Curs 3

Propoziţia 1. *Măsura exterioară Lebesgue exterior λ^* satisface următoarele proprietăţi:*

(i) dacă $H \in \mathcal{H}$, atunci $\lambda^*(H) = \mathrm{vol}(H)$;

(ii) (Invarianţă la translaţii) dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $x \in \mathbb{R}^m$, atunci $\lambda^*(A) = \lambda^*(x + A)$. $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$

Dem (i) Fie $H \in \mathcal{H}$

Luăm $H_1 = H$, $H_n = [0,0]^m$, $n \geq 2$ $\Rightarrow H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \Rightarrow \lambda^*(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(H_n) = \mathrm{vol}(H)$ (1)

Fie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \tilde{H}_n \in \mathcal{H}$ a.î. $H_n \subseteq \mathrm{int}(\tilde{H}_n)$ şi $\mathrm{vol}(\tilde{H}_n) \leq \mathrm{vol}(H_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (*)

$\Rightarrow H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathrm{int}(\tilde{H}_n)}_{\text{deschisă}}$

H cpt.

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ a.î. după o eventuală renumerotare a dreptunghiurilor $\tilde{H}_n$

$H \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} \mathrm{int}(\tilde{H}_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} \tilde{H}_n$

$$\underset{\text{Prop 2.(ii), Curs 2}}{\Rightarrow} \mathrm{vol}(H) \leq \sum_{n=1}^{k} \mathrm{vol}(\tilde{H}_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{k} \left(\mathrm{vol}(H_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(H_n) + \varepsilon$$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(H_n)$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(H) \leq \lambda^*(H)$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \lambda^*(H) = \mathrm{vol}(H)$.

(ii) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $x \in \mathbb{R}^m$. Fie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Luăm $\tilde{H}_n = x + H_n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{H}_n \in \mathcal{H}$, $\mathrm{vol}(\tilde{H}_n) = \mathrm{vol}(H_n)$ şi $x + A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_n$

$\Rightarrow \lambda^*(x + A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(\tilde{H}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(H_n)$

$\Rightarrow \lambda^*(x + A) \leq \lambda^*(A)$

Aplicăm inegalitatea de mai sus pt. mulţimea $x + A$ în locul lui A şi pt. vectorul $-x$ în locul lui x:

$\Rightarrow \lambda^*(A) = \lambda^*(-x + (x + A)) \leq \lambda^*(x + A)$

$\Rightarrow \lambda^*(A) = \lambda^*(x + A)$.

Observaţia 1. Măsura exterioară Lebesgue λ^* nu este finit aditivă.

$m=1$

Teorema 1 (Vitali), Curs 1 $\Rightarrow$ $\exists\, A \subseteq [0,1]$, $\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de mulțimi din $\mathbb{R}$ a.î. să aibă loc:

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, A_n este o translație a lui A
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunctă
- $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-1,2]$

$$1 \underset{\text{Prop 1.(i)}}{=} \lambda^*([0,1]) \underset{\text{monotonie}}{\le} \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\lambda^*(A_n)}^{=\lambda^*(A)} \underset{\substack{\text{invarianța}\\ \text{la translații}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A) \Rightarrow \lambda^*(A) > 0$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(A_n) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(A) = m \cdot \lambda^*(A).$$

Luăm $m \in \mathbb{N}$ a.î. $m \cdot \lambda^*(A) > 3$. Atunci:

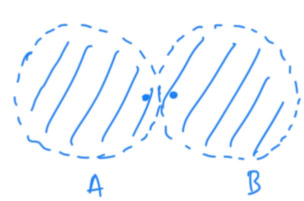
$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big) \underset{\text{monotonie, } \bigcup_{n=1}^{m} A_n \subseteq [-1,2].}{\le} \lambda^*([-1,2]) = 3 < m \cdot \lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(A_n)$$

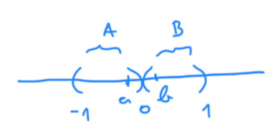
$\Rightarrow$ λ^* nu este finit aditivă.

Pentru $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ nevide, notăm

$$d(A,B) = \inf\{\|a-b\| : a \in A, b \in B\} \quad \text{şi} \quad \operatorname{diam}(A) = \sup\{\|a_1 - a_2\| : a_1, a_2 \in A\}.$$

$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$; $d(A,B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$





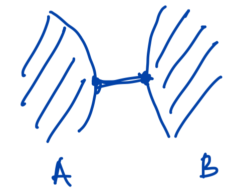
$n \in \mathbb{N}$, $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$(a_n)_{n\ge 2} \subseteq A$,

$(b_n)_{n \ge 2} \subseteq B$

$|a_n - b_n| = \frac{2}{n} \to 0$

$x \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$, $A = B(x,r) \Rightarrow \operatorname{diam}(A) = 2r$



