V

Analiza complexă (Notițe de curs)

Material bibliografic pentru cursurile 5-6

Funcții armonice

Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ mulțime deschisă și $u: G \to \mathbb{R}$, $u = u(x,y)$. Spunem că funcția u este armonică pe G dacă $u \in C^2(G)$ și $\Delta u \equiv 0$, unde

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}.$$

$\Delta u = 0$ – ecuația lui Laplace

Obs: Dacă $u = u(x)$ (deci u depinde numai de variabila x), atunci $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $u(x) \equiv ax + b$.

Într-adevăr, în acest caz, $\Delta u \equiv 0 \Leftrightarrow u''(x) \equiv 0$.

⊙ În continuare vom studia legătura dintre funcțiile armonice și funcțiile olomorfe.

(P1) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f \in \mathcal{H}(G)$. Atunci $\operatorname{Re} f$ și $\operatorname{Im} f$ sunt funcții armonice pe G.

Demonstrație. Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy \in G$. Deci $u = \operatorname{Re} f$ și $v = \operatorname{Im} f$. Se va arăta ulterior că funcțiile olomorfe sunt nelimitat derivabile, deci $f \in C^\infty(G) \Leftrightarrow u, v \in C^\infty(G)$.

Dar $f \in \mathcal{H}(G) \Rightarrow u$ și v satisfac sistemul Cauchy-Riemann în $\forall z \in G$. Deci

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Atunci $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \equiv 0,$$ pentru că $v \in C^2(G)$.

Deci u este o funcție armonică pe G.
Cu argumente similare rezultă că v este armonică pe G.

Exemplu: (i) Fie $u(x,y)=e^x\cos y$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Atunci $u=\mathrm{Re} f$, unde $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$.
Deoarece $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, rezultă că u este armonică pe $\mathbb{C}$.

(ii) Fie $v(x,y)=xy$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Atunci $v=\mathrm{Im} f$, unde $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z^2}{2}$.
Cum $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, deducem că v e armonică pe $\mathbb{C}$.

În continuare studiem următoarea problemă:

Problemă: Fie $G\subseteq\mathbb{C}$ deschisă și $u:G\to\mathbb{R}$ o funcție armonică. Există o funcție $f\in\mathcal{H}(G)$ astfel încât $\mathrm{Re} f(z)=u(z)$, $\forall z\in G$?

⊙ Răspunsul este afirmativ în cazul domeniilor simplu conexe în $\mathbb{C}$.
Ne vom ocupa de cazul domeniilor convexe în $\mathbb{C}$.

Pentru a putea trata problema precedentă, reamintim noțiunile de formă diferențială închisă, respectiv exactă.

Def 2. Fie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ un domeniu și $\omega: D\to\mathbb{R}$ o formă diferențială liniară, adică
$$\omega = P\,dx + Q\,dy,$$
unde $P, Q: D\to\mathbb{R}$ funcții.
Spunem că forma diferențială ω este

de clasă C^k pe D dacă funcțiile P, Q sunt de clasă C^k pe D, unde $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

⊙ Forma diferențială ω de clasă C^k se numește închisă dacă

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \ \forall (x,y) \in D.}$$

⊙ Forma diferențiala ω de clasă C^k se numește ~~totala~~ exactă dacă $\exists f : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^{k+1} pe D, astfel încât

$$df \equiv \omega \iff \frac{\partial f}{\partial x} \equiv P \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y} \equiv Q$$

(Funcția f este o primitivă a formei diferențiale ω).

Are loc următorul rezultat:

Lema 1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu convex și ω o formă diferențiala liniara de clasă C^k pe D. Atunci ω este exactă $\iff$ ω este închisă.

⊙ Rezultatul precedent e valabil pe orice domeniu simplu conex din $\mathbb{R}^2$.

Cu ajutorul lemei 1 putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex și $u : D \to \mathbb{R}$ o funcție armonică. Atunci $\exists f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D, astfel ca $\operatorname{Re} f \equiv u$.

⊙ Rezultatul din Teorema 1 rămâne adevărat în cazul domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$.

Demonstrație: Arătăm că $\exists v : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe D astfel ca u și v să satisfacă sistemul Cauchy-Riemann în $\forall z \in D$. Atunci $f := u + iv \in \mathcal{H}(D)$ și $\operatorname{Re} f \equiv u$.

Așadar, căutăm $v \in C^2(D)$ astfel încât

$$(*) \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Fie $P(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ și $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $\forall z = x + iy \in D$. Deoarece $u \in C^2(D)$, rezultă că $P, Q \in C^1(D)$.

