Material bibliografic pentru cursul 11

Analiză complexă (Notițe de curs)

Șiruri și serii de funcții complexe

Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții complexe definite pe mulțimea G.

(i) Șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent simplu (punctual) pe G dacă șirul numeric $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, $\forall z \in G$.

(ii) Șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent uniform pe G către funcția $f: G \to \mathbb{C}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0, \ \forall z \in G.$$

(iii) Șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent uniform pe compacte către funcția $f: G \to \mathbb{C}$ dacă $\forall K \subset G$ compact, șirul restricțiilor $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent uniform pe K către $f|_K$ (restricția funcției f la K).

Notații: $f_n \xrightarrow{s} f$ (convergență simplă)

$f_n \overset{G}{\rightrightarrows} f$ (convergență uniformă)

$f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$ (convergență uniformă pe compacte).

⊙ $f_n \overset{G}{\rightrightarrows} f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow{s} f.$

Rezultatul principal al acestei secțiuni este prezentat în cele ce urmează.

T1 (Weierstrass) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții olomorfe pe G. Dacă $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$, atunci $f \in \mathcal{H}(G)$ și $f_n^{(k)} \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f^{(k)}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Demonstrația acestui rezultat poate fi găsită în [1].

Serii de funcții complexe

Def 2. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă. Numim serie de funcții complexe pe G o serie de forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

unde $f_n : G_n \supseteq G \to \mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Fie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirul sumelor parțiale, deci $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, $n\in\mathbb{N}$.

⊙ Spunem că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ este convergentă (simplu/uniform pe compacte/uniform) dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent (simplu/uniform pe compacte/uniform) pe G.

Fie $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Limita $s : G \to \mathbb{C}$ a șirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este suma seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ și notăm

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad \text{sau} \quad s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),\ z\in G.$$

În cazul seriilor de funcții olomorfe, are loc următorul rezultat.

T2 (t. Weierstrass pentru serii de funcții olomorfe)

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ o serie de funcții olomorfe pe G, care converge uniform pe compacte în G către suma $s: G \to \mathbb{C}$.

Atunci au loc afirmațiile:

(i) $s \in \mathcal{H}(G)$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = s^{(k)}(z)$, $\forall z \in G$, $k \in \mathbb{N}$,

unde convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ este uniformă pe compacte în G.

⊙ În continuare ne vom referi la un caz important de serii de funcții olomorfe, cu multiple aplicații în teoria funcțiilor analitice.

Caz particular

Considerăm seria de puteri în jurul lui $z_0 \in \mathbb{C}$

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots,$$

unde $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$.

T3 (Cauchy – Hadamard)

Fie seria de puteri (1) și $R \in [0, +\infty]$ numărul:

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \left(= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right).$$

Atunci au loc afirmațiile:

(i) Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci seria de puteri (1) este convergentă uniform pe compacte în discul $U(z_0,R)$ și e divergentă pe $\mathbb{C}\setminus\overline{U}(z_0,R)$.

Fie $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $\forall z\in U(z_0,R)$.

Atunci $S\in \mathcal{H}(U(z_0,R))$ și

$$(3)\quad S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1},\ \forall z\in U(z_0,R).$$

În plus, raza de convergență a seriei derivate $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$ este R.

(ii) Dacă $R=0$, atunci seria (1) este divergentă pe $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

(iii) Dacă $R=+\infty$, atunci seria (1) este convergentă uniform pe compacte în $\mathbb{C}$.

⊙ Dacă R este numărul dat de relația (2), atunci R se numește raza de convergență a seriei de puteri (1).

Dacă $R>0$, atunci $U(z_0,R)$ este discul de convergență al seriei (1).

<u>Obs</u>: (i) Fie $R=$ raza de convergență a seriei (1). Dacă $R\in(0,\infty)$, atunci deducem din Teorema lui Cauchy-Hadamard că R este raza maximă a discului centrat în z_0, în care seria de puteri (1) este convergentă uniform pe compacte.

(ii) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\ell$, atunci $R=\frac{1}{\ell}$, unde R este raza de convergență a seriei (1).

(iii) Fie $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z\in U(z_0,R)$, unde R este definit de (2). Atunci $a_0=S(z_0)$, iar din (3) rezultă că $a_1=S'(z_0)$.

În plus,

$$S''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2},\ \forall z\in U(z_0,R),$$

deci $a_2=\frac{S''(z_0)}{2}$.

În continuare, obținem printr-un raționament inductiv că

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},\ \forall z\in U(z_0,R),$$

deci $a_k=\frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Prin urmare,

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ \forall z\in U(z_0,R).$$

Așadar, pe discul de convergență $U(z_0,R)$, seria de puteri (1) se reduce la o serie Taylor.

