Astronomie
Cursul 2 - Coordonate ecliptice
Transformări de coordonate

Cristina Blaga

13 octombrie 2025

Coordonate ecliptice

- Plan fundamental - *ecliptica* - cerc mare al sferei cereşti, obţinut la intersecţia planului orbitei aparente a Soarelui pe boltă cu sfera cerească.
- Punct nul - punctul vernal.
- Poli - polul ecliptic nord (Π - constelaţia Dragonul) şi polul ecliptic sud (Π' - constelaţia Peştele de Aur).
- La noi $h_\Pi = 90^\circ - \epsilon$.

Coordonate ecliptice (λ, β)

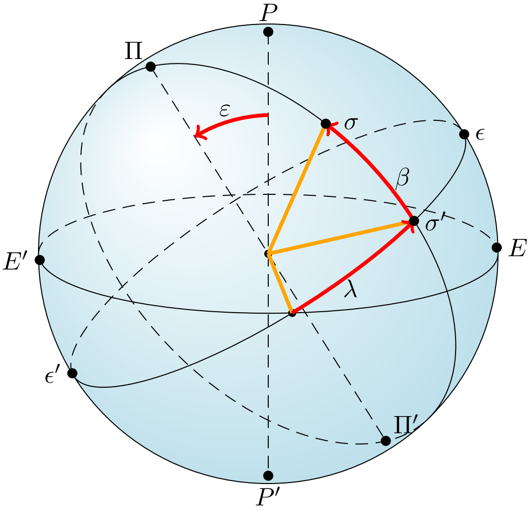

Figura: Coordonate ecliptice

Longitudinea şi latitudinea ecliptică

- *Longitudinea ecliptică* λ unghiul diedru dintre meridianul ecliptic al astrului şi meridianul ecliptic al lui γ. Se măsoară de la punctul vernal, pozitiv spre est.
- Latitudinea ecliptică a astrului β - unghiul dintre planul eclipticii şi direcţia spre astru. Pozitivă înspre polul ecliptic nord.

Triunghiul sferic

- Pentru a se trece de la un sistem de coordonate la altul se folosesc formulele care dau legătura dintre măsurile laturilor şi măsurile unghiurilor unui triunghi sferic.
- Laturile unui triunghi sferic sunt arce ale unor cercuri mari de pe sferă.
- Măsura laturii triunghiului sferic este măsura unghiului la centru corespunzător laturii triunghiului.

Măsura unghiului triunghiului sferic

- Prin definiţie, măsura unghiului triunghiului sferic este egală cu unghiul dintre tangentele la laturile triunghiului în vârful unghiului.
- Cercurile mari ale sferei perpendiculare pe un cerc mare au un diametru comun, capetele diametrului sunt numite **polii** cercului mare dat.
- **Măsura unghiului sferic** este măsura arcului, din interiorul unghiului, determinat de laturile unghiului pe cercul mare al sferei pentru care vârful unghiului este pol.

Triunghiul sferic

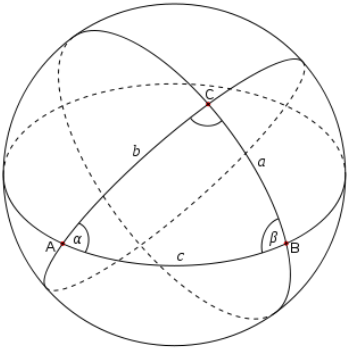

Figura: Triunghiul sferic

- Considerăm *ABC* un triunghi al unei sfere. Notăm cu *A*, *B* şi *C* măsura unghiurilor triunghiului şi cu *a*, *b*, *c* măsura laturilor lui.
- Între laturile şi unghiurile triunghiului au loc relaţiile cunoscute sub numele de *formulele lui Gauss*.

Formulele lui Gauss

- Între laturile şi unghiurile triunghiului au loc relaţiile

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A \tag{1}$$

relaţie cunoscută sub numele de *formula (teorema) sinusurilor*,

- $$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \tag{2}$$

formula (teorema) cosinusului, respectiv

- $$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A, \tag{3}$$

formula (teorema) celor cinci elemente.

Înălţimea Polului ceresc deasupra orizontului

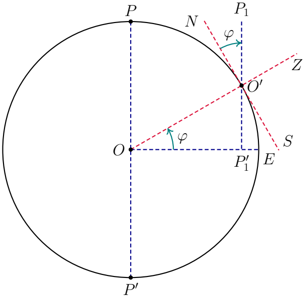

Figura: Sfera terestră, axa lumii şi verticala locului

Pentru observatorul terestru din O', aflat la latitudinea geografică nordică φ

- OZ reprezintă verticala locului.
- $P_1P_1' \parallel PP'$, PP' - axa de rotaţie a Pământului), iar
- NS este direcţia nord-sud.

$h_P = \varphi$

- Axa lumii este perpendiculară pe ecuator, direcţia *NS* este perpendiculară pe verticala locului.
- $\Rightarrow$ unghiul dintre axa lumii şi direcţia *NS* este egal cu unghiul dintre ecuator şi verticala locului, ca unghiuri cu laturile perpendiculare.

Teoremă

Pentru un observator din emisfera nordică, aflat la latitudine geografică φ, înălţimea deasupra orizontului a Polului ceresc nord, măsurată de la Nord, este egală cu latitudinea observatorului

$$h_P = \varphi.$$

$h_{P'} = \varphi$

Analog se poate demonstra următoarea

Teoremă

În emisfera sudică, pentru un observator aflat la latitudine geografică sudică φ, înălţimea deasupra orizontului a Polului ceresc sud, măsurată de la Sud, este egală cu latitudinea observatorului

$$h_{P'} = \varphi.$$

Transformarea coordonatelor orizontale în orare

- Pentru a transforma coordonatele orizontale ale unui astru (A, h), observat din emisfera nordică, în coordonate orare (H, δ) folosim *triunghiul nautic* al astrului: $PZ\sigma$, unde P este polul ceresc nord, Z - punctul de la Zenit, iar σ - astrul considerat.

Triunghiul nautic al astrului

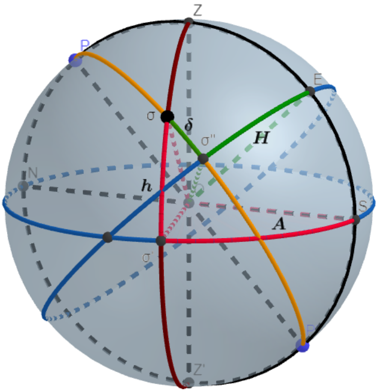

Figura: Coordonatele orizontale şi orare ale astrului

- (A, h) sunt coordonatele orizontale ale astrului
- (H, δ) sunt coordonatele orare ale astrului
- În emisfera nordică

$$h_P = \varphi\,.$$

Triunghiul nautic al astrului σ

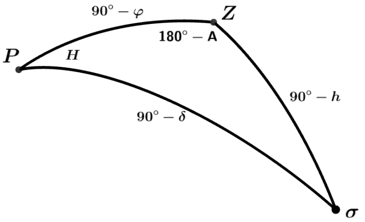

Figura: Triunghiul nautic al lui σ

- Unghiurile triunghiului $m(\widehat{PZ\sigma}) = 180^\circ - A$, $m(\widehat{ZP\sigma}) = H$, $m(\widehat{P\sigma Z}) = \eta$ unghiul paralactic al stelei.
- Laturile triunghiului
  $PZ = 90^\circ - \varphi$,
  $P\sigma = 90^\circ - \delta$,
  $Z\sigma = 90^\circ - h$.

