Curs 9

Propoziţia 1. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to [0, \infty]$ o funcţie $\mathcal{A}$-măsurabilă. Atunci:*

(i) dacă f este integrabilă, atunci f este finită μ-a.p.t.;

(ii) $\int f d\mu = 0$ dacă şi numai dacă $f = 0$ μ-a.p.t.

Dem

i) $\int f \, d\mu < \infty$

Fie $A = f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$. ~~Arăt~~ trebuie să arătăm că $\mu(A) = 0$

Fie $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n\mu(A_n) = \int_{A_n} n \, d\mu \leq \int_{A_n} f \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ $\Rightarrow$ (Prop 2(ii), Curs 8)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\cancel{\mu(A_n) \leq \frac{1}{n}}$ $\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int f \, d\mu \mid n \to \infty$, $\int f \, d\mu < \infty$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$

ii) $\boxed{\Rightarrow}$ $\int f \, d\mu = 0$

Fie $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \in \mathcal{A}$ arătăm că $\mu(A) = 0$

Fie $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\cancel{\int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu}$ $\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu \leq \int f \, d\mu = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = 0$

$\Rightarrow \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f = 0$ μ-a.p.t.

$S_f = \{g : X \to [0, \infty) \mid g$ simplă, $\mathcal{A}$-măsurabilă $g \leq f\}$

Fie $g \in S_f$

$\left.\begin{array}{l} f = 0 \ \mu\text{-a.p.t.} \\ 0 \leq g \leq f \end{array}\right\} \Rightarrow g = 0$ μ-a.p.t.

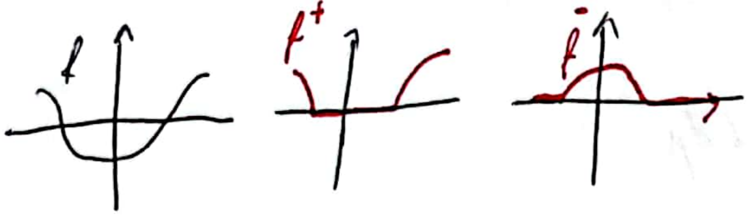
$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ reprezentarea standard

Dacă $\exists\ i \in \{1 \dots n\}$ a.î. $\alpha_1 > 0 \Rightarrow \mu(A_i) = 0$

$$\int g \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = 0$$

$$\sup_{g \in S_f} \Rightarrow \int f \, d\mu = 0$$

Scanned with CamScanner



$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

Etapa 3: Funcţii măsurabile

Definiţia 1. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-măsurabilă. Spunem că *există integrala* funcţiei f în raport cu măsura μ dacă cel puţin una din integralele $\boxed{\int f^+ d\mu \text{ sau } \int f^- d\mu \text{ este finită,}}$ caz în care *integrala* funcţiei f se defineşte prin

$$\boxed{\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.}$$

Uneori, dacă se doreşte să se specifice variabila de integrare se foloseşte notaţia $\int f(x) d\mu(x)$. Spunem că f este *integrabilă* dacă ambele integrale $\int f^+ d\mu$ şi $\int f^- d\mu$ sunt finite, deci $\int f d\mu \in \mathbb{R}$. Dacă $B \in \mathcal{A}$, existenţa integralei şi integrabilitatea funcţiei f pe mulţimea B revin la proprietăţile respective ale funcţiei $f\chi_B$.

Observaţia 1. (i) Ne reamintim că f este $\mathcal{A}$-măsurabilă $\iff$ f^+ şi f^- sunt $\mathcal{A}$-măsurabile.

(ii) Dacă f este o funcţie măsurabilă care ia valori nenegative, atunci definiţia de mai sus coincide cu Definiţia 2 din Cursul 8.

(iii) Dacă f este integrabilă, atunci f este finită μ-a.p.t.

Obs 1 ii) $f : X \to [0, \infty] \Rightarrow f^+ = f,\ f^- = 0$

iii) f int $\Rightarrow f^+, f^-$ int $\Rightarrow f^+, f^-$ finite μ a.p.t. $\Rightarrow f$ finită μ a.p.t.

Observaţia 2. Noţiunile de integrabilitate şi integrală introduse în Definiţia 1 pe un spaţiu cu măsură general se mai numesc *integrabilitate Lebesgue*, respectiv *integrală Lebesgue*.

Propoziţia 2. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile astfel încât $f = g$ μ-a.p.t. Dacă există integrala $\int f d\mu$, atunci există integrala $\int g d\mu$ şi $\int g d\mu = \int f d\mu$.*

Dem prop 2

Cazul $f, g \geq 0$

$\boxed{f = g \ \mu\text{-a.p.t.} \Rightarrow \exists\, A \in \mathcal{A} \text{ cu } \mu(A) = 0 \text{ a.î. } \forall\, x \in X \setminus A,\ f(x) = g(x)}$

Definim $h : X \to [0, \infty]$ prin $h(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus A \\ \infty, & x \in A \end{cases}$

Arătăm că h este $\mathcal{A}$-măsurabilă

Fie $c \in \mathbb{R}$. Arătăm $\{x \in X \mid h(x) < c\} \in \mathcal{A}$

Dacă $c \leq 0$ atunci $\{x \in X \mid h(x) < c\} = \emptyset$

Dacă $c > 0$, atunci $\{x \in X \mid h(x) < c\} = X \setminus A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow h$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă

$f \leq g + h \Rightarrow \int f d\mu \leq \int (g + h) d\mu = \int g d\mu + \int h d\mu$