Considerăm forma diferențială liniară ω de clasă C^1 pe D, definită de relația:

$$\omega = P\,dx + Q\,dy.$$

Deoarece u este armonică pe D, avem că

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underset{\Delta u \equiv 0}{\equiv} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial P}{\partial y},$$

deci $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$, adică ω este o formă diferențială închisă pe D. Dar D fiind domeniu convex, deducem din Lema 1 că ω este diferențiala totală exactă. Deci, $\exists v : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe D, astfel încât $dv \equiv \omega$.

Dar $dv := \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$, deci

$$dv \equiv \omega \iff \frac{\partial v}{\partial x} \equiv P \text{ și } \frac{\partial v}{\partial y} \equiv Q \iff$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Așadar, am arătat că $\exists v \in C^2(D)$ astfel încât $(*)$ are loc. Prin urmare, $f = u + iv \in \mathcal{H}(D)$ și $\operatorname{Re} f \equiv u$.

Obs: Funcția v, construită în demonstrația anterioară, se numește conjugata armonică a funcției u.

P1 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex și $v : D \to \mathbb{R}$ o funcție armonică. Atunci $\exists f \in \mathcal{H}(D)$ astfel încât $\operatorname{Im} f \equiv v$.

Demonstrație: Din Teorema 1 deducem că $\exists g \in \mathcal{H}(D)$, astfel încât $\operatorname{Re} g(z) = v(x,y)$, $\forall z = x+iy \in D$.

Fie $g = v + iw$. Atunci $ig = -w + iv$, deci $v \equiv \operatorname{Im}(ig)$. Deoarece căutăm $f \in \mathcal{H}(D)$, astfel ca $\operatorname{Im} f \equiv v$, adică

$$\operatorname{Im} f \equiv \operatorname{Im}(ig) \iff \operatorname{Im}(f - ig) \equiv 0,$$

deducem că $\exists a \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$f - ig \equiv a.$$

Așadar, $\boxed{f \equiv ig + a}$ – soluție.

Obs: Rezultatul anterior e valabil pe orice domeniu simplu conex în $\mathbb{C}$.

Aplicația multivocă logaritm (logaritmul complex).

- Fie $w \in \mathbb{C}^*$. Atunci ecuația

(1) $e^z = w$

are o infinitate de soluții în $\mathbb{C}$.

Într-adevăr, dacă $z = x + iy \in \mathbb{C}$, atunci

(1) $\Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = w = |w|(\cos\arg w + i\sin\arg w)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ \text{și} \\ y = \arg w \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|w| \\ \text{și} \\ y \in \operatorname{Arg} w. \end{cases}$

Prin urmare, dacă $y_k = \arg w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iar

$$z_k = x + iy_k = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

atunci z_k - soluție a ecuației (1), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Deci ecuația (1) are o infinitate de soluții z_k în $\mathbb{C}$:

(2) $z_k = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Def 1. Funcția multivocă $\operatorname{Log}: \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$,

(3) $\operatorname{Log} z = \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$

se numește logaritmul complex (funcția multivocă logaritm).

- Putem scrie și altfel:

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,}$$

deoarece $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

Au loc relațiile:

⊙ Dacă $z \in \mathbb{C}^*$, atunci $w \in \mathrm{Log}\, z \Leftrightarrow e^w = z$.

⊙ $\begin{cases} \mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 \\ \mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2 \end{cases}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

Ex: $\mathrm{Log}\, 1 = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Log}(-1) = \{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathrm{Log}\, i = \{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) i : k \in \mathbb{Z}\}$.

Def 2. Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Aplicația multivocă $F : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $F(z) = z^\alpha$, unde $z^\alpha := e^{\alpha \cdot \mathrm{Log}\, z}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, se numește funcția (multivocă) putere de exponent α.

⊙ Existența/unicitatea ramurilor uniforme pentru logaritmul complex.

Def 3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}^*$ un domeniu. Funcția $f : D \to \mathbb{C}$ se numește ramură uniformă (determinare uniformă) a aplicației multivoce Log pe D dacă $f \in \mathcal{H}(D)$ și $f(z) \in \mathrm{Log}\, z$, $\forall z \in D$, adică $e^{f(z)} = z$, $\forall z \in D$.

(P1) Fie $D \subseteq \mathbb{C}^*$ un domeniu. Atunci au loc afirmațiile:

a) Dacă există o ramură uniformă f a lui Log pe D, atunci $f'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in D$.

b) Dacă există două ramuri uniforme f și g ale aplicației multivoce Log pe D, atunci $\exists k_0 \in \mathbb{Z}$, astfel ca $f \equiv g + 2k_0\pi i$.

Dacă, în plus, $\exists\, z_0 \in D$ astfel încât $f(z_0) = g(z_0)$, atunci $f \equiv g$.