Transformarea coordonatelor orizontale în orare

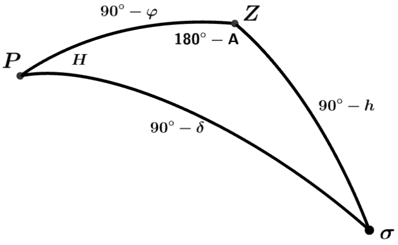

Figura: Triunghiul nautic

- Se dau A, h şi φ, adică ştim $m(\widehat{PZ\sigma})$, $m(PZ)$ şi $m(Z\sigma)$.
- Se cer H şi δ, adică $m(\widehat{ZP\sigma})$, $m(P\sigma)$.
- Pentru a afla elementele necunoscute cu ajutorul formulelor lui Gauss, latura necunoscută se notează cu a şi unghiul necunoscut cu $B \Rightarrow a = P\sigma$, iar $B = \widehat{ZP\sigma}$.

Declinaţia

- Teorema cosinusului pentru latura $P\sigma$ ne conduce la

$$\sin\delta = \sin h \cdot \sin\varphi - \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \cos A \tag{4}$$

ecuaţie trigonometrică din care putem afla declinaţia astrului, unghi cuprins între -90° şi 90°.

Unghiul orar

Celelalte două formule (1) şi (3) devin

$$\cos\delta \cdot \sin H = \cos h \cdot \sin A \tag{5}$$

$$\cos\delta \cdot \cos H = \sin h \cdot \cos\varphi + \cos h \cdot \sin\varphi \cdot \cos A \,. \tag{6}$$

Dacă membrii ecuaţiei (6) sunt diferiţi de zero, unghiul orar al astrului se află din

$$\mathrm{tg} H = \frac{\sin A}{\sin\varphi \cdot \cos A + \cos\varphi \cdot \mathrm{tg} h} \tag{7}$$

ecuaţie trigonometrică obţinută prin împărţirea relaţiei (5) la (6).

Stabilirea unghiului orar

- Pentru a afla unghiul orar al astrului dat alegem din mulţimea soluţiilor ecuaţiei (7), soluţia cuprinsă între 0^h şi 24^h, corespunzătoare azimutului dat sau semnelor funcţiilor $\sin H$ şi $\cos H$ determinate cu ajutorul relaţiilor (5) şi (6).
- De exemplu, dacă tangenta unghiului este pozitivă, atunci soluţiile ecuaţiei trigonometrice sunt cuprinse între 0^h şi 6^h sau 12^h şi 18^h. Unghiul orar este în primul interval dacă azimutul astronomic al astrului este între 0° şi 90°, unghiul orar este în al doilea interval dacă valoarea dată a lui A este între 180° şi 270°.

Cazuri particulare

- Dacă unul dintre membrii ecuaţiei (6) este zero, împărţirea celor două relaţii nu poate fi efectuată şi unghiul orar al astrului se află prin următorul raţionament: dacă membrul stâng al ecuaţiei (6) este zero, atunci $\cos\delta = 0$.
- În consecinţă $\delta = \pm 90^\circ$, astrul se află la Polul ceresc nord sau sud şi unghiul lui orar nu este definit, pentru că toate cercurile orare trec prin polii cereşti.
- Dacă membrul drept al ecuaţiei este zero şi $\cos\delta \neq 0$, atunci $\cos H = 0$. Înseamnă că $H = 6^h$ dacă $\sin H$ calculat cu ajutorul relaţiei (5) este pozitiv sau $H = 18^h$ dacă $\sin H$ este negativ.

Transformarea coordonatelor orare în orizontale

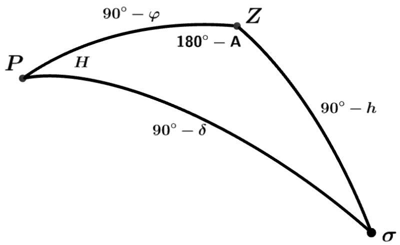

Figura: Triunghiul nautic

- Se dau H, δ şi φ, adică ştim $m(\widehat{ZP\sigma})$, $m(PZ)$ şi $m(P\sigma)$.
- Se cer A şi h, adică $m(\widehat{PZ\sigma})$, $m(Z\sigma)$.
- În formulele lui Gauss vom considera latura necunoscută $a = Z\sigma$ şi unghiul necunoscut $B = \widehat{PZ\sigma}$.

