Analiză complexă — 1 —

Zerourile funcțiilor olomorfe

Material bibliografic pentru cursurile 11-12

Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(G)$, $z_0 \in G$. Spunem că z_0 este un zerou pentru funcția f dacă $f(z_0)=0$.
Spunem că z_0 este un zerou multiplu de ordinul n pentru f, unde $n \in \mathbb{N}^*$, dacă

$$(1) \quad f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(n-1)}(z_0)=0, \; f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

P1 (t. de factorizare a zerourilor funcțiilor olomorfe)
Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f \in \mathcal{H}(G)$. Fie $z_0 \in G$. Atunci z_0 este un zerou multiplu de ordinul n pentru funcția f dacă și numai dacă există o funcție $\varphi \in \mathcal{H}(G)$, astfel încât $\varphi(z_0)\neq 0$ și

$$(2) \quad f(z)=(z-z_0)^n \cdot \varphi(z), \; \forall z \in G.$$

Demonstrație. Dacă $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}(G)$, astfel încât $\varphi(z_0)\neq 0$ și are loc relația (2), atunci se observă imediat că are loc (1), deci z_0 este un zerou de ordinul n pentru f.

În continuare, admitem că $z=z_0$ e un zerou de ordinul n pentru f. Fie $\varphi: G \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(z)=\begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}, & \forall z \in G\setminus\{z_0\} \\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, & z=z_0 \end{cases}$$

Atunci $\varphi \in \mathcal{H}(G\setminus\{z_0\})$. Arătăm că φ e continuă în z_0. De aici va rezulta că φ e continuă pe G, iar din faptul că $\varphi \in \mathcal{H}(G\setminus\{z_0\})$, va rezulta că $\varphi \in \mathcal{H}(G\setminus\{z_0\}) \cap C(G)$, deci $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. În plus, $\varphi(z_0)\neq 0$ și are loc (2).

Deoarece $f \in \mathcal{H}(G)$, rezultă că $f \in \mathcal{A}(G)$, deci $\exists r > 0$ astfel ca $U(z_0, r) \subseteq G$ și

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \forall z \in U(z_0, r),$$

unde $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Dar z_0 e zerou de ordinul n pentru f, deci $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, iar $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Prin urmare $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, iar $a_n \neq 0$, de unde deducem că

$$f(z) = a_n (z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots =$$
$$= (z-z_0)^n \left[a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \dots \right], \forall z \in U(z_0, r).$$

Deci,

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \dots, \quad \forall z \in \dot{U}(z_0, r),$$

iar prin trecere la limită în relația precedentă, obținem că

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \varphi(z_0),$$

unde am folosit faptul că seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ este convergentă uniform pe compacte pe $U(z_0, R)$, unde R e raza de convergență a seriei precedente, iar $R \geq r$, în conformitate cu Teorema lui Cauchy-Hadamard.

Așadar, am arătat că $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$, deci φ e continuă în z_0. Demonstrația e încheiată. $\square$

Un rezultat fundamental în teoria funcțiilor de o variabilă complexă, cu aplicații importante, este prezentat în cele ce urmează.

(T1) (Teorema identității funcțiilor olomorfe)

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f, g \in \mathcal{H}(D)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $f \equiv g$.

(ii) $\exists a \in D$ astfel ca $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$, $\forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

(iii) $\exists E \subseteq D$, astfel încât $E' \cap D \neq \phi$ și $f|_E = g|_E$.

Obs: T1(iii) nu are loc dacă una din funcțiile f sau g nu e olomorfă pe domeniul D.

Ex. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \begin{cases} z, & |z| < 1 \\ \frac{z}{|z|}, & |z| \geq 1 \end{cases}$ și $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$g(z) = z$. Atunci $f|_{U(0,1)} = g|_{U(0,1)}$, dar $f \not\equiv g$.

E clar că $f \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$, dar $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

În continuare vom demonstra următorul rezultat (forma echivalentă a Teoremei identității funcțiilor olomorfe).

(T2) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci u.a.s.e.

(i) $f \equiv 0$

(ii) $\exists a \in D$, astfel încât $f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

(iii) $\exists E \subseteq D$, astfel încât $E' \cap D \neq \phi$ și $f|_E = 0$, unde E' este mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii E.

Demonstrație. Arătăm că (ii) $\Rightarrow$ (i) (e clar că (i) $\Rightarrow$ (ii) și (i) $\Rightarrow$ (iii)).

