Analiză complexă (Notițe de curs).

Material bibliografic pentru cursurile 8-9

Integrala complexă

Def 1. Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$ și $f : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ – diviziune arbitrară a intervalului $[a,b]$ și $V(f,\Delta)$ – variația funcției f relativă la Δ:

$$V(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

$\mathrm{Div}[a,b] := \{\Delta : \Delta \text{ – diviziunea lui } [a,b]\}$.

Variația totală a funcției f pe $[a,b]$:

$\underline{V(f)} = V(f,[a,b]) := \sup\{V(f,\Delta) : \Delta \in \mathrm{Div}[a,b]\}$.

variația totală a funcției f pe $[a,b]$.

⊙ Spunem că funcția f e cu variație mărginită pe $[a,b]$ dacă $V(f) < +\infty$.

Obs: Dacă $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$, atunci se deduce imediat, folosind inegalitatea triunghiului, că

$$V(f) < +\infty \iff V(u) < +\infty \text{ și } V(v) < +\infty.$$

Def 2. Fie $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ și $F = U + iV : [a,b] \to \mathbb{C}$. Spunem că funcția f e integrabilă în raport cu F pe $[a,b]$ (în sens Riemann–Stieltjes) dacă funcțiile u și v sunt integrabile atât în raport cu U cât și cu V pe $[a,b]$ (în sens Riemann–Stieltjes).

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f(x)\,dF(x) := \int_a^b u\,dU - \int_a^b v\,dV + i\int_a^b v\,dU + i\int_a^b u\,dV$$

$\int_a^b f\,dF$ = integrala funcției f în raport cu F pe $[a,b]$.

<u>Obs</u>: (i) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ e o funcție continuă, iar $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ e cu variație mărginită pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă în raport cu F pe $[a,b]$.

(ii) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ e continuă pe $[a,b]$, iar F este de clasă C^1 pe $[a,b]$, atunci f e integrabilă în raport cu F pe $[a,b]$ și

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx.$$

<u>Def 3</u>: Fie $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ un drum. Spunem că γ e un drum rectificabil dacă γ e cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Definim $\ell(\gamma) := V(\gamma) = V(\gamma;[0,1])$ – lungimea drumului γ.

<u>Ex</u>: Fie $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ și $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $\forall t\in[0,1]$. Atunci $\{\gamma\} = [z_1,z_2]$ iar $\ell(\gamma) = |z_1 - z_2|$.

<u>Def 4</u>. Fie $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ un drum rectificabil. Spunem că γ e un contur dacă γ e închis ($\gamma(0)=\gamma(1)$).

<u>Exemplu</u>: Fie $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$ și $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $\forall t\in[0,1]$. Atunci γ e un contur, iar $\{\gamma\} = \partial U(z_0,r)$ (cercul centrat în z_0, de rază r, orientat în sens direct (trigonometric)).

Def 5. Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un drum rectificabil și $f : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă pe suportul $\{\gamma\}$ ($\{\gamma\} = \gamma([0,1])$).

Definim integrala complexă (Cauchy) a funcției f de-a lungul drumului γ, astfel:

$$(1)\quad \int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\,d\gamma(t).$$

Obs: (i) Deoarece $f \in C(\{\gamma\})$, rezultă că $f\circ\gamma$ e continuă pe $[0,1]$, iar din faptul că funcția γ e cu variație mărginită pe $[0,1]$, deducem că $f\circ\gamma$ este integrabilă în raport cu γ pe $[0,1]$. Deci $\int_\gamma f$ e finită.

(ii) Dacă $\gamma \in C^1([0,1])$, atunci din (1) obținem că
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

(iii) Integrala complexă poate fi calculată și în felul următor:

Fie $f = u + iv : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ continuă pe suportul drumului rectificabil $\gamma = \alpha + i\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$.

