(I) -1-

Analiză complexă (Notițe de curs)

Bibliografie

Material bibliografic pentru cursurile 1-2.

✓1. P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, Analiză Matematică (Funcții Complexe), Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.

✓2. G. Kohr, P.T. Mocanu, Capitole Speciale de Analiză Complexă, Presa Univ. Clujeană, 2005.

3. O. Mayer, Teoria Funcțiilor de o Variabilă Complexă, Ed. Acad. Române, Buc, 1981.

4. E. Popa, Introducere în Teoria Funcțiilor de o Variabilă Complexă, Ed. Univ. A.I. Cuza, Iași, 2001.

✓5. S. Krantz, Handbook of Complex Variables, Boston-Basel, Birkhäuser, 1999.

✓6. W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw Hill, Comp., New York, 1970.

✓7. J. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer, 1995.

8. D. Gaspar, N. Suciu, Analiză Complexă, Ed. Acad. Române, 1999.

✓9. L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw Hill Comp., New York, 1979.

Bibliografie suplimentară

1. C.A. Berenstein, R. Gay, Complex Variables. An Introduction, Springer, 1991.

2. P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, vol I, Wiley Classical Library, 1990.

3. E. Stein, R. Shakarchi, Complex Analysis, Princeton Univ. Press, 2003.

4. R. Narasimhan, Y. Nievergelt, Complex Analysis in One Variable, Birkhäuser, 1985.

Deosebiri esențiale între analiza complexă și analiza matematică pe ℝ

1. Funcțiile complexe derivabile pe mulțimi deschise din planul complex ℂ sunt nelimitat derivabile.

2. Funcțiile complexe derivabile pe domenii D din ℂ cu excepția unui număr finit de puncte, dar care sunt continue în acele puncte, sunt derivabile pe D.

3. Există funcții complexe continue (chiar derivabile) pe mulțimi deschise din ℂ, care nu admit primitive.

4. Singurele funcții derivabile pe întreg planul complex ℂ și mărginite pe ℂ sunt funcțiile constante.

5. Funcția exponențială complexă de variabilă complexă este periodică, deci nu e injectivă pe întreg planul complex ℂ.

Numere complexe

Fie $\mathbb{R}^2=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}\Rightarrow(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ e un corp comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1), \quad \forall (x_j,y_j)\in\mathbb{R}^2,\ j=\overline{1,2}.$$

Acest corp se va nota cu $\mathbb{C}$ și se va numi corpul numerelor complexe. Deci $\boxed{\mathbb{C}:=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)}$.

Elementele lui $\mathbb{C}$ se numesc numere complexe.

- Dacă $z\in\mathbb{C}\Rightarrow\exists!\ x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $\boxed{z=(x,y)}$.
- $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ - subcorp al lui $\mathbb{C}$ în raport cu operațiile anterioare.

Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\{0\}$, $\varphi(x)=(x,0)$. Atunci φ este un izomorfism între cele două corpuri, care permite identificarea lui $\mathbb{R}\times\{0\}$ cu $\mathbb{R}$. Deci identificăm pe $(x,0)$ cu x, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$(x,0)\equiv x\in\mathbb{R}$; $(0,0)\equiv 0\in\mathbb{R}$, $(1,0)\equiv 1$.

În acest fel, $\boxed{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$.

Așadar, putem să considerăm pe $\mathbb{R}$ ca submulțime a corpului numerelor complexe $\mathbb{C}$.

Notăm $\boxed{(0,1)=i\in\mathbb{C}}$. Atunci

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\equiv-1.$$

Prin urmare, $i\in\mathbb{C}$ și $\boxed{i^2\equiv-1}$.

Fie $z=(x,y)\in\mathbb{C} \Rightarrow z=(x,0)+(0,y)=\underbrace{(x,0)}_{\equiv x}+y\cdot\underbrace{(0,1)}_{=i}$

$\equiv x+iy$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

Deci $\forall z\in\mathbb{C}$, $\exists!\ x,y\in\mathbb{R}$ astfel ca

$$\boxed{z=(x,y)=x+iy}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}=\{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$ – mulțimea numerelor complexe

⊙ Pe corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ nu există nicio relație de ordine.

