Convocatoria extraordinaria - Geometría II
1º Grado en Matemáticas
11 de julio 2018

Apellidos y nombre: ______________________________ Grupo __________

1) En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica dada por

$$g(A,C) = \det(A+C) - \det(A-C)\,, \quad A, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

a) (1 PUNTO) Calcula la matriz de g en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}\,.$$

b) (1 PUNTO) Encuentra una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la que g adopte su matriz de Sylvester. Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g.

c) (1 PUNTO) Sea f el endomorfismo de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$ dado por $f(A) = P^{-1}AP$, para P una matriz regular en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comprueba que f es una isometría de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$.

2) (2,5 PUNTOS) Prueba que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe una única matriz $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\text{traza}(A_0) = 0$ tal que

$$A = \frac{\text{traza}(A)}{n} I_n + A_0\,,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Además A es diagonalizable si y sólo si A_0 es diagonalizable. ¿Qué relación hay entre los valores propios de A y de A_0? ¿Y entre los vectores propios?

3) En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g, cuya matriz en una base $B = \{e_1, e_2\}$ es

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) (0,5 PUNTOS) Comprueba que g es una métrica euclídea.

b) (1,5 PUNTOS) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(e_1) = 3e_1 - 2e_2$, $\det(f) = -5$ y f es autoadjunto respecto de g. Halla una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$ formada por vectores propios de f.

4) (2,5 PUNTOS) Sean (V, g) un espacio métrico euclídeo con $\dim(V) \geq 2$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, k vectores distintos de V, $k \leq \dim(V)$. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

b) $\det(M) = 0$, donde $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ es la matriz cuadrada de orden k cuya entrada (i,j) es $m_{i,j} = g(v_i, v_j)$.