Atunci
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,d\gamma(t) =$$
$$= \int_0^1 [u(\alpha(t),\beta(t)) + i v(\alpha(t),\beta(t))](d\alpha(t) + i\,d\beta(t))$$
$$= \int_0^1 u(\alpha,\beta)\,d\alpha - v(\alpha,\beta)\,d\beta$$
$$+ i\int_0^1 v(\alpha,\beta)\,d\alpha + u(\alpha,\beta)\,d\beta =$$

$$= \int_\gamma u\,d\alpha - v\,d\beta + i\int_\gamma v\,d\alpha + u\,d\beta.$$

Așadar, am obținut relația:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma u\,d\alpha - v\,d\beta}_{\text{integrala curbilinie de speța a II-a}} + i\underbrace{\int_\gamma v\,d\alpha + u\,d\beta}_{\text{integrală curbilinie de speța a II-a.}}$$

Obs. Din proprietățile integralei curbilinii reale de speța a II-a, rezultă că integrala complexă nu depinde de parametrizarea aleasă pe γ, dar își schimbă semnul când se inversează orientarea pe γ.

Proprietăți elementare ale integralei complexe

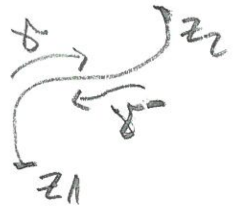
- Rezultatele următoare pot fi demonstrate direct folosind definiția integralei complexe și proprietățile corespunzătoare integralei R–S reale (sau a integralei curbilinii reale de speța a doua).

P1 (liniaritatea în raport cu funcția)
Dacă $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ e un drum rectificabil, iar $f, g : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ sunt funcții continue, atunci

$$\int_\gamma \alpha f + \beta g = \alpha\int_\gamma f + \beta\int_\gamma g,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

P2 Dacă $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ e un drum rectificabil, iar $f : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ e o funcție continuă, atunci

$$\boxed{\int_{\gamma^-} f = -\int_{\gamma} f}$$, unde γ^- este drumul opus (invers) drumului γ, definit astfel: $\gamma^-(t) = \gamma(1-t), \forall t \in [0,1]$.

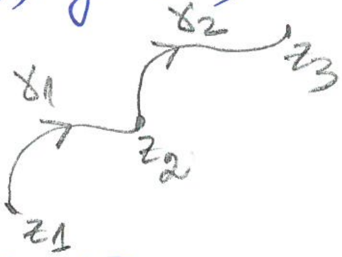


⊙ Deci integrala își schimbă semnul dacă se inversează orientarea.

(P3) (aditivitatea în raport cu drumul)

Dacă $\gamma_1 \in \mathcal{D}(z_1, z_2)$, $\gamma_2 \in \mathcal{D}(z_2, z_3)$ sunt două drumuri rectificabile, iar $f \in C(\{\gamma_j\})$, $j = \overline{1,2}$, atunci

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f,$$

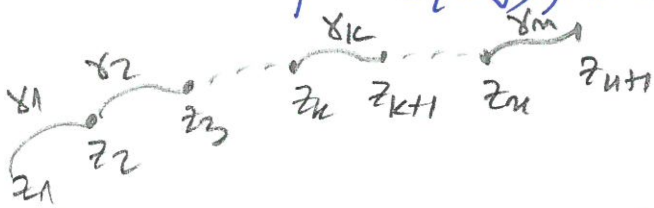


unde $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\underbrace{(\gamma_1 \cup \gamma_2)}_{\text{compunerea drumurilor } \gamma_1 \text{ și } \gamma_2}(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

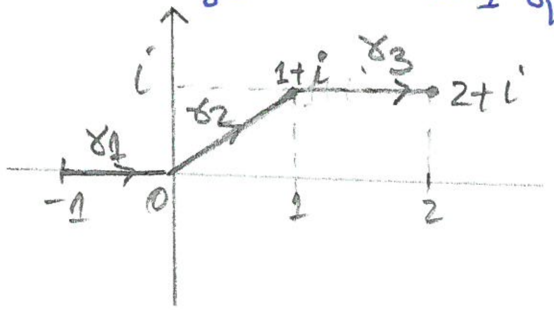
<u>Obs</u>: Dacă γ e un drum rectificabil din $\mathbb{C}$, iar $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e o descompunere a sa în drumuri rectificabile, cu proprietatea că punctul final al drumului γ_k coincide cu punctul inițial al drumului γ_{k+1}, $k = \overline{1, n-1}$, iar dacă $f \in C(\{\gamma\})$, atunci

