Seminar 5 Analiză Complexă

① Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $e^{\bar{z}} = i$; b) $\cos z = i$; c) $\sin z = 2$.

Soluție: a) Se verifică ușor că $e^{\bar{z}} = \overline{(e^{z})}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Deci $e^{\bar{z}} = i \Longleftrightarrow e^{z} = -i$.

Fie $z = x + iy \Rightarrow e^{z} = e^{x}(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{z} = -i \Leftrightarrow e^{x}(\cos y + i \sin y) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{x} = 1 \\ y = -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow z_k = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$ soluție.

b) Reamintim că $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ și

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\cos z = i \Longleftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \Longleftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2i \,\Big|\, e^{iz}$

$\Rightarrow e^{2iz} - 2i e^{iz} + 1 = 0$.

$e^{iz} = t \Rightarrow t^2 - 2it + 1 = 0$. $\Delta = (2i)^2 - 4 = -4 - 4 = -8$.

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow t_1 = i(1+\sqrt{2}) \text{ și } t_2 = i(1-\sqrt{2}).$$

I) $t_1 = i(1+\sqrt{2}) \Rightarrow e^{iz} = i(1+\sqrt{2})$.

Fie $z = x+iy \Rightarrow e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} =$

$= e^{-y}(\cos x + i\sin x)$.

Deci $e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow e^{-y}(\cos x + i\sin x) =$

$= (1+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 1+\sqrt{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\ln(1+\sqrt{2}) \\ x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(1+\sqrt{2}), \ k \in \mathbb{Z}$

soluție

II) $t_2 = i(1-\sqrt{2}) \Rightarrow e^{iz} = -(\sqrt{2}-1)i \Rightarrow$

$e^{-y}(\cos x + i\sin x) = (\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = \sqrt{2}-1 \\ x = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\ln(\sqrt{2}-1) \\ x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow z'_k = x_k + iy = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1), \ k \in \mathbb{Z}$

soluție

$\Rightarrow$ în ambele cazuri avem o infinitate de soluții

c) $\sin z = 2 \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 4i \,|\, e^{iz}$

$\Rightarrow e^{2iz} - 4i e^{iz} - 1 = 0.$

$t = e^{iz} \Rightarrow t^2 - 4it - 1 = 0. \quad \Delta = -16 + 4 = -12$

$\Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = (2+\sqrt{3})i \\ t_2 = (2-\sqrt{3})i. \end{cases}$

I) $t_1 = (2+\sqrt{3})i \Rightarrow e^{iz} = (2+\sqrt{3})i.$

Dar $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \forall z = x+iy \in \mathbb{C}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-y}(\cos x + i\sin x) = (2+\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 2+\sqrt{3} \\ x = \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\ln(2+\sqrt{3}) \\ x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow z_k = x_k + iy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}), \ k \in \mathbb{Z}$

soluţie

II) $t_2 = (2-\sqrt{3})i \Rightarrow e^{iz} = (2-\sqrt{3})i \overset{z = x+iy}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow e^{-y}(\cos x + i\sin x) = (2-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 2-\sqrt{3} \\ x = \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\ln(2-\sqrt{3}) \\ x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_k' = x_k + iy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3}), \ k \in \mathbb{Z}$

soluţie.

2. Să se studieze care din următoarele funcții poate fi prelungită prin continuitate în $z=0$:
a) $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{\operatorname{Re} z}{z}$; b) $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z}{|z|}$
c) $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$.

Soluție: a) $\exists \lim_{z\to 0} f(z) \Longleftrightarrow \forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}^*$ cu $\lim_{n\to\infty} z_n=0$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(z_n)$.

Fie $z_n=x_n\in\mathbb{R}^*$ cu $x_n\to 0 \Rightarrow f(z_n)=1\to 1$.
Fie $z_n=iy_n$, $y_n\in\mathbb{R}^*$ cu $y_n\to 0 \Rightarrow f(y_n)=0\to 0$.
Deci $\nexists \lim_{z\to 0} f(z)$.

b) Analog cu a).

c) Se observă că $|f(z)|=\left|\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}\right|=|\operatorname{Re} z|\xrightarrow[z\to 0]{} 0$.
$\Rightarrow \lim_{z\to 0}|f(z)|=0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)=0$.
$\Rightarrow$ dacă $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $F(z)=\begin{cases}\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}, & z\in\mathbb{C}^*\\ 0, & z=0\end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow F$ e continuă pe $\mathbb{C}$.

