Seminar 8 Analiză complexă

Funcții omografice

① a) Să se determine funcția omografică $f:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a.î. $f(i)=0$, $f(-1)=\infty$, $f(0)=-i$.

b) Să se determine porțiunile din $\mathbb{C}$ care se contractă, respectiv se dilată, prin funcția f găsită. Reprezentați în $\mathbb{C}$ mulțimile obținute.

Soluție:

a) f omografică $\Rightarrow$ f conservă biraportul pentru 4 puncte distincte.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=i,\ z_2=-1,\ z_3=0 \\ w_1=0,\ w_2=\infty,\ w_3=-i \end{array}\right\} \Rightarrow (z,z_1,z_2,z_3)=(w,w_1,w_2,w_3)$$

$f(z)=w$

$$\Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}=\frac{w-w_1}{w-w_3}:\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-i}{z-0}:\frac{-1-i}{-1-0}=\frac{w-0}{w+i}:\underbrace{\frac{\infty-0}{\infty+i}}_{=1} \qquad ! \odot\ \frac{\infty+\alpha}{\infty+\beta}=1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-i}{z}\cdot\frac{1}{1+i}=\frac{w}{w+i} \Leftrightarrow (z-i)(w+i)=wz(1+i)$$

$$\Leftrightarrow zw+iz-iw+1=wz+wzi \Leftrightarrow iz+1=w(iz+i)$$

$$\Leftrightarrow wi(z+1)=iz+1 \Leftrightarrow w=\frac{iz+1}{i(z+1)} \Leftrightarrow w=\frac{z-i}{z+1}.$$

$$f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty,\ f(z)=\frac{z-i}{z+1},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\},\ f(-1)=\infty,$$
$$f(\infty)=1.$$

Verificare: $f(i)=0$, $f(-1)=\infty$, $f(0)=-i$.

b) $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-1\})$. Fie $A=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}:|f'(z)|<1\}$ porțiunea care se contractă prin f și

$B=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}:|f'(z)|>1\}$ porțiunea care se dilată prin f.

$$f'(z)=\frac{1+i}{(z+1)^2},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}.$$

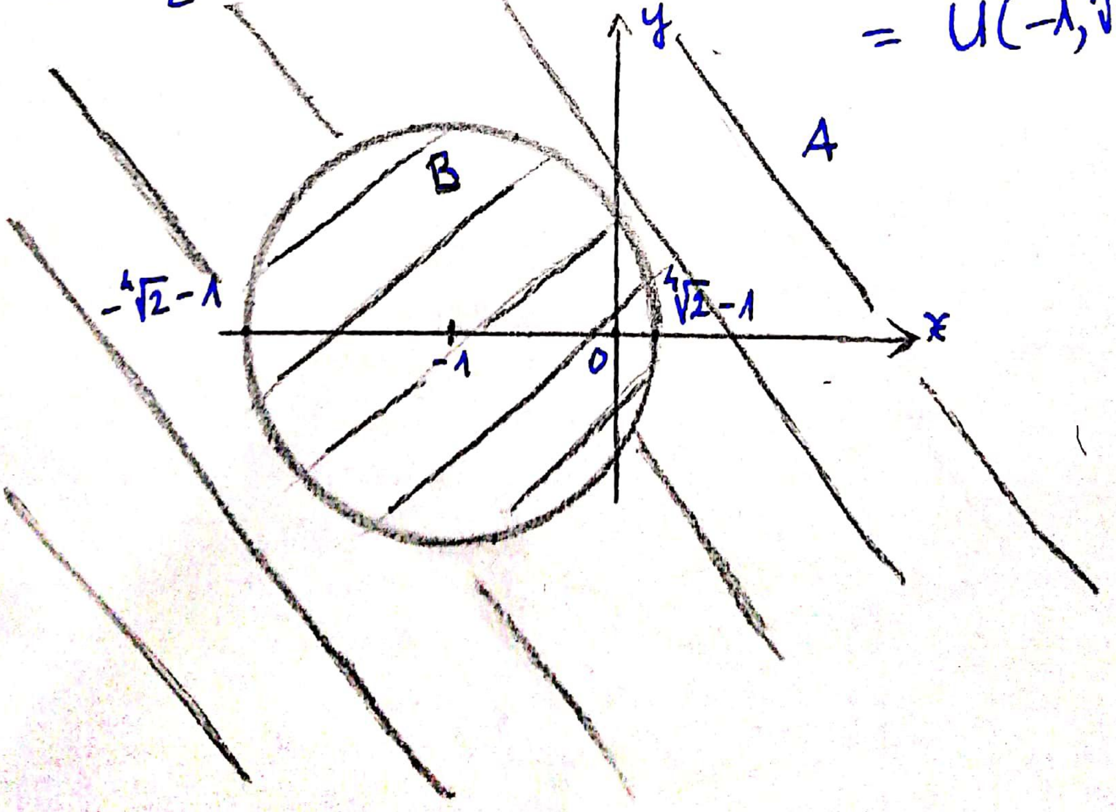
$$z\in A \iff |f'(z)|<1 \iff \frac{|1+i|}{|z+1|^2}<1 \iff \frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}<1$$

