Recopilación de preguntas tipo test de Pilar y Bullejos:

1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 1$, y sea R_f la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por dicha aplicación. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \geq 2$, y sea $\bar{a}$ su clase de equivalencia. Entonces:
(a) $\bar{a}$ tiene 3 elementos
(b) $\bar{a}$ tiene infinitos elementos
(c) $\bar{a}$ tiene 2 elementos
2.- En el anillo $\mathbb{Z}_5$ la suma del elemento 4 consigo mismo 48 veces vale:
(a) 1
(b) 3
(c) 2
3.- Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_7$ dos polinomios no nulos. ¿Cúal de los siguientes enunciados es verdadero?
(a) Existen polinomios no nulos para los que $grd(p(x)q(x))$ es estrictamente mayor que $grd(p(x)) + grd(q(x))$.
(b) $grd(p(x)q(x))$ es siempre igual a $grd(p(x)) + grd(q(x))$.
(c) Existen polinomios no nulos para los que $grd(p(x)q(x))$ es estrictamente menor que $grd(p(x)) + grd(q(x))$.
4.- Sea $f : X \to Y$ una aplicación y $A, B \in P(X)$. Entonces:
(a) $f_*(A) - f_*(B) \subseteq f_*(A - B)$
(b) $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$
(c) $f_*(A - B) \subseteq f_*(A) - f_*(B)$
5.- Sea $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Para cada $n \geq 2$ sea $g_n : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ dada por $g_n(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)^n$. Entonces:
(a) $f \neq g_{3k}$ para todo $k \geq 1$.
(b) Para todo $n \geq 2$ se tiene que $f = g_n$.
(c) Existe un $n \geq 2$ para el que $f \neq g_n$.
6.- ¿Cúal de las siguientes afirmaciones es verdadera?
(a) El anillo $\mathbb{Z}_7$ tiene 4 unidades.
(b) El anillo producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tiene 2 unidades.
(c) El anillo producto cartesiano $\mathbb{Q} \times Z$ tiene infinitas unidades.
7.- Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X y X/R el conjunto cociente. Entonces:
(a) $X/R \in P(X)$
(b) $X/R \subseteq P(X)$
(c) $X/R \subseteq X$
8.- Considérese el anillo $\mathbb{Z}_{10}$ de enteros módulos 10 y el conjunto $U(\mathbb{Z}_{10})$ de unidades de dicho anillo. Entonces:
(a) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 9\}$
(b) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 8\}$
(c) $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$
9.- Sea X un conjunto con 4 elementos y $S \subset X$ un subconjunto suyo con 2 elementos. Sea $f : P(X) \to P(X)$ la aplicación definida por $f(Y) = Y \cap S$, para $Y \in P(X)$. El cardinal del conjunto cociente $P(X)/R_f$ es
(a) 2
(b) 4
(c) 8
10.- En un anillo A un elemento $a \in A$ se dice idempotente si $a^2 = a$. Entonces:

(a) El anillo $\mathbb{Z}_6$ tiene sólo 2 elementos idempotentes
(b) El anillo $\mathbb{Z}$ tiene sólo 2 elementos idempotentes
(c) El anillo producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ tiene sólo 2 elementos idempotentes
11.- Sean $a_1 = 2120,\ a_2 = 4825$ y $b = 19.$ Entonces el resto de dividir $(-a_1)a_2$ entre b es:
(a) 11
(b) 8
(c) 18
12.- Sean A, B subconjuntos de un conjunto X con $|A| = n$ y $|B| = m$. Entonces:
(a) $|A \cap B| = n - m$
(b) $|A \cap B| = m - n$
(c) $|A \cup B| + |A \cap B| = n + m$
13.- Sean A, B subconjutos de un conjunto X y consideremos su diferencia simétrica $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Entonces:
(a) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A \neq B$
(b) $A \triangle B = X \Leftrightarrow A = B$
(c) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
14.- Un subanillo A de un anillo B se dice propio si $\{0\} \subsetneq A \subsetneq B$. Seleccione el enunciado correcto:
(a) El conjunto $A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo propio de $\mathbb{Z}$
(b) El anillo $\mathbb{Z}$ no tiene subanillos propios
(c) El cuerpo $\mathbb{Q}$ no tiene subanillos propios
15.- Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $g : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ la aplicación dada por $g(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$. Entonces:
(a) g es sobreyectiva
(b) g es inyectiva
(c) g es biyectiva
16.- Si $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, entonces:
(a) Hay exactamente 9 aplicaciones biyectivas de X en Y
(b) Hay exactamente 3 aplicaciones biyectivas de X en Y
(c) Hay exactamente 6 aplicaciones biyectivas de X en Y
17.- El elemento $2 + \sqrt{3}$
(a) no es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ ya que este no es un cuerpo
(b) no es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ ya que su inverso sería su conjugado y al ser real coincide con el mismo pero

