Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Analiză reală – Curs
Matematică, Matematică şi Informatică, anul universitar: 2021/2022

Curs 12

Lema 1 (Inegalitatea lui Young)**.** *Dacă* $a, b \in [0, \infty)$ *şi* $p, q \in (1, \infty)$ *astfel încât* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(cu alte cuvinte, p şi q sunt numere conjugate), atunci*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 2 (Inegalitatea lui Hölder)**.** *Dacă* $p, q \in (1, \infty)$ *astfel încât* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$ *şi* $g \in L^q$, *atunci* $fg \in L^1$ *şi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Observaţia 1. Dacă $f \in L^\infty$, atunci $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-a.p.t.

Lema 3 (Inegalitatea lui Minkowski)**.** *Dacă* $p \in [1, \infty]$ *şi* $f, g \in L^p$, *atunci*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Observaţia 2. Din Lemele 2 şi 3 se deduc inegalităţile clasice ale lui Hölder şi Minkowski.

Teorema 1. $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$, *unde* $1 \le p \le \infty$, *este un spaţiu normat.*

Observaţia 3. Presupunem că $0 < \mu(X) < \infty$.

(i) Dacă $1 \le p \le q < \infty$, atunci $L^q(X) \subseteq L^p(X)$ şi pentru orice $f \in L^q(X)$,

$$(\mu(X))^{-1/p}\|f\|_p \le (\mu(X))^{-1/q}\|f\|_q.$$

(ii) $L^\infty(X) \subseteq L^p(X)$ pentru orice $p \in [1, \infty)$ şi pentru orice $f \in L^\infty(X)$,

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$