Reprezentarea numerelor complexe

I) Reprezentarea (forma) algebrică

Fie $z\in\mathbb{C} \Rightarrow \exists!\ x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $z=x+iy$, unde

$x\overset{not}{=}\mathrm{Re}\,z$ – partea reală a lui z

$y\overset{not}{=}\mathrm{Im}\,z$ – partea imaginară a lui z.

⊙ z este afixul numărului $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$ – modulul lui $z\in\mathbb{C}$

$\bar{z}:=x-iy$ – conjugatul lui $z\in\mathbb{C}$.

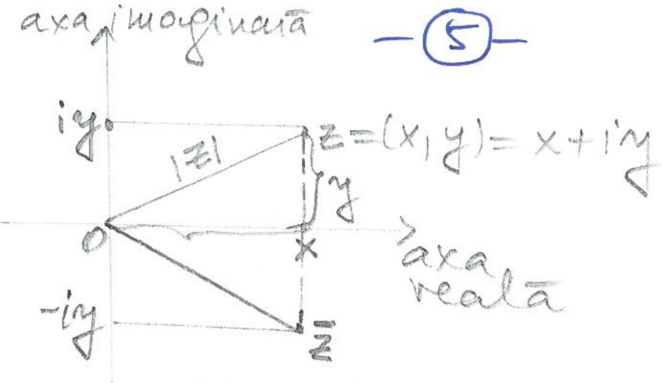
⊙ $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, $|\bar{z}|=|z|$, $\mathrm{Re}\,\bar{z}=\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,\bar{z}=-\mathrm{Im}\,z$

$\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

$|\mathrm{Re}\,z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$; $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Notăm cu $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dacă $z\in\mathbb{C}^*$, atunci

$$\boxed{\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$



$(x,0)\equiv x\in\mathbb{R}$.
$(0,y)\equiv iy,\ \forall y\in\mathbb{R}$.

Deci: $\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow z=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z$ – reprezentarea (forma) algebrică a lui z.

II) Reprezentarea (forma) trigonometrică

Fie $z\in\mathbb{C}^*$, $r=|z|>0$.

Def. Orice soluție $\theta\in\mathbb{R}$ a ecuației

(1) $\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{z}{|z|}$

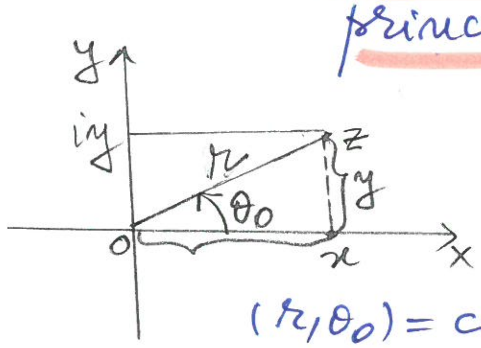
se numește argument al numărului complex $z\neq 0$.

⊙ $z=0$ nu are argument.

(1) $\Rightarrow x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, unde $x=\operatorname{Re}z$ și $y=\operatorname{Im}z$.

⊙ Din (1) rezultă că $\forall z\in\mathbb{C}^*$ are o infinitate de argumente (dacă θ e un argument al lui $z\Rightarrow\theta+2k\pi=$ argument al lui $z\in\mathbb{C}^*$, $\forall k\in\mathbb{Z}$). Dar $\exists!\ \theta_0\in(-\pi,\pi]$ soluție a ecuației (1).

Not: $\theta_0=\arg z$ – argumentul principal al numărului $z\in\mathbb{C}^*$ (determinarea principală a argumentului lui z).



$\cos\theta_0=\dfrac{x}{r}$, $\sin\theta_0=\dfrac{y}{r}$
$\Downarrow$
$z=r(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$

$(r,\theta_0)=$ coordonatele polare ale lui $z\in\mathbb{C}^*$.

