Examen temas 1 a 4 de Cálculo I Grupo 1º B Matemáticas

El examen deberá hacerse razonadamente y desarrollando todos los cálculos necesarios que deberán quedar reflejados en el examen.

1. Define ínfimo y minimo de un conjunto minorado.

   Enuncia y demuestra el teorema de existencia de ínfimo de un conjunto minorado.

   Relación entre el ínfimo y el mínimo.

2. Enuncia la desigualdad de las medias. Como aplicación demuestra que para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se tiene que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

3. ¿Es numerable el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$? Justifica la respuesta.

4. Demuestrese si $\sqrt{12}$ es racional o irracional.

   ¿Qué puede afirmarse de la suma y el producto de números irracionales?

5. Dado el conjunto $A = \{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q} : p, q \in \mathbb{N}\}$, halla, si existe, su infimo, supremo, mínimo y máximo.

Granada a 3 de noviembre de 2021.

1) $A \subset \mathbb{R}$ está minorado si $\exists m \in \mathbb{R} \mid m \leq a \quad \forall a \in A$.
$A \subset \mathbb{R}$ tiene mínimo si $\exists m \in A \mid m \leq a \quad \forall a \in A$.

Teorema. Todo conj minorado tiene ínfimo

Dem. Sea $A \neq \emptyset$ minorado
Sea $B = Min(A)$ el conjunto de los minorantes de A
Luego $b \leq a \quad \forall b \in B \quad \forall a \in A$
Así por el axioma del continuo $\exists x \in \mathbb{R} \mid$
$$b \leq x \leq a \quad \forall b \in B \quad \forall a \in A.$$
Luego x es un minorante de A
y es el mayor minorante de A
o sea $x = \inf(A)$

Relación:

$\alpha = \inf(A)$ sii $\begin{cases} \alpha \leq a \quad \forall a \in A \\ \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \end{cases}$ $\alpha = \min(A)$ sii $\begin{cases} \alpha \leq a \quad \forall a \in A \\ \alpha \in A \end{cases}$

Todo conj. minorado tiene ínfimo. mínimo si el ínfimo está en A, en cuyo caso $\min(A) = \inf(A)$

2) Desigualdad de las medias
Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene que
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
y $=$ si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

Probar que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Tomemos $x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad \ldots \quad x_n = n$.
Entonces $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{2 \cdot \cancel{n}}$
Así elevando a n: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

③ Sea $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$.
Veamos que $\mathcal{F}$ es numerable
Todo subconjunto finito A de $\mathbb{N}$ tiene máximo m.
Luego $A \in P(I_m)$ y $P(I_m)$ tiene 2^m elementos,
o sea es finito.

Por tanto $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} P(I_m)$, que es una unión numerable de conjuntos finitos,
y por tanto numerable.

④ ¿$\sqrt{12} \in \mathbb{Q}$?
Si $\sqrt{12} = \frac{p}{q}$ p, q primos entre sí, entonces

$12 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 12 \cdot q^2 = p^2$; esto es $3 \cdot 2^2 \cdot q^2 = p^2$, luego
p^2 es múltiplo de 3, y por tanto p es múltiplo de 3.
Pero entonces $q^2 = \frac{p^2}{3 \cdot 2^2}$ también será múltiplo de 3
ya que en p^2 estará 3^n $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$.
Y si p^2 es múltiplo de 3, también lo será p.
En resumen hemos llegado a la contradicción de que tanto p como q son múltiplos de 3, en contra de la suposición inicial de que eran primos entre sí.

⑤ $A = \{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q} ; p, q \in \mathbb{N}\}$.
A está minorado por 0 ya que $0 < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q}$ $\forall p, q \in \mathbb{R}$
Además, $0 = \inf(A)$. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists p, q \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\frac{1}{3^q} < \frac{\varepsilon}{2}$
luego $A \ni \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, esto es, cualquier número positivo no es un minorante
$0 = \inf(A)$ pero A no tiene mínimo pues $0 \notin A$.
A está mayorado por $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ya que

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Además $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \in A$, luego $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \max(A) = \sup(A)$