$$\boxed{\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.}$$



<u>Ex</u>: Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}^2$, iar $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, unde $\{\gamma_1\} = [-1, 0]$, $\{\gamma_2\} = [0, 1+i]$, $\{\gamma_3\} = [1+i, 2+i]$,

atunci $\displaystyle\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz.$



Mai departe, ținând cont de definiția integralei complexe, avem că

$$\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 \overline{\gamma_k(t)}^2 d\gamma_k(t) = \int_0^1 \overline{\gamma_k(t)}^2 \cdot \gamma_k'(t)\, dt,$$
$$k=\overline{1,3}.$$

<u>Temă</u>: de calculat fiecare integrală $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$, $k=\overline{1,3}$.

⊙ Alte aplicații ale P1–P3 la seminar.

(P4) Fie $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ un drum rectificabil și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții continue pe $\{\gamma\}$, astfel încât $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent uniform pe $\{\gamma\}$ către funcția f. Atunci f e continuă pe $\{\gamma\}$ și

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.}$$

(P5) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$ o funcție continuă. Dacă $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e un șir de drumuri rectificabile din G, care converge uniform pe $[0,1]$ către drumul γ cu suportul în G și dacă γ e rectificabil, atunci

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_{\gamma} f.}$$

Primitive ale funcțiilor complexe

Def 6: Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Funcția f admite primitiva g pe G dacă $g \in \mathcal{H}(G)$ și $g'(z) = f(z)$, $\forall z \in G$.

⊙ E clar că dacă g e o primitivă a funcției f, atunci $g+c$ este tot o primitivă a funcției f pe G, $\forall c \in \mathbb{C}$.

În rezultatul următor, vom stabili o condiție necesară și suficientă pentru existența primitivei în cazul funcțiilor continue definite pe domenii din $\mathbb{C}$.

T1 (Teorema de legătură între primitivă și integrală)

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție continuă. Atunci au loc afirmațiile:

(i) Dacă $\int_\gamma f = 0$, $\forall \gamma$ contur din D ($\{\gamma\} \subset D$), atunci f admite primitive pe D.

(ii) Dacă f admite primitiva g pe D, iar γ e un drum rectificabil din D ($\{\gamma\} \subset D$), atunci are loc relația

$$\int_\gamma f = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)) \quad \text{(formula lui Leibniz-Newton)}.$$

important

Obs: Din condițiile (i) și (ii) ale Teoremei 1, se deduce că: dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ e un domeniu, iar $f: D \to \mathbb{C}$ e o funcție continuă pe D, atunci f are primitive pe $D \Leftrightarrow \int_{\gamma} f = 0$, $\forall \gamma$ - contur din D.

⊙ Următorul exemplu e foarte sugestiv, fiindcă arată o deosebire esențială între cazul funcțiilor complexe și cel al funcțiilor reale de variabilă reală.

Obs: Există funcții olomorfe pe mulțimi deschise din $\mathbb{C}$ care nu admit primitive.

Ex 1.
Fie $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ și $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, unde $z_0 \in \mathbb{C}$. Atunci $f \in \mathcal{H}(G)$, dar f nu admite primitive pe G.

Demonstrație. Presupunem că f are primitive pe G. Atunci $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, $\forall \gamma$ un contur din G.

Fie $\gamma_r: [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $\forall t \in [0,1]$, unde $r > 0$. Atunci $\{\gamma_r\} = \partial U(z_0, r)$ și

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma_r(t))\, d\gamma_r(t) = \int_0^1 \frac{d\gamma_r(t)}{\gamma_r(t) - z_0}$$

