Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Analiză reală – Curs
Matematică, Matematică şi Informatică, anul universitar: 2021/2022

Curs 2

În teoria măsurii vom lucra cu *mulţimea extinsă a numerelor reale* $\overline{\mathbb{R}}$ definită astfel: ataşăm mulţimii $\mathbb{R}$ două noi elemente $-\infty$ şi $\infty(=+\infty)$ astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x$ şi $x < \infty$ (desigur, $-\infty < \infty$). Prin $\overline{\mathbb{R}}$ sau $[-\infty, \infty]$ notăm mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Extindem parţial operaţiile sumă şi produs pe $\overline{\mathbb{R}}$:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,\\
&\forall x \in \mathbb{R},\, x > 0, \quad x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty,\\
&\forall x \in \mathbb{R},\, x < 0, \quad x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty,\\
&(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \infty \quad \text{şi} \quad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Sumele $\infty + (-\infty)$ şi $(-\infty) + \infty$ rămân nedefinite, dar adoptăm convenţia $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$ care este utilă în teoria măsurii.

Orice mulţime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ are un supremum (not. $\sup A$) şi un infimum (not. $\inf A$) în $\overline{\mathbb{R}}$.

O mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este

- o vecinătate a lui $x \in \mathbb{R}$ dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < x < b$ astfel încât $(a, b) \subseteq V$.
- o vecinătate a lui ∞ dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty] \subseteq V$.
- o vecinătate a lui $-\infty$ dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, a) \subseteq V$.

Pentru $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm $\mathcal{V}(x)$ familia tuturor vecinătăţilor lui x.

Pentru un şir $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$ este o limită dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_V \text{ avem } x_n \in V. \tag{1}$$

Un şir din $\overline{\mathbb{R}}$ nu poate avea două limite distincte. Astfel, dacă un şir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are o limită, atunci unicul $x \in \overline{\mathbb{R}}$ care satisface (1) se numeşte *limita* şirului (x_n) şi folosim notaţia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$.

Fie $(x_n) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ un şir. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm

$$\overline{x}_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{şi} \quad \underline{x}_n = \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Atunci $\overline{x}_{n+1} \leq \overline{x}_n$ şi $\underline{x}_{n+1} \geq \underline{x}_n$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, deci aceste şiruri sunt monotone. Definim *limita superioară* a lui (x_n) prin

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

şi *limita inferioară* a lui (x_n) prin

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Exemplul 1. $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$, $\overline{x}_n = \sup\limits_{k \geq n} (-1)^k = 1 \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 1$

$\underline{x}_n = \inf\limits_{k \geq n} (-1)^k = -1$ 1 $\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} (-1)^n = -1$

Observaţia 1. Au loc următoarele:

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Dacă $L = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists (x_{n_j}) \subseteq (x_n) \text{ cu } \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x \right\}$, atunci $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n, \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in L$ şi avem $\forall x \in L$, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in L$: Notăm $x = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{x}_n$

Cazul $x \in \mathbb{R}$: $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists m_j \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_j$, $|\overline{x}_n - x| < \frac{1}{j}$

$\Rightarrow x \leq \overline{x}_n < x + \frac{1}{j}$

$M_1 = m_1$

$\overline{x}_{M_1} - 1$ nu este o margine superioară pt $\{x_k \mid k \geq M_1\} \Rightarrow \exists n_1 \geq M_1$ a.î. $\overline{x}_{M_1} - 1 < x_{n_1}$

$\Rightarrow x - 1 \leq \overline{x}_{M_1} - 1 < x_{n_1} \leq \overline{x}_{M_1} < x + 1 \Rightarrow x_{n_1} \in (x-1, x+1)$

Pp. $\exists n_j \in \mathbb{N}$ a.î. $x_{n_j} \in \left(x - \frac{1}{j}, x + \frac{1}{j}\right)$

$M_{j+1} = \max\{m_{j+1}, n_j + 1\}$

$\overline{x}_{M_{j+1}} - \frac{1}{j+1}$ nu este o margine superioară pt $\{x_k \mid k \geq M_{j+1}\} \Rightarrow \exists n_{j+1} \geq M_{j+1}$ a.î. $\overline{x}_{M_{j+1}} - \frac{1}{j+1} < x_{n_{j+1}}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{j+1} \leq \overline{x}_{M_{j+1}} - \frac{1}{j+1} < x_{n_{j+1}} \leq \overline{x}_{M_{j+1}} < x + \frac{1}{j+1} \Rightarrow x_{n_{j+1}} \in \left(x - \frac{1}{j+1}, x + \frac{1}{j+1}\right)$

$\Rightarrow n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$, $x_{n_j} \in \left(x - \frac{1}{j}, x + \frac{1}{j}\right)$, $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x$.

