Curs 6

Funcţii măsurabile

Reamintim că am adoptat convenţia $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$. Presupunem în continuare că mulţimea X este nevidă.

Definiţia 1. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil. Spunem că funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este $\mathcal{A}$-*măsurabilă* dacă

$$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A} \quad \text{şi} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Dacă σ-algebra $\mathcal{A}$ este subînţeleasă, atunci spunem simplu că f este *măsurabilă*.

Observaţia 1. (i) Dacă $f : X \to \mathbb{R}$, atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă şi numai dacă

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

(ii) Condiţia (1) este echivalentă cu

$$\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

unde $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ este σ-algebra generată de familia mulţimilor deschise din $\overline{\mathbb{R}}$. O mulţime $G \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este deschisă dacă $G \in \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in G$.

Propoziţia 1. *Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este* $\mathcal{A}$*-măsurabilă;*

(ii) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$;

(iii) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq c\} \in \mathcal{A}$;

(iv) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > c\} \in \mathcal{A}$;

(v) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$.

Exemplul 1. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ constantă. Atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

Definiţia 2. Fie X o mulţime şi $A \subseteq X$. *Funcţia caracteristică* a lui A este $\chi_A : X \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Se observă că $\chi_\emptyset = 0, \chi_X = 1, \chi_{\complement(A)} = 1 - \chi_A$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, pentru orice $A, B \subseteq X$.

Exemplul 2. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $A \subseteq X$. Atunci χ_A este $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{A}$.

Definiţia 3. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $Y \subseteq X$. Atunci $\mathcal{A}_Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ se numeşte *σ-algebra indusă de $\mathcal{A}$ pe Y*.
Astfel, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ este un spaţiu măsurabil.

Observaţia 2. Fie $(X, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $Y \subseteq X$. Atunci:

(i) dacă $Z \subseteq Y$ cu $Z \in \mathcal{A}$, atunci $Z \in \mathcal{A}_Y$;

(ii) dacă $Y \in \mathcal{A}$, atunci $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}$.

Definiţia 4. Dacă $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, o funcţie $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ care este $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)_Y$-măsurabilă (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)_Y$-măsurabilă) se numeşte *măsurabilă Borel* (resp. *măsurabilă Lebesgue*).

Observaţia 3. Orice funcţie măsurabilă Borel este măsurabilă Lebesgue (deoarece $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)_Y \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)_Y$).

Exemplul 3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ monotonă. Atunci f este măsurabilă Borel.