Notăm $A = \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

⊙ Arătăm că mulțimea A e nevidă, deschisă și închisă în D, iar din faptul că D e conexă, va rezulta că $A=D$, deci $f\equiv 0$.

I) $A\neq\emptyset$ deoarece $a\in A$.

II) A e deschisă în D.

Într-adevăr, fie $b\in A$, ales în mod arbitrar. Deoarece $A\subseteq D$, iar D e deschisă, $\exists\, r>0$ astfel încât $U(b,r)\subseteq D$, iar din Teorema dezvoltării în serie Taylor obținem că

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n,\ \forall z\in U(b,r),$$

unde $b_n=\dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dar $b\in A$, deci $f^{(n)}(b)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, prin urmare $b_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Așadar, $f(z)=0$, $\forall z\in U(b,r)$, iar de aici e clar că $f^{(n)}(z)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in U(b,r)$. În concluzie, $U(b,r)\subseteq A$. Cum punctul $b\in A$ a fost ales în mod arbitrar, deducem că A e deschisă în D.

III) A e închisă în D.

Fie $z_0\in \overline{A}\cap D$. Arătăm că $z_0\in A$.

Într-adevăr, din $z_0\in\overline{A}\cap D$, rezultă că $\exists$ un șir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ astfel încât $z_n\to z_0$.

Cum $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$, avem că $f^{(k)}(z_n)=0$, $\forall k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{f^{(k)}(z_n)}_{=0}=f^{(k)}(z_0)$, adică $f^{(k)}(z_0)=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Prin urmare, $z_0\in A$.

- În continuare, arătăm că (iii) $\Rightarrow$ (i).

Fie $c\in E'\cap D$. Atunci $\exists (c_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E\setminus\{c\}$ astfel încât $c_n \to c$. Deci $\underbrace{f(c_n)}_{=0} \longrightarrow f(c)$, adică $f(c)=0$.

Arătăm că $c=$ zerou de ordin de multiplicitate infinit, iar din faptul că (ii)$\Leftrightarrow$(i) va rezulta că $f\equiv 0$.

Presupunem prin absurd că $\exists\, n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $z=c$ – zerou de ordinul n. Atunci $\exists\, \varphi\in\mathcal{H}(D)$, cu $\varphi(c)\neq 0$, astfel încât $f(z)=(z-c)^n\cdot\varphi(z)$, $\forall z\in D$, pe baza Propoziției 1.

În particular, avem că

$$\underbrace{f(c_k)}_{=0}=\underbrace{(c_k-c)^n}_{\neq 0}\cdot\varphi(c_k),\ \forall k\in\mathbb{N},$$

de unde deducem că $\varphi(c_k)=0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Prin trecere la limită, obținem că

$$\varphi(c)=\lim_{k\to\infty}\varphi(c_k)=0,$$

adică $\varphi(c)=0 \Rightarrow$ contradicție cu $\varphi(c)\neq 0$.

Așadar, $f^{(n)}(c)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

OK

Obs. Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu și $f\in\mathcal{H}(D)$, $f\not\equiv 0$. Dacă $z_0\in D$ e un zerou al funcției f, atunci z_0 e un zerou cu ordinul de multiplicitate finit, pe baza Teoremei 2(ii).

Pe de altă parte, din T2(iii) deducem că $\exists\, r>0$ astfel încât $U(z_0,r)\subseteq D$ și $f(z)\neq 0$, $\forall z\in \dot{U}(z_0,r)$ (altfel, $\exists\,(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\setminus\{z_0\}$ cu $z_n\to z_0$ și $f(z_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Fie $E=\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$. Atunci $E\subseteq D$ și $E'\cap D\neq\emptyset$, deoarece $z_0\in E'\cap D$. Din T2(iii) rezultă că $f\equiv 0 \Rightarrow$ contradicție cu $f\not\equiv 0$).

⊙ Fie $Z(f)$ = mulțimea zerourilor funcției f. Dacă $z_0 \in D$ e un zerou pentru f, atunci am arătat că $\exists\, r>0$ astfel ca $U(z_0,r) \subseteq D$ și $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \dot{U}(z_0,r)$. În particular, $Z(f) \cap U(z_0,r) = \{z_0\}$, deci z_0 = punct izolat pentru mulțimea $Z(f)$.