3. Să se determine imaginile dreptelor paralele cu axele de de coordonate prin transformarea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$.

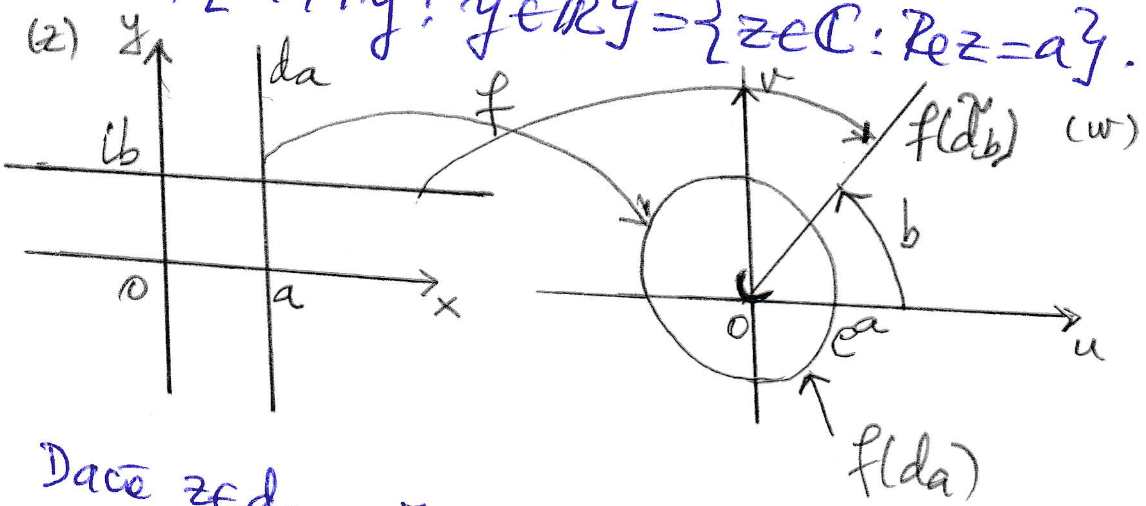
Soluție. $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$.

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z = x+iy \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) = e^x \cos y \\ v = v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

⊙ Fie $a \in \mathbb{R}$ și d_a = dreapta care trece prin punctul a și e paralelă cu axa Oy.

$(d_a)\{a+iy : y \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$.



Dacă $z \in d_a \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $z = a+iy \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = e^a \cos y \\ v = e^a \sin y \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2 = e^{2a} \Rightarrow |w| = e^a, \text{ unde } w = f(z).$$

$\Rightarrow f(d_a) = \partial U(0, e^a)$. În particular, dacă $a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_0 = Oy$ și $f(d_0) = \partial U(0,1)$.

Așadar, $f(d_a) = \{e^{a+iy} : y \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = a\} =$
$= \partial U(0, e^a)$.

⊙ Fie $b \in \mathbb{R}$ și $\tilde{d}_b$ = dreapta care trece prin ib și e paralelă cu axa Ox!

$(\tilde{d}_b)\{x+ib : x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b\}$.

Dacă $z \in \tilde{d}_b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $z = x+ib \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u = e^x \cos b \\ v = e^x \sin b \end{cases} \Rightarrow \arg w = b \pmod{2\pi}$.

$\Rightarrow f(\tilde{d}_b) = \{e^{x+ib} : x \in \mathbb{R}\} = \{e^x(\cos b + i \sin b) : x \in \mathbb{R}\}$

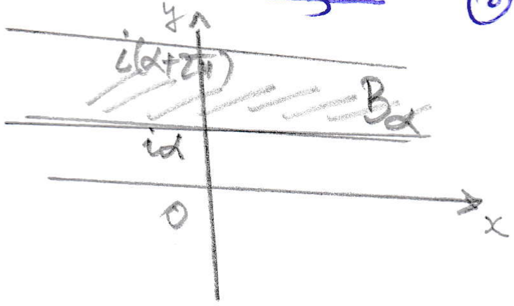
$= \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w = b \pmod{2\pi}\} \Rightarrow f(\tilde{d}_b) =$

semidreapta deschisă care pornește din origine (nu conține originea) și determină $\measuredangle b$ cu sensul pozitiv al axei reale.

