# Curs 10

**Teorema 1** (Teorema convergenţei dominate)**.** *Fie* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie* $\mathcal{A}$*-măsurabilă şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de funcţii* $\mathcal{A}$*-măsurabile, unde* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $f_n \to f$ $\mu$*-a.p.t. Presupunem că există* $g : X \to [0, \infty]$ *o funcţie integrabilă astfel încât*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g \ \mu\text{-a.p.t.}$$

*Atunci funcţiile* $f_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, şi* $f$ *sunt integrabile şi are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Teorema 2** (Derivarea integralei ce depinde de un parametru). *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $g : X \to [0, \infty]$ integrabilă, $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \times X \to \mathbb{R}$ astfel încât*

*(i)* $\forall t \in I$, *funcţia* $x \in X \mapsto f(t, x)$ *este integrabilă;*

*(ii)* $\forall t \in I \, \forall x \in X$, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)$;

*(iii)* $\forall t \in I \, \forall x \in X$, $\left| \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$.

*Fie* $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int f(t, x) d\mu(x)$. *Atunci,* $\varphi$ *este derivabilă şi* $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = \displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$.

**Exemplul 1** (Transformata Laplace)**.** Fie $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Lebesgue. Definim $\mathcal{L}(h) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ transformata Laplace a lui $h$ prin

$$\mathcal{L}(h)(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-tx} h(x) d\lambda(x), \quad \forall t > 0.$$

Dacă $\int_{[0,\infty)} x|h(x)| d\lambda(x) < \infty$, atunci $\mathcal{L}(h)$ este derivabilă.

## Relaţia dintre integralele Riemann şi Lebesgue

### Integrala Riemann: o scurtă recapitulare

**Definiţia 1.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. O *diviziune* a intervalului $[a, b]$ este o mulţime finită şi ordonată $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de puncte din $[a, b]$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
*Norma* diviziunii $\Delta$ este $\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$.
Alegând pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ un punct $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, atunci $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se numeşte un *sistem de puncte intermediare* asociat diviziunii $\Delta$.
Mulţimea diviziunilor intervalului $[a, b]$ se notează prin $\mathrm{Div}[a, b]$.
Dacă $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \Delta' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathrm{Div}[a, b]$, spunem că $\Delta'$ este *mai fină* decât $\Delta$, şi vom nota $\Delta \subseteq \Delta'$, dacă $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$.

**Definiţia 2.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Div}[a, b]$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie.

- Dacă $\xi$ este un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $\Delta$, atunci

  $$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

  se numeşte *suma Riemann* asociată funcţiei $f$, diviziunii $\Delta$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi$.

- Dacă $f$ este mărginită, notăm pentru $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{şi} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

  Atunci
$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{şi} \quad S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$
  se numesc *suma Darboux inferioară*, respectiv *suma Darboux superioară* asociate funcţiei $f$ şi diviziunii $\Delta$.

**Observaţia 1.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită, $\Delta, \Delta' \in \mathrm{Div}[a, b]$ cu $\Delta \subseteq \Delta'$ şi $\xi$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $\Delta'$. Atunci

$$s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta') \leq \sigma(f, \Delta', \xi) \leq S(f, \Delta') \leq S(f, \Delta).$$

**Definiţia 3.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că $f$ este *integrabilă Riemann* pe $[a, b]$ dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathrm{Div}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\forall \xi$ sistem de puncte intermediare asociat lui $\Delta$ avem

$$|\sigma(f, \Delta, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul $I \in \mathbb{R}$ de mai sus este unic determinat, se numeşte *integrala Riemann* a funcţiei $f$ pe $[a, b]$ şi scriem
$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

**Propoziţia 1.** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci afirmaţii de mai jos sunt echivalente cu integrabilitatea Riemann a funcţiei $f$:*

*(i) $f$ este mărginită şi* $\sup\limits_{\Delta \in \mathrm{Div}[a,b]} s(f, \Delta) = \inf\limits_{\Delta \in \mathrm{Div}[a,b]} S(f, \Delta)$.

*În plus, valoarea comună este integrala Riemann a funcţiei $f$.*

*(ii) $f$ este mărginită şi $\forall \varepsilon > 0\, \exists \Delta \in \mathrm{Div}[a, b]$ astfel încât $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$.*

Mai multe detalii despre sume Darboux şi proprietăţile de mai sus pot fi consultate, de exemplu, la p. 166 în [C.C. Pugh, Real mathematical analysis, Second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015].

**Integrabilitate Riemann vs. integrabilitate Lebesgue**

**Lema 1.** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Div}[a, b]$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Notăm pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{şi} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

*Considerăm funcţiile $g_\Delta, G_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin*

$$g_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{A_i} \quad \text{şi} \quad G_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{A_i},$$

*unde, pentru $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A_i = [x_{i-1}, x_i)$ şi $A_n = [x_{n-1}, x_n]$. Atunci:*

*(i) $g_\Delta \le f \le G_\Delta$;*

*(ii) $g_\Delta$ şi $G_\Delta$ sunt integrabile Lebesgue şi*

$$\int_{[a,b]} g_\Delta d\lambda = s(f, \Delta) \quad \text{şi} \quad \int_{[a,b]} G_\Delta d\lambda = S(f, \Delta);$$

*(iii) dacă $\Delta, \Delta' \in \mathrm{Div}[a, b]$ cu $\Delta \subseteq \Delta'$, atunci $g_\Delta \le g_{\Delta'} \le G_{\Delta'} \le G_\Delta$.*

**Teorema 3.** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f$ este integrabilă Riemann, atunci $f$ este integrabilă Lebesgue şi $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$.*

**Teorema 4.** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*(i)* $f$ *este integrabilă Riemann;*

*(ii)* $f$ *este mărginită şi continuă $\lambda$-a.p.t.*

**Observaţia 2.** Funcţiile integrabile Riemann în sens impropriu care sunt şi absolut integrabile Riemann în sens impropriu (adică sunt integrabile Riemann în sens impropriu şi în valoare absolută) sunt integrabile Lebesgue şi cele două integrale sunt egale. Există totuşi funcţii integrabile Riemann în sens impropriu care nu sunt integrabile Lebesgue (a se vedea, de exemplu, Seminarul 10).

**Observaţia 3.** Teoria de integrare Lebesgue prezintă două mari avantaje faţa de teoria Riemann:

- existenţa unor teoreme de convergenţă mai puternice (de exemplu, Teorema convergenţei monotone sau Teorema convergenţei dominate) care au aplicaţii importante.
- posibilitatea de a integra o familie mai mare de funcţii.

**Exemplul 2.** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dacă } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Atunci $f$ nu este integrabilă Riemann, dar este integrabilă Lebesgue.