Examen parcial 1 RESUELTO.pdf

mvrl25

Álgebra I

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

ÁLGEBRA I

GRADO EN MATEMÁTICAS, DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

29 DE NOVIEMBRE DE 2016

APELLIDOS Y NOMBRE: ______________________ DNI:__________ GRUPO: ______

Cada respuesta correcta puntúa **+0,2** y cada respuesta errónea puntúa **-0,1**

Tipo 1			
	a	b	c
1		X	
2			X
3			X
4			X
5	X		
6	X		
7	X		
8	X		
9			X
10			X
11		X	
12			X
13			X
14		X	
15	X		

29 Noviembre 2016 **Tipo 1**

En las siguientes cuestiones sólo una de las respuestas dadas es correcta. Anota tu respuesta en la hoja adjunta.

Cuestión 1. Si X es un conjunto con 3 elementos e Y tiene 4 elementos entonces el conjunto de partes de $X \cap Y$:

(a) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene 2^7 elementos.

(b) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene como máximo 2^3 elementos.

(c) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene como máximo 2^4 elementos.

Cuestión 2. La congruencia $21x \equiv 6(\mathrm{mod} 12)$:

(a) No tiene solución.

(b) Sólo tiene 3 soluciones.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 3. En un conjunto con 3 elementos hay:

(a) Tres relaciones reflexivas distintas.

(b) Seis relaciones reflexivas distintas.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 4. Para cualesquiera conjuntos X e Y, si $X \subset Y$ entonces:

(a) $X \in Y$.

(b) $X \notin Y$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 5. Para cualesquiera enteros a y b, si $d = m.c.d(a, b)$, se tiene que la ecuación $ax + by = m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$:

(a) Tiene solución si $m.c.m.(a, b) = ab$.

(b) Siempre tiene solución.

(c) Nunca tiene solución.

Cuestión 6. El sistema de congruencias en $\mathbb{Z}$, $\left\{ \begin{array}{lll} x & \equiv & a \quad (\mathrm{mod}\ n) \\ x & \equiv & b \quad (\mathrm{mod}\ n+1) \end{array} \right.$:

(a) Siempre tiene solución.

(b) Solo tiene solución si n es par.

(c) Nunca tiene solución.

Cuestión 7. El resultado de calcular $3^{(3^{700})}$ en el anillo $\mathbb{Z}_{100}$ es:

(a) 3.

(b) 27.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 8. En el conjunto $\mathbb{Z}_{360}$:

(a) Hay 96 unidades.

(b) No hay divisores de cero no nulos.

(c) Todos sus elementos no nulos son unidades.

Cuestión 9. Dados enteros positivos a, n se tiene:

(a) $a^{n-1} \equiv 1 (\bmod n)$.

(b) $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 10. Si X es un conjunto finito y R una relación de equivalencia en R se tiene:

(a) $|X/R| < |X|$.

(b) $|X| < |X/R|$.

(c) Si $|X/R| = |X|$ y $x_1 \neq x_2$ son dos elementos de X entonces x_1 y x_2 no están relacionados por R.

Cuestión 11. Los números enteros 10115 y -9828:

(a) Son primos relativos.

(b) Su máximo común divisor es 7.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 12. Si $f : X \to Y$ es una aplicación entonces:

(a) f es inyectiva si verifica que $(\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 = x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2))$.

(b) f es inyectiva si verifica que $\mathrm{Im}(f) = Y$.

(c) f es inyectiva si verifica que $(\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2)$.

Cuestión 13. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se tiene que el producto $\mathrm{m.c.d.}(a, b, c)\,\mathrm{m.c.m.}(a, b, c)$ es igual:

(a) al producto abc.

(b) al producto $\mathrm{m.c.d.}(a, b)\,\mathrm{m.c.m.}(b, c)$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 14. Si el examen de hoy, que es a las 9 horas, lo hubiéramos hecho hace 184 horas, tendríamos que haber venido:

(a) A las 10 de la noche.

(b) A las 5 de la tarde.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 15. Si d y n son enteros positivos y $d|n$ entonces (siendo φ la función de Euler):

(a) $\varphi(d)|\varphi(n)$.