În particular, dacă $b=0 \Rightarrow \tilde{d}_0 = Ox$ și $f(\tilde{d}_0) =$
$= (0,\infty) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w = 0\}$.

(4) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \le \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$.
Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^z$. Să se arate că funcția f este injectivă pe B_α și $f(B_\alpha) = \mathbb{C}^*$.

Demonstrație



(i) f injectivă pe B_α.

Fie $z_1, z_2 \in B_\alpha$ astfel încât $f(z_1) = f(z_2) \overset{?}{\Longrightarrow} z_1 = z_2$.

$z_j = x_j + i y_j$, $j = \overline{1,2} \Rightarrow$

$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$

$\Downarrow$

$e^{x_1} = e^{x_2}$ și $y_1 = y_2 \pmod{2\pi}$.

Deci $x_1 = x_2$ și $\exists k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $y_1 = y_2 + 2k\pi$.

Dar $z_1, z_2 \in B_\alpha \Rightarrow \alpha \le y_1 < \alpha + 2\pi$ și $\alpha \le y_2 < \alpha + 2\pi$

$\Rightarrow -2\pi < y_1 - y_2 < 2\pi$. Dar $y_1 - y_2 = 2k\pi \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow -2\pi < 2k\pi < 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow k \in (-1,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow \boxed{y_1 = y_2}$.

Deci: $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow f$ injectivă pe B_α.

ⓒ În continuare, arătăm că $f(B_\alpha) = \mathbb{C}^*$.

Deoarece $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(B_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^*$.

$\mathbb{C}^* \overset{?}{\subseteq} f(B_\alpha)$. Fie $w \in \mathbb{C}^* \overset{?}{\Rightarrow} w \in f(B_\alpha) \overset{f \text{ injectivă pe } B_\alpha}{\Longleftrightarrow}$

$\exists!\, z \in B_\alpha$ astfel ca $w = f(z)$.

$w = f(z) \underset{z=x+iy}{\Longleftrightarrow} e^x(\cos y + i \sin y) = w \Longleftrightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ y = \arg w \pmod{2\pi} \Leftrightarrow y \in \operatorname{Arg} w \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \ln|w| \\ y = \arg w + 2k\pi, \text{ unde } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Dar căutăm $z \in B_\alpha$ astfel încât $e^z = w \Rightarrow \alpha \le y < \alpha + 2\pi$.

$\Rightarrow \begin{cases} x = \ln|w| \\ \arg w + 2k\pi = y \in [\alpha, \alpha + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \alpha \le \arg w + 2k\pi < \alpha + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Deci $\dfrac{\arg w - \alpha}{2\pi} \le k < \dfrac{\alpha - \arg w}{2\pi} + 1$.

Notăm cu $a = \dfrac{\arg w - \alpha}{2\pi}$. $\Big\} \Rightarrow a \le k < a + 1, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists!\, k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \leq k_0 < a+1$.

Fie $y = \arg w + 2k_0\pi \in [\alpha, \alpha+2\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = x+iy = \ln|w| + i(\arg w + 2k_0\pi) \in B_\alpha$ și $f(z) = w$.

În concluzie, $f(B_\alpha) = \mathbb{C}^*$.

Ok.

(5) Să se determine imaginile următoarelor mulțimi de puncte prin transformarea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, unde:

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a\}$, $a \in \mathbb{R}$

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b\}$, $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\partial U(0,r)$, $U(0,r)$, unde $r > 0$

(iv) $C = \{z \in \mathbb{C}^* : \arg z = \alpha\}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Soluție. Fie $w = f(z) = u + iv$, $z = x+iy \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v = v(x,y) = 2xy \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (**)$$

(i) Dacă $z \in A \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$ astfel ca $z = a+iy \stackrel{(**)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{cases} u = a^2 - y^2 \\ v = 2ay \end{cases} \left(\begin{matrix} ** \\ * \end{matrix}\right)$$

Cazul I: $a = 0 \Rightarrow A = \text{axa } Oy \stackrel{(***)}{\Longrightarrow} \begin{cases} u = -y^2 \leq 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w = 0\} = (-\infty, 0]$.