Cazul $x \in \{-\infty, \infty\}$ TEMĂ

(iii) Şirul (x_n) are limita $x \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Fie $(x_n) \subseteq [0, \infty]$. Atunci şirul $\left(\sum_{n=1}^{p} x_n\right)_{p\in\mathbb{N}}$ are o limită în $[0, \infty]$ numită suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n = \sup\left\{ \sum_{k\in F} x_k : F \subseteq \mathbb{N} \text{ finită} \right\}.$$

Propoziţia 1. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Atunci:*

(i) (Aditivitate finită) dacă $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ sunt disjuncte două câte două, atunci $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$;

(ii) (Monotonie) dacă $A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \subseteq B$, atunci $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(iii) (Substractivitate) dacă $A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \subseteq B$ and $\mu(A) < \infty$, atunci $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

(iv) (σ-subaditivitate) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, atunci $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$;

(v) (Subaditivitate finită) dacă $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$, atunci $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$;

(vi) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ este un şir ascendent, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;

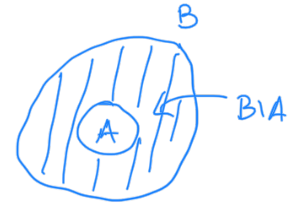
(vii) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ este un şir descendent şi $\mu(A_1) < \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Dem (i) Fie $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ disjuncte 2×2

Luăm $B_n = A_n,\ n = \overline{1,N}$; $B_n = \phi,\ n \geq N+1 \Rightarrow (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunctă

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \underset{\sigma\text{- aditivitate}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

(ii) Fie $A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \subseteq B$



$A,\ B \setminus A \in \mathcal{A}$

$$B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{\text{disjuncte}} \underset{\text{aditivitate finită}}{\Longrightarrow} \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$$

(iii) Fie $A, B \in \mathcal{A}$ cu $A \subseteq B$ şi $\mu(A) < \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ \mu(A) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

(Dacă $\mu(A) = \infty \Rightarrow \mu(B) = \infty \Rightarrow \infty - \infty$ nedefinit)

(iv) Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$

Luăm $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{A},\ B_n \subseteq A_n \underset{\text{monotonie}}{\Longrightarrow} \mu(B_n) \leq \mu(A_n) \quad (*)$$

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunctă : fie $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m < n$. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} B_m \subseteq A_m \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \\ B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow B_m \cap B_n = \phi$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$: $\boxed{\subseteq}$ $B_n \subseteq A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\supseteq}$ Fie $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ minimal a.î. $x \in A_{n_0}$

$\Rightarrow x \in B_{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \underset{\sigma\text{-aditivitate}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(v) Se procedează ca la (i)

(vi) Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ ascendent : $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

Considerăm şirul $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ca la (iv)

(A_n) ascendent $\Rightarrow B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} B_k}_{=A_n}\Big)$$

(vii) Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ descendent, $\mu(A_1) < \infty$ $\qquad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

$\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ascendent} \overset{(vi)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_1 \setminus A_n)}_{=\mu(A_1)-\mu(A_n)} = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right)$$

$$= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Definiţia 1. Fie X o mulţime. O funcţie $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ este o *măsură exterioară* pe X dacă

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) (Monotonie) dacă $A, B \in \mathcal{P}(X)$ cu $A \subseteq B$, atunci $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) (σ-subaditivitate) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, atunci $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Observaţia 2. (i) O măsură exterioară este finit subaditivă.

(ii) O măsură este o măsură exterioară dacă şi numai dacă este definită pe $\mathcal{P}(X)$.

(iii) O măsură exterioară care este finit aditivă este o măsură.

Într-adevăr, fie μ^* o măsură exterioară pe X care este în plus finit aditivă

Arătăm că μ^* este σ-aditivă. Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ disjunctă.

