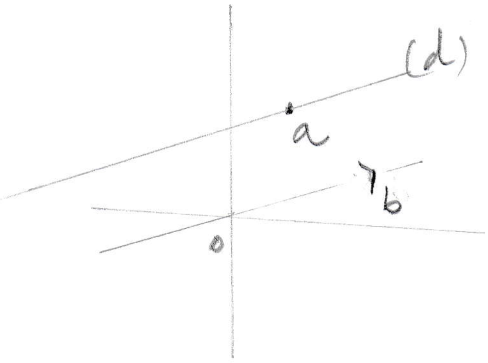
Seminar 3 Analiză Complexă

① Dreapta în planul complex $\mathbb{C}$

Fie $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Atunci

$(d)\ \{a+bt : t \in \mathbb{R}\}$ - dreapta ce conține punctul a și e paralelă cu $\overrightarrow{Ob}$.



Într-adevăr, fie $z = a+bt$, $t \in \mathbb{R}$

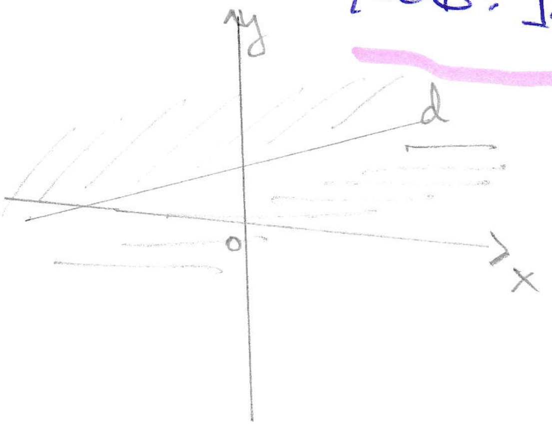
$\Rightarrow z - a = bt \in \overrightarrow{Ob} \Rightarrow z \in a + \overrightarrow{Ob} \Rightarrow z \in d$

Pe de altă parte, $z \in (d) \Leftrightarrow$

$\exists t \in \mathbb{R}$ astfel ca $z = a+bt \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z-a}{b} = t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) = 0.$

Deci $(d)\ \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) = 0\right\}$ - dreapta în $\mathbb{C}$ ce conține a și e paralelă cu vectorul $\overrightarrow{Ob}$.



$\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) < 0\right\}$ - semiplanul stâng determinat de (d)

$\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) > 0\right\}$ - semiplanul drept determinat de (d)

⊙ Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$

$\Rightarrow \{z = (1-t)z_1 + tz_2 : t \in \mathbb{R}\}$ - dreapta care conține punctele z_1 și z_2

⊙ $\{(1-t)z_1 + tz_2 : t \in [0,1]\} = [z_1, z_2]$

② Fie $A \in \mathbb{R}$ și $B \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că mulțimea
$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(Bz) = A\}$$
reprezintă o dreaptă.

Soluție: Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}(Bz) = A \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Bz - A) = 0$
$\overset{B\neq 0}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Re}\left[B\left(z - \frac{A}{B}\right)\right] = 0.$ (*)

Dar, dacă $w = u + iv \in \mathbb{C} \Rightarrow iw = -v + iu \Rightarrow u = \operatorname{Im}(iw)$!
$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re} w = \operatorname{Im}(iw)}$.

Deci (*) $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left[iB\left(z - \frac{A}{B}\right)\right] = 0 \overset{B\neq 0}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Im}\left[\frac{z - \frac{A}{B}}{\frac{1}{iB}}\right] = 0$

$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(Bz) = A\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left[\frac{z - \frac{A}{B}}{\frac{1}{iB}}\right] = 0\right\}$ - dreaptă în $\mathbb{C}$.

Soluția a II-a. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $B = B_1 + iB_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Re}(Bz) = \operatorname{Re}[(B_1 + iB_2)(x + iy)] = B_1 x - B_2 y.$
$\Rightarrow \operatorname{Re}(Bz) = A \Leftrightarrow B_1 x - B_2 y - A = 0$
dar $B_1 \neq 0$ sau $B_2 \neq 0$ pt. că $B \neq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$ ecuația unei drepte.

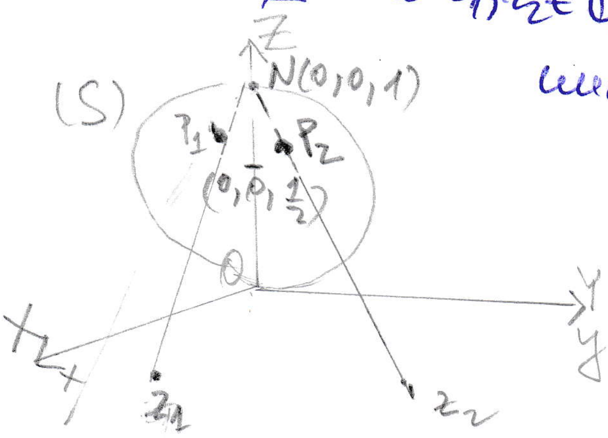
Soluția 3. Se aplică problema 3, seminar 2.

