Material bibliografic pentru cursurile 12-13

Analiză complexă (Notițe de curs)

Puncte singulare izolate

Def 1. Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă și $f \in \mathcal{H}(G)$. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește singular izolat pentru funcția f dacă $z_0 \notin G$, dar $\exists\, r > 0$ astfel încât $\dot{U}(z_0, r) \subseteq G$, unde $\dot{U}(z_0, r) = U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Obs: Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este un punct singular izolat pentru f, atunci f nu e derivabilă în z_0, dar $\exists\, r > 0$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(\dot{U}(z_0, r))$.

Def 2. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$ și $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al funcției f. Spunem că:

(i) z_0 este punct eliminabil pentru f dacă $\exists\, F \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, unde $\tilde{G} = G \cup \{z_0\}$, astfel încât $F|_G = f$.

(ii) z_0 este pol pentru f dacă $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

(iii) z_0 este punct esențial izolat pentru f dacă $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ în $\mathbb{C}_\infty$.

Obs: Se poate arăta imediat (a se vedea [1]) că z_0 este eliminabil pentru $f \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Obs: Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$ și $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru $f \Rightarrow \exists\, r > 0$ astfel încât $\dot{U}(z_0, r) \subseteq G$, adică $U(z_0; 0, r) \subseteq G$. Deci, f se dezvoltă în serie Laurent pe $\dot{U}(z_0, r) = U(z_0; 0, r)$, pe baza Teoremei dezvoltării în serie

Laurent:

(1) $f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$ $\forall z \in \dot{U}(z_0, r),$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ \rho \in (0, r),$$

iar $\gamma_\rho(t) = z_0 + re^{2\pi i t}, \ \forall t \in [0,1]$ $(\{\gamma_\rho\} = \partial U(z_0, \rho))$.

În particular, $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz, \ \forall \rho \in (0, r)$.

Fie $\boxed{Rez(f; z_0) := a_{-1}}$ – reziduul funcției f în punctul z_0.

deci $Rez(f; z_0)$ = coeficientul lui $\frac{1}{z-z_0}$ din dezvoltarea funcției f în serie Laurent pe $\dot{U}(z_0, r)$ (în jurul punctului z_0).

Au loc următoarele rezultate:

(P1) Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$, iar $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru f. Atunci u.a.s.e:

(i) z_0 e punct eliminabil.

(ii) Partea principală a seriei Laurent (1) nu are nici un termen, deci $a_{-n} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

(iv) f e mărginită pe o vecinătate punctată a lui z_0 (disc punctat (redus) centrat în z_0).

(P2) Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$, iar $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru f. Atunci u.a.s.e:

(i) z_0 e pol pentru f

(ii) z_0 e un zerou pentru $\frac{1}{f}$

(iii) $\exists!\, n\in\mathbb{N}^*$ și $\exists\, r>0$ astfel încât $\dot{U}(z_0,r)\subseteq G$ și

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots,\ \forall z\in\dot{U}(z_0,r),$$

iar $a_{-n}\neq 0$.

(iv) $\exists!\, n\in\mathbb{N}^*$ și $\exists\, g\in\mathcal{H}(\tilde{G})$, unde $\tilde{G}=G\cup\{z_0\}$, astfel ca $g(z_0)\neq 0$ și $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, $\forall z\in G$

Def2. Numărul $n\in\mathbb{N}^*$ din Propoziția 2 se numește ordinul de multiplicitate al polului z_0. În acest caz, spunem că z_0 este un pol de ordinul n pentru funcția f.

Obs: (i) z_0 e un pol pentru $f \Leftrightarrow$ seria Laurent în jurul lui z_0 are un număr finit de termeni

(ii) z_0 = pol de ordinul n pentru $f \Leftrightarrow z_0$ = zerou de ordinul n pentru $\frac{1}{f}$.

(iii) Dacă $f=\frac{g}{h}$, $g, h\in\mathcal{H}(U(z_0,r))$, $g(z_0)\neq 0$, dar z_0 – zerou de ordinul n pentru h ($h(z_0)=h'(z_0)=\dots=h^{(n-1)}(z_0)=0$, $h^{(n)}(z_0)\neq 0$), atunci z_0 e pol de ordinul n pentru f.

⊙ În cazul punctelor singulare esențial izolate, are loc următoarea caracterizare:

P3 Fie $G\subset\mathbb{C}$ deschisă, $f\in\mathcal{H}(G)$, iar $z_0\in\mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru f. Atunci z_0 este esențial izolat pentru f dacă și numai dacă partea principală a seriei Laurent (1) are o infinitate de termeni.