Înălţimea deasupra orizontului

- Din teorema cosinusului pentru latura $Z\sigma$ găsim:

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H \tag{8}$$

ecuaţie din care aflăm înălţimea deasupra orizontului, unghi ce poate lua valori între -90° şi 90°.

Azimutul astrului

Din teorema sinusurilor şi a celor cinci elemente obţinem

$$\cos h \cdot \sin A = \sin H \cdot \cos \delta \tag{9}$$

$$\cos h \cdot \cos A = \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos H - \sin \delta \cdot \cos \varphi\,. \tag{10}$$

relaţii care, dacă pot fi împărţite, ne conduc la

$$\mathrm{tg} A = \frac{\sin H}{\sin \varphi \cdot \cos H - \mathrm{tg}\delta \cdot \cos \varphi} \tag{11}$$

ecuaţie din care putem afla azimutul astrului de coordonate orare date, observat dintr-un loc de latitudine cunoscută. Pentru a decide care dintre soluţiile ecuaţiei de mai sus este azimutul căutat stabilim cadranul în care se află astrul folosind unghiul orar dat sau ţinând seama că acesta este soluţia comună a ecuaţiilor (9) şi (10).

Cazuri particulare

- Dacă membrul stâng sau drept al ecuaţiei (10) este zero, nu putem împărţi ecuaţia (9) la (10) şi azimutul astrului se află prin următorul algoritm: dacă membrul stâng al ecuaţiei este zero atunci $\cos h = 0$. Rezultă că $h = \pm 90^\circ$ adică astrul se află la Zenit sau la Nadir şi azimutul lui nu este definit, pentru că toate cercurile verticale trec prin aceste puncte.
- Dacă membrul drept al ecuaţiei este zero şi $\cos h \neq 0$, atunci $\cos A = 0$, ecuaţie verificată de $A \in \{90^\circ, 270^\circ\}$. Calculând $\sin A$ cu ajutorul relaţiei (9) sau folosind valoarea dată a unghiului orar stabilim care dintre cele două valori reprezintă azimutul astrului dat.

Răsăritul şi apusul aştrilor

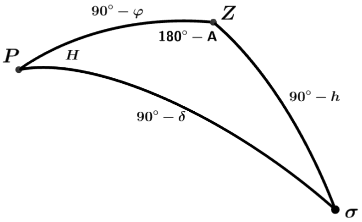

Figura: Triunghiul nautic al astrului

- La răsăritul şi apusul astrului: $h = 0^\circ$.
- Când astrul răsare $A \in [180^\circ, 360^\circ]$ şi $H \in [12^h, 24^h]$.
- Când astrul apune $A \in [0^\circ, 180^\circ]$ şi $H \in [0^h, 12^h]$.

Azimutul punctelor de răsărit şi apus a astrului

Azimutul astronomic al punctelor de răsărit şi apus ale astrului σ se află din triunghiul nautic $PZ\sigma$ scriind teorema cosinusului (2) pentru latura $P\sigma$. Ea ne conduce la ecuaţia trigonometrică

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\,. \tag{12}$$

- Ecuaţia (16) admite soluţii dacă membrul drept este cuprins între -1 şi 1, condiţie îndeplinită când declinaţia astrului şi latitudinea observatorului verifică (15).
- Dacă notăm cu A soluţia ecuaţiei trigonometrice (16) cuprinsă între 0° şi 180°, atunci $360^\circ - A$ verifică ecuaţia (16), A este azimutul punctului de apus, iar $360^\circ - A$ azimutul punctului de răsărit al astrului considerat.