Analiza complexă (Notițe de curs)

Material bibliografic pentru cursul 9

În cele ce urmează vom arăta că funcțiile olomorfe pe domenii stelate în $\mathbb{C}$ admit primitive.
Pe de altă parte, vom demonstra că acest rezultat rămâne valabil în cazul oricărui domeniu simplu conex în $\mathbb{C}$.

T1 (Teorema de legătură între olomorfie și primitivă)

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu stelat în raport cu punctul $z_0 \in D$, iar $d_1, \dots, d_n$ un număr finit de drepte care trec prin z_0. Fie $d = \bigcup_{k=1}^{n} d_k$. Dacă $f: D \to \mathbb{C}$ e o funcție derivabilă pe $D \setminus d$ și e continuă pe D, atunci f admite primitive pe D.

Demonstrație. Deoarece D e domeniu stelat în raport cu $z_0 \Rightarrow [z_0, z] \subset D$, $\forall z \in D$, unde

$$[z_0, z] = \{\zeta = (1-t)z_0 + tz : t \in [0,1]\}.$$

Fie γ_z drumul liniar de suport segmentul închis $[z_0, z]$. Deci $\{\gamma_z\} = [z_0, z]$, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$.

Considerăm funcția $g: D \to \mathbb{C}$,

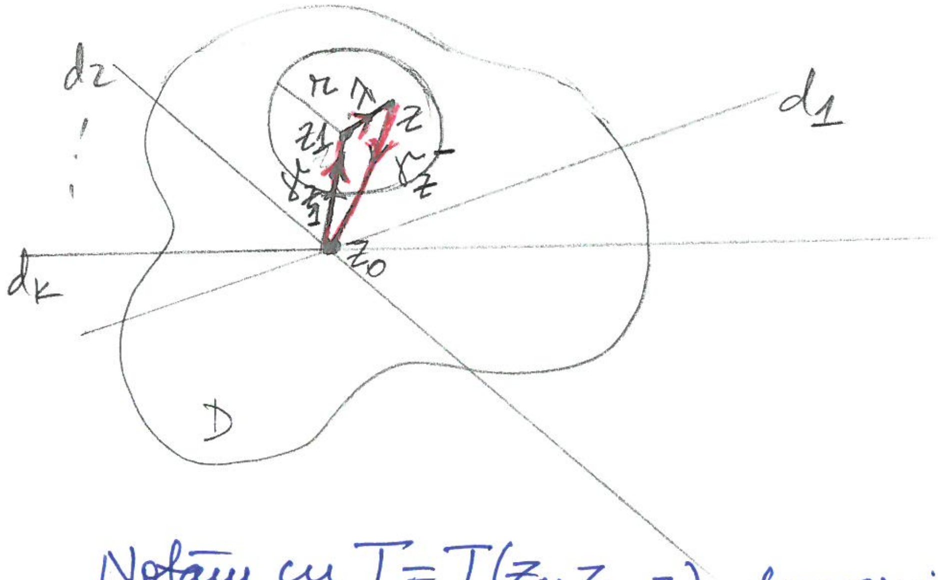
$$g(z) = \begin{cases} \int_{\gamma_z} f, & \forall z \in D \setminus \{z_0\} \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Arătăm că g e o primitivă a funcției f pe D, adică $g \in \mathcal{H}(D)$ și $g'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$.

Fie $z_1 \in D$ ales în mod arbitrar. Arătăm că funcția g e derivabilă în z_1 și $g'(z_1) = f(z_1)$.

<u>Cazul I</u>: $z_1 \in D \setminus (D \cap d)$. Atunci $z_1 \notin d$, deci $z_1 \notin d_k$, $k = \overline{1,n}$. Deoarece $D \subseteq \mathbb{C}$ e deschisă, iar $z_1 \notin d$, $\exists\, r > 0$ astfel încât $\overline{U}(z_1, r) \subseteq D \setminus (D \cap d)$.

