Tema 4. PROBABILIDAD CONDICIONADA: TEOREMAS BÁSICOS. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

En este tema se va a introducir el concepto de probabilidad condicionada, el cual se introdujo en el Siglo XVIII y se le atribuye a Bayes.

De Moivre ya había trabajo con dicho concepto para el cálculo de la probabilidad conjunta de dos sucesos dependientes: "la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos dependientes es igual a la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos por la probabilidad de que el otro ocurra si el primero ya ha ocurrido".

De Moivre, además, generalizó dicho resultado para varios sucesos obteniendo lo que hoy se conoce como Teorema de la probabilidad compuesta o Regla de la multiplicación, el cual estudiaremos junto con el Teorema de la probabilidad total y la Regla de Bayes.

Finalmente se estudiará el concepto de independencia de sucesos el cual De Moivre definió de la siguiente forma: "Diremos que dos sucesos son independientes si uno de ellos no tiene ninguna relación con el otro".

1. Probabilidad condicionada

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{A}$ un suceso con probabilidad no nula $(P(B) > 0)$. Dado otro suceso A, se define la **probabilidad de A condicionada a B**, denotada por $P(A/B)$, a la probabilidad de que ocurra A supuesto que ha ocurrido B y se calcula como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De esta igualdad se puede deducir que

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B).$$

Proposición: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{A}$, un suceso con probabilidad no nula $(P(B) > 0)$, la aplicación

$$\begin{aligned} P(\cdot/B) : \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A/B) \end{aligned}$$

es una función de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

Es decir, verifica los tres axiomas de Kolmogorov:

1. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $P(A/B) \geq 0$.
2. $P(\Omega/B) = 1$.
3. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j) \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i/B\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i/B).$$

Además se verifica que: $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$ y $P((A \cup C)/B) = P(A/B) + P(C/B) - P((A \cap C)/B)$

Ejemplo

Se tienen tres urnas: la primera con 2 bolas rojas, 2 negras y 1 blanca, la segunda con 3 bolas rojas y 2 negras y la tercera con 2 bolas rojas y 3 negras. Calcular:

a) *La probabilidad de sacar una bola roja si se elige la urna 2.*

b) *La probabilidad de no sacar una bola roja si se elige la urna 3.*

c) *La probabilidad de sacar una bola roja o negra si se elige la urna 1.*

2. Teoremas básicos

Teorema de la probabilidad compuesta o Regla de la multiplicación

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sucesos tales que $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \neq \emptyset$, entonces

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de sacar dos bolas consecutivas rojas de la urna 2 del ejemplo anterior sin reemplazamiento. ¿Cuál sería la probabilidad de sacar tres bolas rojas consecutivas? ¿Y cuatro?

Teorema de la probabilidad total Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ una partición del espacio muestral, es decir,

- La unión de los sucesos forman el espacio muestral: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.
- Los sucesos son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.
- La probabilidad de cada uno de los sucesos es positiva: $P(A_i) > 0 \quad \forall i$.

y dado un suceso cualquiera $B \in \mathcal{A}$, se verifica que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo de las tres urnas si sacamos solo una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

Teorema de Bayes

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ una partición del espacio muestral. Dado un suceso cualquiera $B \in \mathcal{A}$, no nulo, se verifica que

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Por otro lado, recordemos que, utilizando el teorema de la probabilidad total, se tiene

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j).$$

Combinando ambas cosas se tiene la conocida **fórmula de Bayes**

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}.$$

El teorema de la probabilidad total y el de Bayes van a ser especialmente útiles cuando se den las siguientes circunstancias:

a) El experimento aleatorio se puede separar en dos etapas.

b) Es sencillo dar una partición de todo el espacio muestral Ω mediante sucesos $A_1, \ldots, A_n$ correspondientes a resultados de la primera etapa y son conocidas o fácilmente calculables las probabilidades $P(A_1), \ldots, P(A_n)$.

c) Son conocidas o fácilmente calculables las probabilidades $P(B/A_1), \ldots, P(B/A_n)$, donde B es un suceso correspondiente a resultados de la segunda etapa.

