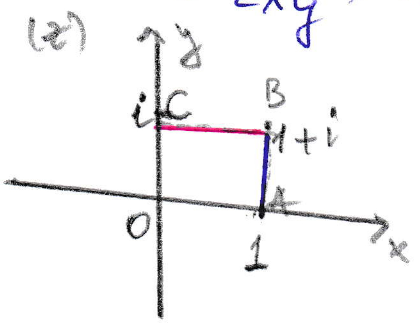
Seminar 6 Analiză complexă

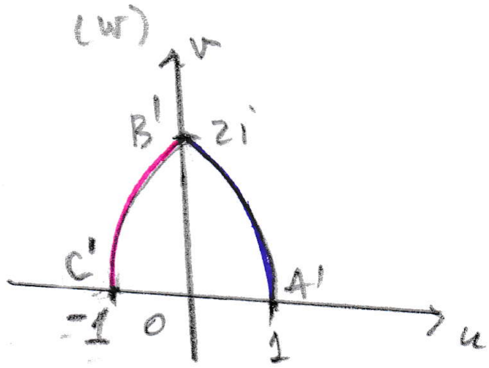
1. a) Să se determine imaginile segmentelor $[1, 1+i]$ și $[1+i, i]$ prin transformarea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

b) Să se determine imaginile segmentelor $[1, 1+i\frac{\pi}{2}]$ și $[1+i\frac{\pi}{2}, i]$ prin transformarea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^z$.

Soluție: a) $f = u + iv \Rightarrow u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(*) \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$





Dacă $z \in [1, 1+i] \Rightarrow z = 1 + iy$, $y \in [0,1] \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}, y \in [0,1]$

$\overset{y = \frac{v}{2}}{\Longrightarrow} u = 1 - \frac{v^2}{4} \Rightarrow 4 - v^2 = 4u \Rightarrow v^2 = 4 - 4u$ - parabolă

Dar $y \in [0,1) \Rightarrow u \in [0,1]$ și $v \in [0,2] \Rightarrow f([1, 1+i])$ este arcul de parabolă $v^2 = 4 - 4u$ din primul cadran.

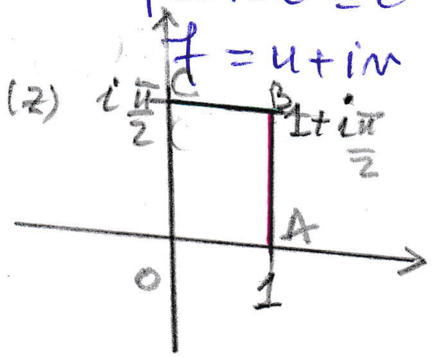
Dacă $z \in [1+i, i] \Rightarrow z = x + i$, $x \in [0,1] \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases}, x \in [0,1]$

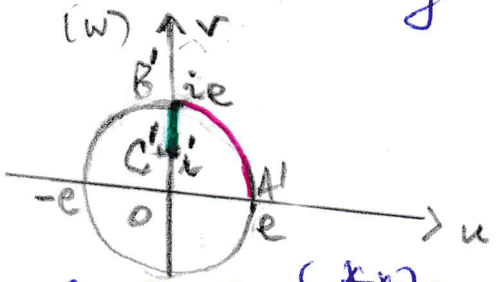
$\overset{x = \frac{v}{2}}{\Longrightarrow} u = \frac{v^2}{4} - 1 \Rightarrow 4u = v^2 - 4 \Rightarrow v^2 = 4u + 4$ - parabolă

Dar $x \in [0,1] \Rightarrow u \in [1, 0]$ și $v \in [0,2] \Rightarrow f([1+i, i])$ este arcul de parabolă $v^2 = 4u + 4$ din cadranul doi.

b) $f(z)=e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ $\Rightarrow_{(**)}$ $\begin{cases} u=e^{x}\cos y \\ v=e^{x}\sin y \end{cases}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$f=u+iv$





Dacă $z\in[1,1+i\frac{\pi}{2}] \Rightarrow z=1+iy,\ y\in[0,\frac{\pi}{2}] \overset{(**)}{\Rightarrow} \begin{cases} u=e\cos y \\ v=e\sin y \end{cases}$

$\Rightarrow u^2+v^2=e^2 \Rightarrow |w|=e$, unde $w=f(z)$.

Dar $y\in[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow u=e\cos y\geq 0$ și $v=e\sin y\geq 0$.