Atunci :

$$\sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) \underset{\text{aditivitate finită}}{=} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \underset{\text{monotonie}}{\leq} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Măsura exterioară Lebesgue pe $\mathbb{R}^m$

$x=(x_1,\dots,x_m)\in H \Leftrightarrow x_i\in[a_i,b_i],\ \forall i\in\{1,\dots,m\}$

Considerăm mulţimea hiperdreptunghiurilor închise (pe care le vom numi simplu dreptunghiuri)

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_m=\{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]: a_i,b_i\in\mathbb{R}, a_i\le b_i, i\in\{1,\ldots,m\}\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^m).$$

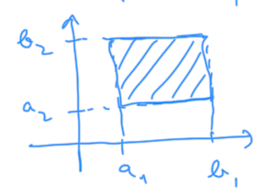
Pentru $H\in\mathcal{H}$, $H=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]$, volumul lui H este

$$\mathrm{vol}(H)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_m-a_m),$$

iar interiorul său este $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_m,b_m)$ (cu convenţia $(\alpha,\alpha)=\emptyset$, $\alpha\in\mathbb{R}$).

Observaţia 3. (i) $m=1$: $H\in\mathcal{H}_1$ este un interval închis, iar $\mathrm{vol}(H)$ este lungimea sa;

(ii) $m=2$: $H\in\mathcal{H}_2$ este un dreptunghi, iar $\mathrm{vol}(H)$ este aria sa;



(iii) $m=3$: $H\in\mathcal{H}_3$ este un paralelipiped, iar $\mathrm{vol}(H)$ este volumul său.

Lema 1. *Fie $H\in\mathcal{H}$, $H=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]$ şi pentru orice $i\in\{1,\ldots,m\}$,*

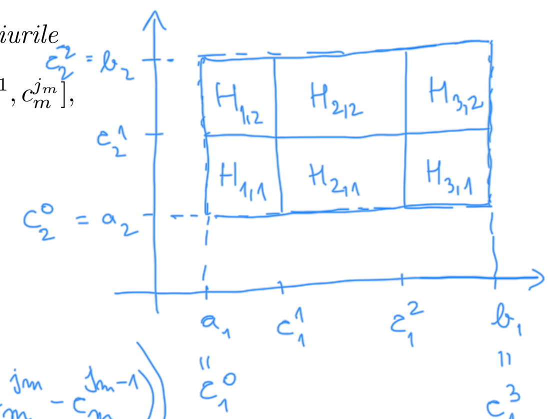
$$a_i=c_i^0\le c_i^1\le\ldots\le c_i^{n_i}=b_i,\ \text{unde } n_i\in\mathbb{N}.$$

Dacă definim pentru orice $i\in\{1,\ldots,m\}$ şi $j_i\in\{1,\ldots,n_i\}$ dreptunghiurile

$$H_{j_1,\ldots,j_m}=[c_1^{j_1-1},c_1^{j_1}]\times[c_2^{j_2-1},c_2^{j_2}]\times\ldots\times[c_m^{j_m-1},c_m^{j_m}],$$

atunci

$$\mathrm{vol}(H)=\sum_{j_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{j_m=1}^{n_m}\mathrm{vol}(H_{j_1,\ldots,j_m}).$$



Dem: $\mathrm{vol}(H)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_m-a_m)$

$$=\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}(c_1^{j_1}-c_1^{j_1-1})\right)\cdot\left(\sum_{j_2=1}^{n_2}(c_2^{j_2}-c_2^{j_2-1})\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}(c_m^{j_m}-c_m^{j_m-1})\right)$$

$$=\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{j_m=1}^{n_m}\underbrace{(c_1^{j_1}-c_1^{j_1-1})\cdot(c_2^{j_2}-c_2^{j_2-1})\cdot\ldots\cdot(c_m^{j_m}-c_m^{j_m-1})}_{\mathrm{vol}(H_{j_1,\ldots,j_m})}$$

distributivitatea înmulţirii faţă de adunare

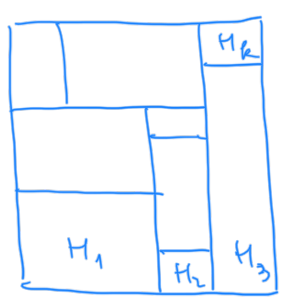
Propoziţia 2. *Fie $k\in\mathbb{N}$ şi $H,H_1,\ldots H_k\in\mathcal{H}$. Atunci:*

