Geometría II
Grado en Matemáticas

Convoctoria ordinaria de junio (6/06/2019)

1. (2'5 PUNTOS) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que en la base usual tiene por matriz a

$$M(f,B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) (1 PUNTO)Probar que f es una isometría de $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ (producto escalar usual).

   b) (1'5 PUNTOS) Clasificar f.

2. (2'5 PUNTOS) En $\mathbb{R}^2$, se considera la métrica dada por

$$g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2^{\alpha^2}x_1y_1 + 2^{\alpha\beta}(x_1y_2 + x_2y_1) + 2^{\beta^2}x_2y_2, \qquad \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

   donde α, β son parámetros reales.

   a) (1'5 PUNTOS) Calcular la signatura y clasifica la métrica g en función de a y b.

   b) (1 PUNTO) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$.

3. (2'5 PUNTOS) Sea A una matriz simétrica real y ortogonal de orden n. Probar que si n es impar, entonces la traza de A no puede anularse.

4. (2'5 PUNTOS) Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y f un endomofismo de V tal que $f^2 - (a+b)f + ab \cdot 1_V = 0$, donde a, b son números reales distintos. Probar que f es diagonalizable.