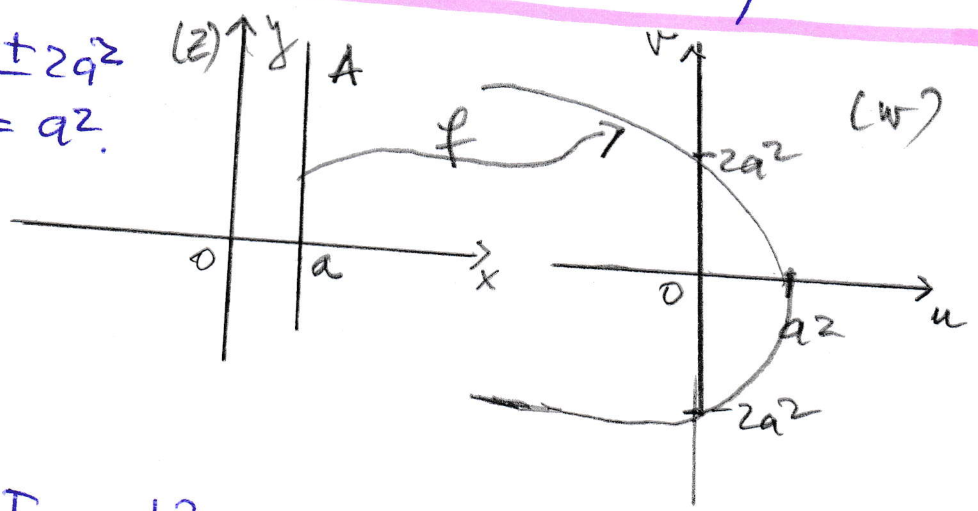
Cazul II. $a \neq 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} y = \frac{v}{2a} \Rightarrow u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^2 u = 4a^4 - v^2 \Rightarrow v^2 = 4a^4 - 4a^2 u$

$\Rightarrow f(A) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 4a^4 - 4a^2 u\}$ – parabolă.

$u = 0 \Rightarrow v = \pm 2a^2$

$v = 0 \Rightarrow u = a^2$.



(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b\}$. Dacă $z \in B \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $z = x + ib \overset{(**)}{\Longrightarrow} \begin{cases} u = x^2 - b^2 \\ v = 2xb \end{cases} (***)$

Cazul I: $b = 0 \Rightarrow B =$ axa $Ox \overset{(***)}{\Longrightarrow} \begin{cases} u = x^2 \geq 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(B) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 0, \operatorname{Im} w = 0\} = [0, \infty)$.

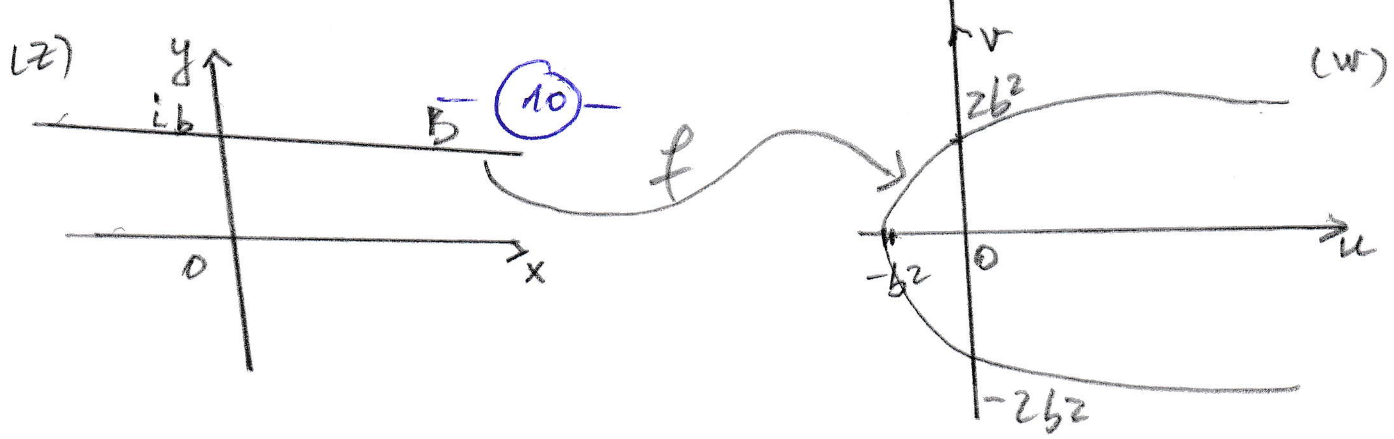
Cazul II: $b \neq 0 \overset{(***)}{\Longrightarrow} x = \frac{v}{2b} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4b^2 u = v^2 - 4b^4 \Rightarrow v^2 = 4b^2 u + 4b^4 \Rightarrow$

$f(B) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 4b^2 u + 4b^4\}$ – parabolă.

