ex-resuelto-extraord-2020.pdf

fisikk

Álgebra Lineal y Geometría I

1º Grado en Física

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I (Grado en Física)

Examen: Convocatoria Extraordinaria (03/02/2020)

1. Sea $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual que tres y coeficientes reales. En él se consideran los dos siguientes subespacios vectoriales

$$W_1 = L(\{1 + 2t - 3t^2 + t^3\}), \qquad W_2 = \left\{ P(t) \in V : \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = 0 \right\}$$

   a) **(2 puntos)** Calcula otros dos subespacios vectoriales U_1 y U_2 de V, distintos de los anteriores y tales que

$$U_1 \cap U_2 = W_1, \qquad \text{y} \qquad U_1 + U_2 = W_2.$$

   b) **(1 punto)** ¿Son únicos los subespacios U_1 y U_2?

2. Consideremos el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales simétricas de orden 2.

   a) **(2 puntos)** Calcula un endomorfismo cuyo núcleo esté generado por la matriz identidad y cuya imagen sea el subespacio de las matrices simétricas de traza nula.

   b) **(2 puntos)** Sabemos que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $S_2(\mathbb{R})$; halla la base dual B^* de la base B y calcula las coordenadas en la base B^* de la forma lineal ϕ tal que $\phi(A) = \text{traza}(A)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que los vectores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,1)$ son vectores propios de f.

   a) **(1 punto)** ¿Es f diagonalizable?

   b) **(1 punto)** Calcula los autovalores de f sabiendo que $f(1,1,1) = (2,0,1)$.

   c) **(1 punto)** Halla la matriz de f en la base canónica.

Duración del examen: 3 h.

Extraordinario 2020

① $V = P_3(\mathbb{R})$ $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4$

$W_1 = L(\{1+2t-3t^2+t^3\})$ $W_2 = \{p(t) \in V : \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = 0\}$

en base canónica $B_c\{1, x, x^2, x^3\}$

$W_1 = \{(1,2,-3,1)\}$

$W_2 = \int_{-1}^{1} a + bt + ct^2 + dt^3\,dt = 0$; $\left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$;

; $\left[\cancel{a} + \cancel{\frac{b}{2}} + \cancel{\frac{c}{3}} + \cancel{\frac{d}{4}} - \left(-\cancel{a} + \cancel{\frac{b}{2}} - \cancel{\frac{c}{3}} + \cancel{\frac{d}{4}}\right)\right] = 0$;

; $2a + \frac{2}{3}c = 0$; $\dim(W_2) = 3$ porque $\underline{1} = 4 - \underline{3}$

$$\left.\begin{array}{l} a = \lambda \\ b = \beta \\ c = -3\lambda \\ d = \gamma \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (1,0,-3,0) \\ (0,1,0,0) \\ (0,0,0,1) \end{array}\right\} \quad W_2 = \{(1 0 -3 0)(0 1 0 0)(0 0 0 1)\} \text{ en } B_c$$

a). calcular U_1 y U_2 para que:

$U_1 \cap U_2 = W_1 \longrightarrow$ $U_1 = \{(1 2 -3 1), (\ldots)\}$ comparten el mismo

$U_1 + U_2 = W_2$ $U_2 = \{(1 2 -3 1), (\ldots)\}$ vector de W_1

Uniendo bases tienen que formar W_2 con Dim 3,

por tanto U_1 y U_2 tienen que tener Dim 2 ambos

(pq comparten 1 vector):

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \{(1 2 -3 1)(0 1 0 0)\} \\ U_2 = \{(1 2 -3 1)(0 0 0 1)\} \end{array}\right] \; W_2 \quad \boxed{U_1 + U_2 = \{(1 2 -3 1)(0 1 0 0)(0 0 0 1)\}}$$

b). U_1 y U_2 no son únicos porque aunque tengan que compartir el vector (1 2 -3 1) el otro puede escogerse entre infinitas posibilidades siempre que cumpla $U_1+U_2=W_2$, es decir, siempre que formen una base de Dim 3.

2. Espacio vectorial de las matrices reales simétricas de orden 2.

$S_2(\mathbb{R})$ $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} a=a \to x \\ b=c \to y \\ d=d \to z \end{array}$ $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

Dim 3 — 3 parámetros libres.

a). Dim 1
Kerf es la matriz identidad: $\boxed{Ker f = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}}$

Im f $tr(A)=0 \Rightarrow a+d=0$ $\begin{array}{l} x=z=0 \\ x=1 \\ z=-1 \end{array}$ $\boxed{Im f = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}}$

Dim 2

$B_{S_2} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$

Kerf sobre B_{S_2} = $\{(1 1 0)\}$

Im f sobre B_{S_2} = $\{(0 0 1)(-1 1 0)\} = B'$

ampliamos bases: Kerf $= \{(1 1 0) \overbrace{(0 0 1)(1 0 0)}^{\text{añadidos}}\} = \bar{B}$

$f(110) = (0 0 0)$
$f(001) = (0 0 1)$
$f(100) = (-1 1 0)$

$M(f, \bar{B}, B') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-z, z, y)$

2.

b) $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e^1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e^3} \right\}$ sobre $BS_2 = \{(110)(-110)(001)\}$

Hallar B^* asociada a B:

$$B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$$

φ^1: $\quad \varphi^1: \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ -x+y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

φ^2: $\quad \varphi^2: \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ -x+y=1 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

φ^3: $\quad \varphi^3: \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ -x+y=0 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \quad (0\,0\,1)$

B^* asociada a B sobre (BS_2):

$$B^* = \{ \underbrace{(\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0)}_{\varphi^1} \underbrace{(-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0)}_{\varphi^2} \underbrace{(001)}_{\varphi^3} \}$$

$\varphi^1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$\varphi^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$\varphi^3 = z$

$$\Phi(A) = \text{Traza}(A) = x + z \Rightarrow \Phi(A) = \begin{array}{ccc} \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \\ \end{array} \left(1 \;\; -1 \;\; 1 \right)$$

3.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal con vectores:

$v_1(1,1,0)$, $v_2(011)$, $v_3(101)$ son vect. propios de f.

a). Esto significa que esos vectores pertenecen a un subespacio propio, que debe ser base. Entonces para comprobar que sea diagonizable habrá que comprobar que son l.i:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-(0+0+0) = 2 \neq 0 \quad \text{sí son l.i, y } f$$

es diagonizable.

3.

b) calcula autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de f sabiendo que $f(111) = (210)$.

$B(d) = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\qquad f(v_1) = \lambda_1 v_1 \qquad (a\,b\,c) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$(111) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$f(111) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) = \alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2 + \gamma \lambda_3 v_3 = (201)$

Para calcular α, β, γ:

$$(111) = \alpha(110) + \beta(011) + \gamma(101) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \alpha + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \beta + \gamma \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array}$$

Para calcular $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (110) + \lambda_2 \cdot \tfrac{1}{2}(011) + \lambda_3 \cdot \tfrac{1}{2}(101) = (201)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{1}{2} \; ; \\ 0 = \lambda_1 \frac{1}{2} + \lambda_2 \frac{1}{2} \; ; \\ 1 = \lambda_2 \frac{1}{2} + \lambda_3 \frac{1}{2} \; ; \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}}$$

c) f en Bcanónica:

$$\begin{tikzcd} B_d \arrow[r, "f_d"] & B_d \arrow[d, "P^{-1}"] \\ B_c \arrow[u, "P"] \arrow[r, "f_c"] & B_c \end{tikzcd}$$

$$\boxed{f_c = P^{-1} \cdot f_d \cdot P} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \end{array}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$