Deci $\theta_0 = \arg z \in (-\pi, \pi]$ – unghiul determinat de vectorul $\vec{Oz}$ cu sensul pozitiv al axei reale.

Notăm $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ – clasa (mulțimea) argumentelor lui $z \in \mathbb{C}^*$.
($\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$).

⊙ Argumentul unui nr. complex nenul trebuie privit ca o funcție multivocă (multi-funcție) de la $\mathbb{C}^*$ la $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(funcția multivocă argument (argumentul complex))

Au loc relațiile:

(i) $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

(ii) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

(iii) $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$, $\forall z \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}^*$.

Obs: $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât
$$\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2.$$
De exemplu, $z_1 = -1$, $z_2 = i$. Atunci
$\arg z_1 = \pi$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$,
iar $\arg z_1 + \arg z_2 = \frac{3\pi}{2}$.

⊙ Dacă $z \in \mathbb{R}^*$, atunci $\arg z \in \{0, \pi\}$.

$$\boxed{z > 0 \Leftrightarrow \arg z = 0, \text{ iar } z < 0 \Leftrightarrow \arg z = \pi.}$$

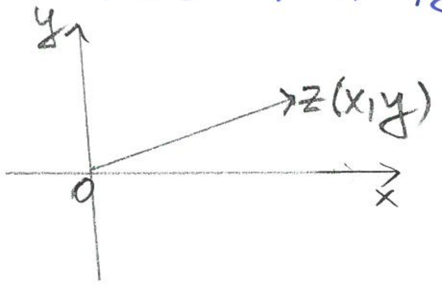
Concluzie: Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ și $\theta \in \operatorname{Arg} z$, atunci
$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta), \text{ unde } r = |z|.$$
reprezentarea (forma) trigonometrică a lui z.

Topologia planului complex

⊙ Nr. reale $\mapsto$ puncte pe axa reală
Nr. complexe $\mapsto$ puncte într-un plan raportat la un reper.

Def. Planul complex $\mathbb{C}$ este mulțimea numerelor complexe înzestrată cu structura euclidiană a spațiului bidimensional $\mathbb{R}^2$.

⊙ $\forall z \in \mathbb{C} \mapsto P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (z = afixul punctului $P(x,y)$).



⊙ Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Atunci A este deschisă dacă A este deschisă în spațiul euclidian $\mathbb{R}^2$.
Fie $B \subseteq \mathbb{C}$. Atunci B este închisă dacă B este închisă în $\mathbb{R}^2$, deci $\mathbb{C} \setminus B$ e deschisă.

⊙ Fie $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$.
E clar că
$$d(z_1,z_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$
$\forall z_j = x_j + i y_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,2}$. Deci d este distanța (metrica) euclidiană în $\mathbb{R}^2 \Rightarrow (\mathbb{C}, d)$ = spațiu metric complet.

Notații

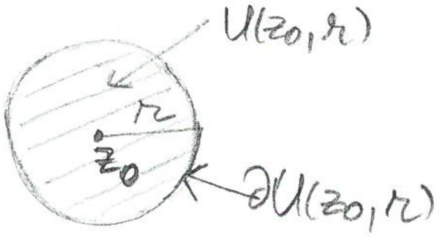
Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Definim următoarele mulțimi:

$U(z_0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ – discul (deschis) cu centrul în z_0 și de rază r.

$\overline{U}(z_0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r\}$ – discul închis cu centrul în z_0 și de rază r

$C(z_0,r) = \partial U(z_0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$ – cercul cu centrul în z_0 și de rază r.

$\dot{U}(z_0,r) := U(z_0,r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\}$ – discul punctat (redus) cu centrul în z_0 și de rază r.