Legătura dintre funcțiile olomorfe și seriile de puteri

(T4) (Taylor) (t. dezvoltării în serie Taylor)

Dacă $f\in\mathcal{H}(U(z_0,r))$, atunci există o unică serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ cu raza de convergență R, astfel ca $R\geq r$ și

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ \forall z\in U(z_0,r).$$

În plus, $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \rho\in(0,r)$,
unde $\gamma_\rho(t)=z_0+\rho e^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$.

Def 3. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Spunem că funcția f este analitică pe G dacă f se dezvoltă în serie de puteri în jurul oricărui punct $z_0 \in G$, adică $\forall z_0 \in G$, $\exists r > 0$ și o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ convergentă pe $U(z_0, r)$, astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ \forall z \in U(z_0, r).$$

Notăm cu

$$\mathcal{A}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ analitică pe } G\} -$$

mulțimea funcțiilor analitice pe G.

Putem acum prezenta următorul rezultat fundamental în teoria funcțiilor complexe.

T5 Dacă $G \subseteq \mathbb{C}$ e o mulțime deschisă, atunci

$$\mathcal{H}(G) = \mathcal{A}(G).$$

Demonstrație. "$\subseteq$". Fie $f \in \mathcal{H}(G)$. Atunci aplicăm Teorema 4 (Taylor), conform căreia $f \in \mathcal{A}(G)$. Într-adevăr, fie $z_0 \in G$, ales în mod arbitrar. Atunci $\exists r > 0$ astfel ca $U(z_0, r) \subseteq G$, iar din Teorema 4 deducem că $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in U(z_0, r)$, unde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, iar seria de puteri precedentă este convergentă uniform pe compacte în $U(z_0, r)$ (raza de convergență R satisface condiția $R \geq r$). Cum z_0 a fost ales în mod arbitrar din G, rezultă că f e analitică pe G.

„⊇" Fie $f \in \mathcal{A}(G)$ și $z_0 \in G$. Atunci $\exists\, r>0$ astfel încât $U(z_0, r)$ și există o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ convergentă pe $U(z_0,r)$, iar $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in U(z_0,r)$.

Notăm cu R = raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Deoarece această serie e convergentă pe $U(z_0,r)$, rezultă că $R \geq r$.

Fie $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in U(z_0,R)$.

Din Teorema lui Cauchy–Hadamard, deducem că $S \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$. Pe de altă parte, e clar că $S\big|_{U(z_0,r)} = f$, deci $f \in \mathcal{H}(U(z_0,r))$. În particular, f e derivabilă în z_0, care a fost ales în mod arbitrar din G. Deci $f \in \mathcal{H}(G)$. $\square$

Obs. Echivalența dintre noțiunile de olomorfie și analiticitate nu are loc în cazul funcțiilor reale de o variabilă reală.

Ex. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$

Atunci $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, dar nu e analitică pe $\mathbb{R}$, deoarece f nu e identic nulă pe $\mathbb{R}$.

⊙ Remarcăm în continuare următorul criteriu de convergență, valabil în cazul seriilor de funcții complexe.

P1 (criteriul comparației)(Weierstrass)

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $\sum_{n\in\mathbb{N}}' f_n$ o serie de funcții complexe pe G. Fie $E \subseteq G$. Dacă există o serie convergentă de numere pozitive $\sum_{n\in\mathbb{N}}' a_n$ și dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca $|f_n(z)| \le a_n$, $\forall z\in E$, $\forall n \ge n_0$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}}' f_n$ e convergentă uniform pe mulțimea E.

Dezvoltări în serii de puteri clasice

(i) $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$, $\forall z \in U(0,1)$.

(i') $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots$, $\forall z \in U(0,1)$.

(ii) $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dots + \dfrac{z^n}{n!} + \dots$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \dots$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(iv) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} + \dots$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(v) Fie $f : U(0,1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = (1+z)^\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$, iar $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$, $\forall z \in U(0,1)$, log fiind determinarea principală (ramura principală) a funcției multivoce Log pe $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Atunci $f \in \mathcal{H}(U(0,1))$ și are loc dezvoltarea în serie de puteri (seria binomială complexă)

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot z^n, \quad \forall z \in U(0,1)$$

Temă: 1) Să se dezvolte în serie de puteri, după puterile lui z, funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z \cdot \sin z$.

2) Să se dezvolte în serie de puteri, după puterile lui z, funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos^4 z + \sin^4 z$. Să se determine raza de convergență a seriei obținute.

3) Să se determine raza de convergență a seriei de puteri în jurul lui $z_0 = i$, pentru funcția
$$f(z) = \frac{e^{z^3}}{(z-1)(z-2)^2(z-3)^3}.$$

Bibliografie: [1], [2], [4], [6], [7].