Métodos Numéricos I (curso 21/22)

Relación de Ejercicios de Interpolación

1 Utilice el método más adecuado para calcular el polinomio $p(x)$ de grado mínimo que interpola los datos de la tabla

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	1	2	-7

a) Utilice el algoritmo de Newton–Horner para calcular $p(3)$.

b) ¿Qué término habrá que añadir al polinomio $p(x)$ para que el nuevo polinomio interpole también el dato $(3, 10)$?

2 *a*) Construya, usando el método de los coeficientes indeterminados, la fórmula de Lagrange y la fórmula de Newton, el polinomio que interpola los siguientes datos:

x_i	-1	0	4	-2
f_i	0	1	305	-31

b) ¿Sigue siendo válido el mismo polinomio si agregamos el punto $(1, 2)$? ¿Y si fuera el punto $(3, 0)$?

3 Sean $\ell_i(t), i = 0, 1, \ldots, n$ los polinomios básicos de Lagrange. Demuestre que

a) $\{\ell_0(t), \ell_1(t), \ldots, \ell_n(t)\}$ constituyen una base de $\mathbb{P}_n$,

b) $\sum_{i=0}^{n} \ell_i(t) = 1$.

4 Estudie para que valores de a es unisolvente el siguiente problema de interpolación: Determinar $p \in \mathbb{P}_2$ tal que

$$p(-1) = w_0, \quad p'(a) = w_1, \quad p(1) = w_2$$

5 Demuestre que el determinante de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

verifica

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

y que por tanto $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si y sólo si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

6 Al medir f en una serie de puntos x_i, se han obtenido los siguientes valores:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	0	1	8	26	64	125	216

a) Calcule la tabla de diferencias divididas.

b) Al medir f en el punto $x = 3$ se cometió un error, ya que el valor exacto era $f(3) = 27$ y se obtuvo 26. Estudie la propagación de dicho error en la tabla de diferencias divididas.

c) Supongamos que los valores f_i no son todos exactos sino que unos son más fiables que otros. Si se desea que los menos fiables intervengan en la obtención del menor número posible de coeficientes en la fórmula de Newton, ¿cómo hay que ordenar los cálculos?

7 Utilice las propiedades de las diferencias divididas para determinar de qué grado es el polinomio p del que se conocen los siguientes valores:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
f_i	-5	1	1	1	7	25

8 Sea el polinomio de interpolación en forma de Newton

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x - (x+3)(x+2)(x+1) - 3(x+3)(x+2) + 17(x+3) - 26$$

Se desea obtener la tabla de valores que generó el polinomio anterior.

a) ¿Cuántos datos de interpolación tenía el problema?

b) Recupere la tabla completa de diferencias divididas teniendo en cuenta que los nodos son equidistantes, esto es, $x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es constante.

9 Usando aritmética de tres cifras por redondeo, calcule el polinomio de interpolación para los siguientes datos: $f(0{,}8) = 0{,}224$, $f'(0{,}8) = 2{,}17$, $f(1{,}0) = 0{,}658$, $f'(1{,}0) = 2{,}04$. Estime $f(0{,}9)$ en dicha aritmética, minimizando el error de redondeo.

10 En este problema se trata de probar mediante interpolación la fórmula

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

que es válida para todo número natural $n \geq 0$.

a) Utilice las diferencias divididas para demostrar que la función $p(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es un polinomio de grado 2 en la variable $n \geq 0$.

b) Utilizando la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación demuestre que

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Utilice un procedimiento análogo para calcular el valor de la suma

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

11 Consideremos la función $f(x) = \ln x$ y sea $p(x)$ el polinomio que la interpola en x_0 y x_1.

a) Demuestre que el error cometido en cualquier punto del intervalo $[x_0, x_1]$ está acotado por:

$$e(x) \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2}$$

b) Si tomamos $x_0 = 1$ ¿hasta donde podremos extender el intervalo asegurando un error menor que 10^{-4}? ¿Y si partimos de $x_0 = 100$?

c) Se desea tabular $f(x) = \ln x$ para ser capaces de obtener (por interpolación lineal entre puntos adyacentes) cualquier valor de $f(x)$ con un error menor de 10^{-2}. Dar una expresión para los x_n a utilizar, indicando cuantos serán precisos para cubrir adecuadamente el intervalo $[1, 100]$.

12 Estudie la unisolvencia del problema de interpolación consistente en hallar $p \in \mathbb{P}_3$ tal que verifica

$$p(x_1) = y_1, \quad p''(x_1) = z_1,$$

$$p(x_2) = y_2, \quad p''(x_2) = z_2,$$

para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$, y cualesquiera valores $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

13 Aplique el algoritmo de Newton–Horner para aproximar $\sqrt{3}$ con los datos proporcionados por la función $f(x) = 3^x$ en los nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, y $x_4 = 2$. Proporcione una cota del error cometido.

14 Halle el polinomio $p \in \mathbb{P}_5$ que verifica

$$p(-1) = 6, \quad p(0) = 2, \quad p(1) = 0,$$
$$p'(-1) = -13, \quad p'(0) = 0, \quad p'(1) = -5$$

15 Se desea interpolar la función $f(x) = \ln x$ en los puntos de abcisas $1, 2$ y 3 mediante un polinomio de grado adecuado.

a) Calcule el polinomio de interpolación utilizando las fórmulas de Lagrange y de Newton.

b) Obtenga una cota lo más ajustada posible del error de interpolación en el intervalo $[1, 3]$.

16 Dados los valores $f(1{,}00) = 0{,}1924$, $f(1{,}05) = 0{,}2414$, $f(1{,}10) = 0{,}2933$, $f(1{,}15) = 0{,}3492$, calcule el polinomio de interpolación usando la fórmula de Newton utilizando aritmética de cuatro dígitos por redondeo.

a) Estime el valor de $f(1{,}09)$.

b) Proporcione una acotación del error cometido en dicha estimación, sabiendo que los datos proceden de una función cuya derivada de orden 4, en valor absoluto, está acotada por 0.76. Explique todos los pasos a seguir.

17 Se consideran los datos de interpolación $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$, $f(\pi) = 0$, $f(3\pi/2) = -1$, $f(2\pi) = 0$.

a) Calcule el polinomio de interpolación usando la fórmula de Lagrange.

b) Usando el apartado anterior, estime el valor de $f(\pi/4)$.

c) Sabiendo que el valor absoluto de la función y de sus derivadas sucesivas está acotado por 1, esto es, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}, n \geq 0$, acote el error cometido en la estimación anterior, detallando todos los pasos que realice.

18 Aplique el algoritmo de Newton–Horner para aproximar $\sqrt{3}$ con los datos proporcionados por la función $f(x) = \sqrt{x}$ en los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, y $x_3 = 5$. Proporcione una cota del error cometido.

19 Se consideran los datos $f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = f(2) = 1$.

a) Estime el valor de $f(0, 5)$ utilizando el algoritmo de Newton–Horner.

b) Estime el error cometido, sabiendo que $|f^{(k)}(x)| < 0, 3$, para todo x, y para cualquier orden de derivación k.