⊙ Așadar, zerourile funcțiilor olomorfe neidentic nule pe un domeniu D din $\mathbb{C}$ sunt puncte izolate în D.

Aplicații ale Teoremei identității funcțiilor olomorfe.

① Să se determine funcția $f \in \mathcal{H}(U(0,1))$, astfel ca $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Soluție. Fie $g: U(0,1) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{2z}{1+z}$, $\forall z \in U(0,1)$.
Atunci $g \in \mathcal{H}(U(0,1))$ și $f|_E = g|_E$, unde $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$. Deoarece $E \subset U(0,1)$, $E' \cap U(0,1) = \{0\}$, iar $f|_E = g|_E$, deducem din Teorema 1 (Teorema identității funcțiilor olomorfe) că $f \equiv g$, adică $f(z) = \frac{2z}{1+z}$, $\forall z \in U(0,1)$.

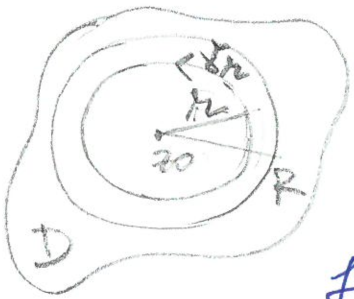
② Să se arate că $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstrație. Fie $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ și $g(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Atunci $f|_{\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}}$, iar din Teorema 1 deducem că $f \equiv g$.

T3 (teorema maximului domeniului)

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă există un punct $z_0 \in D$ astfel încât $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D$, atunci $f \equiv$ constantă.

Demonstrație. $\exists R > 0$ astfel încât $U(z_0, R) \subseteq D$. Arătăm că $f|_{U(z_0,R)} =$ constantă $(= f(z_0))$.



Fie $r \in (0, R)$ fixat. Atunci $f \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ și f e continuă pe $\overline{U}(z_0, r)$. Aplicând formulele lui Cauchy pentru disc, deducem că

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

unde $\gamma_r(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Atunci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{\gamma_r(t) - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2\pi i t})}{re^{2\pi i t}} \cdot 2\pi i r e^{2\pi i t}\, dt$$

$$= \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t})\, dt.$$

Așadar, am obținut relația

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t})\, dt,$$

de unde deducem că

$$|f(z_0)| = \left| \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t})\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(z_0 + re^{2\pi i t})|\, dt.$$

Dar $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D$, prin urmare

$$|f(z_0)| \leq \int_0^1 |f(z_0 + re^{2\pi i t})|\, dt \leq \int_0^1 |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|,$$

adică $$|f(z_0)|=\int_0^1 |f(z_0)|dt=\int_0^1 |f(z_0+re^{2\pi i t})|dt.$$

Am obținut astfel relația:
$$\int_0^1 [|f(z_0)|-|f(z_0+re^{2\pi i t})|]dt=0.$$

Considerăm funcția $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$\varphi(t)=|f(z_0)|-|f(z_0+re^{2\pi i t})|,\ \forall t\in[0,1].$$

Atunci φ e continuă pe $[0,1]$, $\varphi(t)\geq 0, \forall t\in[0,1]$, și $\int_0^1 \varphi(t)dt=0$. Atunci $\varphi(t)=0$, $\forall t\in[0,1]$, adică
$$|f(z_0+re^{2\pi i t})|=|f(z_0)|,\ \forall t\in[0,1].$$

Deci, $|f(z)|=|f(z_0)|$, $\forall z\in\partial U(z_0,r)$, iar din faptul că $r\in(0,R)$ e arbitrar, deducem că $|f(z)|=|f(z_0)|$, $\forall z\in U(z_0,R)$,

prin urmare $|f|\big|_{U(z_0,R)}\equiv$ constant $(=|f(z_0)|)$.

Cum $U(z_0,R)$ e un domeniu din $\mathbb{C}$, relația precedentă conduce la concluzia $f\big|_{U(z_0,R)}=$ constantă, adică $f(z)=f(z_0)$, $\forall z\in U(z_0,R)$.

În final, fie $E=U(z_0,R)$. Atunci $E\subseteq D$, $E'\cap D\neq\phi$ și $f\big|_E=$ constanta $(=f(z_0))$. Din Teorema identității funcțiilor olomorfe rezultă că $f\equiv$ constanta $(=f(z_0))$.

<u>OK</u>

◎ În continuare vom menționa câteva consecințe interesante ale Teoremei maximului modulului.

