $X \cap Y = \emptyset$, entonces para todo $(B,C) \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$, se tendrá que $B \cap Y = \emptyset = C \cap X$, y por tanto, por lo probado anteriormente, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$, es decir, Φ es sobreyectiva.

Supongamos ahora Φ es sobreyectiva. En particular el par $(X, \emptyset)$ tendrá que pertenecer a la imagen de Φ, pero entonces, por lo probado antes, deberá tenerse $X \cap Y = \emptyset \cap X = \emptyset$.

APELLIDOS **NOMBRE**

DNI **FIRMA**

Instrucciones. Durante la realización del examen se podrá usar exclusivamente material cuya única función sea la escritura. Hay que entregar **cada ejercicio por separado**. Habrán de dejarse encima de la mesa ocupada con sus hojas ordenadas comenzando por los enunciados. Se recomienda leer primeramente los enunciados completos y abordar los apartados comenzando por los que parezcan más asequibles.

Ejercicio 2. (10 puntos) Conteste razonadamente a los siguientes apartados.

1. (3 puntos) Consideremos las siguientes permutaciones de $\mathbb{S}_7$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Obtenga la descomposición de dichas permutaciones como producto de ciclos disjuntos. Exprese α como producto de transposiciones. ¿Cuál es el orden y el signo de α?
(ii) En caso de que exista una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_7$ tal que $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$, encuéntrela.
(iii) En caso de que exista una permutación $\tau \in \mathbb{S}_7$ tal que $\gamma = \tau\alpha\tau^{-1}$, encuéntrela.

2. (3 puntos) Sea G un grupo, cuya operación la notaremos multiplicativamente. Para cada $g \in G$ definimos la "aplicación conjugación por g" de la siguiente forma:

$$c_g : G \to G, \quad c_g(x) := gxg^{-1} \quad \forall x \in G.$$

(i) Pruebe que c_g es un homomorfismo de grupos (y por tanto un endomorfismo de G).
(ii) Pruebe que dados $g, g' \in G$, $c_{gg'} = c_g \circ c_{g'}$.
(iii) Pruebe que c_g es un automorfismo de G.

3. (2 puntos) Calcule todos los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$ en el grupo de permutaciones $\mathbb{S}_7$ y especifique cuáles son inyectivos.

4. (2 puntos) Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos, que notaremos multiplicativamente.
(i) Dado un subgrupo H' de G', demuestre que $H := f^{-1}(H')$ es un subgrupo de G.
(ii) Demuestre también que si H' es normal en G', entonces H es normal en G, y que en este caso para cada clase $gH \in G/H$ la expresión

$$\varphi(gH) := f(g)H'$$

está bien definida y que la aplicación resultante $\varphi : G/H \to G'/H'$ es un homomorfismo de grupos.

Solución.-

1.

(i) $\alpha = (2\ 5)(3\ 6\ 7) = (2\ 5)(3\ 6)(6\ 7)$, $\beta = (1\ 2\ 7)(3\ 6)$, $\gamma = (1\ 6\ 5)(2\ 3\ 7)$.

El orden de α es el m.c.m. de 2 y 3, es decir 6. El signo de α es -1, pues se expresa como producto de tres transposiciones.

(ii) Como el tipo de la descomposición de ciclos disjuntos de α y de β es el mismo, entonces sabemos que existirá una permutación σ tal que $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

Para calcularla, basta que tengamos en cuenta que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(2)\ \sigma(5))(\sigma(3)\ \sigma(6)\ \sigma(7))$, por lo que podemos tomar: $\sigma(2) = 3$, $\sigma(5) = 6$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(6) = 2$ y $\sigma(7) = 7$, pero debemos completar aún con los valores que faltan: $\sigma(1)$ y $\sigma(4)$. Para que σ sea biyectiva, podemos tomar $\sigma(1) = 4$ y $\sigma(4) = 5$.

(iii) En este caso, como los tipos de la descomposición en ciclos disjuntos de α y γ son distintos, no existe ninguna $\tau \in \mathbb{S}_7$ tal que $\gamma = \tau\alpha\tau^{-1}$

2.

(i) $c_g(xy) = g(xy)g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = c_g(x)c_g(y)$ para todos $x, y \in G$.

(ii) $c_{gg'}(x) = (gg')x(gg')^{-1} = gg'x(g')^{-1}g^{-1} = c_g(c_{g'}(x)) = (c_g \circ c_{g'})(x)$ para todo $x \in G$.

(iii) Está claro que $c_1 = \mathrm{Id}$ y por tanto $c_g \circ c_{g^{-1}} = c_{gg^{-1}} = c_1 = \mathrm{Id} = c_{g^{-1}g} = c_{g^{-1}} \circ c_g$, de donde deducimos que c_g es biyectiva y de hecho $(c_g)^{-1} = c_{g^{-1}}$.

3. El conjunto de los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$ en $\mathbb{S}_7$ está en biyección con el conjunto de los elementos de $\mathbb{S}_7$ cuyo orden sea un divisor de 4, i.e. cuyo orden sea 1, 2 ó 4. Esta correspondencia actúa así: a cada homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \to \mathbb{S}_7$ le hacemos correspoinder el elemento $\varphi(1 + \mathbb{Z}4)$, que será un elemento de $\mathbb{S}_7$ cuyo orden divide a 4, y a cada elemento $\sigma \in \mathbb{S}_7$ cuyo orden sea un divisor de 4 le hacemos corresponder el homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4 \to \mathbb{S}_7, \quad \varphi(r + \mathbb{Z}4) = \sigma^r \text{ (φ está bien definida porque $\sigma^4 = ()$).}$$

Los momorfismos inyectivos serán aquellos que por la biyección anterior se corresponden con las permutaciones cuyo orden es exactamente 4.

Las permutaciones de orden 1 se reducen a $()$.

Las de orden 2 son las que el tipo de su descomposición en ciclos disjuntos es $(\bullet\ \bullet)$, $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ ó $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$.

Las de orden 4 son las que el tipo de su descomposición en ciclos disjuntos es $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ ó $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$.

4.

(i) Como $f(1) = 1 \in H'$, entonces $1 \in f^{-1}(H') = H$.

Si $x, y \in H$, entonces $f(x), f(y) \in H'$, de donde $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$, por lo que $xy^{-1} \in H$.

(ii) Supongamos que H' sea un subgrupo normal de G'. Para todo $g \in G$ y todo $h \in H$, se tiene $f(h) \in H'$ y por tanto:

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} \in H',$$

por lo que $ghg^{-1} \in H$.

En este caso, para cada clase $gH \in G/H$ la expresión

$$\varphi(gH) := f(g)H'$$

está bien definida en el sentido de que si $gH = g'H$, entonces $f(g)H' = f(g')H'$. Veámoslo:

$$gH = g'H \Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow f(g)^{-1}f(g') = f(g^{-1}g') \in H' \Rightarrow f(g)H' = f(g')H'.$$

La aplicación resultante $\varphi : G/H \to G'/H'$ es un homomorfismo de grupos puesto que:

$$\varphi((gH)(g'H)) = \varphi((gg')H) = f(gg')H' = (f(g)f(g'))H' = (f(g)H')(f(g')H') = \varphi(gH)\varphi(g'H).$$