(b) $\mathrm{m.c.d.}(\varphi(d), \varphi(n)) \neq 1$

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

ÁLGEBRA I
GRADO EN MATEMÁTICAS, DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
29 DE NOVIEMBRE DE 2016

APELLIDOS Y NOMBRE: ______________________ DNI: ____________ GRUPO: ______

Cada respuesta correcta puntúa **+0,2** y cada respuesta errónea puntúa **-0,1**

Tipo 2			
	a	b	c
1		X	
2			X
3	X		
4			X
5	X		
6			X
7	X		
8			X
9			X
10	X		
11		X	
12			X
13			X
14	X		
15		X	

29 Noviembre 2016 **Tipo 2**

En las siguientes cuestiones sólo una de las respuestas dadas es correcta. Anota tu respuesta en la hoja adjunta.

Cuestión 1. Si el examen de hoy, que es a las 9 horas, lo hubiéramos hecho hace 184 horas, tendríamos que haber venido:

(a) A las 10 de la noche.

(b) A las 5 de la tarde.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 2. En un conjunto con 3 elementos hay:

(a) Tres relaciones reflexivas distintas.

(b) Seis relaciones reflexivas distintas.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 3. El resultado de calcular $3^{(3^{700})}$ en el anillo $\mathbb{Z}_{100}$ es:

(a) 3.

(b) 27.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 4. Para cualesquiera conjuntos X e Y, si $X \subset Y$ entonces:

(a) $X \in Y$.

(b) $X \notin Y$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 5. Para cualesquiera enteros a y b, si $d = m.c.d(a, b)$, se tiene que la ecuación $ax + by = m.c.d.(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$:

(a) Tiene solución si $m.c.m.(a, b) = ab$.

(b) Siempre tiene solución.

(c) Nunca tiene solución.

Cuestión 6. La congruencia $21x \equiv 6(\text{mod}12)$:

(a) No tiene solución.

(b) Sólo tiene 3 soluciones.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 7. En el conjunto $\mathbb{Z}_{360}$:

(a) Hay 96 unidades.

(b) No hay divisores de cero no nulos.

(c) Todos sus elementos no nulos son unidades.

Cuestión 8. Dados enteros positivos a, n se tiene:

(a) $a^{n-1} \equiv 1 (\text{mod } n)$.

(b) $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\text{mod } n)$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 9. Si X es un conjunto finito y R una relación de equivalencia en R se tiene:

(a) $|X/R| < |X|$.

(b) $|X| < |X/R|$.

(c) Si $|X/R| = |X|$ y $x_1 \neq x_2$ son dos elementos de X entonces x_1 y x_2 no están relacionados por R.

Cuestión 10. El sistema de congruencias en $\mathbb{Z}$, $\begin{cases} x \equiv a & (\text{mod } n) \\ x \equiv b & (\text{mod } n+1) \end{cases}$:

(a) Siempre tiene solución.

(b) Solo tiene solución si n es par.

(c) Nunca tiene solución.

Cuestión 11. Los números enteros 10115 y -9828:

(a) Son primos relativos.

(b) Su máximo común divisor es 7.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 12. Si $f : X \to Y$ es una aplicación entonces:

(a) f es inyectiva si verifica que $(\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$.

(b) f es inyectiva si verifica que $\mathrm{Im}(f) = Y$.

(c) f es inyectiva si verifica que $(\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Cuestión 13. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se tiene que el producto $m.c.d.(a, b, c)\, m.c.m.(a, b, c)$ es igual:

(a) al producto abc.

(b) al producto $m.c.d.(a, b)\, m.c.m.(b, c)$.

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 14. Si d y n son enteros positivos y $d|n$ entonces (siendo φ la función de Euler):

(a) $\varphi(d)|\varphi(n)$.

(b) $m.c.d.(\varphi(d), \varphi(n)) \neq 1$

(c) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 15. Si X es un conjunto con 3 elementos e Y tiene 4 elementos entonces el conjunto de partes de $X \cap Y$:

(a) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene 2^7 elementos.

(b) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene como máximo 2^3 elementos.

(c) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ tiene como máximo 2^4 elementos.

Álgebra I

Grado en Matemáticas. Doble Grado Física y Matemáticas
(29/11/2016)

Apellidos y Nombre: **Grupo:**

1. *(3,5 puntos)*

   Un eminente político ha decidido invertir una cantidad de dinero, que ha conseguido en comisiones ilegales, en metales preciosos: plata, oro y platino.

   Este político solo maneja billetes de 1000 $, y estamos interesados en conocer el número de billetes invertidos. Sabemos que maneja una cantidad cercana al millón doscientos mil $, esto es, alrededor de 1200 "de los grandes " y que ha decidido invertir el doble en oro que en plata y el triple en platino que en oro.

