

AyudaejerciciosIntegracin.pdf



Lorenax_Caceres



Cálculo II



1º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas



**Facultad de Ciencias
Universidad de Granada**

**QUIERES
15€ ?**

**TRAE A TU CRUSH
DE APUNTES ♡**



WUOLAH





Ayuda ejercicios Integración

🕒 Created	@May 13, 2021 4:22 PM
▼ Subject	Cálculo II
≡ Subtipo	Integración
≡ Tags	Apuntes Instrucciones
# Tema	5

https://www.ugr.es/~fjperez/textos/integrales_aplicaciones.pdf

INTEGRABILIDAD:

▼ Para acotar una integral:

Primer método, con la imagen de f:

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $Im f(x) = [m, M]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Segundo método, acotando f con funciones:

También podemos buscar g_1 y g_2 de forma que $g_1 \leq f \leq g_2$, de forma que:

$$\int_a^b g_1(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g_2(x)dx$$

Tercer método, haciendo una h auxiliar:

También podemos usar que si f es continua y no idénticamente nula en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Si queremos aplicar esto para demostrar una desigualdad del tipo $\alpha < \int_a^b f(x)$, hacemos $h(x) = \alpha(b - a) - f(x)$ y si esa $h(x)$ nos queda positiva y continua queda demostrado.

▼ **Comprobar la integrabilidad:**

- Si es **continua en un intervalo cerrado**
- Si es **continua en un intervalo cerrado** salvo en un **numero finito de puntos de discontinuidad**, y es está **acotada** en ese intervalo.

CONVERGENCIA INTEGRALES:

▼ **Cuando nos dan problema los extremos**

La idea es tomar límite en el problema, sustituyendo por t y tomando el límite que corresponda. Si hay problema en ambos extremos se toma un c intermedio (por ejemplo 0) y se hace tan tranquilo.

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - F(a)]$$
$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} [F(a) - F(x)]$$

Lo mismo hacemos si fuera por ejemplo 0 y tienes una asíntota o cualquier cosa.

RESOLVER INTEGRALES:

▼ **Tabla integrales:**

QUIERES 15€ ?



TRAER A TU CRUSH DE APUNTES 



si juegas con
fuego te fiegas

si consigues que suba apuntes, te llevas 15€
+ 5 Wuolah Coins para los próximos sorteos



WUOLAH

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
TIPOS	INTEGRAL	EJEMPLO
	$\int dx = x$	$\int dx = x$
	$\int adx = ax$	$\int 3dx = 3x$
Potencial	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int 5 \cdot x^3 dx = \frac{5 \cdot x^{3+1}}{3+1} = \frac{5 \cdot x^4}{4}$
	$\int u' \cdot u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\int 2 \cdot (2x+5)^4 dx = \frac{(2x+5)^5}{5}$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{4}{x} dx = 4 \cdot \ln x$
	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u$	$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \ln(x^2+5)$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int 2 \cdot e^x dx = 2 \cdot e^x$
	$\int u' \cdot e^u dx = e^u$	$\int 5 \cdot e^{5x+1} dx = e^{5x+1}$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int 3 \cdot 5^x dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5}$
	$\int u' \cdot a^u dx = \frac{a^u}{\ln a}$	$\int 2x \cdot 4^{x^2} dx = \frac{4^{x^2}}{\ln 4}$
Seno	$\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x$	$\int 7 \cdot \operatorname{sen} x dx = -7 \cdot \operatorname{cos} x$
	$\int u' \cdot \operatorname{sen} u dx = -\operatorname{cos} u$	$\int 6 \cdot \operatorname{sen} 6x dx = -\operatorname{cos} 6x$
Coseno	$\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x$	$\int 6 \cdot \operatorname{cos} x dx = 6 \cdot \operatorname{sen} x$
	$\int u' \cdot \operatorname{cos} u dx = \operatorname{sen} u$	$\int 6x \cdot \operatorname{cos} 3x^2 dx = \operatorname{sen} 3x^2$
Tangente	$\int \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} dx = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{3}{\operatorname{cos}^2 x} dx = 3 \operatorname{tg} x$
	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x$	$\int 5(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = 5 \operatorname{tg} x$
	$\int \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u} dx = \operatorname{tg} u$	$\int \frac{2}{\operatorname{cos}^2(2x)} dx = \operatorname{tg}(2x)$
Cotangente	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cot} x$	$\int 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = -2 \operatorname{cot} x$
	$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{cot} u$	$\int \frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = -\operatorname{cot} x^3$
Arcoseno Arcocoseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x$	$\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \cdot \operatorname{arcsen} x$
	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u$	$\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \cdot \operatorname{arcsen} x$
Arcotangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x$	$\int \frac{8}{1+x^2} dx = 8 \cdot \operatorname{arctg} x$
	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u$	$\int \frac{8}{1+x^2} dx = 8 \cdot \operatorname{arctg} x$

$$\int \operatorname{tg}(x) = -\ln |\cos(x)|$$

$$\int \cos^2(x) = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$$

$$\int \sin^2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$$

▼ Métodos de integración:

3.Integrales. Métodos de integración.