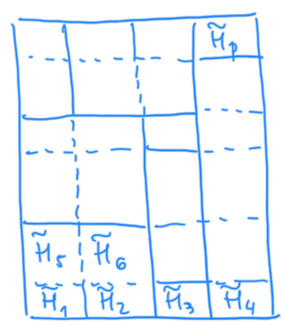
(i) dacă $H_1,\ldots,H_k$ au interioarele disjuncte şi $H=\bigcup_{n=1}^k H_n$, atunci $\mathrm{vol}(H)=\sum_{n=1}^k\mathrm{vol}(H_n)$;

(ii) dacă $H\subseteq\bigcup_{n=1}^k H_n$, atunci $\mathrm{vol}(H)\le\sum_{n=1}^k\mathrm{vol}(H_n)$.

Dem (i)

$m=2$





Extindem laturile dreptunghiurilor $H_1,\ldots,H_k$ $\Rightarrow$ p dreptunghiuri $\tilde H_1,\ldots,\tilde H_p$ cu interioarele disjuncte a.î. $H=\bigcup_{i=1}^p\tilde H_i$

$I_1=\{1,2,5,6\}$

$I_2=\{3\}$ etc

Fie $I_1, \dots, I_k$ o partiție a mulțimii $\{1, \dots, p\}$ a.î. $H_n = \bigcup_{i \in I_n} \widetilde{H}_i$, $n = \overline{1,k}$

$\Rightarrow$ o partiție a laturilor dreptunghiului H în subintervale, iar dreptunghiurile $\widetilde{H}_i$ sunt produse de astfel de subintervale

$\Rightarrow vol(H) \underset{\text{Lema 1}}{=} \sum_{i=1}^{p} vol(\widetilde{H}_i)$; $vol(H_n) \underset{\text{Lema 1}}{=} \sum_{i \in I_n} vol(\widetilde{H}_i)$, $n = \overline{1,k}$

$$\sum_{n=1}^{k} vol(H_n) = \sum_{n=1}^{k} \sum_{i \in I_n} vol(\widetilde{H}_i) = \sum_{i=1}^{p} vol(\widetilde{H}_i)$$

$\Rightarrow vol(H) = \sum_{n=1}^{k} vol(H_n)$.

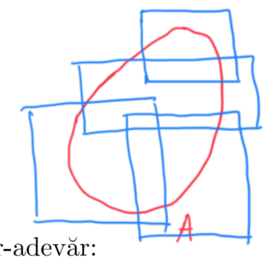
(ii) $H_1, \dots, H_k \longrightarrow H \cap H_1, \dots, H \cap H_k \longrightarrow$ se elimină suprapunerile

$\Rightarrow$ dreptunghiurile $\widetilde{H}_1, \dots, \widetilde{H}_l$ cu interioarele disjuncte a.î. $H = \bigcup_{n=1}^{l} \widetilde{H}_n$ și $\sum_{n=1}^{l} vol(\widetilde{H}_n) \le \sum_{n=1}^{k} vol(H_n)$

$\Rightarrow vol(H) \overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^{l} vol(\widetilde{H}_n) \le \sum_{n=1}^{k} vol(H_n)$.

Definim funcţia $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0, \infty]$ prin

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(H_n) : (H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right\}.$$



Această funcţie este o măsură exterioară numită *măsura exterioară Lebesgue*. Într-adevăr:

(i) $H_n = [0,0]^m$, $n \in \mathbb{N}$; $H_n \in \mathcal{H}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \Rightarrow \lambda^*(\emptyset) \le \sum_{n=1}^{\infty} vol(H_n) = 0$

$\Rightarrow \lambda^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ cu $A \subseteq B$

Dacă $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$, $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \Rightarrow \lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$

(iii) Fie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$

Cazul 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = \infty \Rightarrow \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

Cazul 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) < \infty \Rightarrow \lambda^*(A_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (H_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ a.î. $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}$ și

$$\sum_{k=1}^{\infty} vol(H_{n,k}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (*)$$

Notăm $(H_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ cu $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numărabilă)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} vol(H_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} vol(H_{n,k}) \right) \overset{(*)}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$$

$\varepsilon \searrow 0 \Rightarrow \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$.