<u>Demonstrație</u>: a) Deoarece f e ramură uniformă a lui Log pe D, avem că $f \in \mathcal{H}(D)$ și $e^{f(z)} = z, \forall z \in D$.
Prin urmare,

$$\underbrace{e^{f(z)}}_{=z} \cdot f'(z) = 1, \forall z \in D \iff f'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in D.$$

b) Dacă f și g sunt ramuri uniforme ale aplicației Log pe D, atunci $f, g \in \mathcal{H}(D)$ și $e^{f(z)} = e^{g(z)} = z, \forall z \in D$. Din demonstrația de la a), avem că $f'(z) = g'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in D$, iar din faptul că D e domeniu, rezultă că $\exists\, c \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$\boxed{f - g \equiv c}.$$

Dar $f(z), g(z) \in \operatorname{Log} z, \forall z \in D$, prin urmare obținem că:
$\forall z \in D, \exists\, \theta(z), \theta_1(z) \in \operatorname{Arg} z$, astfel încât

$$f(z) = \ln|z| + i\theta(z),$$
$$g(z) = \ln|z| + i\theta_1(z).$$

Deci

$$(4) \quad f(z) - g(z) = i(\theta(z) - \theta_1(z)), \forall z \in D.$$

Dar $\theta(z), \theta_1(z) \in \operatorname{Arg} z$, de unde rezultă că $\forall z \in D, \exists\, k(z) \in \mathbb{Z}$, astfel încât

$$(5) \quad \theta(z) - \theta_1(z) = 2k(z)\pi.$$

Din (4) și (5) obținem că

$$(6) \quad \frac{f(z) - g(z)}{2\pi i} = k(z) \in \mathbb{Z}, \forall z \in D.$$

Dar D fiind conexă $\underset{k: D \to \mathbb{Z} \text{ continuă}}{\Longrightarrow}$ $k(D)$ este conexă. Însă,

$k(D) \subseteq \mathbb{Z}$, deci $\exists\, k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k(D)=\{k_0\}$.
Deci $k \equiv$ constantă $(=k_0)$, iar din (6) obținem că

$$\boxed{f \equiv g + 2k_0\pi i}.$$

Dacă, în plus, $\exists\, z_0 \in D$ astfel încât $f(z_0)=g(z_0)$, atunci $k_0=0$, deci $f \equiv g$. OK.

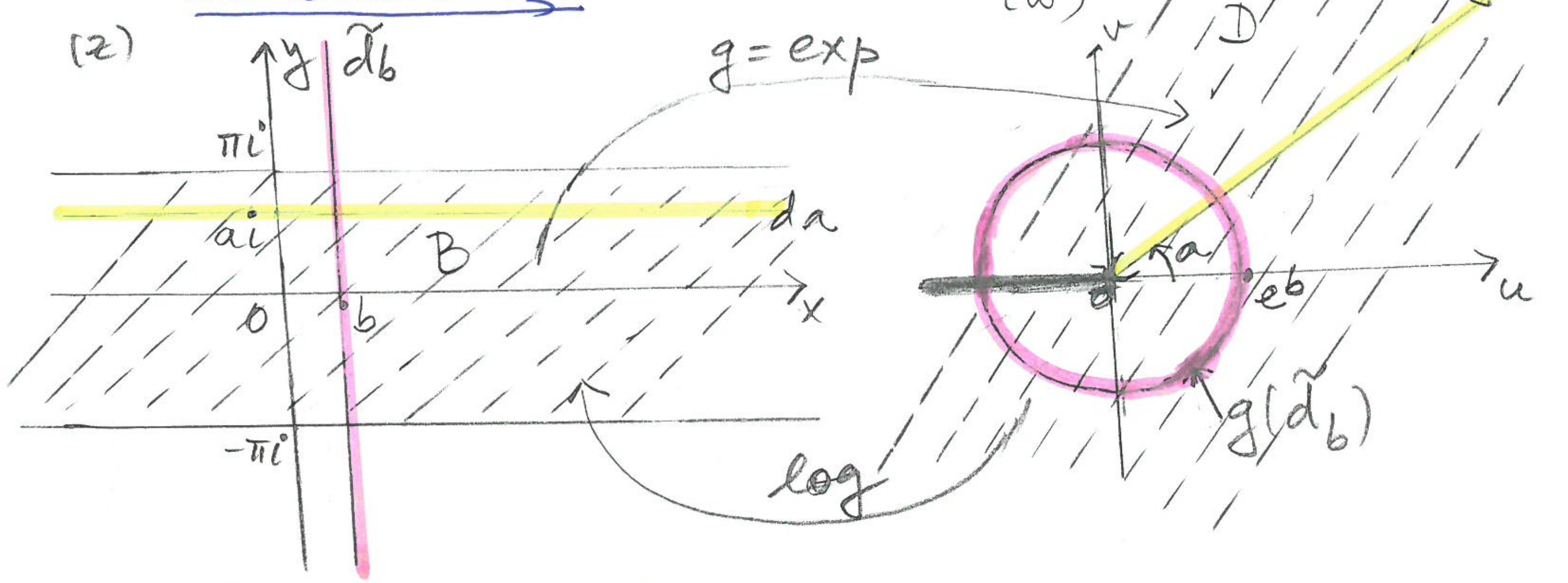
⊙ În rezultatul următor arătăm că există o unică ramură uniformă f a lui Log pe $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, astfel încât $f(1)=0$.