$\Rightarrow f([1,1+i\frac{\pi}{2}])=$ sfertul de cerc din primul cadran cercul fiind centrat în origine și având raza e.

⊙ Dacă $z\in[1+i\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}] \Rightarrow z=x+i\frac{\pi}{2},\ x\in[0,1] \overset{(**)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \begin{cases} u=e^{x}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ v=e^{x}\sin\frac{\pi}{2}=e^{x},\ x\in[0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=e^{x}\in[1,e] \end{cases}$

$\Rightarrow f([1+i\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}])$ este segmentul $[i, ie]$ pe axa imaginată Ov. ($x\in[0,1]$)

Derivabilitate în planul complex

② Să se determine toate punctele $z\in\mathbb{C}^*$ în care funcția $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ este derivabilă și apoi să se calculeze derivata funcției f în punctele respective unde

$$f(z)=3z^2+5|z|^2-6\bar{z}^2+2z-7\bar{z}+\frac{1}{z}+10,\ z\in\mathbb{C}^*.$$

Soluție

Fie $f = u + iv$, unde $u = \mathrm{Re} f$ și $v = \mathrm{Im} f \Rightarrow u$ și v sunt funcții de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow f$ este $\mathbb{R}$-diferențiabilă pe $\mathbb{C}^*$. Aplicând Teorema Cauchy-Riemann, căutăm toate punctele $z \in \mathbb{C}^*$ pentru care $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.}$

Dar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 5z - 12\bar{z} - 7 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5z - 12\bar{z} - 7 = 0$

Fie $z = x + iy \Rightarrow 5(x+iy) - 12(x - iy) - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x - 7 + 17yi = 0 \Rightarrow \begin{cases} -7x - 7 = 0 \\ 17y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_0 = -1}$ - soluție.

Avem că $\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).}$

Dar $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 6z + 5\bar{z} + 2 - \frac{1}{z^2}\Big|_{z = z_0} = 6z_0 + 5\bar{z}_0 + 2 - \frac{1}{z_0^2} =$

$= 6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 2 - 1 = -10$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(-1) = -10 \Rightarrow \boxed{f'(-1) = -10}$

3 a) Să se determine constantele $A, B, C \in \mathbb{C}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Az^2 + B|z|^2 + C\bar{z}^2$ să fie olomorfă pe $\mathbb{C}$ (funcție întreagă).

b) Să se determine constantele $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$, să fie derivabilă în $\forall z\in\mathbb{C}$. Să se scrie apoi expresia funcției f în funcție de variabila z și să se determine $f'(z)$, $z\in\mathbb{C}$.

Soluție: a) $f(z)=Az^2+B|z|^2+C\bar{z}^2$, $z\in\mathbb{C}$.

Fie $f=u+iv$, unde $u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$. Deoarece u și v sunt funcții elementare $\Rightarrow u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2)\Rightarrow f$ este $\mathbb{R}$-diferențiabilă pe $\mathbb{C}$. Aplicând Teorema lui Cauchy-Riemann, deducem că $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})\Longleftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$. (***)

Dar $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)=Bz+2C\bar{z}\overset{(***)}{\Longrightarrow}Bz+2C\bar{z}=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Dacă $z=1\Rightarrow B+2C=0$.

Dacă $z=i\Rightarrow Bi-2Ci=0\,|:i\Rightarrow\begin{cases}B+C=0\\B-2C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=0\\C=0.\end{cases}$

$\Rightarrow f(z)=Az^2$, $z\in\mathbb{C}$, unde $A\in\mathbb{C}\Rightarrow f'(z)=2Az$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

b) Fie $f=u+iv\Rightarrow u(x,y)=x+ay$ și $v(x,y)=bx+cy$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. E clar că $u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2)\Rightarrow f$ este $\mathbb{R}$-dif. în $\forall z\in\mathbb{C}$. Aplicând Teorema lui Cauchy-Riemann, deducem că f este derivabilă în $\forall z\in\mathbb{C}\Longleftrightarrow$ sistemul Cauchy-Riemann este satisfăcut în $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Dar $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=1$ și $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)=c\Rightarrow\boxed{c=1}$.

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=a$ și $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=b \Rightarrow \boxed{a=-b}$. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Deci: $c=1$ și $a=-b \Rightarrow f(z)=x+ay+i(-ax+y)=$

$=x+iy-ia(x+iy)=z(1-ai), \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)=z(1-ai), z\in\mathbb{C} \Rightarrow f'(z)=1-ai, \forall z\in\mathbb{C}$.

4. Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$. Să se reprezinte în planul complex mulțimea A, unde

$A=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}: 1<|f'(z)|<2\}$.

Soluție: Fie $g(z)=1+z$ și $h(z)=1-z \Rightarrow g,h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, iar $h(z)\neq 0, \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\} \Rightarrow f=\frac{g}{h}\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{1\})$ (funcția f e derivabilă în $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$). Avem că

$$f'(z)=\frac{g'(z)\cdot h(z)-g(z)\cdot h'(z)}{h^2(z)}=\frac{1-z-(1+z)\cdot(-1)}{(1-z)^2}=$$

$$=\frac{1-z+1+z}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2} \Rightarrow f'(z)=\frac{2}{(1-z)^2}, \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

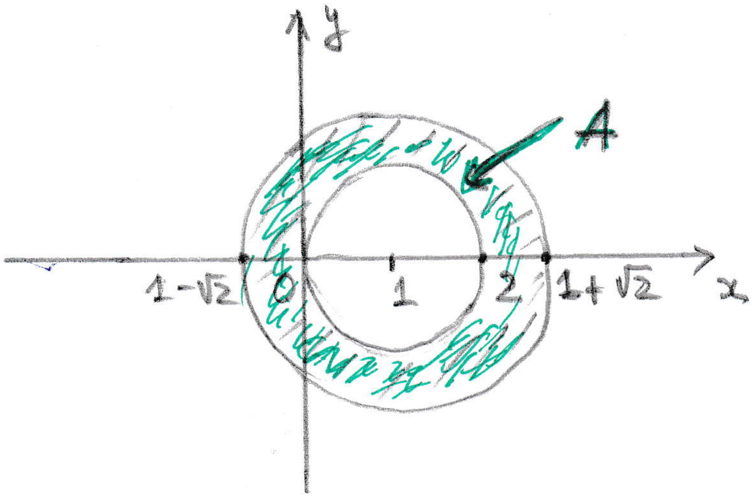
$$\Rightarrow |f'(z)|=\left|\frac{2}{(1-z)^2}\right|=\frac{2}{|1-z|^2}, \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1<|f'(z)|<2 \Leftrightarrow 1<\frac{2}{|1-z|^2}<2 \Leftrightarrow 1<|z-1|^2<2$$

$$\Leftrightarrow 1<|z-1|<\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow A=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}: 1<|z-1|<\sqrt{2}\}=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z-1|<\sqrt{2}\}$

$\Rightarrow \boxed{A=\mathcal{U}(1;1,\sqrt{2})}$ - coroana circulară de centru 1 și raze 1, $\sqrt{2}$.



$\boxed{A = \mathcal{U}(1; 1, \sqrt{2}).}$

5. Sistemul Cauchy-Riemann în coordonate polare.

Fie $G \subseteq \mathbb{C}^*$ deschisă, $f: G \to \mathbb{C}$ o funcție $\mathbb{R}$-diferențiabilă pe G astfel încât

$$f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta), \ \forall z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in G.$$

Să se arate că sistemul Cauchy-Riemann în orice $z \in G$ este echivalent cu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta). \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $f(z) = U(x,y) + i V(x,y)$, $\forall z = x+iy \in G$, unde $U(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = u(r,\theta)$ și $V(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = v(r,\theta)$, $\forall z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in G$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(r,\theta) = U(x,y) \\ v(r,\theta) = V(x,y) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta = x(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = y(r,\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \sin\theta.$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial V}{\partial y}(r\cos\theta)=$$

$$=r\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\sin\theta+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\cos\theta\right].$$

⓪ Admitem că are loc sistemul Cauchy-Riemann în z.

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial V}{\partial x}(x,y).\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)=r\underbrace{\left[\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\sin\theta+\frac{\partial U}{\partial x}\cos\theta\right]}_{=\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)}=r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta).}$$

În mod analog se arată că $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)$.

⑥ Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z|z|$. Să se arate că f este derivabilă în $z=0$, dar f nu e derivabilă în niciun punct $z\in\mathbb{C}^*$.

Soluție. $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{z|z|}{z}=\lim_{z\to 0}|z|=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e derivabilă în $z=0$ și $f'(0)=0$.