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 + 3 + 8\sqrt{3} \neq 1$$

(c) es una unidad en $\mathbb{Z}\left(\sqrt{3}\right)$ y su inverso es $2 - \sqrt{3}$.
18.- Si A es un anillo y $B \subseteq A$ es un subanillo. Entonces:
(a) B hereda la estructura de A por tanto si A es un cuerpo B también tiene que ser un cuerpo.
(b) puede ser B un cuerpo aunque no lo sea A y puede ser A un cuerpo y no serlo B
(c) si A no es cuerpo, como la estructura de B es heredada de la de A, no puede tener una estructura mas rica y por tanto B no puede ser un cuerpo.
19.- Las unidades del anillo $\mathbb{Z}_5$ son.
(a) $U(\mathbb{Z}_5) = \{1, -1\}$
(b) $U(\mathbb{Z}_5) = \{1\}$
(c) $U(\mathbb{Z}_5) = \{1, 2, 3, 4\}$
20.- La aplicación $f : A[x] \to A$ que asocia a cada polinomio su término independiente (es decir el

coeficiente que acompaña a x^0)

(a) es un morfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo

(b) es un morfismo de anillos inyectivo pero no sobreyectivo.

(c) no es morfismo de anillos

21.- La aplicación $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$ definida como $f(n)$ = resto de dividir n entre $3,$ para $n = 0,1,2,3,4,5$

(a) Está bien definida pero no es un morfismo de anillos

(b) Es un morfismo de anillos

(c) No está bien definida.

22.- La inclusión $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$; $i \to i$

(a) No está bien definida por tanto no tiene sentido preguntarse si es un morfismo de anillos

(b) Está bien definida, lleva el 0 en el 0, el 1 en el 1 y es un morfismo de anillos

(c) Está bien definida pero no es un morfismo de anillos

23.- La aplicación norma $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$; $N(a+bi) = a^2 + b^2$

(a) es morfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo

(b) es morfismo de anillos inyectivo pero no sobreyectivo

(c) no es morfismo de anillos

24.- El conjunto $\mathbb{Z}[x]^*$ de los polinomios no nulos de $\mathbb{Z}[x]$

(a) Es cerrado para la suma, producto y opuestos y por tanto es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$

(b) Es cerrado para suma, producto y opuestos, pero no es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$

(c) Depende de la definición de subanillo, podría ser o no ser subanillo de $\mathbb{Z}[x]$

25.- La aplicación $f : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_6$ definida como $f(n) =$ resto de dividir n entre 6, para $n = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$

(a) Está bien definida pero no es un morfismo de anillos

(b) Está bien definida y es un morfismo de anillos

(c) No está bien definida

26.- Considerar los anillos $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Q}[i]$

(a) $\mathbb{Z}[i]$ no es un cuerpo sólo tiene 4 unidades, pero $\mathbb{Q}[i]$ si que es un cuerpo

(b) Ambos $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Q}[i]$ son cuerpos

(c) Ni $\mathbb{Z}[i]$ ni $\mathbb{Q}[i]$ son cuerpos, sólo tienen cuatro unidades, $1,-1,i$ y $-i$

27.- En el anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos la siguiente relación:

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a-c \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y } b=d$$

(a) es una relación de equivalencia pero no es una congruencia

(b) es una congruencia

(c) no es de equivalencia y por tanto no puede ser congruencia

28.- En el anillo $\mathbb{Q}$ definimos la siguiente relación

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

(a) no es de equivalencia y por tanto no puede ser congruencia

(b) es congruencia

(c) es de equivalencia pero no es una congruencia

29.- Considera el morfismo $E_1 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, que evalua cada polinomio en 1, $E_1(f(x)) = f(1)$ y sea $I = \langle x-1 \rangle \leq \mathbb{Z}[x]$ el ideal generado por $x-1$. Entonces:

(a) ninguna de las otras opciones es correcta

(b) $I \subseteq \ker(E_1)$ y $\mathbb{Z}[x]/\ker(E_1) \cong \mathbb{Z}$

(c) $I \subseteq \ker(E_1)$ y $\mathbb{Z}[x]/\ker(E_1) \cong \operatorname{Im}(E_1) \neq \mathbb{Z}$

30.- En el anillo de los polinomios $\mathbb{Z}[x]$ considera el conjunto P con elementos los polinomios de grado par, notar que los polinomios constantes tienen grado cero que es par

(a) P no es un ideal pero si es un subanillo
(b) P no es ideal y tampoco es un subanillo
(c) P es un ideal pero no es un subanillo

31.- El cuerpo de los números complejos
(a) aunque es infinito, solo tiene un número finito de ideales y número finito de subanillos
(b) es infinito y tiene infinitos ideales e infinitos subanillos
(c) solo tiene dos ideales, que son el trivial y el total, pero tienen infinitos subanillos