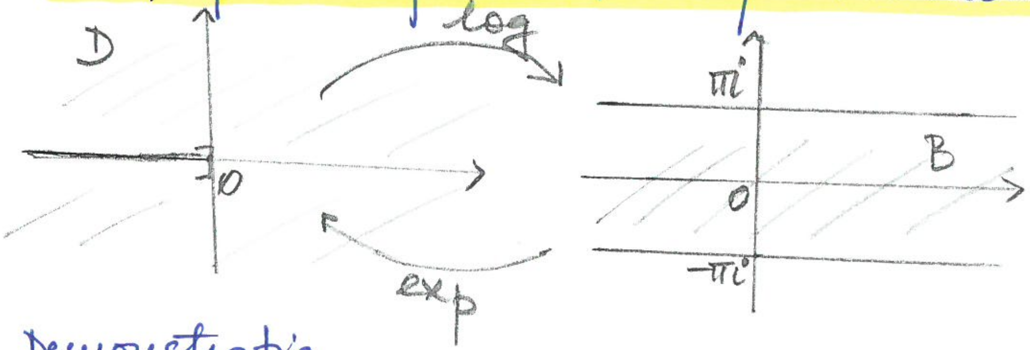
$$= \int_0^1 \frac{2\pi i \cdot re^{2\pi i t} dt}{re^{2\pi i t}} = 2\pi i \neq 0.$$

Așadar, am obținut o contradicție, deci f nu are primitive pe $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

În particular, funcția $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$

nu are primitive pe $\mathbb{C}^*$.

Ex 2. Fie $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$. Considerăm funcția $f : D \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{z}$. În acest caz, f are primitive pe domeniul D.



Demonstrație

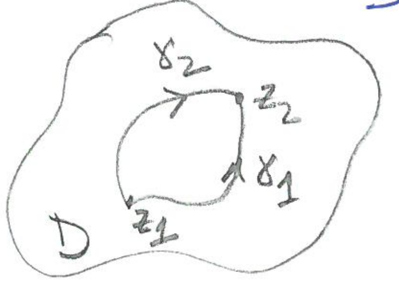
Într-adevăr, dacă $g : D \to \mathbb{C}$, $g(z) = \log z$, unde $\log$ este determinarea (ramura uniformă) principală a lui Log, atunci $g \in \mathcal{H}(D)$ și $g'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in D$. Deci g e o primitivă a funcției f pe D.

⊙ $\log z = \ln|z| + i \arg z$, $\forall z \in D$.

Obs: Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ și $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. În acest caz, f are primitive pe $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (funcția $g : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n-1}}$ e o primitivă a funcției f pe $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$). Deci $\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0$, $\forall \gamma$ = contur din $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Obs. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție continuă. Admitem că f are primitive pe D.

Considerăm două drumuri rectificabile γ_1, γ_2, astfel ca $\{\gamma_j\} \subset D$, $j=\overline{1,2}$, $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_1$, $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)=z_2$. Deci $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_D(z_1,z_2)$. Fie $\gamma=\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$. Atunci



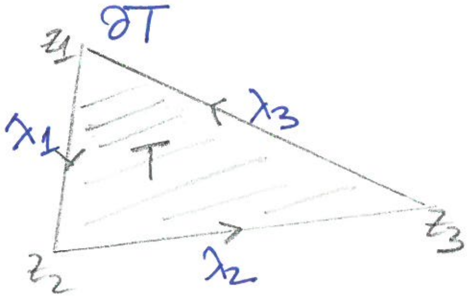
γ e un contur din D, iar din faptul că f are primitive pe D, deducem că $\int_\gamma f = 0$.

Dar $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$, deci $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. Această egalitate arată că dacă funcția f are primitive, atunci $\int_\gamma f$ este independentă de drumul $\gamma \in \mathcal{D}_D(z_1,z_2)$.

⊙ În continuare vom încerca să determinăm condiții care implică existența primitivei. Un rezultat util în această direcție este următorul:

T2 (Cauchy-Goursat)
Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ trei puncte necoliniare și $T=T(z_1,z_2,z_3)$ domeniul triunghiular determinat de aceste puncte. Dacă $f:\overline{T}\to\mathbb{C}$ e o funcție olomorfă pe T și continuă pe $\overline{T}$. Atunci

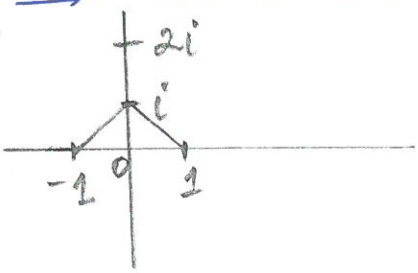
$$\int_{\partial T} f = 0.$$



⊙ $T(z_1,z_2,z_3)=\{az_1+bz_2+cz_3 : a,b,c\in\mathbb{R}_+^*, a+b+c<1\}$.