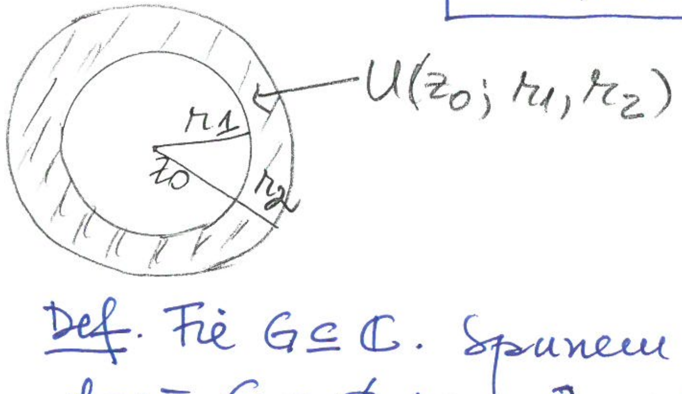
Obs: Dacă $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, atunci
$U(z_0,r) = B_{\mathbb{R}^2}((x_0,y_0), r) =$ bila euclidiană deschisă în $\mathbb{R}^2$ de centru (x_0,y_0) și rază r.

$\Rightarrow$ $U(z_0,r)$ = mulțime deschisă în $\mathbb{C}$.
$\overline{U}(z_0,r)$ = mulțime închisă în $\mathbb{C}$.

⊙ Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 < \infty$.

$U(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ s.n. coroana circulară cu centrul în z_0 și de raze r_1, r_2.

Se observă că $\boxed{\dot{U}(z_0,r) = U(z_0; 0, r).}$



Def. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că mulțimea G este deschisă dacă $G = \emptyset$ sau, în caz contrar, $\forall z_0 \in G$, $\exists r > 0$, astfel încât $U(z_0,r) \subseteq G$.

Fie $F \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că mulțimea F este închisă dacă $\mathbb{C} \setminus F$ e deschisă.

Def. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$. Punctul z_0 este aderent mulțimii A dacă $\forall r > 0$, $U(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Fie $\overline{A}$ = aderența (închiderea) mulțimii A.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$. Punctul z_0 este punct de acumulare pentru A dacă $\forall r > 0$, $\mathring{U}(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Fie A' = mulțimea punctelor de acumulare ale lui A.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$. Spunem că z_0 este un punct frontieră pentru mulțimea A dacă $\forall r > 0$, $U(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$ și $U(z_0, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$.

Fie ∂A = frontiera mulțimii A.

⊙ $\boxed{\partial A = \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{C} \setminus A})}$.

Def. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$. Spunem că z_0 e punct interior mulțimii A dacă $z_0 \in A$ și $\exists r > 0$ astfel încât $U(z_0, r) \subseteq A$.

Notăm cu $\text{int}(A)$ (sau $\mathring{A}$) interiorul mulțimii A (mulțimea punctelor interioare ale mulțimii A).

Fie $\boxed{\text{ext}(A) := \mathbb{C} \setminus \overline{A}}$ - exteriorul mulțimii A

Obs: (i) $\overline{A}$ = mulțime închisă ; $A \subseteq \overline{A}$;

A = închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

$\overline{A} = \cap \{F \subseteq \mathbb{C} \mid F\text{-închisă}, F \supseteq A\}$.

$\overline{A} = A' \cup A$.

(ii) Fie $A = U(z_0, r) \Longrightarrow \overline{A} = \overline{U}(z_0, r)$, adică

$$\boxed{\overline{U(z_0,r)} = \overline{U}(z_0,r)}.$$

(iii) Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$, atunci $\boxed{\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)}$.

Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ e deschisă $\Rightarrow \partial A = \overline{A} \setminus A$.

Exemple: (i) Discurile deschise, coroanele circulare, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ sunt mulțimi deschise.

(ii) Discurile închise, cercurile, ϕ (mulțimea vidă), $\mathbb{C}$, sunt mulțimi închise.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că mulțimea A e mărginită dacă $\exists r > 0$ astfel ca $A \subseteq U(0, r)$.

Def: Fie $K \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că mulțimea K este compactă dacă K este mărginită și închisă.