C1 Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu mărginit și $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D și continuă pe $\overline{D}$. Atunci

$$(3) \quad \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

Demonstrație. Egalitatea (3) e clară dacă $f \equiv$ constantă, prin urmare putem presupune că $f \not\equiv$ constantă. Fie $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(z) = |f(z)|$.

Atunci φ e continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, deci $\exists z_0 \in \overline{D}$ astfel ca $\varphi(z_0) = \max\{\varphi(z) : z \in \overline{D}\}$.

Deoarece $f \not\equiv$ constantă, rezultă că $z_0 \in \overline{D} \setminus D = \partial D$, pe baza Teoremei 3. OK

C2 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$, astfel încât $f(z) \neq 0$, $\forall z \in D$. Dacă $\exists z_0 \in D$ astfel încât

$$(4) \quad |f(z)| \geq |f(z_0)|, \ \forall z \in D,$$

atunci $f \equiv$ constantă.

Demonstrație. Deoarece $f(z) \neq 0$, $z \in D$, funcția $g : D \to \mathbb{C}$, $g = \frac{1}{f}$, este olomorfă pe D, iar din (4) avem că

$$|g(z)| \leq |g(z_0)|, \ \forall z \in D.$$

Din Teorema 3 rezultă că $g \equiv$ constantă, deci $f \equiv$ constantă.

C3 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $\exists z_0 \in D$ astfel încât are loc una din condițiile următoare:

(i) $\operatorname{Re} f(z) \le \operatorname{Re} f(z_0)$, $\forall z \in D$,

sau

(ii) $\operatorname{Re} f(z) \ge \operatorname{Re} f(z_0)$, $\forall z \in D$,

atunci $f \equiv$ constantă.

<u>Demonstrație</u>. Presupunem că are loc (i). Fie $g: D \to \mathbb{C}^*$, $g(z) = e^{f(z)}$, $\forall z \in D$. Atunci $g \in \mathcal{H}(D)$ și $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$, $\forall z \in D$. Din relația (i) deducem că

$$|g(z)| \le |g(z_0)|, \ \forall z \in D,$$

deci $g \equiv$ constantă, în conformitate cu Teorema maximului modulului. Deci $g'(z) = 0$, $\forall z \in D$.

Dar $g'(z) = e^{f(z)} \cdot f'(z)$, $\forall z \in D$,

prin urmare $0 = e^{f(z)} \cdot f'(z)$, $\forall z \in D$, adică $f'(z) = 0$, $\forall z \in D$. Așadar, $f \equiv$ constantă.

Dacă are loc relația (ii), atunci

$$\operatorname{Re}(-f)(z) \le \operatorname{Re}(-f)(z_0), \ \forall z \in D,$$

deci $-f \equiv$ constantă $\Leftrightarrow f \equiv$ constantă.

<u>OK</u>

Încheiem cu un alt rezultat fundamental, cunoscut sub numele de Lema lui Schwarz. Diverse aplicații ale Lemei lui Schwarz pot fi găsite în [1], [2], [7].

T4 (Lema lui Schwarz) Fie $U = U(0,1)$ și $f: U \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, astfel ca $f(0) = 0$ și $|f(z)| < 1$, $\forall z \in U$. Atunci $|f(z)| \le |z|$, $\forall z \in U$ și $|f'(0)| \le 1$.

Dacă, în plus, $\exists z_0 \in \dot{U} = U \setminus \{0\}$ astfel încât $|f(z_0)| = |z_0|$, sau dacă $|f'(0)| = 1$, atunci $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$, astfel încât $f(z) = \lambda z$, $\forall z \in U$.

Obs: Interpretarea geometrică a Lemei lui Schwarz e următoarea: Fie $f \in \mathcal{H}(U)$, astfel încât $f(0) = 0$ și $f(U) \subseteq U$. Atunci $f(U(0,r)) \subseteq U(0,r)$, $\forall r \in (0,1)$. Dacă, în plus, $\exists r \in (0,1)$ astfel ca $f(U(0,r)) = U(0,r)$, atunci $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$ și $f(z) = \lambda z$, $\forall z \in U$.

Demonstrația Lemei lui Schwarz (schiță). Fie

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \in \dot{U} \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Atunci $g \in \mathcal{H}(\dot{U}) \cap C(U)$, deci $g \in \mathcal{H}(U)$. Atunci $g \in \mathcal{H}(U_r) \cap C(\overline{U_r})$, $\forall r \in (0,1)$, unde $U_r = U(0,r)$.

