Curs 5

Măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^m$

Ne reamintim următoarele definiţii:

- Măsura exterioară Lebesgue pe $\mathbb{R}^m$: $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0, \infty]$,

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(H_n) : (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right\}, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Familia mulţimilor măsurabile Lebesgue:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^m \mid \forall T \subseteq \mathbb{R}^m, \lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \cap \complement(A)) \right\}. \qquad \sigma\text{-algebră}$$

- Măsura Lebesgue: $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}$. Această măsură este completă.

Propoziţia 1. *Dacă $H \in \mathcal{H}$, atunci $H \in \mathcal{L}$ (şi $\lambda(H) = \operatorname{vol}(H)$).*

Corolarul 1. *$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.*

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \sigma(\mathcal{H})}_{\text{Seminar}} \subseteq \sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$$

Observaţia 1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.

Seminar

$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ rezultă din Teorema 1 (Vitali), Curs 1

Propoziţia 2. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $x \in \mathbb{R}^m$, atunci $A \in \mathcal{L}$ dacă şi numai dacă $x + A \in \mathcal{L}$.*

Dem: Proprietate: $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^m, \forall x \in \mathbb{R}^m$, $x + (A \cap B) = (x+A) \cap (x+B)$; $\complement(x+A) = x + \complement A$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pp $A \in \mathcal{L}$. Atunci $\forall T \subseteq \mathbb{R}^m$,

$$\lambda^*(T) \underset{\substack{\text{invarianța} \\ \text{la translații}}}{=} \lambda^*(-x+T) \underset{A \in \mathcal{L}}{=} \lambda^*((-x+T) \cap A) + \lambda^*((-x+T) \cap \complement A)$$

$$\underset{\substack{\text{invarianța} \\ \text{la translații}}}{=} \lambda^*(x + (-x+T) \cap A) + \lambda^*(x + (-x+T) \cap \complement A)$$

$$= \lambda^*\Big(\underbrace{(x + (-x+T))}_{=T} \cap (x+A)\Big) + \lambda^*\Big(\underbrace{(x+(-x+T))}_{=T} \cap \underbrace{(x + \complement A)}_{\complement(x+A)}\Big)$$

$$= \lambda^*(T \cap (x+A)) + \lambda^*(T \cap \complement(x+A))$$

$\Rightarrow x + A \in \mathcal{L}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Pp. $x + A \in \mathcal{L}$. Aplicând implicația anterioară pt. mulțimea $x+A$ în locul mulțimii A și pt. vectorul $-x$ în locul vectorului x

$$x + A \in \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{-x + (x+A)}_{=A} \in \mathcal{L}$$

Propoziţia 3. *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $\lambda^*(A) = 0$, atunci $A \in \mathcal{L}$ (şi $\lambda(A) = 0$).*

Dem Fie $T \subseteq \mathbb{R}^m$. Atunci $T \cap A \subseteq A \Rightarrow \lambda^*(T\cap A) \leq \lambda^*(A) = 0$

$T \cap \complement A \subseteq T \Rightarrow \lambda^*(T \cap \complement A) \leq \lambda^*(T)$

$\Rightarrow \lambda^*(T) \geq \lambda^*(T\cap A) + \lambda^*(T \cap \complement A)$

$\Rightarrow A \in \mathcal{L}$.

Observaţia 2. (i) Deoarece $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ este o σ-algebră, o reuniune cel mult numărabilă de mulţimi măsurabile Lebesgue este măsurabilă Lebesgue.

(ii) O mulţime cel mult numărabilă din $\mathbb{R}^m$ este măsurabilă Lebesgue şi are măsura Lebesgue nulă, însă există submulţimi nenumărabile ale lui $\mathbb{R}^m$ care sunt măsurabile Lebesgue şi au măsura Lebesgue nulă (e.g. mulţimea lui Cantor).

(iii) O mulţime măsurabilă Lebesgue care este mărginită are măsura Lebesgue finită.

(iv) O mulţime de măsură Lebesgue nulă nu este neapărat mărginită (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

Teorema 1 (Unicitatea măsurii Lebesgue)**.** *Dacă $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură astfel încât $\mu(H) = \lambda(H)$ pentru orice $H \in \mathcal{H}$, atunci $\mu(A) = \lambda(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{L}$.*

Dem Fie $A \in \mathcal{L}$. $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) \,\middle|\, (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right\}$.

