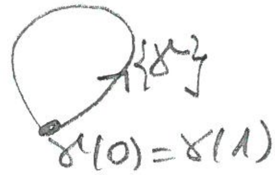
Analiza complexă (Notițe de curs)

Material bibliografic pentru cursurile 7-8.

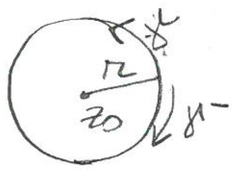
Interpretarea geometrică a derivatei

Def 1. Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ o funcție continuă.
Spunem că γ este un drum în planul complex $\mathbb{C}$.
$\gamma(0)$ s.n. punctul inițial al lui γ, iar $\gamma(1)$ s.n. punctul final al drumului γ.
Notăm $\{\gamma\} := \gamma([0,1])$ – suportul drumului γ.

Drumul γ s.n. închis dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$.



Ex. Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $\forall t \in [0,1]$.
Atunci $\{\gamma\} = \partial U(z_0, r) \Rightarrow \gamma$ e drum închis, de suport cercul cu centrul în z_0, de rază r, parcurs în sens direct (orientat în sens direct).



Def 2. Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un drum și $\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$.
γ^- se numește inversul (opusul) drumului γ.

Se observă că $\gamma^-(0) = \gamma(1)$, $\gamma^-(1) = \gamma(0)$, iar $\{\gamma^-\} = \{\gamma\}$.

Ex: 1) Fie $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Atunci
$\gamma^-(t) = z_0 + re^{2\pi i(1-t)} = z_0 + re^{-2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

2) Dacă $\{\gamma\} = [z_1, z_2]$, unde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$,

atunci $\gamma^-: [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma^-(t) = (1-t)z_2 + tz_1$, $\forall t \in [0,1]$.
E clar că
$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2, \ \forall t \in [0,1],$$

deci $\{\gamma\} = \{\gamma^-\} = [z_1, z_2]$, dar $\gamma^-(0) = \gamma(1)$, $\gamma^-(1) = \gamma(0)$.

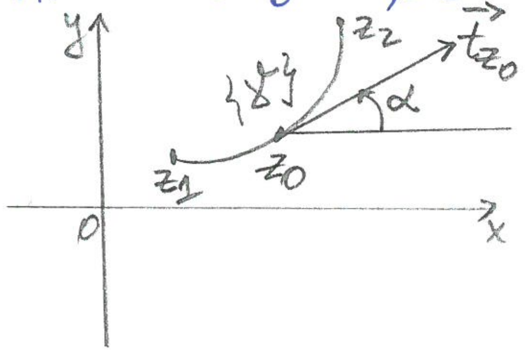
<u>Def 3.</u> Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $\mathcal{D}(z_1, z_2)$ mulțimea tuturor drumurilor în $\mathbb{C}$ între punctele z_1 și z_2, adică
$$\mathcal{D}(z_1,z_2) = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \gamma \text{ drum}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}.$$
Dacă $G \subseteq \mathbb{C}$, fie
$$\mathcal{D}_G(z_1,z_2) = \{\gamma \in \mathcal{D}(z_1,z_2) : \{\gamma\} \subset G\},$$
unde $z_1, z_2 \in G$.
Deci, $\boxed{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(z_1,z_2) = \mathcal{D}(z_1,z_2).}$

<u>Def 4.</u> Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un drum. Spunem că <u>γ e un drum neted</u> dacă $\gamma \in C^1([0,1])$ și $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$.

<u>Ex:</u> 1) Fie $\overbrace{z_1, z_2}^{\text{distincte}} \in \mathbb{C}$ și $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $\forall t \in [0,1]$. Atunci $\{\gamma\} = [z_1, z_2]$. Cum $\gamma'(t) = z_2 - z_1 \neq 0$, $t \in [0,1]$, rezultă că drumul γ e neted.
2) Fie $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $\forall t \in [0,1]$. Atunci γ e drum neted, iar $\{\gamma\} = \partial U(z_0, r)$, unde $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

⊙ Fie γ un drum neted în $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ se poate defini un vector tangent la γ în orice punct $z = \gamma(t) \in \{\gamma\}$, $t \in [0,1]$.
Considerăm un punct $z_0 \in \{\gamma\}$, ales în mod arbitrar.