⊙ Așadar, au loc următoarele caracterizări

caracterizări ale punctelor singulare izolate:

z_0 punct singular izolat pentru f:

- eliminabil pentru f: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$
- pol pentru f: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
- esențial izolat pentru f: $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ în $\mathbb{C}_\infty$.

Dacă $f(z) = \dots + \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) +$

$+ \dots, \ \forall z \in \dot{U}(z_0, r)$,

atunci obținem că

z_0 punct singular izolat pentru f:

- eliminabil: $a_{-n}=0, \forall n\in\mathbb{N}^*$
- pol de ordinul $n\in\mathbb{N}^*$: $a_{-n}\neq 0$, $a_{-k}=0$, $\forall k\in\mathbb{N}, k\geq n+1$
- esențial izolat: există o infinitate de coeficienți $a_{-n}\neq 0$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Exemple

1) Fie $f: \mathbb{C}\setminus\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}\to\mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}$.

Atunci $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{\pm\frac{\pi}{2}\})$, iar $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = -\frac{\pi}{2}$ sunt puncte singulare izolate pentru f.

Avem că

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin z}{2z} = -\frac{1}{\pi}\in\mathbb{C}.$$

În mod analog, $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{2}} f(z) = -\frac{1}{\pi}\in\mathbb{C}$. Deci z_1, z_2 sunt puncte eliminabile pentru f.

2) Fie $f: \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Atunci $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ și $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$, deci $z=0$ este eliminabil.

În plus, $f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \dots\right) =$

$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n} + \dots, \ \forall z \in \mathbb{C}^*.$

Aşadar,

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n} + \dots, \ \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

deci partea principală nu conține nici un termen, prin urmare $z=0$ este punct eliminabil pentru f.

3) Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$.

Avem că $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\})$, iar

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} f(z) = \infty,$$

deci $z = \frac{\pi}{2}$ este pol pentru f.

Fie $g(z) = \sin z$, $h(z) = (z - \frac{\pi}{2})^3$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Atunci $g, h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $g(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$, iar $z = \frac{\pi}{2}$ este un zerou de ordinul 3 pentru funcția h. În plus, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

Deci $z = \frac{\pi}{2}$ e un pol de ordinul 3 pentru f.

4) Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) = e^{\frac{1}{z}}$.

Atunci $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$, deci $z=0$ este punct singular izolat pentru f.

Avem că

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} + \dots, \ \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

iar din faptul că seria Laurent precedentă are o infinitate de termeni în partea principală $\Rightarrow$ $z=0$ este esențial izolat.

De asemenea: $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ nu există.

Într-adevăr,

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{w\to\infty} e^{w} \text{ - nu există},$$

pentru că dacă $w_n = ni$, $n\in\mathbb{N}$, atunci $w_n \to \infty$, dar $e^{w_n} = e^{ni} = \cos n + i\sin n$, deci $\nexists \lim_{n\to\infty} e^{w_n}$.

În concluzie, $\nexists \lim_{z\to 0} f(z)$, prin urmare $z=0$ este esențial izolat.

Calculul reziduului într-un punct singular izolat

Fie $G\subset\mathbb{C}$ deschisă, $f\in\mathcal{H}(G)$, $z_0\in\mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru $f \Rightarrow \exists r>0$ astfel ca $\dot{U}(z_0,r)\subseteq G$ și

$$(*)\quad f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$
$$\forall z\in \dot{U}(z_0,r).$$

I) z_0 = eliminabil pentru $f \overset{(*)}{\Rightarrow} a_{-n}=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
În particular, $a_{-1}=0$, deci $\operatorname{Rez}(f;z_0)=0$.

II) z_0 = pol de ordinul n pentru $f \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$
$$\forall z\in \dot{U}(z_0,r)$$

Atunci

$$(z-z_0)^n\cdot f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + \dots, \quad \forall z\in\dot{U}(z_0,r).$$

Derivând de $n-1$ ori în ambele părți ale dezvoltării precedente, obținem că

$$\left[(z-z_0)^n\cdot f(z)\right]^{(n-1)} = (n-1)!\, a_{-1} + \underbrace{n!\, a_0(z-z_0) + \dots}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} 0 \text{ u.c.}}, \quad \forall z\in\dot{U}(z_0,r).$$

Deci

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n\cdot f(z)\right]^{(n-1)}=(n-1)!\,a_{-1},$$

adică
$$a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n\cdot f(z)\right]^{(n-1)}.$$

În concluzie, dacă z_0 e pol de ordinul $n\in\mathbb{N}^*$ pentru funcția f, atunci

$$\boxed{\mathrm{Rez}(f;z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n\cdot f(z)\right]^{(n-1)}} \tag{2}$$

În particular, dacă z_0 este pol de ordinul I (pol simplu) pentru f, atunci din (2) găsim ($n=1$):

$$\mathrm{Rez}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{3}$$

III) z_0 = esențial izolat pentru f.