Fie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \Rightarrow \mu(A) \underset{\text{monotonie}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) \underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n)$

$\Rightarrow \mu(A) \leq \lambda(A)$ $(*)$

Cazul 1: A mărginită $\Rightarrow \exists\, H \in \mathcal{H}$ a.î. $A \subseteq H$; $H \setminus A \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow \mu(H) - \mu(A) = \mu(H\setminus A) \overset{(*)}{\leq} \lambda(H \setminus A) = \lambda(H) - \lambda(A) = \mu(H) - \lambda(A) \Rightarrow \lambda(A) \leq \mu(A)$

$\Rightarrow \mu(A) = \lambda(A)$.

Cazul 2: A nemărginită $\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap [-n,n]^m)}_{\text{not } A_n \in \mathcal{L}}$; $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu(A) \underset{\text{Prop 1.(vi), Curs 2}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \underset{\substack{A_n \text{ mărginită} \\ \text{Cazul 1}}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \underset{\text{Prop. 1.(vi), Curs 2}}{=} \lambda(A)$

Observaţia 3. În Teorema 1, $\mathcal{L}$ poate fi înlocuită cu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Teorema 2 (Regularitatea măsurii Lebesgue)**.** *Dacă $A \in \mathcal{L}$, atunci*

(i) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(G) \mid A \subseteq G,\ G \text{ deschisă}\}$; $\overset{\text{not}}{=} I$

(ii) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq A,\ K \text{ compactă}\}$. $\overset{\text{not}}{=} S$

Dem Fie $A \in \mathcal{L}$

(i) $A \subseteq G \underset{\text{monotonie}}{\Rightarrow} \lambda(A) \leq \lambda(G) \Rightarrow \lambda(A) \leq I$

Arătăm că $I \leq \lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) \,\middle|\, (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right\}$

Dacă $\lambda(A) = \infty$, ev. Pp. $\lambda(A) < \infty$.

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \tilde{H}_n \in \mathcal{H}$ a.î. $H_n \subseteq int(\tilde{H}_n)$ și $vol(\tilde{H}_n) \leq vol(H_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Luăm $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} int(\tilde{H}_n)$ deschisă $\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} int(\tilde{H}_n) = G$

$$\lambda(G) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-subaditivitate}}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(int(\tilde{H}_n)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonie}}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\tilde{H}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} vol(\tilde{H}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(A) + \varepsilon$$

$\Rightarrow I \leq \lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon \Rightarrow I < \lambda(A) + \varepsilon$; $\varepsilon \searrow 0 \Rightarrow I \leq \lambda(A)$.

(ii) $K \subseteq A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonie}}}{\Longrightarrow} \lambda(K) \leq \lambda(A) \Rightarrow S \leq \lambda(A)$

Arătăm că $\lambda(A) \leq S$

Cazul 1: A mărginită $\Rightarrow \exists H \in \mathcal{H}$ a.î. $A \subseteq H$; $H \setminus A \in \mathcal{L}$

Fie $\varepsilon > 0$

$\lambda(H\setminus A) \overset{(i)}{=} \inf\{\lambda(G) \mid H \setminus A \subseteq G,\ G \text{ deschisă}\}$

$\Rightarrow \exists G \subseteq \mathbb{R}^m$ deschisă a.î. $H\setminus A \subseteq G$ și $\lambda(G) < \lambda(H\setminus A) + \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substractivitate}}}{=} \lambda(H) - \lambda(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \lambda(A) < \lambda(H) - \lambda(G) + \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ H \subseteq (H\setminus G)\cup G}}{\leq} \lambda(H\setminus G) + \lambda(G) - \lambda(G) + \varepsilon = \lambda(H\setminus G) + \varepsilon$.

$H\setminus A \subseteq G \Rightarrow H \setminus G \subseteq A$

$H\setminus G$ mărginită și închisă (pt că $H\setminus G = \overbrace{H \cap CG}^{\text{închise}}$) $\Rightarrow H \setminus G$ cpt.