Atunci $\exists\, t_0 \in [0,1]$ astfel ca $z_0 = \gamma(t_0)$.

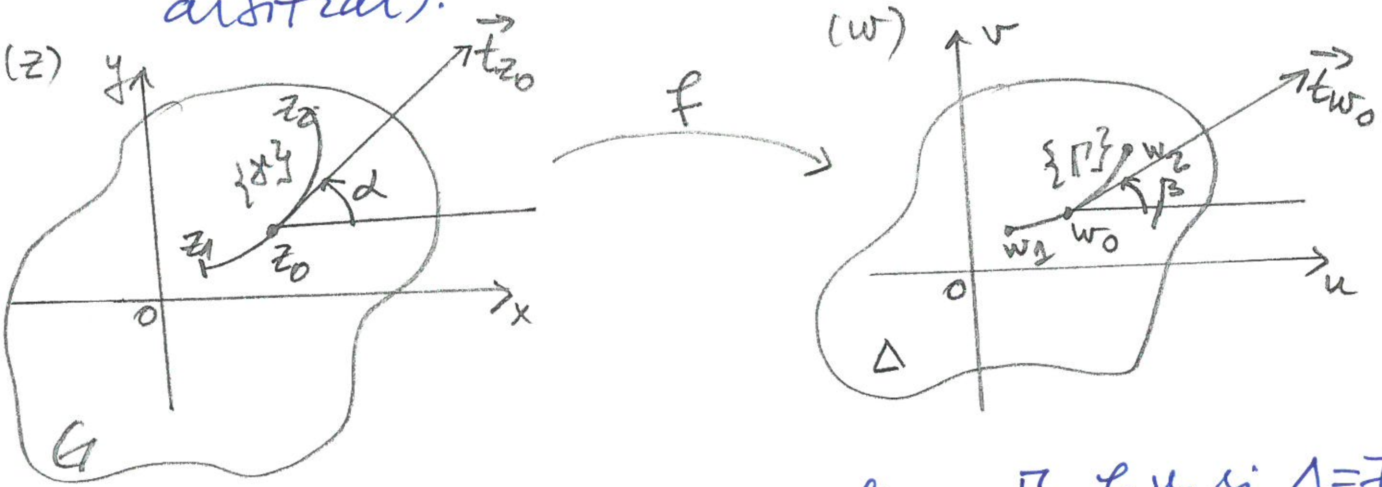


Fie α = unghiul determinat de $\vec{t}_{z_0}$ cu sensul pozitiv al axei reale, unde $\vec{t}_{z_0}$ este vectorul tangentei la γ în punctul z_0.

Atunci $\alpha \in \operatorname{Arg}\gamma'(t_0)$, adică $\alpha = \arg\gamma'(t_0) \pmod{2\pi}$.

⊙ În continuare, fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f \in \mathcal{H}(G)$, astfel încât $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in G$.

Fie $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$ și $\gamma \in \mathcal{D}_G(z_1, z_2)$ un drum neted. Fixăm $z_0 = \gamma(t_0) \in \{\gamma\}$ (dar ales în mod arbitrar).



Notăm $w_j = f(z_j)$, $j = \overline{1,2}$, $w_0 = f(z_0)$, $\Gamma = f \circ \gamma$ și $\Delta = f(G)$.

Atunci $\Gamma \in \mathcal{D}_\Delta(w_1, w_2)$, deci $\{\Gamma\} \subset \Delta$, iar

$$\Gamma'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,1].$$

Deci Γ e un drum neted din Δ. Notăm cu α = unghiul determinat de $\vec{t}_{z_0}$ cu sensul pozitiv al axei reale Ox, iar cu β = unghiul determinat de $\vec{t}_{w_0}$ cu sensul pozitiv al axei reale Ou.