   El valor del lingote de plata está en 12 mil $, el de oro en 14 mil $ y el de platino en 31 mil $. Al comprar la plata le sobraron 5 mil $, que añadió a la cantidad destinada para comprar oro y al comprar oro le sobraron 13 mil $, que añadió al dinero destinado a comprar platino. Cuando fue a comprar platino, le faltaban 2 mil $ para poder hacer una compra de lingotes enteros y pidió esta cantidad prestada a su mujer.

   ¿Cuantos billetes ha invertido? ¿Que dinero ha invertido entonces contando con lo que pidió a su mujer?

2. *(3,5 puntos)*

   Sea $X = \{1,2,3\}$, $B = \{f : X \to X \mid \text{f es biyectiva}\}$ y $\varphi : B \longrightarrow P(X)$ la aplicación definida por $\varphi(f) = \{i \in X \mid f(i) = i\}$.

   (a) Listar los elementos de B.

   (b) ¿Cuantos elementos tiene $Im(\varphi)$? Calcular $\varphi^*(\{\emptyset, \{1,2\}\})$.

   (c) Razonar si φ es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o de ninguno de esos tipos.

   (d) Describir el conjunto cociente B/R_φ (donde R_φ es la relación de equivalencia en B inducida por φ).

(1)

plata 12

oro 14

platino 31

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 5 \pmod{12} \\ 2x+5 \equiv 13 \pmod{14} \\ 6x+13+2 \equiv 0 \pmod{31} \end{array}\right\}$$

$$[(x+2x+6x)1000+2000]\$$$

$$x+2x+6x+2 \simeq 1200$$

$$2x+15 \equiv 13 \pmod{14} \Rightarrow 2x \equiv 8 \pmod{14} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 7$$

$$6x+15 \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow 6x \equiv 16 \pmod{31} \Rightarrow x \equiv 13 \pmod{31}$$

$$-5.6+1.31=1$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 13 \pmod{31} \end{array}\right\}$$

$$5+12t \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow 12t \equiv -1 \pmod 7$$

$$\Rightarrow 5t \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow t \equiv -3 \pmod 7$$

$$\Rightarrow t \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow t = 4+7t'$$

$$\Rightarrow x = 5+12(4+7t') = 53+84t'$$

$$53+84t' \equiv 13 \pmod{31} \Rightarrow 22t' \equiv 22 \pmod{31}$$

$$5.31+(-7)22=1$$

$$\Rightarrow t' \equiv -154 \pmod{31} \Rightarrow t' \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 53+84(1+31t'') = 53+84+2604t'' =$$

$$= 137+2604t''$$

$$9x+2 \simeq 1200 \Rightarrow x \simeq 133'1 \Rightarrow t''=0 \Rightarrow x_0=137 \text{ billetes}$$

$$\Rightarrow (9.\underbrace{137+2}_{1235})1000 = 1235000\$$$

②

$X = \{1,2,3\}$

$B = \{f: X \to X \,/\, f \text{ biyectiva}\}$

$\varphi: B \to P(X) \,/\, \varphi(f) = \{i \in X \,/\, f(i) = i\}$

a) $B = \{ \underset{1\mapsto1,\ 2\mapsto2,\ 3\mapsto3}{id}, \underset{1\mapsto2,\ 2\mapsto1,\ 3\mapsto3}{(12)}, \underset{1\mapsto3,\ 2\mapsto2,\ 3\mapsto1}{(13)}, \underset{1\mapsto1,\ 2\mapsto3,\ 3\mapsto2}{(23)}, \underset{1\mapsto2,\ 2\mapsto3,\ 3\mapsto1}{(123)}, \underset{1\mapsto3,\ 2\mapsto1,\ 3\mapsto2}{(132)} \}$

b) $Im(\varphi) = \{X, \{3\}, \{2\}, \{1\}, \phi\}$

$\varphi^*: P(P(X)) \to P(B)$

$\varphi^*(\{\phi, \{1,2\}\}) = \{(123), (132)\}$

c) $\varphi((123)) = \varphi((132)) = \phi \Rightarrow \varphi$ no iny

$|Im(\varphi)| = 5 \neq |P(X)|$ $(\{1,2\} \notin Im\,\varphi) \Rightarrow \varphi$ no sobrey.

$\Rightarrow \varphi$ no biyectiva.

d) $B/R_\varphi = \{ \overline{id}, \overline{(12)}, \overline{(13)}, \overline{(23)}, \overline{(123)} \}$

$\overline{id} = \{id\}$, $\overline{(12)} = \{(12)\}$, $\overline{(13)} = \{(13)\}$, $\overline{(23)} = \{(23)\}$, $\overline{(123)} = \{(123), (132)\}$