În acest caz, trebuie dezvoltată funcția f în serie Laurent în jurul lui z_0, iar coeficientul a_{-1} (= coeficientul lui $\frac{1}{z-z_0}$ din dezvoltarea funcției f în serie Laurent pe un disc punctat centrat în z_0) va fi reziduul funcției f în z_0. Deci,

$$\mathrm{Rez}(f;z_0)=a_{-1}.$$

Exemple

1) Fie $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. Atunci $z=0$ este eliminabil pentru f, deci $\mathrm{Rez}(f;0)=0$.

2) $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. Atunci $z=0$ este pol de ordinul întâi (pol simplu) pentru f. Într-adevăr, f admite următoarea dezvoltare în serie Laurent în jurul lui $z=0$:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1} + \dots, \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Deci $z=0$ este pol simplu și $\boxed{\mathrm{Rez}(f;0) = 1}$.

3) Fie $f: \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$. Atunci $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{i\})$, iar $z=i$ este esențial izolat pentru f. Dezvoltând funcția f în serie Laurent în jurul lui $z=i$, obținem că

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-i)^2} + \dots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-i)^n} + \dots, \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}.$$

Din această dezvoltare, deducem că partea principală are o infinitate de termeni, deci $z=i$ este punct esențial izolat, iar

$$\mathrm{Rez}(f;i) = a_{-1} \left(= \text{coeficientul lui } \frac{1}{z-i}\right) = 1.$$

Deci $\boxed{\mathrm{Rez}(f;i) = 1}$.

Rezultatul principal al acestei secțiuni este conținut în Teorema reziduurilor:

T1 (t. reziduurilor) Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$, și fie S = mulțimea punctelor singulare izolate ale funcției f. Fie $\tilde{G} = G \cup S$ și γ

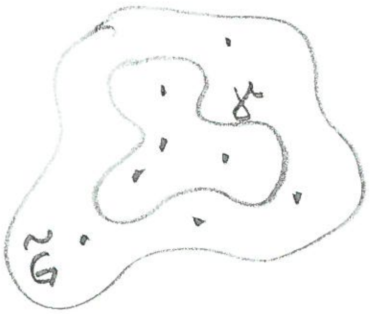
un contur din mulțimea G ($\{\gamma\} \subset G$), astfel ca $\gamma \underset{\tilde{G}}{\sim} 0$. Atunci suma $\sum_{z \in \tilde{G}}' n(\gamma; z) \cdot \operatorname{Rez}(f; z)$ e finită și are loc relația

$$(4) \quad \boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \tilde{G}}' n(\gamma; z) \cdot \operatorname{Rez}(f; z).}$$

∘ În relația (4) $n(\gamma; z)$ este indexul conturului γ în raport cu punctul $z \notin \{\gamma\}$, definit astfel:

$$n(\gamma; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}.$$

<u>Obs</u>: În condițiile din Teorema reziduurilor, funcția f poate avea puncte singulare izolate atât în "interiorul" conturului γ, cât și în "exteriorul" acestui contur, dar f nu are puncte singulare izolate pe $\{\gamma\}$, deoarece $\{\gamma\} \subset G = \tilde{G} \setminus S$.



Relativ la indexul unui contur, are loc următorul rezultat:

(T2) (<u>Teorema indexului</u>) Fie γ un contur din $\mathbb{C}$. Atunci au loc afirmațiile:

(i) $n(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$;

(ii) Există o unică componentă conexă nemărginită A_∞ a lui $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, iar dacă $z \in A_\infty$, atunci $n(\gamma; z) = 0$.

<u>Obs</u>: (i) Dacă $z_0 \in \tilde{G} \setminus S = G$, atunci funcția f este derivabilă în z_0, deci $\mathrm{Rez}(f; z_0) = 0$.

(ii) Dacă $z_0 \in \tilde{G} \cap A_\infty$, unde A_∞ e componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, atunci $n(\gamma; z_0) = 0$, pe baza Teoremei 2.