Atunci $\alpha = \arg\gamma'(t_0) \pmod{2\pi}$ și $\beta = \arg\Gamma'(t_0) \pmod{2\pi}$.

Dar $\operatorname{Arg}\Gamma'(t) = \operatorname{Arg} f'(\gamma(t)) + \operatorname{Arg}\gamma'(t)$, $\forall\, t \in [0,1]$,
deci

(1) $\operatorname{Arg}\Gamma'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma'(t_0)$.

Dar $\beta \in \operatorname{Arg}\Gamma'(t_0)$, $\alpha \in \operatorname{Arg}\gamma'(t_0)$, iar din (1) rezultă că

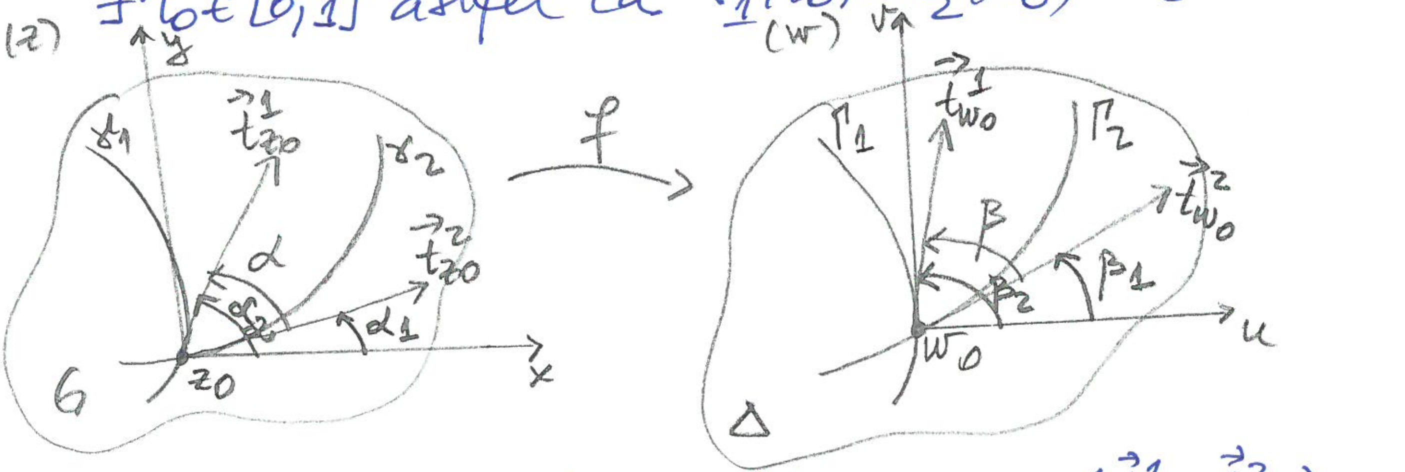
$$\beta - \alpha \in \operatorname{Arg}\Gamma'(t_0) - \operatorname{Arg}\gamma'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0),$$

prin urmare $\exists\, \theta_0 \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$, astfel încât

(2) $\boxed{\beta = \alpha + \theta_0}$.

Așadar, θ_0 este unghiul de rotație al tangentei la drumul γ în punctul z_0 prin transformarea f. Din raționamentul anterior, se observă că putem alege în mod convenabil $\alpha \in \operatorname{Arg}\gamma'(t_0)$ și $\beta \in \operatorname{Arg}\Gamma'(t_0)$, astfel ca $\theta_0 = \arg f'(z_0)$.

⊙ Considerăm în continuare două drumuri netede γ_1 și γ_2, astfel încât $\{\gamma_j\} \subset G$, $j = \overline{1,2}$, unde $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă. Presupunem că $\exists\, t_0 \in [0,1]$ astfel ca $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$.