$$\iff \sqrt{2}<|z+1|^2 \iff |z+1|>\sqrt[4]{2}.$$

$$A=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}:|z+1|>\sqrt[4]{2}\}=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|>\sqrt[4]{2}\}.$$

$$z\in B \iff |f'(z)|>1 \iff |z+1|<\sqrt[4]{2},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}.$$

$$B=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}:|z+1|<\sqrt[4]{2}\}=\{z\in\mathbb{C}:0<|z+1|<\sqrt[4]{2}\}$$
$$=\dot{U}(-1,\sqrt[4]{2}).$$



2 Fie $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 , \operatorname{Re} z > 0 , \operatorname{Im} z > 0 \}$

şi $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

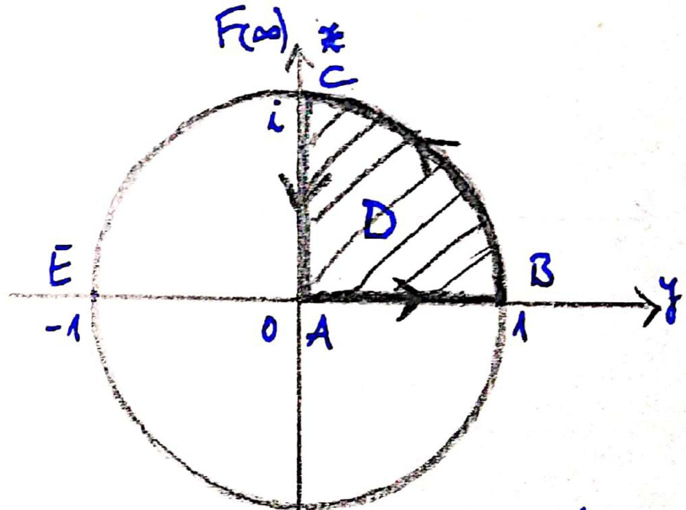
$f(-1) = \infty$, $f(\infty) = 1$.

Să se determine imaginea domeniului D prin tranformarea omografică f ($f(D) = ?$).

! Fie $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\forall z \in \mathbb{C}_\infty$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ şi $c \neq 0$.

$z_0 = -\dfrac{d}{c}$ polul transformării omografice f ($f(z_0) = \infty$).

z_0
- $\in$ cerc $\xmapsto{f}$ dr.
- $\notin$ cerc $\xmapsto{f}$ cerc
- $\in$ dr. $\xmapsto{f}$ dr
- $\notin$ dr. $\xmapsto{f}$ cerc