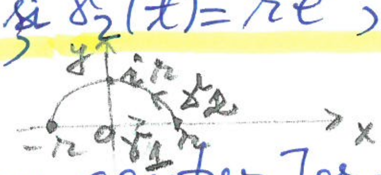
Așadar, ținând cont de aceste observații, deducem din (4) următoarea relație:

$$(5) \quad \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in S \cap (\gamma)}{}' n(\gamma; z) \cdot \mathrm{Rez}(f; z),$$

unde (γ) e "interiorul" conturului γ. În plus, în (5) sunt importante următoarele puncte singulare izolate: polii funcției f și punctele esențiale izolate. Într-adevăr, dacă $z_0 \in S \cap (\gamma)$ e punct eliminabil, atunci $\mathrm{Rez}(f; z_0) = 0$.

<u>Caz particular</u>: γ = contur Jordan (imaginea omeomorfă a unui cerc).

De exemplu, cercurile orientate în sens direct, elipsele (orientate în sens direct), contururile triunghiulare, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, unde $\{\gamma_1\} = [-r, r]$ și $\gamma_2(t) = r e^{\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, sunt contururi Jordan.



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ - contur Jordan

Dacă γ e un contur Jordan, atunci $\{\gamma\}$ împarte planul complex în exact două componente conexe: $D = (\gamma)$ = componenta conexă mărginită și A_∞ = componenta conexă nemărginită.

Atunci $n(\gamma; z) = \begin{cases} 1, & z \in D \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}. \end{cases}$

Prin urmare, dacă γ e un contur Jordan din $\mathbb{C}$, atunci relația (5) devine:

$$(6) \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z\in S\cap(\gamma)}' \operatorname{Rez}(f;z)$$

⊙ În exemplele următoare contururile circulare sunt parcurse în sens direct (trigonometric).

Aplicații

① Să se calculeze integrala

$$\int_{\partial U(0,r)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2}dz, \text{ unde } r\in(0,1)\cup(1,\infty).$$

Soluție. Fie $\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$. Atunci $\{\gamma_r\} = \partial U(0,r)$, iar dacă notăm cu

$$J_r = \int_{\partial U(0,r)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2}dz,$$

atunci $J_r = \int_{\gamma_r} \frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2}dz$.

Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2}$. Atunci $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})$, iar $z=0$, $z=1$ sunt puncte singulare izolate pentru f. Avem că

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2} \text{ - nu există limita,}$$

pentru că $\nexists \lim_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$. Deci $z=0$ este punct singular esențial izolat pentru f.

Dar $\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{(1-z)^2} = \infty$, deci $z=1$ e pol de ordinul 2 pentru f (numitorul se anulează de două ori în $z=1$, iar numărătorul nu se anulează în $z=1$).

Avem că

$$(7)\quad I_r = \begin{cases} 2\pi i\left(\operatorname{Rez}(f;0) + \operatorname{Rez}(f;1)\right), & \text{dacă } r\in(1,\infty) \\ 2\pi i\cdot \operatorname{Rez}(f;0) & \text{, dacă } r\in(0,1). \end{cases}$$

Deoarece $z=1$ e pol de ordinul 2, avem că (aplicăm (2) pentru $n=2$)

$$\operatorname{Rez}(f;1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot f(z)\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cancel{(1-z)^2}}\right]' = \lim_{z\to 1}\left(\sin\frac{1}{z}\right)'$$

$$= -\lim_{z\to 1}\cos\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2} = -\cos 1,$$

deci $\boxed{\operatorname{Rez}(f;1) = -\cos 1}$.

Pentru calculul reziduului funcției f în $z=0$, dezvoltăm funcția f în serie Laurent în jurul lui $z=0$ (pe un disc punctat (redus) cu centrul în origine).

E clar că $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\cdot\sin\frac{1}{z}$, $\forall z\in\mathbb{C}^*$, prin urmare dezvoltăm funcția $\frac{1}{(1-z)^2}$ în serie de puteri în jurul lui $z=0$; de asemenea, dezvoltăm funcția $\sin\frac{1}{z}$ în serie Laurent în jurul lui $z=0$ și apoi înmulțim cele două serii obținute.

Avem că:

$$(8)\quad \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}} + \dots,\ \forall z\in\mathbb{C}^*.$$

Dar $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$, $\forall z\in U(0,1)$, iar prin derivare în ambele părți ale dezvoltării precedente, obținem că

$$(9)\quad \frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}+\dots,\ \forall z\in U(0,1).$$

Așadar, din (8) și (9) rezultă că

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots,\ \forall z\in U(0,1)\cap\mathbb{C}^* = \dot{U}(0,1).$$

Observăm că a_{-1} ($=$ coeficientul lui $\frac{1}{z}$) se obține astfel:

$$a_{-1} = 1 - \frac{1}{3!}\cdot 3 + \frac{1}{5!}\cdot 5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(2n+1) + \dots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \dots = \cos 1.$$

Deci $a_{-1} = \cos 1$, adică $\boxed{\operatorname{Rez}(f;0) = \cos 1}$.