Def: Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un șir de numere complexe. Șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către z_0 dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Notăm: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ sau $z_n \to z_0$.

Obs: (i) Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ șir de numere complexe, $z_n = x_n + i y_n$, $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ și } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

(ii) Dacă $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$, $z_n = r_n(\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$, $z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}^*$, iar $r_n \to r$ și $\theta_n \to \theta$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

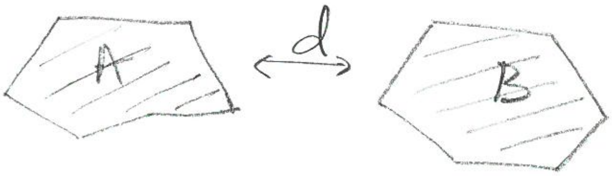
(iii) Fie $K \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime nevidă. Atunci K este compactă $\iff \forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, $\exists (z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $z_{n_k} \to z_0 \in K$ (orice șir din K conține un subșir convergent la un punct din K).

Relativ la mulțimile compacte, au loc următoarele rezultate:

(P1) Fie $A, B \subset \mathbb{C}$ mulțimi nevide, astfel încât A e compactă, iar B închisă. Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $d(A,B) > 0$, unde

$$d(A,B) = \inf\{|a-b| : a \in A,\ b \in B\}.$$

Demonstrație. Fie $d = d(A,B) \Rightarrow d \geq 0$.



Presupunem că $d = 0 \Rightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ astfel ca

$$|a_n - b_n| \to d = 0.$$

Dar A e compactă, deci $\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $\exists a \in A$, astfel încât

$$\boxed{a_{n_k} \to a.} \quad (*)$$

Deoarece

$$|b_{n_k} - a| \leq \underbrace{|b_{n_k} - a_{n_k}|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\downarrow 0} \to 0,$$

deducem că $b_{n_k} \to a$.

$$\left.\text{Dar } (b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B\right\} \Rightarrow \boxed{a \in \overline{B} = B} \ (**)$$

B = închisă.

Din $(*)$ și $(**) \Rightarrow a \in A \cap B \Rightarrow$ contradicție cu $A \cap B = \emptyset$.

Deci: $d > 0$.

OK.

C1) Fie $G \subset \mathbb{C}$ deschisă și $K \subset G$ o mulțime nevidă și compactă. Atunci $d(K, \partial G) > 0$.

Demonstrație. Fie $d = d(K, \partial G)$. Deoarece $\partial G = \overline{G} \setminus G$ e închisă, K e compactă și $K \cap \partial G = \phi$, deducem din Propoziția 1 că $d > 0$.

OK.

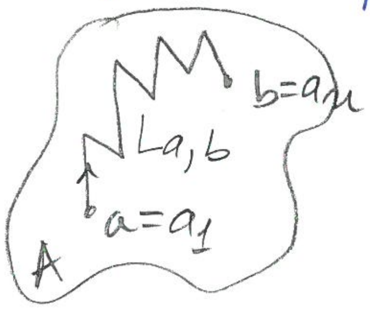
Ex: $\overline{U}(z_0, r)$, $\partial U(z_0, r)$ sunt mulțimi compacte.

Conexitate în $\mathbb{C}$.

Def. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că A e conexă dacă $\nexists B \subseteq A$ astfel încât $B \neq \phi$, $B \neq A$, B să fie simultan deschisă și închisă în A.

Obs: Se poate arăta că $A \subseteq \mathbb{C}$ e conexă $\Leftrightarrow$ $\nexists A_1, A_2 \subseteq A$ nevide, disjuncte, deschise în A, astfel ca $A = A_1 \cup A_2$.

Def. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că A este poligonal conexă dacă $\forall a, b \in A$ cu $a \neq b$, $\exists L_{a,b}$ un drum poligonal (linie poligonală) de extremități a și b, astfel încât $L_{a,b} \subset A$.