$u = 0 \Rightarrow v = \pm 2b^2$

$v = 0 \Rightarrow u = -b^2$.



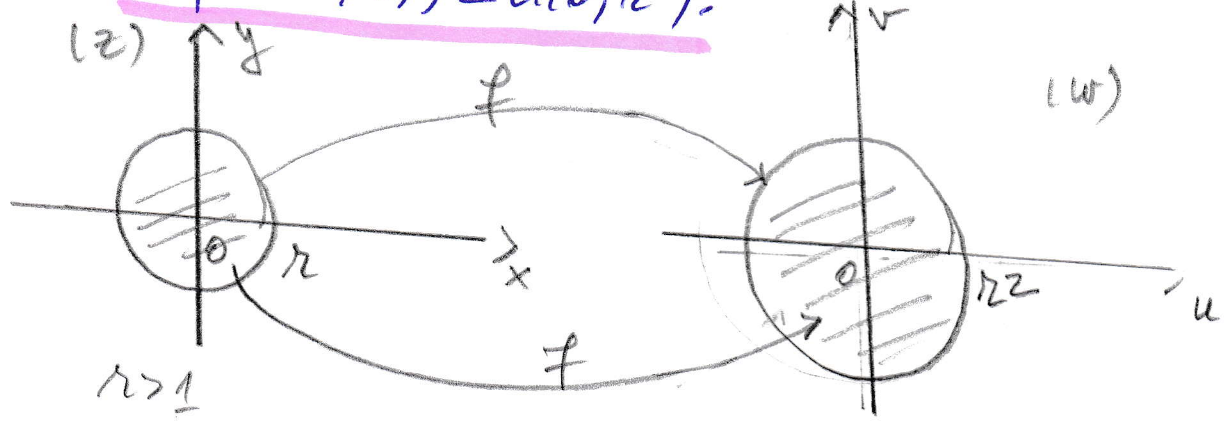
(iii) $\partial U(0,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z|=r\} \Rightarrow$ dacă $w=f(z)$, $z\in\partial U(0,r)$

$\Rightarrow |w|=|z|^2=r^2 \Rightarrow w\in \partial U(0,r^2)$.

Deci $f(\partial U(0,r))=\partial U(0,r^2)$.

Dacă $z\in U(0,r) \Rightarrow |w|=|z|^2<r^2 \Rightarrow w\in U(0,r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U(0,r))=U(0,r^2)$.

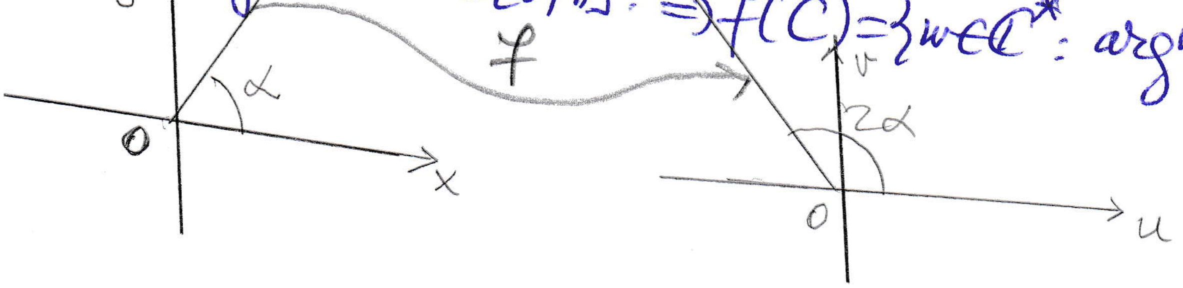


$r>1$

(iv) $C=\{z\in\mathbb{C}^*: \arg z=\alpha\}$ – semidreapta deschisă care pornește din origine și determină $\sphericalangle\alpha$ cu sensul pozitiv al axei reale.