Fie $\alpha = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)$ în z_0. Atunci $\alpha = \measuredangle(\vec{t}^{\,1}_{z_0}, \vec{t}^{\,2}_{z_0})$, unde $\vec{t}^{\,j}_{z_0}$ este vectorul tangentei la γ_j în z_0, $j = \overline{1,2}$. Avem că $\boxed{\alpha = \alpha_2 - \alpha_1}$, unde α_j = unghiul determinat de $\vec{t}^{\,j}_{z_0}$ cu sensul pozitiv al axei reale Ox

Fie $\Gamma_j = f \circ \gamma_j$, $j=\overline{1,2}$, $w_0 = f(z_0)$. Atunci Γ_j e un drum neted, $j=\overline{1,2}$, $\Gamma_1(t_0)=\Gamma_2(t_0)=w_0$. Dacă β_j este unghiul determinat de tangenta $\vec{t}^{\,j}_{w_0}$ la drumul Γ_j în w_0, $j=\overline{1,2}$, atunci, folosind un raționament similar celui de la egalitatea (2), deducem că $\exists\, \theta_0 \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$ astfel ca

$$\beta_1 = \alpha_1 + \theta_0 \text{ și } \beta_2 = \alpha_2 + \theta_0.$$

Deci $\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, adică $\boxed{\beta = \alpha}$, unde

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = \sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) \text{ în } w_0.$$

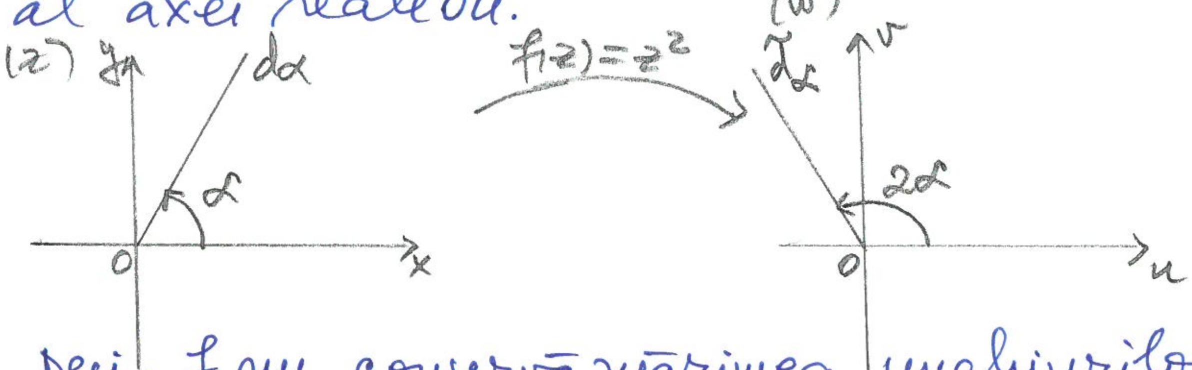
⊙ Așadar, am arătat că dacă $f \in H(G)$ cu $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, atunci transformarea f păstrează mărimea și sensul unghiurilor.

O astfel de transformare se numește direct conformă (sau transformare conformă de speța I-a directă).

<u>Obs</u>: Condiția $f'(z) \neq 0$ este esențială în raționamentul anterior.

<u>Ex</u>: Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Atunci $f \in H(\mathbb{C})$ și $f'(0) = 0$ ($z=0$ este un punct critic pentru f). Deoarece $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, rezultă că f este o transformare direct conformă pe $\mathbb{C}^*$. Totuși, f <u>nu</u> e transformare conformă în $z=0$. Într-adevăr, dacă $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, iar d_α este o semidreaptă deschisă care pornește din origine și determină $\sphericalangle \alpha$ cu sensul pozitiv al axei