32.- Sea A un anillo
(a) todo ideal de A tiene el cero y puede haber ideales que tienen al 1 sin que sean el propio anillo
(b) todo ideal de A tiene el cero y el único ideal que tiene al 1 es el propio anillo
(c) todo ideal de A tiene al cero y al 1

33.- Dados dos ideales $I, J \leq A$
(a) la intersección $I \cap J$ no es un ideal pero la unión $I \cup J$ sí lo es
(b) ni la intersección $I \cap J$ ni la unión $I \cup J$ son ideales
(c) la intersección $I \cap J$ es un ideal pero la unión $I \cup J$ no lo es

34.- Elige la correcta
(a) Todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales pero hay ideales de $\mathbb{Q}$ que no lo son
(b) Todos los ideales de $\mathbb{Q}$ son principales pero hay ideales de $\mathbb{Z}$ que no son principales
(c) Todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$ son principales

35.- Considera la aplicación $T : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ que asocia a cada polinomio su término independiente (aquel que no tiene x) y el ideal $I = \langle x \rangle \leq \mathbb{Z}[x]$ generado por x
(a) es un morfismo de anillos que además induce un morfismo $\bar{T} : \mathbb{Z}[x]/I \to \mathbb{Z}$, tal que $\bar{T}\left(\overline{f(x)}\right) = T(f(x))$
(b) es un morfismo de anillos que no induce un morfismo $\bar{T} : \mathbb{Z}[x]/I \to \mathbb{Z}$, tal que $\bar{T}\left(\overline{f(x)}\right) = T(f(x))$
(c) no es morfismo

36.- En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ considera el ideal I generado por el elemento i, entonces:
(a) $I = \{ni : n \in \mathbb{Z}\}$
(b) ninguna de las otras opciones es cierta
(c) $I = \mathbb{Z}[i]$

37.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) Existen $n \in \mathbb{Z}$ tal que 6 no es un divisor de $n^3 - n$
b) $6 \mid n^3 - n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
c) $6 \mid n^3 - n$ unicamente para $n \in \mathbb{N}$

38.- El anillo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$ tiene
a) 27 unidades
b) 12 unidades
c) 14 unidades

39.- Sea A un anillo conmutativo. Elegir la respuesta correcta:
a) $U(A[x]) \subsetneq U(A)$
b) $U(A[x]) = U(A)$
c) $U(A[x]) \supseteq U(A)$

40.- Sea $X = \left\{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \in 2\mathbb{Z}\right\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) X es un ideal de $Z[x]$
b) X no es subanillo ni ideal de $Z[x]$

c) X es un subanillo de $Z[x]$

41.- El resto de dividir 12^{39} entre 13 es

a) 12

b) 0

c) 13

42.- Sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ e $Y = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x] \,:\, p(\alpha) = 0\}$ Entonces:

a) Y es un ideal no nulo de $\mathbb{Q}[x]$

b) $Y = 0$

c) $Y \neq \emptyset$, pero no es un ideal de $\mathbb{Q}[x]$

43.- En el anillo $\mathbb{Z}_5[x]$ el máximo común divisor de los polinomios $x^3 + x^2 + x + 1$ y $2x^2 + 3$ tiene grado

a) 2

b) 1

c) 0

44.- En el anillo $\mathbb{Z}_3[x]$ sea I el ideal generado por el polinomio $x^3 + 2x^2 + x + 1$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\left(x^2 + 2x + 2\right) + I$ es una unidad de $\mathbb{Z}_3[x]/I$ con inverso $\left(x^2 + 2\right) + I$

b) $\left(x^2 + 2x + 2\right) + I$ no es una unidad de $\mathbb{Z}_3[x]/I$

c) $\left(x^2 + 2x + 2\right) + I$ es una unidad de $\mathbb{Z}_3[x]/I$ con inverso $\left(x^2 + 1\right) + I$

45.- Sea A un $D.I.$ y $a \in A$ un elemento con $a \neq 0$ y $a \neq 1$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si el conjunto $\{a^n / n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces A es un cuerpo

b) Siempre las potencias a^n, con $n \in \mathbb{N}$, son distintas entre sí

c) Si $a^n = a^m$ para $n, m \geq 1$, con $m \neq n$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$, no nulo tal que $a^r = 1$

46.- El número de soluciones enteras en el intervalo $[-1000, 1000]$ del sistema

$$x \equiv 11 \mod 15$$

$$x \equiv 6 \mod 35$$

es

a) 19

b) 20

c) 18

47.- Sea $f : \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2$ definida por $f((a + bi) + 2\mathbb{Z}[i]) = (a - b) + 2\mathbb{Z}$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) f está bien definida pero no es un homomorfismo de anillos

b) f no es una aplicación bien definida

c) f está bien definida y es un homomorfismo de anillos

48.- La ecuación $2x \equiv i \mod (2 + i)$

a) Tiene una única solución en $\mathbb{Z}$

b) Tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$

c) No tiene solución en $\mathbb{Z}$