Alegem $z \in \dot{U}(z_1, r)$ în mod arbitrar și fie λ drumul liniar de suport $[z_1, z]$, deci $\{\lambda\} = [z_1, z]$.



Notăm cu $T = T(z_0, z_1, z)$ domeniul triunghiular determinat de punctele z_0, z_1 și z. Avem că $\overline{T} \subset D \setminus (D \cap d)$, iar din faptul că f e derivabilă pe $D \setminus d$ și e continuă pe D, deducem că $f \in \mathcal{H}(T) \cap C(\overline{T})$. Din Teorema lui Cauchy-Goursat (Teorema lui Cauchy pentru triunghiuri) rezultă că $\int_{\partial T} f = 0$.

Pe de altă parte, $\partial T = \gamma_{z_1} \cup \lambda \cup \gamma_z^-$, deci

$$0 = \int_{\partial T} f = \int_{\gamma_{z_1}} f + \int_{\lambda} f + \int_{\gamma_z^-} f =$$

$$= \int_{\gamma_{z_1}} f + \int_{\lambda} f - \int_{\gamma_z} f = g(z_1) - g(z) + \int_{\lambda} f.$$

Deci

$$g(z) - g(z_1) = \int_{\lambda} f = \int_0^1 f(\lambda(t))\, d\lambda(t) =$$

$$= \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz)(z - z_1)\, dt,$$

unde am folosit faptul că

$$\lambda(t) = (1-t)z_1 + tz, \ \forall t \in [0,1].$$

Prin urmare,

$$g(z) - g(z_1) = (z - z_1) \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz)\, dt,$$

iar din faptul că $z \in \dot{U}(z_1, r)$ a fost ales în mod arbitrar, rezultă că

$$\frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1} = \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz)\, dt, \ \forall z \in \dot{U}(z_1, r).$$

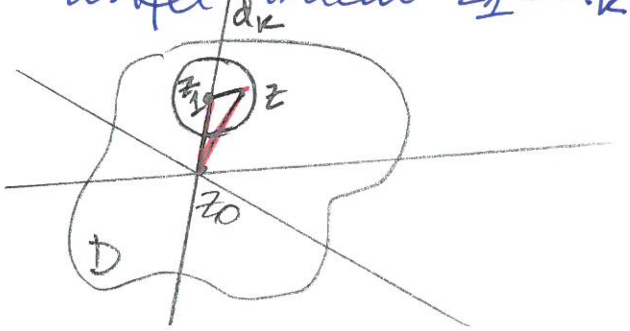
Deci,

$$\lim_{z \to z_1} \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1} = \lim_{t \to z_1} \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz)\, dt$$

$$= f(z_1),$$

unde am ținut cont de continuitatea funcției f pe $[z_1, z] \subset D$. Așadar, am arătat că $g'(z_1) = f(z_1)$.

<u>Cazul II</u>. $z_1 \in D \cap d \setminus \{z_0\}$. Atunci $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $z_1 \in d_k \setminus \{z_0\}$. E clar că



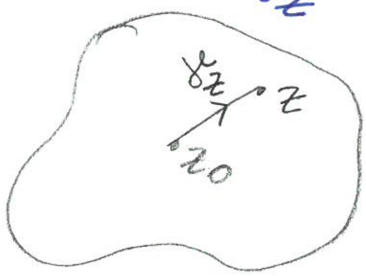
$z_1 \in d_k \setminus d_j, \ j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, iar de aici deducem că $\exists \rho > 0$ astfel ca

$U(z_1, \rho) \cap (d \setminus d_k) = \phi$.

În continuare, fie $z \in \dot{U}(z_1, \rho)$, ales în mod arbitrar și fie $T = T(z_0, z_1, z)$. Atunci $f \in \mathcal{H}(T) \cap C(\overline{T})$, deci $\int_{\partial T} f = 0$, pe baza Teoremei lui Cauchy-Goursat.