Fie $z\in\mathbb{C}^*\Rightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow f(z)=z|z|=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Deci

$f(z) = r^2(\cos\theta + i\sin\theta) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$, unde

$$\begin{cases} u(r,\theta) = r^2\cos\theta \\ v(r,\theta) = r^2\sin\theta \end{cases}.$$

Presupunem că f e derivabilă în $z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{Prob. 5}}{\Longrightarrow}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) & (2) \end{cases}.$$

Dar $\dfrac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = 2r\cos\theta$, $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = r^2\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2r\cos\theta = r\cos\theta \Leftrightarrow \boxed{r\cos\theta = 0}$ (3).

$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = -r^2\sin\theta$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = 2r\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow -r^2\sin\theta = -2r^2\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{r^2\sin\theta = 0}$ (4).

Deoarece $z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow r = |z| > 0 \overset{(3)\text{ și }(4)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ imposibil.

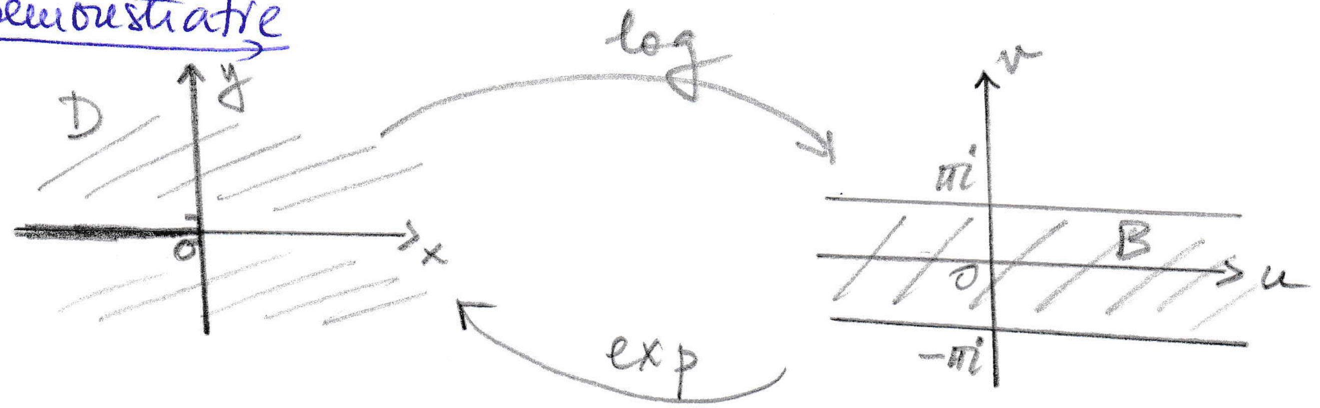
Deci f nu e derivabilă în nici un punct $z \in \mathbb{C}^*$.

Obs: Din Problema 6 $\Rightarrow$ funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z|z|$ este derivabilă în $z = 0$, dar f nu e olomorfă în $z = 0$, pentru că $\nexists\, r > 0$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U(0,r))$.

(7) Fie $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C}^* : \arg z \in (-\pi, \pi)\}$ și $\log: D \to \mathbb{C}$, $\log z := \ln|z| + i\arg z$, $\forall z \in D$. ($\log$ se numește determinarea principală (ramura principală) a lui Log pe D). Să se arate că

funcția log este olomorfă pe D și $(\log)'(z)=\frac{1}{z}$, $\forall z\in D$.

Demonstrație



$\log(D)=B$, unde $B=\{w\in\mathbb{C}: -\pi<\operatorname{Im} w<\pi\}$ (curs)

Fie $z\in D \Rightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\theta=\arg z\in(-\pi,\pi)$.

$\log z=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, unde $\begin{cases} u(r,\theta)=\ln r \\ v(r,\theta)=\theta \end{cases}$,

pentru că $\log z=\ln|z|+i\arg z$, $\forall z\in D$.

Sistemul Cauchy-Riemann în coordonate polare:

$$(5)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}=\frac{1}{r}\cdot 1 \\ 0=0 \end{cases} \text{ - adevărat}$$

$\Rightarrow$ sistemul Cauchy-Riemann (5) e satisfăcut în orice punct $\Rightarrow \log\in\mathcal{H}(D)$.

Pe de altă parte, avem că $e^{\log z}=e^{\ln|z|+i\arg z}$

$=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z)=z$, $\forall z\in D \xrightarrow{\text{derivare}}$

$\underbrace{e^{\log z}}_{=z}\cdot(\log z)'=1$, $\forall z\in D \underset{z\in D\Rightarrow z\neq 0}{\Longrightarrow} (\log z)'=\frac{1}{z}$, $\forall z\in D$.