Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Analiză reală – Curs
Matematică, Matematică şi Informatică, anul universitar: 2021/2022

Curs 7

Propoziţia 1. *Fie* $(X, \mathcal{A})$ *un spaţiu măsurabil,* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţii* $\mathcal{A}$*-măsurabile şi* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Atunci următoarele funcţii sunt* $\mathcal{A}$*-măsurabile:*

(i) αf;

(ii) $f + g$ *şi* $f - g$ *dacă sunt bine definite (adică nu iau valori de tipul* $\infty - \infty$ *sau* $-\infty + \infty$*);*

(iii) $f \cdot g$.

Propoziţia 2. *Fie* $(X, \mathcal{A})$ *un spaţiu măsurabil şi* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *funcţii* $\mathcal{A}$*-măsurabile. Atunci funcţiile, definite pentru* $x \in X$ *prin*

$$(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad (\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$
$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

sunt $\mathcal{A}$*-măsurabile.*
Dacă, în plus, $\forall x \in X \, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *atunci funcţia*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

este $\mathcal{A}$*-măsurabilă.*

Corolarul 1. *Fie* $(X, \mathcal{A})$ *un spaţiu măsurabil şi* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţii* $\mathcal{A}$*-măsurabile. Atunci funcţiile*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{şi} \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in X,$$

sunt $\mathcal{A}$*-măsurabile.*

Definiţia 1. Fie X o mulţime şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Funcţiile $f^+, f^- : X \to [0, \infty]$ definite prin

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{şi} \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}, \quad x \in X,$$

se numesc *partea pozitivă*, respectiv *partea negativă*, a lui f.

Observaţia 1. (i) $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$, $f = f^+ - f^-$ şi $|f| = f^+ + f^-$.

(ii) Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil. Atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă $\iff$ f^+ şi f^- sunt $\mathcal{A}$-măsurabile.

Definiţia 2. Fie X o mulţime. O funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ se numeşte *simplă* dacă ia un număr finit de valori.

Observaţia 2. O funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ este simplă dacă şi numai dacă există numerele reale distincte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ care formează o partiţie a lui X astfel încât

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \tag{1}$$

Observaţia 3. Scriind o funcţie simplă $f : X \to \mathbb{R}$ sub forma (1), f este $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă şi numai dacă $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{A}$.

Teorema 1 (Aproximarea funcţiilor măsurabile prin funcţii simple)**.**
Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil.

(i) Fie $f : X \to [0, \infty]$ o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă. Atunci există un şir crescător $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii simple şi $\mathcal{A}$-măsurabile, unde $f_n : X \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\forall x \in X,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{2}$$

(ii) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă. Atunci există un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcţii simple şi $\mathcal{A}$-măsurabile, unde $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât (2) să aibă loc.

Proprietăţi care au loc aproape peste tot

Definiţia 3. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $P(\cdot)$ o proprietate definită pentru punctele din X şi $B \subseteq X$. Spunem că P are loc *μ-aproape peste tot pe B* (prescurtat *μ-a.p.t. pe B*) dacă există $A \in \mathcal{A}$ cu $\mu(A) = 0$ astfel încât pentru oricare $x \in B \setminus A$, $P(x)$ se verifică.
Convenţie: Dacă $B = X$, atunci spunem simplu că P are loc μ-a.p.t., iar dacă măsura μ este subînţeleasă, atunci nu o mai menţionăm.

Exemplul 1. (i) Fie $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $f = g$ μ-a.p.t. înseamnă că

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ cu } \mu(A) = 0 \text{ astfel încât } \forall x \in X \setminus A,\ f(x) = g(x).$$

(ii) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci $f_n \to f$ μ-a.p.t. înseamnă că

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ cu } \mu(A) = 0 \text{ astfel încât } \forall x \in X \setminus A,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemplul 2. Aproape toate numerele reale sunt numere iraţionale.

Exemplul 3 (Teorema lui Rademacher)**.** Fie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă şi nevidă. Atunci orice funcţie Lipschitz $f : U \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă a.p.t. pe U.

Propoziţia 3. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură completă.*

(i) Dacă $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât f este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi $f = g$ μ-a.p.t., atunci g este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

(ii) Dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile, unde $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $f_n \to f$ μ-a.p.t., atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă.