Seminar 4

Convergență și continuitate în $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}_\infty$

① a) Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un șir de numere complexe, $z_n = x_n + iy_n$, $n\in\mathbb{N}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ și } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

b) Dacă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$, $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, $n\in\mathbb{N}$, iar dacă $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ și $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$, atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Obs: Fie $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Atunci $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$, $n\in\mathbb{N}$, iar dacă $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \theta \in \operatorname{Arg} z$.
Prin urmare, condiția $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$ revine la
$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z \pmod{2\pi}$.

Demonstrație la problema ①

a) $z_n \to z \iff |z_n - z| \to 0$.

Dar $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2$, $n\in\mathbb{N}$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_n \to z \iff x_n \to x$ și $y_n \to y$ $(n\to\infty)$.

b) $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, $n\in\mathbb{N}$.
Fie $z_n = x_n + iy_n$, $n\in\mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow \begin{cases} x_n = r_n\cos\theta_n \\ \text{și} \\ y_n = r_n\sin\theta_n. \end{cases}$

Avem că $r_n \to r$ și $\theta_n \to \theta \Rightarrow x_n = r_n\cos\theta_n \to r\cos\theta = x$
și $y_n = r_n\sin\theta_n \to r\sin\theta = y \Rightarrow x_n \to x$ și $y_n \to y$
$\overset{a)}{\Longrightarrow} z_n \to z$, unde $z = x+iy$.

Aplicații.

② Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$, unde $z\in\mathbb{C}$ cu $|z|\neq 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{n^2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+i\cdot 3^n}{(2+3i)^n}$.

Soluții: a) $z_n := \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow |z_n| = \left|\frac{1+i}{3}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \to 0$.

$\Rightarrow |z_n| \to 0 \Rightarrow z_n \to 0$.

b) $w_n := \frac{z^n}{1+z^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Cazul I: $|z|<1 \Rightarrow |z|^n \to 0 \Rightarrow |z^n| \to 0 \Rightarrow z^n \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow w_n \to 0$.

Cazul II: $|z|>1 \Rightarrow |z|^n \to +\infty \Rightarrow |z^n| \to +\infty \Rightarrow z^n \to \infty$.

$$\Rightarrow w_n = \frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)^n}_{\downarrow 0} + \underbrace{z^n}_{\downarrow \infty}} \to 0 \Rightarrow w_n \to 0.$$

Deci, în ambele cazuri, $w_n \to 0$.

c) $z_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{n^2} \Rightarrow |z_n| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^n}{n^2} = \frac{(\sqrt{1+3})^n}{n^2} = \frac{2^n}{n^2} \to +\infty$

$\Rightarrow |z_n| \to +\infty \Rightarrow z_n \to \infty$.

d) $z_n = \frac{n+i\cdot 3^n}{(2+3i)^n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow |z_n| = \frac{|n+i\cdot 3^n|}{|2+3i|^n} =$

$$= \frac{\sqrt{n^2+9^n}}{\sqrt{(4+9)^n}} = \sqrt{\frac{n^2+9^n}{13^n}} = \sqrt{\underbrace{\frac{n^2}{13^n}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{9}{13}\right)^n}_{\downarrow 0}} \to 0.$$

$\Rightarrow |z_n| \to 0 \Rightarrow z_n \to 0$.

3 Fie $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Să se arate că
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z,$$
unde $e^z:=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Obs. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$, funcția exponențială complexă de variabilă complexă.
Mai notăm și $f(z)=\exp(z)$, $z\in\mathbb{C}$, pentru funcția exponențială complexă.
Dacă $z=x\in\mathbb{R}\Rightarrow \exp(z)=e^x$.
Dacă $z=iy$, $y\in\mathbb{R}\Rightarrow \begin{cases} e^{iy}=\cos y+i\sin y\\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y\end{cases}\Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\\ \sin y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\end{cases},\ \forall y\in\mathbb{R}$$ (formulele lui Euler).
Dacă $z=x+iy\in\mathbb{C}\Rightarrow e^{z+2\pi i}=e^{x+i(y+2\pi)}=$
$$=e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))$$
$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$
$\Rightarrow f(z+2\pi i)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow$ funcția exponențială complexă este $2\pi i$-periodică $\Rightarrow f$ nu e injectivă pe întreg planul complex. (important).

∘ $|e^z|=e^x=e^{\operatorname{Re} z}$ și $\arg(e^z)=y \pmod{2\pi}$. $\Leftrightarrow y\in\operatorname{Arg}(e^z)$, $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$.

Soluția Prob. 3.
Fie $z_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Arătăm că $|z_n|\to|e^z|=e^x$ și $\arg z_n\to y \pmod{2\pi}$. $\xRightarrow{\text{Prob. 1 b)}}$ $z_n\to e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Avem că

$$|z_n| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^n = \left|1+\frac{x}{n}+i\cdot\frac{y}{n}\right|^n$$

$$= \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{x^2+y^2+2nx}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Notăm cu $u_n = \dfrac{x^2+y^2+2nx}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow u_n \to 0$.

$$\Rightarrow |z_n| = (1+u_n)^{\frac{n}{2}} = \Big[\underbrace{(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}}_{\downarrow e}\Big]^{\frac{n}{2}\cdot u_n} \longrightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{x^2+y^2+2nx}{n^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+y^2+2nx}{2n}} = e^x.$$

Deci $|z_n| \to e^x = |e^z|$.