Din Consecința 1 deducem că

$$\max\{|g(z)|, z \in \overline{U_r}\} = \max\{|g(z)| : z \in \partial U_r\},$$

iar din faptul că $|g(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} = \dfrac{|f(z)|}{r} < \dfrac{1}{r}$, $\forall z \in \partial U_r$, rezultă imediat că

$$(4) \quad |g(z)| \le \frac{1}{r}, \ \forall z \in \overline{U_r},$$

adică $|f(z)| \le \dfrac{|z|}{r}$, $|z| \le r$. Prin trecere la limită $r \to 1$, obținem că $|f(z)| \le |z|$, $\forall z \in U$.

De asemenea, din (4) obținem că

$$|f'(0)| = |g(0)| \le \frac{1}{r} \xrightarrow[r \nearrow 1]{} 1, \text{ deci } |f'(0)| \le 1.$$

În final, dacă $|f'(0)| = 1$ sau $|f(z_0)| = |z_0|$ pentru un punct $z_0 \in \dot{U}$, atunci $|g(z_0)| = 1 = \max\{|g(z)| : z \in U\}$

sau $|g(0)| = 1 = \max\{|g(z)| : |z| < 1\}$.

În ambele situații deducem că $g \equiv$ constantă, deci $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$, astfel ca $g \equiv \lambda \Rightarrow f(z) = \lambda z$, $\forall z \in U$.

OK

Obs: Folosind lema lui Schwarz, se poate arăta că: dacă $f \in \mathcal{H}(U)$, astfel încât $f : U \to U$ e bijecție de la $U = U(0,1)$ la U, atunci $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$ cu $|z_0| < 1$, astfel încât

$$\boxed{f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} \cdot z}, \quad \forall z \in U.}$$

Serii Laurent

Def 1. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Numim <u>serie Laurent</u> în jurul lui z_0 o serie de forma

$$(*)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \overbrace{\dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}^{=\text{partea principală}} +$$

$$+ \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots}_{=\text{partea tayloriană}}, \quad z \in E,$$

unde $E \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, iar $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Seria $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ se numește <u>partea principală</u> a seriei Laurent $(*)$, iar seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se numește <u>partea tayloriană</u> a seriei Laurent $(*)$.

Def 2. Fie $E \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Seria Laurent $(*)$ este convergentă pe mulțimea E (simplu/uniform pe compacte/uniform) dacă atât partea principală cât și partea tayloriană sunt convergente (simplu/uniform pe compacte/uniform) pe E.

Fie P = suma părții principale a seriei $(*)$ pe E

T = suma părții tayloriene a seriei $(*)$ pe E

S = suma seriei Laurent $(*)$ pe E

Atunci $\boxed{S := P + T}$ pe E, deci $S(z) = P(z) + T(z)$, $z \in E$.

În cazul seriilor Laurent are loc următorul rezultat:

T1 (t. coroanei de convergență)

Fie seria Laurent (*) și

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dacă $r<R$, atunci seria Laurent (*) e convergentă uniform pe compacte în coroana circulară $U(z_0;r,R)$, numită coroana de convergență a seriei (*). De asemenea, seria (*) este divergentă pe $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$, unde $D=U(z_0;r,R)$.

Fie S = suma seriei Laurent (*) pe D. Atunci $S\in\mathcal{H}(D)$.

Obs: (i) Dacă $r>R$, atunci seria Laurent (*) este divergentă pe $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

(ii) Dacă $r=R$, atunci seria Laurent (*) poate converge numai pe $\partial U(z_0,R)$.

- Funcțiile olomorfe pe discuri se dezvoltă în serie Taylor, iar pe coroane circulare se dezvoltă în serie Laurent.

T2 (t. dezvoltării în serie Laurent)

Dacă $f\in\mathcal{H}(U(z_0;r,R))$, atunci f se dezvoltă în mod unic într-o serie Laurent pe $U(z_0;r,R)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z\in U(z_0;r,R),$$

unde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ \forall \rho\in(r,R), n\in\mathbb{Z}$,

unde $\gamma_\rho(t) = z_0+\rho\cdot e^{2\pi i t}, \ t\in[0,1]$.

Bibliografie: [1], [7].