⊙ $\partial T = \lambda_1 \cup (\lambda_2 \cup \lambda_3)$, unde $\{\lambda_1\}=[z_1,z_2]$, $\{\lambda_2\}=[z_2,z_3]$, $\{\lambda_3\}=[z_3,z_1]$.

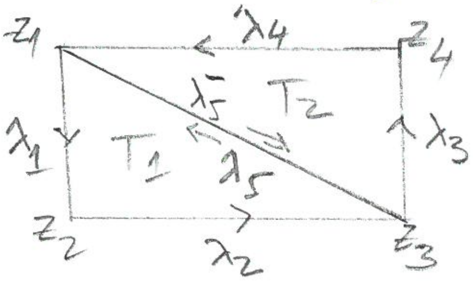
Ex: Fie $T=T(-1,1,i)$ şi $f:\mathbb{C}\setminus\{2i\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{\sin z}{z-2i}$.



Atunci $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{2i\})$. Dar $2i\notin\overline{T}$, prin urmare $f\in\mathcal{H}(T)\cap C(\overline{T})$, iar din Teorema lui Cauchy-Goursat rezultă că $\int_{\partial T}\frac{\sin z}{z-2i}dz=0$.

(C1) Fie z_1,z_2,z_3,z_4 vârfurile unui contur dreptunghiular ∂R din $\mathbb{C}$. Dacă $f:\overline{R}\to\mathbb{C}$ e olomorfă pe domeniul dreptunghiular R şi e continuă pe $\overline{R}$ atunci $\int_{\partial R}f(z)dz=0$.

Demonstraţie. Fie $T_1=T(z_1,z_2,z_3)$ şi $T_2=T(z_1,z_3,z_4)$.



Cum $f\in\mathcal{H}(T_j)\cap C(\overline{T_j})$, deducem că $\int_{\partial T_j}f=0$, $j=\overline{1,2}$.

Deci, $0=\int_{\partial T_1}f=\int_{\lambda_1}f+\int_{\lambda_2}f+\int_{\lambda_5}f$,

unde $\{\lambda_1\}=[z_1,z_2]$, $\{\lambda_2\}=[z_2,z_3]$ şi $\{\lambda_5\}=[z_3,z_1]$.

Dar $\int_{\partial T_2}f=0 \Rightarrow 0=\int_{\overline{\lambda_5}}f+\int_{\lambda_3}f+\int_{\lambda_4}f=\int_{\lambda_3}f+\int_{\lambda_4}f-\int_{\lambda_5}f$,

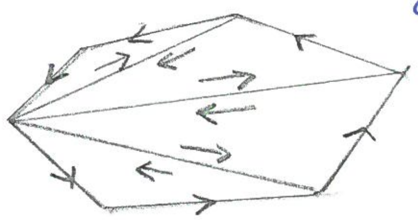
unde $\{\lambda_3\}=[z_3,z_4]$ şi $\{\lambda_4\}=[z_4,z_1]$.

Aşadar, am obţinut relaţiile:

(2) $0=\int_{\lambda_1}f+\int_{\lambda_2}f+\int_{\lambda_5}f=\int_{\lambda_3}f+\int_{\lambda_4}f-\int_{\lambda_5}f$.

Pe de altă parte,
$$\int_{\partial R}f=\int_{\lambda_1}f+\int_{\lambda_2}f+\int_{\lambda_3}f+\int_{\lambda_4}f,$$
iar din (2) rezultă că $\int_{\partial R}f=0$.

Obs: Fie γ un contur poligonal convex cu n laturi. Atunci γ se poate descompune în $n-2$ contururi triunghiulare. Fie D domeniul mărginit de conturul γ și $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D și continuă pe $\overline{D}$. Aplicând Teorema lui Cauchy-Goursat fiecărui triunghi determinat, se obține că $\int_\gamma f=0$.



Bibliografie: [1], [7], [8].