⊙ $\arg z_n \to y \pmod{2\pi}$.

$$\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\,\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right) \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\, z_n = n\,\mathrm{Arg}\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

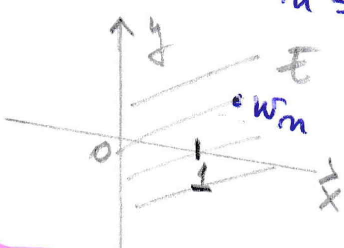
$$\Leftrightarrow \arg z_n = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) \pmod{2\pi}.$$

Notăm cu $w_n = 1+\dfrac{z}{n} = 1+\dfrac{x}{n}+i\cdot\dfrac{y}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, w_n = 1+\frac{x}{n} \to 1>0 \\ \mathrm{Im}\, w_n = \frac{y}{n} \to 0 \end{cases} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ astfel încât}$$

$w_n \in E$, $\forall n\geq n_0$,

unde $E=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z>0\}$.



Deci: $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel ca $\mathrm{Re}\, w_n>0$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arg w_n = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\, w_n}{\mathrm{Re}\, w_n} = \mathrm{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \mathrm{arctg}\frac{y}{n+x},\ \forall n\geq n_0.$$

⊙ $\boxed{\arg w_n = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{n+x},\ \forall n\geq n_0.}$

$\Rightarrow \arg z_n = n\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} \pmod{2\pi}, \forall n \geq n_0.$

Dar $n\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} = \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{ny}{n+x}}_{\downarrow y} \to y$

$\Rightarrow \arg z_n \to y \pmod{2\pi}.$

Deci: $|z_n| \to e^x = |e^z|$ și $\arg z_n \to y \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow z_n \to e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$ OK.

(4) Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\pi}{2n}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1+i\pi}{3n}\right)^n$.

Soluție: a) $z := \frac{i\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z =$
$= e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$

b) $z = \frac{1+i\pi}{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z = e^{\frac{1}{3}+i\frac{\pi}{3}} =$
$= e^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

(5) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $e^z = -1$; b) $e^{(1+i)z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; c) $e^z = 2i$.

Soluții: a) $z = x+iy \Rightarrow e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow$
$\Rightarrow e^z = -1 \Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = \cos\pi + i\sin\pi \Leftrightarrow$
$e^x = 1$ și $y = \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow x = 0$ și $y_k = \pi + 2k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z_k = i(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ infinitate de soluții în $\mathbb{C}$

soluție

b) $e^{(1+i)z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

Avem că $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

$\Rightarrow \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Fie $z=x+iy \Rightarrow (1+i)z = (1+i)(x+iy) =$

$= x-y+i(x+y)$

$\Rightarrow e^{(1+i)z} = e^{x-y+i(x+y)} = e^{x-y}\left(\cos(x+y)+i\sin(x+y)\right)$

$\Rightarrow e^{(1+i)z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \Leftrightarrow$

$e^{x-y}\left(\cos(x+y)+i\sin(x+y)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = \sqrt{2} \\ x+y = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \ln\sqrt{2} \\ x+y = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y = \ln\sqrt{2} \\ x+y = \frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{12}+2k\pi \\ 2y = \frac{\pi}{12}+2k\pi-\ln\sqrt{2} \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_k = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{24}+k\pi \\ y_k = \frac{\pi}{24}+k\pi-\frac{1}{2}\ln\sqrt{2} \end{cases},\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$z_k = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{24}+k\pi+i\left(\frac{\pi}{24}+k\pi-\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}\right)i,\ k\in\mathbb{Z}$

soluții

$\Rightarrow$ ecuația $e^{(1+i)z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{C}$.

c) $e^{z} = 2i$. Fie $z = x+iy \Rightarrow e^{x}(\cos y + i\sin y) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{x} = 2 \\ y = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ y_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow z_k = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ soluție

$\Rightarrow$ infinitate de soluții în $\mathbb{C}$.

(6) Să se determine imaginile dreptelor paralele cu axele de coordonate prin transformarea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^{z}$.

(7) Fie $B = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$ și $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^{z}$. Să se arate că funcția f este injectivă pe banda B și să se determine $f(B)$.

Tema 2

1 a) Să se reprezinte în planul complex mulțimea

$$\{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{3}\}.$$

b) Să se arate că mulțimea

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} : \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = \frac{1}{2}\}$$

este un cerc. Determinați centrul și raza acestui cerc.

2 Să se determine toate punctele $z \in \mathbb{C}$ pentru care $d_c(z, i) = d_c(z, \infty)$,

unde d_c este distanța cordală. Să se reprezinte în planul complex mulțimea obținută.

3 Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+i}{1+2i}\right)^n$; b) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i\pi}{2n}\right)^{4n}$.

c) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + i\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{n^2}$.

4 Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația

$$e^{iz} = 1 - i.$$