Aplicații la proiecția stereografică

③ Expresia distanței cordale.

Fie $d_c : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{R}_+$, distanța cordală.
Să se arate că
$$d_c(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \\ 0, & z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$ și $P_j(X_j, Y_j, Z_j) = \tilde{\varphi}(z_j) \in S$, $j = \overline{1,2}$,



unde $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}_\infty \to S$ e proiecția stereografică

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \forall z \in \mathbb{C} \\ (0,0,1), & z = \infty. \end{cases}$$

$\varphi: \mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$, $\varphi(z) = (X, Y, Z)$, unde

$$(1)\quad X = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad Y = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad Z = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$\boxed{d_c(z_1, z_2) := \|P_1 P_2\|}$, $\|\cdot\|$ – norma euclidiană în $\mathbb{R}^3$.

Cazul I: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow d_c(z_1, z_2) = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$

$$\Rightarrow d_c(z_1, z_2) = \sqrt{\underbrace{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}_{\substack{= Z_1 \\ \uparrow \\ P_1 \in S}} + \underbrace{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}_{\substack{= Z_2 \\ \uparrow \\ P_2 \in S}} - 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)}$$

$$= \sqrt{Z_1 + Z_2 - 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)}$$

$$\underset{(1)}{\overset{\uparrow}{=}} \sqrt{\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - 2\left(\frac{x_1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{x_2}{1+|z_2|^2} + \frac{y_1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{y_2}{1+|z_2|^2} + \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{|z_1|^2(1+|z_2|^2) + |z_2|^2(1+|z_1|^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{|z_1|^2 + \cancel{|z_1|^2 |z_2|^2} + |z_2|^2 + \cancel{|z_1|^2 \cdot |z_2|^2} - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) - \cancel{2|z_1|^2 \cdot |z_2|^2}}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} = \sqrt{\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

○ Anterior, am folosit faptul că
$Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Deci, $d_c(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$.

Cazul II: $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = \infty \Rightarrow \tilde{\varphi}(z_2) = N(0,0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_c(z_1, \infty) = \sqrt{(X_1-0)^2+(Y_1-0)^2+(Z_1-1)^2} = \sqrt{\underbrace{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}_{=Z_1}-2Z_1+1}$$

$$= \sqrt{1-Z_1} \underset{(1)}{\overset{\uparrow}{=}} \sqrt{1-\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}} = \sqrt{\frac{1+|z_1|^2-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

Cazul III: $z_1 = z_2 = \infty \Rightarrow d_c(\infty, \infty) = \|NN\| = 0$.

Exemplu: Să se calculeze $d_c(1+i, 1-i)$ și $d_c(i, \infty)$.

Soluție: a) $d_c(1+i, 1-i)$.

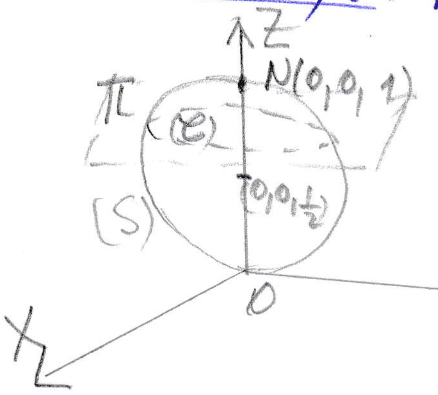
$\Rightarrow$ $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i \Rightarrow$

$$d_c(z_1, z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}} \underset{|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{|1+i-(1-i)|}{\sqrt{1+2}\cdot\sqrt{1+2}} = \frac{|2i|}{3} = \frac{2}{3}.$$

b) $d_c(i, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|i|^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Să se arate că prin proiecția stereografică, cercurilor de pe sfera lui Riemann le corespund cercuri în sens larg (cercuri sau drepte).