Mai departe, putem aplica un raționament similar celui de la Cazul I. Astfel, deducem că g e derivabilă în z_1 și $g'(z_1) = f(z_1)$.

<u>Cazul III</u>. $\boxed{z_1 = z_0}$. În acest caz, avem că $g(z_0) = 0$ și $g(z) = \int_{\gamma_z} f$, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$. Atunci, obținem că:



$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_z} f.$$

Dar $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$, $\forall t \in [0,1]$, deci

$$\frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_z} f = \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0)\,dt$$

$$= \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt.$$

În final, ținând cont de relațiile precedente, obținem că

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt = f(z_0).$$

Deci, g e derivabilă în z_0 și $g'(z_0) = f(z_0)$.

În concluzie, g e o primitivă a funcției f pe D!

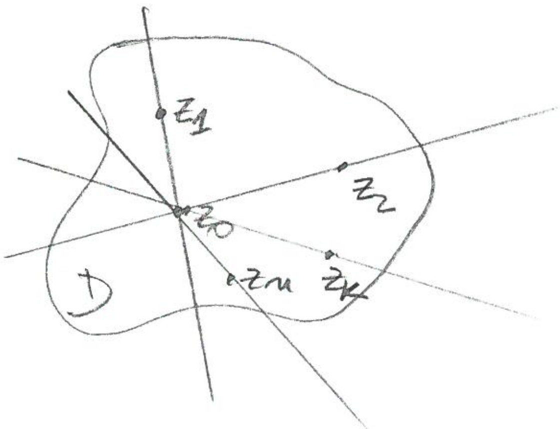
OK

Din Teorema 1, obținem următoarea consecință, utilă în aplicații.

C1 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu stelat în raport cu punctul $z_0 \in D$ și fie $f: D \to \mathbb{C}$. Dacă există un număr finit de puncte $z_1, \dots, z_n \in D$ astfel încât f e derivabilă pe $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ și e continuă pe D, atunci f admite primitive pe D.

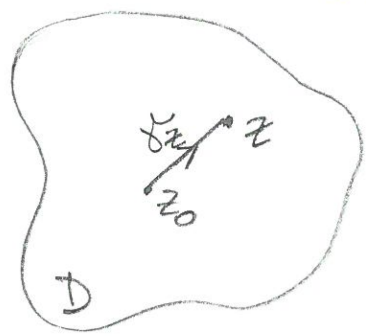
Demonstrație. Cazul I. $z_0 \notin \{z_1, \dots, z_n\}$. Fie d_k dreapta ce trece prin punctele z_0 și z_k, $k = \overline{1,n}$ și fie

$$d = \bigcup_{k=1}^{n} d_k.$$



Atunci f e derivabilă pe $D \setminus (D \cap d)$ și e continuă pe D. Din Teorema 1 rezultă că f are primitive pe D.

Cazul II. $z_0 \in \{z_1, \dots, z_n\} \Longrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $z_0 = z_k$. Aplicând un raționament similar celui de la demonstrația cazului III al Teoremei 1, rezultă că funcția $g: D \to \mathbb{C}$, $g(z) = \begin{cases} \int_{\gamma_z} f, & z \in D \setminus \{z_0\} \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$ este o primitivă a funcției f, unde $\{\gamma_z\} = [z_0, z]$.



OK

Obs. Din Consecința 1 rezultă că funcțiile olomorfe pe domenii stelate în $\mathbb{C}$ (în particular, pe domenii convexe în $\mathbb{C}$) admit primitive.

Ex. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \in \mathbb{C}^* \\ 1, & z = 0. \end{cases}$

Atunci $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*) \cap C(\mathbb{C})$, deci f are primitive pe $\mathbb{C}$.

⊙ În continuare, introducem noțiunea de omotopie a drumurilor în $\mathbb{C}$.