Propoziţia 2. *Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ nevide cu $d(A,B) > 0$. Atunci $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.*

Dem: $d(A,B) > 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \cap B = \phi$

Subaditivitate finită $\Rightarrow \lambda^*(A\cup B) \le \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$

Arătăm că $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \le \lambda^*(A \cup B)$

Cazul 1: $\lambda^*(A\cup B) = \infty \Rightarrow \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \le \lambda^*(A\cup B)$

Cazul 2: $\lambda^*(A \cup B) < \infty$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) < \lambda^*(A\cup B) + \varepsilon$

Putem pp. $\forall n \in \mathbb{N}$, $diam(H_n) < d(A,B)$ (altfel descompunem dreptunghiurile care nu satisfac această inegalitate în dreptunghiuri de diametru $< d(A,B)$ şi aplicăm Lema 1, Curs 2).

Notăm $N_A = \{n \in \mathbb{N} \mid H_n \cap A \neq \phi\}$ şi $N_B = \{n\in\mathbb{N} \mid H_n \cap B = \phi\}$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n\in N_A} H_n$, $B \subseteq \bigcup_{n \in N_B} H_n$ şi $N_A \cap N_B = \phi$ (pt că dacă $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x \in H_n \cap A$ şi $y \in H_n \cap B \Rightarrow diam(H_n) \geq \|x-y\| \geq d(A,B)$, contr.)

$\Rightarrow \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \le \sum_{n\in N_A} vol(H_n) + \sum_{n\in N_B} vol(H_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) < \lambda^*(A\cup B) + \varepsilon$

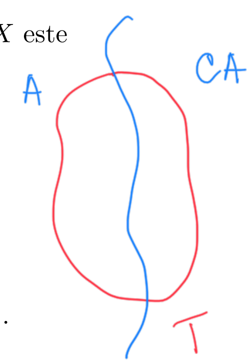
$\Rightarrow \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \le \lambda^*(A\cup B)$

$\Rightarrow \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A \cup B)$.

Am vazut că λ^* nu este finit aditivă. Pentru a obţine o măsură pornind de la λ^*, restrângem familia de submulţimi ale lui $\mathbb{R}^m$ la o σ-algebră. Vom reveni la un cadru abstract considerând o măsură exterioară arbitrară.

Definiţia 1. Fie X o mulţime şi μ^* o măsură exterioară pe X. Spunem că o mulţime $A \subseteq X$ este *μ^*-măsurabilă* (sau *măsurabilă în raport cu* μ^*) dacă

$$\forall T \subseteq X, \quad \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \complement(A)).$$



Notăm cu $\mathcal{M}_{\mu^*}$ familia submulţimilor lui X care sunt μ^*-măsurabile.

Observaţia 2. Fie X o mulţime and μ^* o măsură exterioară pe X.

(i) Dacă $A \subseteq X$, atunci

$$A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \iff \left(\forall T \subseteq X \text{ cu } \mu^*(T) < \infty \text{ avem } \mu^*(T) \geq \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T \cap \complement(A))\right).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ ev.

$\boxed{\Leftarrow}$ Fie $T \subseteq X \Rightarrow T = (T\cap A) \cup (T \cap CA) \underset{\text{subaditivitate finită}}{\Rightarrow} \mu^*(T) \le \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T \cap CA)$

Dacă $\mu^*(T) = \infty \Rightarrow \mu^*(T) \geq \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T \cap CA)$

(ii) $\mathcal{M}_{\mu^*} = \mathcal{P}(X)$ dacă şi numai dacă μ^* este o măsură.

Obs 2.(iii), Curs 2

$\boxed{\Rightarrow}$ Arătăm că μ^* este finit aditivă $\Rightarrow$ μ^* este o măsură

Fie $A, B \subseteq X$ cu $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq CA$

$$\mu^*(A\cup B) \underset{A\in\mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(\underbrace{(A\cup B)\cap A}_{=A}) + \mu^*(\underbrace{(A\cup B)\cap CA}_{=B}) = \mu^*(A)+\mu^*(B).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fie $A \subseteq X$

$$\forall T\subseteq X,\ \mu^*(T) = \mu^*((T\cap A)\cup(T\cap CA)) \underset{\text{aditivitate finită},\ (T\cap A)\cap(T\cap CA)=\emptyset}{=} \mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap CA)$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mu^*} = \mathcal{P}(X)$.

Teorema 1 (Carathéodory)**.** *Fie X o mulţime şi μ^* o măsură exterioară pe X. Atunci $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este o σ-algebră pe X şi restricţia $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ a lui μ^* la $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este o măsură pe $\mathcal{M}_{\mu^*}$.*