⊙ $L_{a,b}$ e drum poligonal de extremități a și b dacă $\exists n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, \dots, a_n \in A$, astfel ca $a_1 = a$, $a_n = b$ și $L_{a,b} = \bigcup_{k=1}^{n-1} [a_k, a_{k+1}]$, unde $[a_k, a_{k+1}]$ este segmentul închis de extremități a_k și a_{k+1}.

⊙ $[z, w] = \{ \zeta = (1-t)z + tw \in \mathbb{C} : t \in [0,1] \}$ – segmentul închis între z și $w \in \mathbb{C}$.

Obs:

- Orice mulțime poligonal conexă e și conexă. Dar, există mulțimi conexe care nu sunt poligonal conexe.
  Ex: Cercurile sunt conexe, dar nu sunt poligonal conexe.

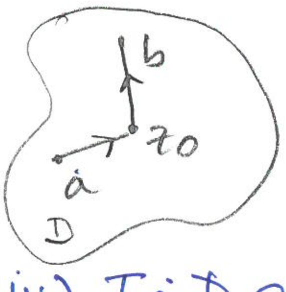
(P2) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Atunci D e conexă $\Longleftrightarrow$ D e poligonal conexă.

Def: Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că mulțimea D e un domeniu dacă D e deschisă și conexă.

Ex: (i) $\mathbb{C}$, discurile deschise, coroanele circulare, $\mathbb{C}^*$, sunt domenii din $\mathbb{C}$.

(ii) Reuniunea a două discuri disjuncte deschise, deși e o mulțime deschisă, nu e conexă.

(iii) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și stelată în raport cu punctul $z_0 \in D$ ($[z_0, z] \subset D$, $\forall z \in D$). Atunci D e conexă, deci domeniu.

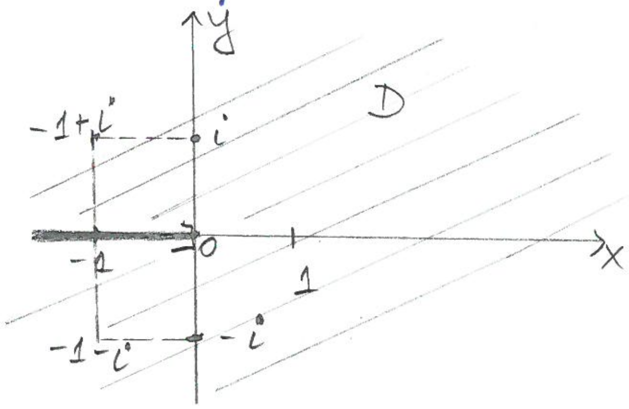


Dacă $a, b \in D \Rightarrow L_{a,b} := [a, z_0] \cup [z_0, b] \subset D$.
Dacă $a = z_0 \Rightarrow L_{a,b} = [z_0, b] \subset D$.
Dacă $b = z_0 \Rightarrow L_{a,b} = [a, z_0] \subset D$.

(iv) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și convexă ($[z, w] \subset D$, $\forall z, w \in D$). Atunci D e conexă, deci domeniu.

Ex: (i) Fie $D = U(z_0, r)$ sau $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. În ambele cazuri D e mulțime deschisă și convexă.

(ii) Dacă $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$, atunci D e mulțime deschisă și stelată în raport cu $\forall z_0 \in (0, \infty)$, dar D nu e domeniu convex.



Fie $z_1 = -1+i$ și $z_2 = \bar{z}_1 = -1-i$.
Atunci $z_1, z_2 \in D$, dar

$$\frac{z_1+z_2}{2} = -1 \notin D,$$

deci $[z_1, z_2] \not\subset D$.

(iii) Dacă $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ e un șir de domenii, astfel ca $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$, atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ e un domeniu în $\mathbb{C}$.

(iv) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{C}$, astfel ca $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ iar A e o mulțime conexă, atunci și mulțimea B e conexă. În particular, $\bar{A}$ e conexă, $\forall A \subseteq \mathbb{C}$ conexă.

Bibliografie: [1], [2], [4].