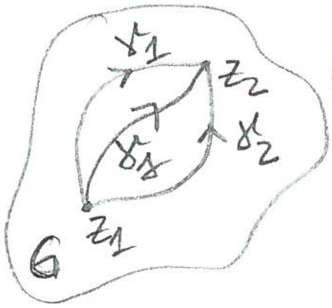
Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $z_1, z_2 \in G$ și $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_G(z_1, z_2)$, unde

$$\mathcal{D}_G(z_1,z_2) = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \gamma \text{ drum}, \{\gamma\} \subset G, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}.$$

Drumul γ_1 se numește omotop cu γ_2 în G (notăm $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$) dacă $\exists\, \varphi : [0,1] \times [0,1] \to G$ o funcție continuă astfel încât au loc următoarele condiții:

(i) $\varphi(0,t) = \gamma_1(t)$, $\varphi(1,t) = \gamma_2(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

(ii) $\varphi(s,0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_1$, $\forall s \in [0,1]$,
și $\varphi(s,1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_2$, $\forall s \in [0,1]$.



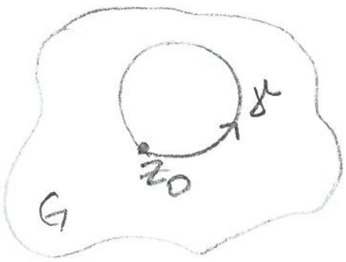
⊙ Funcția φ se numește deformație continuă a drumului γ_1 în γ_2.

Obs: Fie $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_G(z_1, z_2)$ și $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to G$ o deformație continuă a lui γ_1 în γ_2.

Fixăm $s\in[0,1]$ și considerăm funcția $\gamma_s:[0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_s(t)=\varphi(s,t)$, $\forall t\in[0,1]$.

Atunci γ_s e continuă pe $[0,1]$, $\gamma_s(0)=z_1$ și $\gamma_s(1)=z_2$, iar din faptul că $\{\gamma_s\}\subset G$, deoarece $\varphi([0,1]\times[0,1])\subset G$, rezultă că $\gamma_s\in\mathcal{D}_G(z_1,z_2)$.

Def 2. Fie $G\subseteq\mathbb{C}$ deschisă, $z_0\in G$ și $\gamma\in\mathcal{D}_G(z_0,z_0)$ un drum închis din G. Spunem că γ este omotop cu zero în G dacă $\gamma \underset{G}{\sim} e_{z_0}$ unde $e_{z_0}(t)=z_0$, $\forall t\in[0,1]$.



În acest caz, notăm $\gamma\underset{G}{\sim}0$.

În cele ce urmează prezentăm o noțiune extrem de importantă în analiza complexă, în conexiune directă cu omotopia drumurilor în $\mathbb{C}$.

Def 3. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu. Spunem că D este simplu conex dacă

$$\gamma\underset{D}{\sim}0,\ \forall\,\gamma - \text{contur din } D.$$

Obs: (i) Se poate arăta: orice domeniu stelat (în particular, orice domeniu convex) din $\mathbb{C}$ este simplu conex.

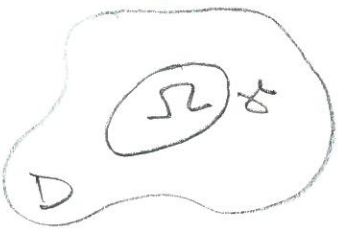
(ii) Dacă $D\subsetneq\mathbb{C}$ e un domeniu, atunci D este simplu conex $\Longleftrightarrow$ D și discul unitate $U(0,1)$ sunt conform echivalente, adică $\exists f:D\to U(0,1)$ astfel ca f e bijecție de la D la

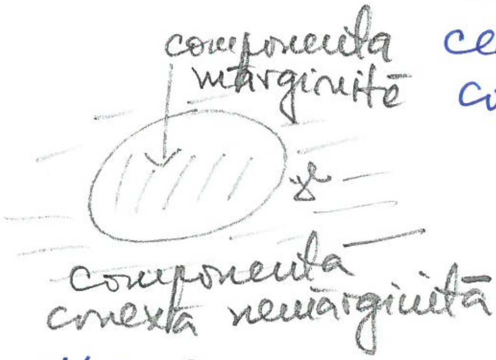
$U(0,1)$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$.