Ejemplo

En el ejemplo de antes, calcular la probabilidad de que la urna elegida haya sido la 1 sabiendo que la bola extraída es roja.

3. Independencia de sucesos

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y A y B dos sucesos de dicho espacio. Se dice que ambos son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no afecta a la ocurrencia del otro. En otro caso se dice que son **dependientes**.

Definición

Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces

$$A \text{ es independiente de } B, \text{ con } P(B) > 0, \text{ si } P(A/B) = P(A)$$

$$B \text{ es independiente de } A, \text{ con } P(A) > 0, \text{ si } P(B/A) = P(B)$$

De la definición de independencia de sucesos y la definición de probabilidad condicionada se deduce que

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Caracterización de independencia Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$A \text{ es independiente de } B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Propiedades

1. La independencia es una propiedad recíproca: si A es independiente de B, B lo es de A.
2. Cualquier suceso de $\mathcal{A}$ es independiente de Ω y de $\emptyset$ (y de cualquier suceso de probabilidad nula o uno).
3. Si A y B son independientes, entonces también lo son:
   - $\bar{A}$ y B.
   - A y $\bar{B}$.
   - $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{A}$ tales que $P(A), P(B) > 0$ se verifica:
   - Si A y B son incompatibles, no son independientes.
   - Si A y B son independientes, no son incompatibles.

Ejemplo

Se prepara una urna con bolas rojas y negras con el número 1, y azules y blancas con el número 2, donde de cada color se mete una bola opaca y otra que no lo sea. Se extrae una bola al azar. Estudiar si los siguientes sucesos son independientes:

a) *"la bola es negra" y "la bola es opaca",*
b) *"la bola es negra" y "la bola tiene un 1",*
c) *"la bola tiene un 1" y "la bola tiene un 2",*
d) *" la bola no es negra" y "la bola no es opaca".*

Clase de sucesos independientes

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad asociado a un experimento aleatorio y* $\mathcal{C}$ *una clase de sucesos,* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$*:*

- *Los sucesos de la clase* $\mathcal{C}$ *son* **independientes dos a dos**, *si verifican:*

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- *Los sucesos de la clase* $\mathcal{C}$ *son* **totalmente o mutuamente independientes** *o simplemente* **independientes**, *si para toda subcolección finita de sucesos se verifica que la probabilidad de la intersección de los sucesos es el producto de sus probabilidades:* $\forall k \in \mathbb{N}$, *y* $\forall A_{i1}, ..., A_{ik} \in \mathcal{C}$,

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik}).$$

Propiedades

- Si se desea comprobar la independencia total de n sucesos, se debe comprobar $2^n - n - 1$ relaciones.
- Dada una clase de sucesos independientes, cualquier subcolección finita es también de sucesos independientes.
- En particular, toda clase de sucesos independientes son en particular dos a dos independientes, pero la independencia dos a dos no implica la independencia total de los sucesos de la clase.

Ejemplo

En otra urna se han introducido: una bola con un 1, roja y opaca; una bola con un 1, negra y no opaca; una bola con un 2, roja y no opaca; una bola con un 2, blanca y opaca. Se pide al alumno que extraiga una bola y se consideran los siguientes sucesos: "la bola tiene un 1", "la bola es roja" y "la bola es opaca". Estudia si estos sucesos son independientes dos a dos y si son totalmente independientes.

Ejemplo

En un experimento, realizado en un laboratorio, se desea saber si una roca está compuesta de algún metal. Para ello se prueban sobre la roca tres productos químicos distintos, que sirven para detectar distintos tipos de metales (oro, plata, cobre) ya que reaccionan al contacto con ellos. Sea $P(O)$ la probabilidad de que el producto que detecta el oro reaccione al entrar en contacto con la roca, $P(A)$ la de que el producto que detecta la plata reaccione y $P(C)$ la de que reaccione el producto que detecta el cobre. ¿Cuál es la probabilidad de que la roca esté compuesta por alguno de estos metales que detectan los productos probados?. $(P(O) = 0.2;\ P(A) = 0.3;\ P(C) = 0.5)$