$h = 0$ μ-a.p.t. $\Rightarrow \int h d\mu = 0$

$\Rightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$

Similar, $g \leq f + h \Rightarrow \int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$

$\Rightarrow \int f\, d\mu = \int g\, d\mu$

Caz general $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$f = g$ μ-a.pt. $\Rightarrow f^+ = g^+$ μ-a.pt. și $f^- = g^-$ μ-a.pt.

aplicând cazul anterior pt aceste funcții $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu$ și $\int f^- d\mu = \int g^- d\mu$

$\exists \int f\, d\mu \Rightarrow$ cel puțin una din integralele $\int f^+ d\mu$ sau $\int f^- d\mu$ este finită $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cel puțin una din integralele $\int g^+ d\mu$ sau

$\int g^- d\mu$ este finită $\Rightarrow \exists \int g\, d\mu$

$\int g\, d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f\, d\mu$

Observaţia 3. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Propoziţia 2 spune că se poate face abstracţie de mulţimile de măsură nulă atunci când se integrează o funcţie. Astfel:

(i) În procesul de integrare, funcţiile care iau valori în $\overline{\mathbb{R}}$, dar sunt finite a.p.t. (cum este cazul funcţiilor integrabile), pot fi privite ca funcţii cu valori reale:

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$ măsurabilă finită μ-a.p.t.

$A = f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$

$\hat{f} : X \to \mathbb{R}$, $\hat{f} = f \cdot \chi_{X \setminus A}$, $\mathcal{A}$-măsurabilă

$f = \tilde{f}$ μ-a.p.t.

Dacă $\exists \int f \, d\mu \Rightarrow \exists \int \hat{f} \, d\mu$ şi $\int \hat{f} \, d\mu = \int f \, d\mu$

(ii) De fapt, se pot integra funcţii definite doar pe o mulţime din $\mathcal{A}$ a cărei complementară are măsura nulă, caz în care funcţiei i se poate atribui, de exemplu, valoarea 0 pe mulţimea de măsura nulă unde nu a fost definită.

Propoziţia 3. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f, g : X \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile. Atunci:*

(i) αf este integrabilă şi $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$;

(ii) $f + g$ este integrabilă şi $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;

(iii) dacă $f \leq g$, atunci $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Dem prop 3

f, g int $\Rightarrow f^+, f^-, g^+, g^-$ integrabile

i) αf $\mathcal{A}$-măsurabilă

$(\alpha f)^+ = \alpha f^+, \ (\alpha f)^- = \alpha f^-$

Cazul $\alpha \geq 0$;

$$\int (\alpha f) d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu =$$

$$= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) = \alpha \int f \, d\mu$$

Caz $\alpha < 0$ $(\alpha f)^+ = -\alpha \cdot f^-, \ (\alpha f)^- = -\alpha f^+$ similar

ii) $f+g$ $\mathcal{A}$-măsurabilă $\Rightarrow (f+g)^+, (f+g)^-$ $\mathcal{A}$ măsurabile

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \Rightarrow \int (f+g)^+ d\mu \leq \int (f^+ + g^+) d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu < \infty$$

$$(f+g)^- \leq f^- + g^- \Rightarrow \int (f+g)^- d\mu \leq \int (f^- + g^-) d\mu = \int f^- d\mu + \int g^- d\mu < \infty$$

$\Rightarrow (f+g)^+, (f+g)^-$ int $\Rightarrow f+g$ int

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

$$\Rightarrow \int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Toate aceste integrale sunt finite.

$$\Rightarrow \underbrace{\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu}_{=\int (f+g) d\mu} = \underbrace{\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}_{\int f d\mu} + \underbrace{\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu}_{= \int g d\mu}$$

Propoziţia 4. *Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este integrabilă;

(ii) f este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi $|f|$ este integrabilă;

(iii) f este $\mathcal{A}$-măsurabilă şi există $g : X \to [0, \infty]$ integrabilă astfel încât $|f| \leq g$.

În toate cazurile de mai sus, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

i) $\Rightarrow$ ii) f int $\Rightarrow f$ $\mathcal{A}$-măsurabilă $\overset{\text{Seminar 7}}{\Rightarrow}$ $|f|$ $\mathcal{A}$-măsurabilă

f int f^+, f^- int $\underset{1}{\Rightarrow}$ $f^+ + f^- = |f|$ int

Prop 3 (ii) Curs 8

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$

$$\left.\begin{aligned} f^+ \leq |f| \Rightarrow \int f^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty \overset{4}{\Rightarrow} f^+ \text{ int} \\ f^- \leq |f| \Rightarrow \int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty \Rightarrow f^- \text{ int} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ int}$$

3) iii) $f \leq g \Rightarrow g-f$ int, nonnegative

$$\int g \, d\mu = \int ((g-f)+f) \, d\mu = \underbrace{\int (g-f) \, d\mu}_{\geq 0} + \int f \, d\mu$$

$$\geq \int f \, d\mu$$

(ii) => (iii) Luăm $g = |f|$

(iii) => (ii) f $\mathcal{A}$-măsurabilă => $|f|$ $\mathcal{A}$-măsurabilă

$|f| \leq g \Rightarrow \int |f| d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$

Dacă f int

$|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int \underbrace{(f^+ + f^-)}_{\to |f|} d\mu = \int |f| d\mu$

Observaţia 4. Dacă $(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură, $A \in \mathcal{A}$ cu $\mu(A) < \infty$, orice funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-măsurabilă care este mărginită pe A este integrabilă pe A.
În particular, orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este integrabilă Lebesgue pe orice submulţime compactă a lui $\mathbb{R}$.