(iii) O aplicaţie imediată a Teoremei lui Liouville ne arată că $\mathbb{C}$ şi discul unitate $U(0,1)$ nu sunt conform echivalente.

Într-adevăr, dacă, prin absurd, $\exists f : \mathbb{C} \to U(0,1)$ bijecţie olomorfă de la $\mathbb{C}$ la U, atunci f e mărginită, deci constantă pe $\mathbb{C}$, pe baza Teoremei lui Liouville. Contradicţia obţinută arată că $\nexists f : \mathbb{C} \to U(0,1)$ astfel ca $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ şi f bijectivă de la $\mathbb{C}$ la $U(0,1)$.

(iv) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu. Atunci D e simplu conex $\Leftrightarrow$ $\forall \gamma$ contur Jordan din D (γ e imaginea omeomorfă a unui cerc), avem că $\overline{\Omega} \subset D$, unde Ω = domeniul mărginit cu $\partial\Omega = \{\gamma\}$.





⊙ Este cunoscut faptul că dacă γ e un contur Jordan din $\mathbb{C}$, atunci γ împarte planul complex în exact două componente conexe: cea nemărginită şi componenta conexă mărginită.

Exemple: (i) $\mathbb{C}$, $U(z_0, r)$, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sunt simplu conexe, fiind domenii stelate.

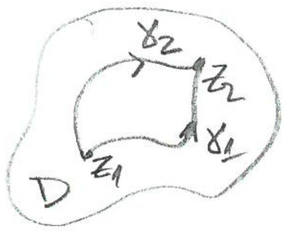
(ii) Coroana circulară $U(z_0; r_1, r_2)$ nu e simplu conex. În particular $\dot{U}(z_0, r) = U(z_0; 0, r)$ nu e domeniu simplu conex. De asemenea, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ nu e domeniu simplu conex.

(T2) (Teorema fundamentală a lui Cauchy pentru calculul integral complex).
Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$ şi γ contur din G, astfel ca $\gamma \underset{G}{\simeq} 0$. Atunci $\int_\gamma f = 0$.

C2) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci f admite primitive pe D.

<u>Demonstrație</u>. Fie γ un contur din D. Deoarece D e simplu conex, rezultă că $\gamma \underset{D}{\sim} 0$, iar din Teorema 2 deducem că $\int_\gamma f = 0$. Cum γ a fost ales în mod arbitrar, deducem că f admite primitive, pe baza Teoremei de legătură între primitivă și integrală.

<u>Obs</u>: (i) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $z_1, z_2 \in G$ și $f \in \mathcal{H}(G)$. Dacă $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_G(z_1, z_2)$, astfel încât $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$ iar γ_1, γ_2 sunt drumuri rectificabile, atunci $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ e un contur din G și $\gamma \underset{G}{\sim} 0$.



Din Teorema 2 rezultă că $\int_\gamma f = 0$, adică $\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0$.

Deci $\boxed{\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.}$ (*)

(ii) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $z_1, z_2 \in D$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_D(z_1, z_2)$ drumuri rectificabile. Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$, atunci $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Într-adevăr, dacă $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, atunci γ e un contur din D = domeniu simplu conex. Deci $\gamma \underset{D}{\sim} 0$, de unde se obține cu un efort suplimentar că $\gamma_1 \underset{D}{\sim} \gamma_2$. Din egalitatea (*) rezultă că $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

⊙ Așadar, pe domenii simplu conexe, integrala complexă e independentă de drum.

<u>Bibliografie</u>: [1], [7].