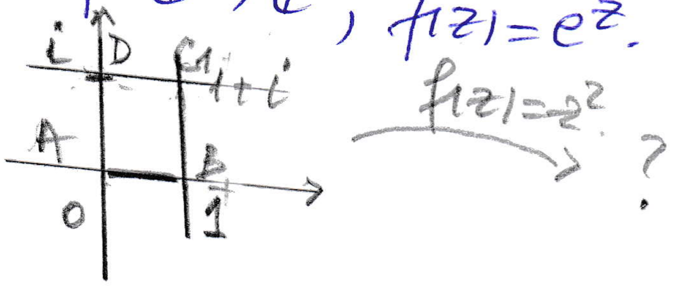
Dacă $w=f(z)$, $z\in C \Rightarrow \arg w=\arg z^2=2\arg z=2\alpha$
$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$

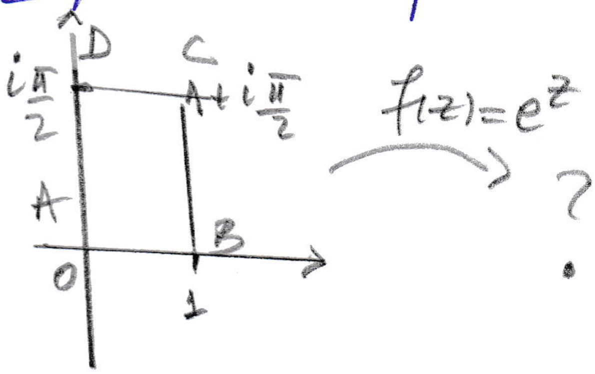
$\Rightarrow \arg w=2\alpha\in[0,\pi]$. $\Rightarrow f(C)=\{w\in\mathbb{C}^*: \arg w=2\alpha\}$.



(6) a) Să se determine imaginea pătratului de vârfuri $0, 1, i, 1+i$ prin transformarea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2$.

b) Să se determine imaginea conturului poligonal de vârfuri $0, 1, i\frac{\pi}{2}, 1+i\frac{\pi}{2}$ prin transformarea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$.





(7) Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z}{1+|z|}$. Să se arate că f este un omeomorfism de la $\mathbb{C}$ la discul unitate $U(0,1)$.

Derivabilitate în planul complex

(1) Să se determine toate punctele $z\in\mathbb{C}^*$ pentru care funcția $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ este derivabilă și apoi să se calculeze derivata funcției f în punctele respective, unde

$$f(z)=3z^2+5|z|^2-6\bar{z}^2+2z-7\bar{z}+\frac{1}{z}+10.$$

Soluție. Fie $f=u+iv$, unde $u=\operatorname{Re} f$ și $v=\operatorname{Im} f$ $\Rightarrow$ u și v sunt funcții elementare, deci de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Deci f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în $\forall z\in\mathbb{C}^*$.

T. Cauchy-Riemann $\Longrightarrow$ căutăm punctele $z \in \mathbb{C}^*$ pentru care $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)=0$.

Dar

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 5z - 12\bar{z} - 7.$$

Prin urmare, avem de rezolvat ecuația

$$5z - 12\bar{z} - 7 = 0.$$

$z = x+iy \Rightarrow 5(x+iy) - 12(x-iy) - 7 = 0$

$\Rightarrow -7x - 7 + 17yi = 0 \Rightarrow \begin{cases} -7x-7=0 \\ \text{și} \\ 17y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z_0 = -1}$ – soluție.

Atunci $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Rightarrow f'(-1) = \frac{\partial f}{\partial z}(-1)$.

Dar

$$\frac{\partial f}{\partial z}(-1) = 6z + 5\bar{z} + 2 - \frac{1}{z^2}\Big|_{z=-1} = 6\cdot(-1) + 5\cdot(-1) + 2 - 1 =$$
$$= -6 - 5 + 1 = -10.$$

$\Rightarrow \boxed{f'(-1) = -10}$.

② Să se determine constantele $A, B, C \in \mathbb{C}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Az^2 + B|z|^2 + C\bar{z}^2$ să fie o funcție întreagă (olomorfă pe $\mathbb{C}$).

<u>Soluție</u>: $f = u + iv \Rightarrow u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ e $\mathbb{R}$-dif. în $\forall z \in \mathbb{C}$. Funcția f e olomorfă pe $\mathbb{C}$ dacă f e derivabilă în $\forall z \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Dar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = Bz + 2C\bar{z}, \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow Bz + 2C\bar{z} = 0, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
<u>$B = C = 0$.</u>