Curs 11

Spaţii L^p

Definiţia 1. Fie V un spaţiu vectorial real. O *normă* pe V este o funcţie $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ care satisface următoarele proprietăţi pentru orice $x, y \in V$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$:

(N1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (omogenitate absolută);

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subaditivitate).

Perechea $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte *spaţiu (vectorial) normat.*

Observaţia 1. Dacă $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, atunci $d : V \times V \to [0,\infty)$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ este o metrică pe V.

Exemplul 1. (i) Norma valoare absolută pe $\mathbb{R}$: $|\cdot|$.

(ii) Norma ℓ^p pe $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ şi $1 \leq p < \infty$: pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Norma ℓ^2 se numeşte norma euclidiană. Norma ℓ^1 se numeşte norma Manhattan (sau "taxi-cab").

(iii) Norma maximum (sau ℓ^∞) pe $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$: pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|.$$

(iv) Fie Y o mulţime nevidă şi $B(Y) = \{f : Y \to \mathbb{R} \mid f \text{ mărginită}\}$. Atunci $B(Y)$ este un spaţiu vectorial real în raport cu operaţiile uzuale, iar $\|\cdot\|_\infty : B(Y) \to [0,\infty)$ definită prin $\|f\|_\infty = \sup\{|f(y)| \mid y \in Y\}$ pentru orice $f \in B(Y)$ este o normă pe $B(Y)$.

Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Notăm

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ este integrabilă}\}.$$

Reamintim că $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ dacă şi numai dacă f este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi $|f| \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (a se vedea Propoziţia 4 din Cursul 9).
Folosind Propoziţia 3 din Cursul 9, deducem că $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu vectorial real. Funcţia $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \mapsto \int |f| d\mu$ satisface condiţiile (N2), (N3) din definiţia unei norme, dar (N1) nu are loc deoarece, dacă de exemplu f este o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă astfel încât $f = 0$ μ-a.p.t., atunci f este integrabilă şi $\int |f| d\mu = 0$, însa s-ar putea ca f să nu fie funcţia constantă egală cu 0.
Pentru a înlătura această problemă, se va introduce o relaţie de echivalenţă care va identifica funcţiile egale a.p.t.:

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \mu\text{-a.p.t.}, \quad f, g : X \to \mathbb{R}.$$

În general, notăm pentru $1 \leq p < \infty$,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ este } \mathcal{A}\text{-măsurabilă şi } |f|^p \text{ este integrabilă}\}$$

şi

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ este } \mathcal{A}\text{-măsurabilă şi există } M \in [0, \infty) \text{ a.î. } |f| \leq M \ \mu\text{-a.p.t.}\}.$$

Definim $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim$. Astfel $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ conţine clasele de echivalenţă ale relaţiei $\sim$: $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)\}$, unde $[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \mid g \sim f\}$.
De asemenea, când spaţiul cu măsură este subînţeles, vom folosi şi notaţiile $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p$ şi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X) = L^p$.

Propoziţia 1. *$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, unde $1 \leq p \leq \infty$, este un spaţiu vectorial real în raport cu operaţiile uzuale definite prin reprezentanţi: pentru $[f], [g] \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ definim*

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \alpha[f] = [\alpha f].$$

Definim funcţia $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ astfel: dacă $1 \leq p < \infty$,

$$\|[f]\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

iar

$$\|[f]\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M \ \mu\text{-a.p.t.}\}.$$

Observăm că $\|\cdot\|_p$ este bine definită în sensul că dacă $f, g \in \mathcal{L}^p$ cu $f \sim g$, atunci:

- dacă $1 \leq p < \infty$, $\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}$;
- dacă $p = \infty$, $\{M : |f| \leq M \ \mu\text{-a.p.t.}\} = \{M : |g| \leq M \ \mu\text{-a.p.t.}\}$.

Observaţia 2. În continuare, vom privi elementele din L^p ca fiind funcţii identificând astfel o clasă de echivalenţă cu un reprezentant şi vom scrie simplu f în loc de $[f]$. Astfel, vom scrie $\|f\|_p$ în loc de $\|[f]\|_p$, respectiv $\|f\|_\infty$ în loc de $\|[f]\|_\infty$.

Vom arăta că $\|\cdot\|_p$, unde $1 \leq p \leq \infty$, este o normă pe $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.