În concluzie, din (7) obținem că

$$I_r = \begin{cases} 2\pi i(\cancel{\cos 1} - \cancel{\cos 1}) = 0, & \text{dacă } r\in(1,\infty) \\ 2\pi i\cdot\cos 1, & \text{dacă } r\in(0,1). \end{cases}$$

② Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_{\partial U(1,1)} \frac{dz}{1+z^4}$.

<u>Soluție</u>. Fie $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $\forall z\in\mathbb{C}\setminus S$, unde $S = \{z\in\mathbb{C} : z^4 = -1\}$. Avem că $z\in S \iff z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, deci soluțiile acestei ecuații sunt $z_k = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k=\overline{0,3}$.

Prin urmare, $S = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, iar $z_k =$ pol de ordinul I (pol simplu), $k=\overline{0,3}$.

Se observă imediat că $z_0, z_3\in U(1,1)$, dar $z_1, z_2 \notin U(1,1)$, deci

$$\int_{\partial U(1,1)} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Rez}(f;z_0) + \operatorname{Rez}(f;z_3)\right].$$

Deoarece z_k = pol de ordinul întâi pentru f, avem că

$$\operatorname{Rez}(f;z_k) = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\cdot f(z) =$$

$$= \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{1+z^4} = \lim_{z\to z_k}\frac{1}{4z^3} =$$

$$= \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k^4}\cdot z_k \underset{z_k^4=-1}{=} -\frac{z_k}{4},$$

deci $\operatorname{Rez}(f;z_k) = -\dfrac{z_k}{4}$, $k=\overline{0,3}$.

Aşadar, obţinem că

$$\int_{\partial U(1,1)} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_3}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{2}(z_0+z_3) =$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cancel{i\sin\frac{\pi}{4}} + \cos\frac{7\pi}{4} + \cancel{i\sin\frac{7\pi}{4}}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cos\frac{\pi}{4} = -\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prin urmare,

$$\int_{\partial U(1,1)} \frac{dz}{1+z^4} = -\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicații ale Teoremei reziduurilor la calculul unor integrale reale

Tipul I : $J=\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, unde $R=\frac{P}{Q}$ este o funcție rațională reală, fără poli pe cercul unitate.

Notăm $\boxed{e^{ix}=z}$. Dacă $x\in[0,2\pi]$, atunci $|z|=1$, adică $z\in\partial U(0,1)$.

Avem că

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \text{ și } \sin z=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}= =\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}.$$

De asemenea,

$$d(e^{ix})=dz \Leftrightarrow ie^{ix}dx=dz \Leftrightarrow$$

$$\boxed{dx=\frac{dz}{iz}}.$$

Așadar,

$$J=\int_{\partial U(0,1)} R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Fie $f(z)=R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\cdot\frac{1}{iz}$. Aplicând Teorema reziduurilor, obținem că

$$J=2\pi i\cdot\sum_{|z|<1}\operatorname{Rez}(f;z).$$

Ex. Să se calculeze $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$, unde $a>1$.

Soluție. Fie $J=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$. Atunci

$$J = \int_{\partial U(0,1)} \frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = -2i \int_{\partial U(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Fie $g(z) = \dfrac{1}{z^2+2az+1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, unde z_1, z_2 sunt soluțiile ecuației

$$z^2+2az+1=0,$$

adică $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$ și $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$.

Avem că $\lim\limits_{z\to z_j} g(z) = 0$, deci z_j = pol de ordinul I pentru funcția g, $j=\overline{1,2}$, iar din faptul că $a>1$, deducem că $z_1 \in U(0,1)$, dar $z_2 \notin U(0,1)$.

Prin urmare,

$$\int_{\partial U(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(g; z_1).$$

Dar

$$\operatorname{Rez}(g;z_1) = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\cdot g(z) =$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^2+2az+1} = \lim_{z\to z_1} \frac{\cancel{z-z_1}}{(\cancel{z-z_1})(z-z_2)}$$

$$= \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Deci, $J = -2i \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(g;z_1) = \dfrac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, adică

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Bibliografie: [1], [2], [4].