$\Rightarrow \lambda(A) < \lambda(H\setminus G) + \varepsilon \leq S + \varepsilon \Rightarrow \lambda(A) < S + \varepsilon$; $\varepsilon \searrow 0 \Rightarrow \lambda(A) \leq S$

$\Rightarrow \lambda(A) = S$

Cazul 2: A nemărginită $\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap [-n,n]^m)}_{\text{not } A_n \in \mathcal{L}}$; $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Pp. $\lambda(A) > S$

$\Rightarrow S < \lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\lambda(A_{n_0}) > S$

A_{n_0} mărginită $\underset{\text{Cazul 1}}{\longrightarrow}$ $\lambda(A_{n_0}) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq A_{n_0}, K \text{ cpt}\}$

$\Rightarrow \exists K \subseteq \mathbb{R}^m$ cpt a.î. $K \subseteq A_{n_0} \subseteq A$ și $\lambda(K) > S = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq A, K \text{ cpt}\}$, contr.

$\Rightarrow \lambda(A) \leq S$

$\Rightarrow \lambda(A) = S$.

Teorema 3. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Atunci $A \in \mathcal{L}$ dacă şi numai dacă există $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ astfel încât $B \subseteq A \subseteq C$ şi $\lambda(C \setminus B) = 0$.*

Dem $\boxed{\Rightarrow}$ Pp. $A \in \mathcal{L}$

Cazul 1: $\lambda(A) < \infty$

Din Teorema 2, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists G_n, K_n \subseteq \mathbb{R}^m$ a.î.
- G_n deschisă, K_n cpt.
- $K_n \subseteq A \subseteq G_n$
- $\lambda(G_n) < \lambda(A) + \frac{1}{n}$

  $\lambda(K_n) > \lambda(A) - \frac{1}{n}$

Luăm $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \Rightarrow B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $B \subseteq A \subseteq C$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C \setminus B \subseteq G_n \setminus K_n \subseteq (G_n \setminus A) \cup (A \setminus K_n)$

$\Rightarrow \lambda(C \setminus B) \leq \lambda(G_n \setminus A) + \lambda(A \setminus K_n) = \underbrace{\lambda(G_n) - \lambda(A)}_{< 1/n} + \underbrace{\lambda(A) - \lambda(K_n)}_{< 1/n} < \frac{2}{n}$

$n \to \infty \Rightarrow \lambda(C \setminus B) = 0$.

Cazul 2: $\lambda(A) = \infty \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap [-n, n]^m)}_{\text{not } A_n}$; $\lambda(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists B_n, C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ a.î. $B_n \subseteq A_n \subseteq C_n$ şi $\lambda(C_n \setminus B_n) = 0$.

Luăm $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \Rightarrow B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ şi $B \subseteq A \subseteq C$

$C \setminus B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus B_n)$

($x \in C \setminus B \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x \in C_{n_0}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n \Rightarrow x \in C_{n_0} \setminus B_{n_0}$)

$\lambda(C \setminus B) \underset{\text{monotonie}}{\leq} \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus B_n)\right) \underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n \setminus B_n) = 0 \Rightarrow \lambda(C \setminus B) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Seminar

Corolarul 2. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Atunci $A \in \mathcal{L}$ dacă şi numai dacă există $B, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ cu $\lambda(D) = 0$ şi $N \subseteq D$ astfel încât $A = B \cup N$.*

Observaţia 4. Completarea unei măsuri:

- $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \lambda)$:
- $\big(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)}\big)$:

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Dacă μ nu este completă, atunci $(X, \mathcal{A}, \mu)$ admite o *completare*, adică există un spaţiu cu măsură $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ pentru care $\overline{\mu}$ este completă, au loc $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ şi $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$, iar $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ este minimal în acest sens (altfel spus, dacă $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ este un spaţiu cu măsură astfel încât $\widetilde{\mu}$ este completă, $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $\widetilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$, atunci $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $\widetilde{\mu}|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$). Completarea $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ se construieşte în felul următor: notăm $\mathcal{N} = \{N \subseteq X : \exists D \in \mathcal{A}$ astfel încât $N \subseteq D,\ \mu(D) = 0\}$. Atunci $\overline{\mathcal{A}} = \{B \cup N : B \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$ şi $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ se defineşte prin $\overline{\mu}(A) = \mu(B)$ dacă $A = B \cup N$, unde $B \in \mathcal{A}$ şi $N \in \mathcal{N}$.

Astfel, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \lambda)$ este completarea lui $\big(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)}\big)$.