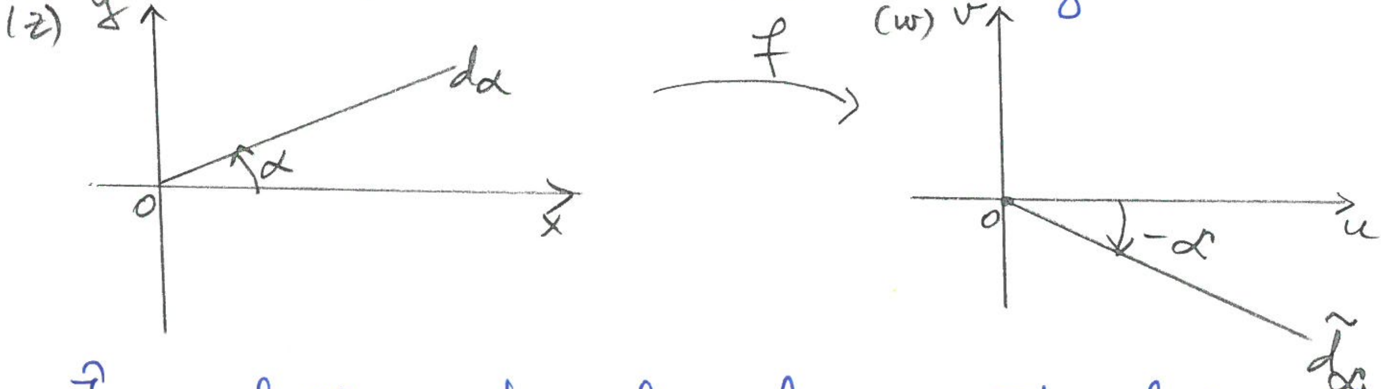
reale, iar dacă $\tilde{d}_\alpha = f(d_\alpha)$, atunci $\tilde{d}_\alpha$ este o semidreaptă deschisă care pornește din origine și determină unghiul 2α cu sensul pozitiv al axei realelor.



Deci, f nu conservă mărimea unghiurilor în $z_0=0$.

Obs: Există transformări chiar de clasă C^∞, care păstrează mărimea unghiurilor, dar nu și sensul (schimbă sensul).

Ex: Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z)=\bar{z}$. Atunci $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, dar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 1 \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Deci, f nu e derivabilă în niciun punct $z \in \mathbb{C}$. Se observă că f păstrează mărimea, dar schimbă sensul unghiurilor.



În concluzie, putem formula următorul rezultat esențial referitor la transformările conforme:

Propoziția 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f \in H(G)$, astfel încât $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Atunci f este o transformare direct conformă, care păstrează atât mărimea cât și sensul unghiurilor.

În continuare, fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$ cu $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Fie γ un drum neted din G, $z_0 = \gamma(t_0) \in \{\gamma\}$, iar $\Gamma = f \circ \gamma$. Atunci Γ e un drum neted din $\Delta = f(G)$, iar dacă $w_0 = \Gamma(t_0)$, atunci $w_0 = f(z_0)$. Avem că

$$|\Gamma'(t_0)| = |f'(z_0)| \cdot |\gamma'(t_0)|,$$

adică

$$|d\Gamma(t_0)| = |f'(z_0)| \cdot |d\gamma(t_0)|.$$

Așadar elementul de arc $|d\gamma|$ în z_0 se contractă/dilată în același raport $\boxed{k = |f'(z_0)|}$, oricare ar fi drumul neted γ cu $\gamma(t_0) = z_0$.

⊙ Constanta $k = |f'(z_0)|$, care e independentă de drumul neted γ cu $\gamma(t_0) = z_0$, s.n. coeficientul de deformare liniară în z_0.

Dacă $k < 1 \Rightarrow$ contracție în z_0.

Dacă $k > 1 \Rightarrow$ dilatare în z_0.

⊙ $\{z \in G : |f'(z)| < 1\}$ s.n. porțiunea din planul complex (mulțimea din $\mathbb{C}$) care se contractă prin transformarea f.

$\{z \in G : |f'(z)| > 1\}$ s.n. porțiunea (mulțimea) din planul complex $\mathbb{C}$ care se dilată prin transformarea f.