Demonstrație. Fie $(\mathcal{C})$ = cerc de pe sfera $S \Rightarrow \exists \Pi$ - plan în $\mathbb{R}^3$ astfel ca $(\mathcal{C}) = S \cap \Pi$.



$$(\mathcal{C})\begin{cases}(\Pi): AX+BY+CZ+D=0, \text{ unde } A,B,C,D \in \mathbb{R}, \; A^2+B^2+C^2 \neq 0. \\ (S)\; X^2+Y^2+Z^2-Z=0.\end{cases}$$

Fie $(X,Y,Z)=\tilde{\varphi}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

$\Downarrow$

$$X=\frac{x}{1+|z|^2},\; Y=\frac{y}{1+|z|^2},\; Z=\frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

unde $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

$$\Rightarrow (\Pi)\; A\frac{x}{1+|z|^2}+B\frac{y}{1+|z|^2}+C\frac{|z|^2}{1+|z|^2}+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax+By+C|z|^2+D(1+|z|^2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax+By+(C+D)|z|^2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C+D)(x^2+y^2)+Ax+By+D=0. \quad (*)$$

<u>Cazul I</u>: $\boxed{C+D=0} \Rightarrow Ax+By+D=0$ - ecuația unei drepte.

În acest caz, $(\mathcal{C})\begin{cases}AX+BY+CZ-C=0\\ X^2+Y^2+Z^2-Z=0\end{cases} \Rightarrow N(0,0,1) \in (\mathcal{C})$.

<u>Deci</u>: dacă $N(0,0,1) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{C})$ = dreaptă.

<u>Cazul II</u>. $\boxed{C+D \neq 0}$. Atunci $(*) \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{A}{C+D}x+\frac{B}{C+D}y+\frac{D}{C+D}=0.$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2(C+D)}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2(C+D)}\right)^2+\frac{D}{C+D}-\frac{A^2}{4(C+D)^2}-\frac{B^2}{4(C+D)^2}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2(C+D)}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2(C+D)}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4D(C+D)}{4(C+D)^2}. \quad (**)$$

$\Rightarrow (**)$ = ecuația unui cerc dacă

$$\boxed{A^2+B^2>4D(C+D).}$$

Dar $(\mathscr{C})=\Pi\cap S$. Dar planul Π intersectează sfera (S) dacă distanța de la centrul sferei la planul Π este $<\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \boxed{d\left(\left(0,0,\tfrac{1}{2}\right),\Pi\right)<\frac{1}{2}} . \quad (\ast\ast\ast)$$

Dar $(\Pi)\ AX+BY+CZ+D=0 \Rightarrow$

$$d\left(\left(0,0,\tfrac{1}{2}\right),\Pi\right)=\frac{\left|A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot\frac{1}{2}+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|D+\frac{C}{2}\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Așadar,

$$(\ast\ast\ast)\Leftrightarrow \frac{\left|D+\frac{C}{2}\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<\frac{1}{2}\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{|2D+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2D+C|^2}{A^2+B^2+C^2}<1 \Leftrightarrow 4D^2+\cancel{C^2}+4DC<A^2+B^2+\cancel{C^2}$$

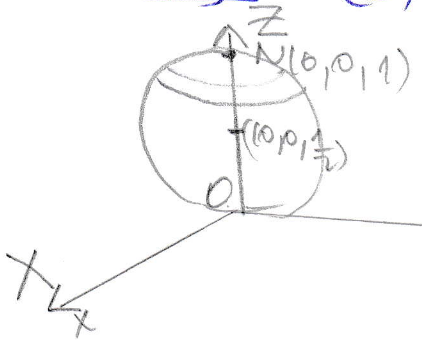
$$\Leftrightarrow \boxed{A^2+B^2>4D(D+C)}.$$

Prin urmare, $(\ast\ast)$ = ecuația unui cerc.

<u>Concluzie</u>: Dacă cercul $(\mathscr{C})$ conține punctul $N(0,0,1)$, atunci acest cerc se transformă în dreaptă prin proiecția stereografică.

Dacă $(\mathscr{C})$ nu conține polul nord $N(0,0,1)$, atunci $(\mathscr{C})$ se transformă în cerc obișnuit.

⑤ Fie $r\in(0,1)$ și $W_r=\{(X,Y,Z)\in S\setminus\{(0,0,1)\} : Z>r\}$.
Fie $\tilde{\varphi}:\mathbb{C}_\infty\to S$ proiecția stereografică și $\Phi=\tilde{\varphi}^{-1}$.
Să se determine imaginea mulțimii W_r prin Φ $(\Phi(W_r)=?)$.



Soluție. (S) $X^2+Y^2+Z^2-Z=0$

Fie $P(X,Y,Z)\in W_r \Leftrightarrow P(X,Y,Z)\in S\setminus\{N\}$ și $Z>r$.

Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel ca $\varphi(z)=P(X,Y,Z)\in W_r$

$\Rightarrow X=\dfrac{x}{1+|z|^2},\ Y=\dfrac{y}{1+|z|^2},\ Z=\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$,

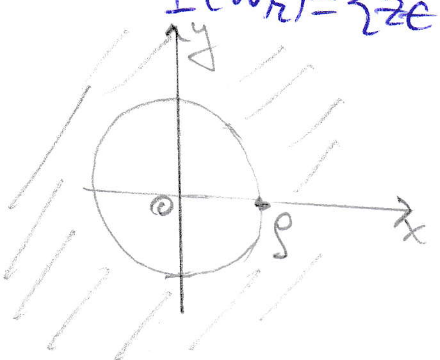
unde $z=x+iy$.

Deci $Z>r \Leftrightarrow \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}>r \Leftrightarrow |z|^2>r+r|z|^2 \Leftrightarrow$

$|z|^2(1-r)>r \,|:1-r>0 \Leftrightarrow |z|^2>\dfrac{r}{1-r} \Leftrightarrow |z|>\sqrt{\dfrac{r}{1-r}}$.

$\Rightarrow \Phi(W_r)=\left\{z\in\mathbb{C}: |z|>\sqrt{\dfrac{r}{1-r}}\right\}$ - vecinătate redusă a lui ∞.

$\rho:=\sqrt{\dfrac{r}{1-r}}>0.$



Convergență și continuitate în $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}_\infty$

⑥ a) Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere complexe, $z_n=x_n+iy_n$, $n\in\mathbb{N}$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$.

b) Dacă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}^*$, $z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$, $n\in\mathbb{N}$, iar $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\in\mathbb{C}^*$, și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=r$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.

Dem: a) $z_n\to z \Leftrightarrow |z_n-z|\to 0$.

Dar $\underbrace{|z_n-z|^2}_{\downarrow 0}=\underbrace{(x_n-x)^2}_{\downarrow 0}+\underbrace{(y_n-y)^2}_{\downarrow 0}$, $n\in\mathbb{N}$. $\Big\}\Rightarrow z_n\to z \Leftrightarrow x_n\to x$ și $y_n\to y$.

b) $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dar $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ $\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} x_n = r_n\cos\theta_n \\ \text{și} \\ y_n = r_n\sin\theta_n. \end{cases}$

Avem că $r_n \to r$ și $\theta_n \to \theta \Rightarrow r_n\cos\theta_n \to r\cos\theta$ și $r_n\sin\theta_n \to r\sin\theta \Rightarrow x_n \to x$ și $y_n \to y \overset{a)}{\Rightarrow} z_n \to z$.

Aplicații

(7) Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$, unde $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| \neq 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{n^2}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+i\cdot 3^n}{(2+3i)^n}$.

Soluții: a) $z_n := \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| = \left|\frac{1+i}{3}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \to 0$.

$\Rightarrow |z_n| \to 0 \Rightarrow z_n \to 0$.

b) Fie $w_n = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Cazul I: $|z|<1 \Rightarrow |z|^n \to 0 \Leftrightarrow z^n \to 0 \Rightarrow w_n \to 0$.

Cazul II: $|z|>1 \Rightarrow |z|^n \to +\infty \Rightarrow |z^n| \to +\infty \Leftrightarrow z^n \to \infty$.

$\Rightarrow w_n = \frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)^n}_{\to 0} + \underbrace{z^n}_{\to\infty}} \to 0 \Rightarrow w_n \to 0$.

Deci, în ambele cazuri, $w_n \to 0$.

c) $z_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{n^2} \Rightarrow |z_n| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^n}{n^2} = \frac{2^n}{n^2} \to +\infty \Rightarrow z_n \to \infty.$

$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

d) $z_n = \frac{n+i\cdot 3^n}{(2+3i)^n}, n\in\mathbb{N} \Rightarrow |z_n| = \frac{|n+3^n\cdot i|}{|2+3i|^n} =$

$= \frac{\sqrt{n^2+3^{2n}}}{\sqrt{(4+9)^n}} = \frac{\sqrt{n^2+3^{2n}}}{13^{n/2}} = \sqrt{\frac{n^2+9^n}{13^n}} = \sqrt{\underset{\downarrow 0}{\frac{n^2}{13^n}}+\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{9}{13}\right)^n}} \to 0.$

$\Rightarrow |z_n| \to 0 \Rightarrow z_n \to 0.$

8) Fie $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z,$$

unde $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Obs: Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$, funcția exponențială complexă de variabilă complexă.

Dacă $z = x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(z) = e^x$. Dacă $z = iy$, $y\in\mathbb{R}$, atunci

$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ și $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

(formulele lui Euler).

Dacă $z = x+iy\in\mathbb{C} \Rightarrow e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} =$

$= e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi))$

$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$

$\Rightarrow f(z+2\pi i) = f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow$ funcția exponențială complexă este periodică, deci nu este injectivă pe întreg planul complex.