T1 Fie $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z\le 0, \operatorname{Im} z=0\}$. Atunci există o unică ramură uniformă f a lui Log pe D, astfel încât $f(1)=0$. În plus, $f(D)=B$, unde

$$B=\{\zeta\in\mathbb{C}: -\pi<\operatorname{Im}\zeta<\pi\}.$$

De asemenea, $f'(w)=\frac{1}{w}$, $\forall w\in D$.

<u>Demonstrație</u>



⊙ Fie $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $g(z)=\exp(z)=e^z$. La seminar s-a arătat că $g(d_a)$ este o semidreaptă deschisă ce pornește din origine (nu conține originea) şi determină ∢ a cu sensul pozitiv al axei reale. De asemenea, $g(\tilde{d}_b) = \partial U(0, e^b)$, unde:

(d_a): $\{z = x + ia \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ – dreapta paralelă cu axa reală care trece prin punctul ia, unde $a \in \mathbb{R}$.

$(\tilde{d}_b)$: $\{z = b + iy \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R}\}$ – dreapta paralelă cu axa imaginară care trece prin punctul $b \in \mathbb{R}$.

⊙ Funcţia exponenţială este injectivă pe banda B. Într-adevăr, dacă $z_1, z_2 \in B$ astfel ca $g(z_1) = g(z_2)$, obţinem că

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2),$$

unde $z_j = x_j + i y_j$, $j = \overline{1,2}$. Atunci

$$e^{x_1} = e^{x_2} \text{ şi } y_1 = y_2 \pmod{2\pi}.$$

Deci $x_1 = x_2$ şi $\exists k \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$y_1 = y_2 + 2k\pi.$$

Dar $z_1, z_2 \in B \Rightarrow y_1, y_2 \in (-\pi, \pi) \Rightarrow$

$$-1 < \frac{y_1 - y_2}{2\pi} = k < 1$$

Dar $k \in \mathbb{Z}$, deci $k = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Aşadar $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2$.

⊙ În continuare, arătăm că $g(B) = D$.

Dacă $z = x + iy \in B$, atunci $y \in (-\pi, \pi)$, deci $\arg w \in (-\pi, \pi)$, unde $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Prin urmare, $w = e^z \in D \Rightarrow g(B) \subseteq D$.

Pe de altă parte, dacă $w_0 \in D \Leftrightarrow \arg w_0 \in (-\pi, \pi)$, atunci ecuația $e^z = w_0$ are o singură soluție $z_0 \in B$, pe baza injectivității funcției exponențiale în B. Se observă imediat că

$$\boxed{z_0 = \ln|w_0| + i \arg w_0}.$$

Deci $D \subseteq g(B)$, iar din faptul că $g(B) \subseteq D$, rezultă că $g(B) = D$. În concluzie, $g = \exp : B \to D$ e bijecție, iar $f = g^{-1}$ este dată de relația

$$\boxed{f(w) = \ln|w| + i \arg w, \ \forall w \in D.}$$

Folosind sistemul Cauchy-Riemann se observă imediat că $f \in \mathcal{H}(D)$, iar din faptul că $f(w) \in \operatorname{Log} w$, $\forall w \in D$, deducem că f e ramură uniformă a lui Log pe D. Pe de altă parte, $f(1) = 0$, deci f e unica ramură uniformă a aplicației Log pe D cu această proprietate, pe baza Propoziției 1b)! În plus, din Propoziția 1a) avem că

$$f'(w) = \frac{1}{w}, \ \forall w \in D.$$

OK

Def 4. Funcția $\log : D \to B$, definită de relația
$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \forall z \in D,$$
se numește determinarea principală (ramura principală) a lui Log pe D, unde
$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\},$$
iar $B = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$.

Obs: Fie $B_k = \{w \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\}$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Atunci funcția $\log_k : D \to B_k$,
$$\log_k z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \forall z \in D,$$
este ramură uniformă a lui Log pe D, astfel încât $\log_k 1 = 2k\pi i$.

(i) $\log_0 = \log$, $\log_k$ este o bijecție între D și B_k, iar
$$\log_k(z) - \log z = 2k\pi i, \forall z \in D, k \in \mathbb{Z}.$$

Obs: (i) $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât
$$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2.$$
(ii) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$, atunci
$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Bibliografie

[1], [2], [4], [7].