⊙ $\arg f'(z_0)$ = unghiul de rotație al tangentei la un drum neted ce conține punctul z_0 prin transformarea f.

Funcții omografice

Def 1. Funcția $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad-bc \neq 0$, se numește funcție (transformare) omografică (circulară/Möbius).

Obs: 1) $f(\infty) := \lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{dacă } c \neq 0 \\ \infty, & \text{dacă } c = 0. \end{cases}$

2) Fie $z_0 = \begin{cases} -\frac{d}{c}, & \text{dacă } c \neq 0 \\ \infty, & \text{dacă } c = 0 \end{cases}$. Atunci $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

⊙ z_0 = polul transformării f.

3) Fie $D = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & \text{dacă } c \neq 0 \\ \mathbb{C}, & \text{dacă } c = 0 \end{cases}$.

Atunci $f \in \mathcal{H}(D)$ și $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$.

Într-adevăr, dacă $c = 0$, atunci $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, $\forall z \in \mathbb{C}_\infty$, deci $f'(z) = \frac{a}{d} \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dacă $c \neq 0$, atunci $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq -\frac{d}{c}$.

4) Dacă $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ este o transformare omografică, atunci f este un omeomorfism al planului complex extins $\mathbb{C}_\infty$ pe el însuși.

5) Fie H = mulțimea tuturor transformărilor omografice. Atunci H este un grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

⊙ Prin urmare, compunerea a două funcții omografice este o funcție omografică, iar inversa oricărei funcții omografice este tot o transformare omografică.

În continuare menționăm câteva rezultate fundamentale referitoare la funcțiile omografice.

Prop 1. Funcțiile omografice transformă cercurile în sens larg în cercuri în sens larg (cerc în sens larg în $\mathbb{C}_\infty$ = cerc sau dreaptă)

Demonstrație: seminar.

Obs: Fie $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad-bc \neq 0$.

Cazul I: $\boxed{c=0} \Rightarrow f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \forall z \in \mathbb{C}_\infty$.

E clar că dacă $(\mathcal{C})$ e un cerc, atunci $f(\mathcal{C})$ este tot un cerc, iar dacă (d) e o dreaptă, atunci $f(d)$ e tot o dreaptă în $\mathbb{C}_\infty$.

Cazul II: $\boxed{c \neq 0}$. Fie $\boxed{z_0 = -\frac{d}{c}}$ - polul funcției f.

Fie $(\mathcal{C})$ un cerc în sens larg. Atunci au loc situațiile:

(i) $(\mathcal{C})$ = cerc obișnuit.

- Dacă $z_0 \in (\mathcal{C})$, atunci $f(z_0) = \infty \in f(\mathcal{C})$. Cum $f(\mathcal{C})$ e un cerc în sens larg, pe baza Prop 1, care conține ∞, deducem că $f(\mathcal{C})$ e o dreaptă în $\mathbb{C}_\infty$.
- Dacă $z_0 \notin (\mathcal{C})$, atunci $f(z_0) = \infty \notin f(\mathcal{C})$ (funcția

f e omeomorfism de la $\mathbb{C}_\infty$ la $\mathbb{C}_\infty$), deci $f(\mathcal{C})$ e un cerc obişnuit.

(ii) $(\mathcal{C})$ = dreaptă în $\mathbb{C}_\infty$.

⊙ Dacă $z_0 \in (\mathcal{C})$, atunci $\infty = f(z_0) \in f(\mathcal{C})$, deci $f(\mathcal{C})$ e un cerc în sens larg în $\mathbb{C}_\infty$ care trece prin ∞, aşadar $f(\mathcal{C})$ e o dreaptă.

⊙ Dacă $z_0 \notin (\mathcal{C})$, atunci $f(z_0) = \infty \notin f(\mathcal{C})$, deci $f(\mathcal{C})$ e un cerc.

Putem sintetiza observaţiile precedente în următoarea schemă:

$$
z_0 \begin{cases} \in \text{cerc} \xmapsto{f} \text{dreaptă} \\ \notin \text{cerc} \xmapsto{f} \text{cerc} \\ \in \text{dreaptă} \xmapsto{f} \text{dreaptă} \\ \notin \text{dreaptă} \xmapsto{f} \text{cerc.} \end{cases}
$$

z_0 — polul transformării f

Aplicaţii: seminar.

Def 2. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ patru puncte distincte. Numim biraportul punctelor z_1, z_2, z_3, z_4 numărul:

$$
\boxed{(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}.}
$$

Are loc următoarea proprietate:

Prop 2. Funcţiile omografice invariază (conservă) biraportul a patru puncte date.

Demonstraţie: Fie $z_j \in \mathbb{C}_\infty$, $j = \overline{1,4}$, patru puncte distincte şi $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, unde

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad-bc \neq 0$. Dacă $w_j = f(z_j)$, $j=\overline{1,4}$, atunci w_1, w_2, w_3, w_4 sunt distincte și

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{w_1-w_2}{w_1-w_4} : \frac{w_3-w_2}{w_3-w_4} =$$

$$= \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} : \frac{\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}}{\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} =$$

$$= \cdots = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_4} : \frac{z_3-z_2}{z_3-z_4} = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Aplicație: determinarea unei funcții omografice cunoscând 3 puncte date (distincte) $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ și imaginile lor $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ (distincte)

Prop 3. $\exists!\, f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ transformare omografică astfel încât $f(z_j) = w_j$, $j=\overline{1,3}$.

Demonstrație: Existența. Folosind Prop 2, deducem că funcția f omografică cu $f(z_j) = w_j$, $j=\overline{1,3}$, se obține din rezolvarea ecuației

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3).$$

Deducem că $w = f(z)$ – soluție.

Unicitatea: Dacă f_1 e o altă transformare omografică cu $f_1(z_j) = w_j$, $j=\overline{1,3}$, atunci $g := f_1^{-1} \circ f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ e o funcție omografică cu proprietatea că $g(z_j) = z_j$, $j=\overline{1,3}$. Deci

funcția g are trei puncte fixe: z_1, z_2, z_3.
Deoarece g e o funcție omografică, $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad-bc\neq 0$ și $g(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $z\in\mathbb{C}_\infty$.

Cum $g(z_j)=z_j$, $j=\overline{1,3}$, rezultă că z_j – soluție a ecuației $g(z)=z$, adică z_j – soluție a ecuației

$$cz^2+(d-a)z-b=0.$$

Ecuația precedentă fiind de grad ≤ 2, cu soluțiile z_1, z_2, z_3, deducem că $c=0$, $d-a=0$ și $b=0$. Deci $g(z)=z$, $\forall z\in\mathbb{C}_\infty$, adică $f_1\equiv f$.

Aplicații: seminar.

Obs. Se poate arăta că:

(i) Dacă $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ e o funcție omografică, astfel ca $f(U(0,1))=U(0,1)$, atunci $\exists\, z_0\in\mathbb{C}$ cu $|z_0|<1$ și $\theta\in\mathbb{R}$, astfel ca

$$f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}\cdot z},\quad \forall z\in\mathbb{C}_\infty.$$

(ii) Dacă $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ e o funcție omografică, astfel încât $f(\Pi)=\Pi$, atunci $\exists\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $ad-bc>0$ și

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad \forall z\in\mathbb{C}_\infty,$$

unde
$\Pi=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ – semiplanul superior.

(iii) Dacă $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ e o funcție omografică astfel ca $f(\Pi)=U(0,1)$, atunci $\exists\,\theta\in\mathbb{R}$ și $a\in\mathbb{C}$ cu $\operatorname{Im} a>0$, astfel încât $f(z)=e^{i\theta}\cdot\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$, $\forall z\in\mathbb{C}_\infty$.

Bibliografie: [1], [4], [7], [8].