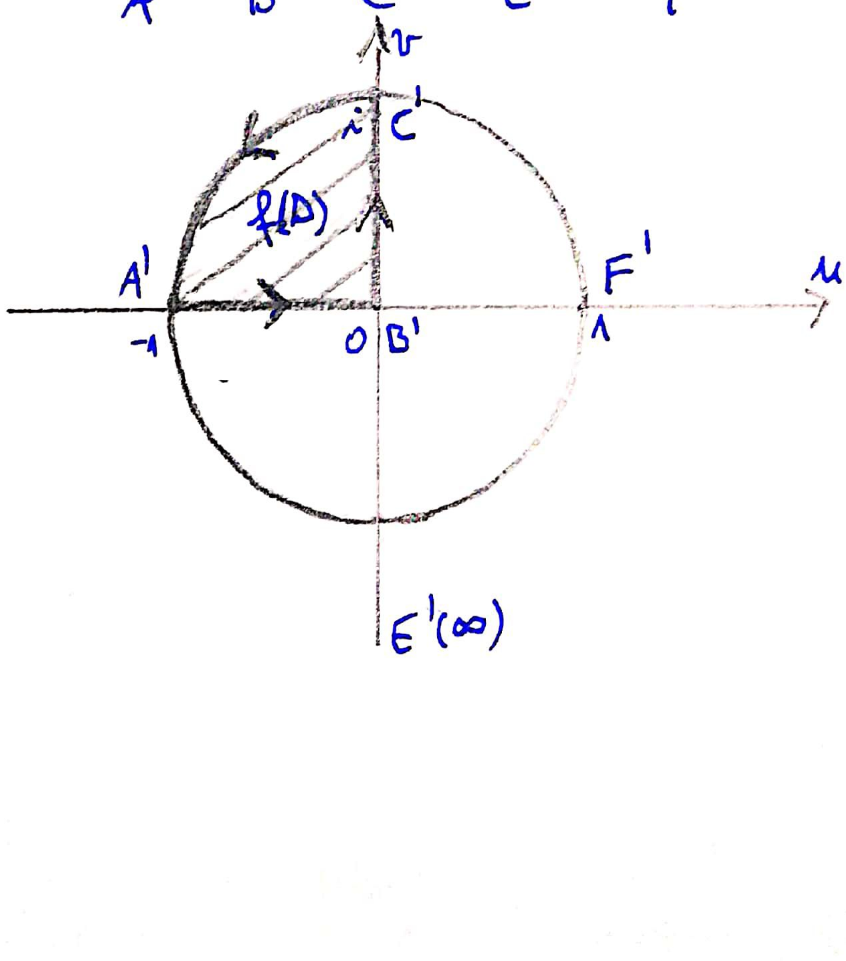


Mai întâi, determinăm imaginea frontierei domeniului D: $f(\partial D) = \partial f(D)$, pentru că f este omeomorfism de la $\mathbb{C}_\infty$ la $\mathbb{C}_\infty$.

Pentru a determina $f(\partial D)$ dăm un sens de parcurs arbitrar pe ∂D, dar ţinem cont de faptul că pe $\partial f(D) = f(\partial D)$ sensul de parcurs trebuie să se păstreze.

Domeniul căutat ($f(D)=?$) este acel domeniu din $\mathbb{C}$ pe al cărei frontieră sensul de parcurs coincide cu cel dat inițial pe frontiera lui D.

	A	B	C	E	F
z	0	1	i	-1	∞
$w=f(z)$	-1	0	i	∞	1
	A'	B'	C'	E'	F'



Tema 3

1. Fie $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = ax^2 - y^2 + xy$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.
Determinați a astfel încât u este armonică pe $\mathbb{R}^2$ și apoi să se determine toate funcțiile $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Re} f = u$.

2. a) Să se determine funcția omografică $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ astfel încât $f(1) = 0$, $f(i) = -i$, $f(\infty) = 1$.
b) Să se determine porțiunile din $\mathbb{C}$ care se contractă, respectiv se dilată, prin funcția omografică f găsită. Reprezentați în $\mathbb{C}$ mulțimile obținute.

3. Fie $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ și $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f(i) = \infty$, $f(\infty) = 1$. Să se determine imaginea domeniului D prin transformarea omografică f.

4. Determinați toate funcțiile $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ astfel încât $|f(z)| = e^{2x}(x^2+y^2)$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$.