<https://drive.google.com/file/d/1Pz3sOghBQILuQ1n2nciOWDDM3z4O1By2/view>

8) Método de integración por partes.
Se aplica cuando el integrando es producto de dos funciones, una fácilmente derivable y otra fácilmente integrable.
Definición: Se llama diferencial de $y = f(x)$ a la expresión $dy = f'(x)dx$.

Ejemplos:
1) $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ 2) $\int (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}(x-1)^3$ 3) $\int x^2 \cos(x) dx = \frac{1}{3}x^3 \sin(x) - \frac{1}{3}x^3 \cos(x)$ 4) $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$
5) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$ 6) $\int x^2 e^{ax} dx = \frac{1}{a^3}(ax^2 - 2x + \frac{2}{a})e^{ax}$ 7) $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$ 8) $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$

c) Integración por cambio de variable o sustitución.
Se usa cuando al realizar el cambio $x = g(t)$, la integral resultante es más sencilla que la original.

Ejemplos:
1) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ con $x = \sin(t)$ 2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ con $t = \arctan(x)$
3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con $u = 1-x^2$ 4) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ con $u = \tan(x)$
5) $\int \sin^2(x) dx$ con $u = \cos(x)$ 6) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ con $u = \arctan(x)$
7) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ con $u = \tan(x)$ 8) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ con $u = \arctan(x)$
9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con $x = \sin(t)$ 10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ con $x = \sin(t)$

▼ Integral por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Un día vi una vaca l Flaca vestida de uniforme.

▼ Cambio de variable:

Haces que una expresión que contenga a la x sea t, por ejemplo $\sqrt{x} = t$, y luego despejas el dx, con el ejemplo anterior $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow dx = dt \cdot 2t$. Resuelves y deshaces el cambio.

▼ Fórmulas trigonométricas:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

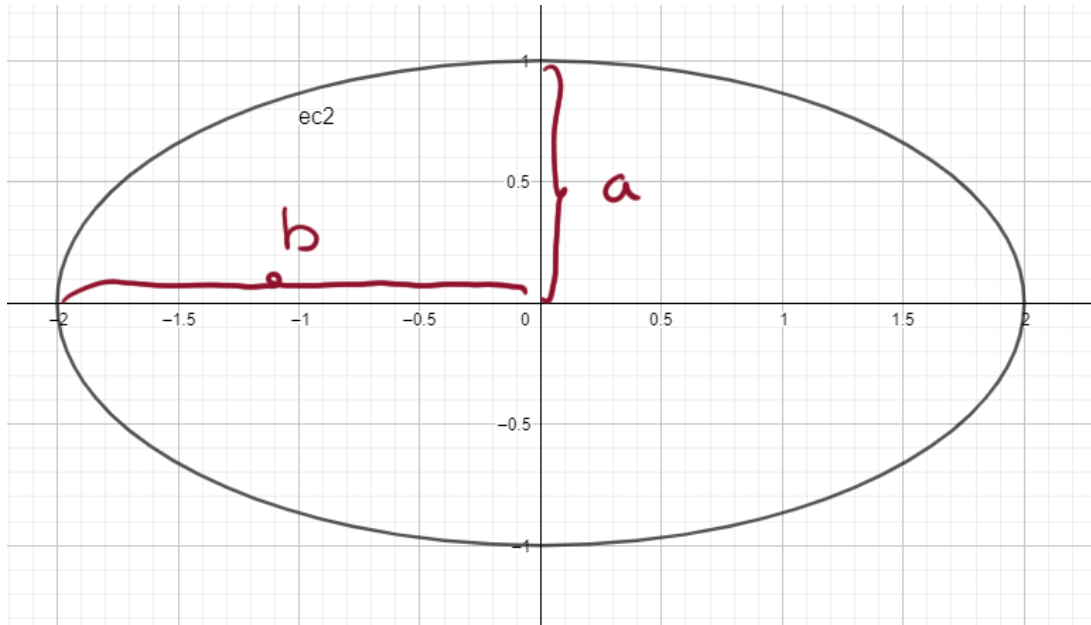
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

ÁREAS, LONGITUDES Y VOLÚMENES:

▼ Elipse:

$$\frac{x-h}{a^2} + \frac{y-k}{b^2} = 1$$

Centrada en (h,k), y de la forma:



▼ Circunferencia:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Circunferencia centrada en (h,k) de radio r.