Curs 4

Teorema 1 (Carathéodory)**.** *Fie X o mulţime şi μ^* o măsură exterioară pe X. Atunci*

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subseteq X \mid \forall T \subseteq X, \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \complement(A))\}$$

este o σ-algebră pe X şi restricţia $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ a lui μ^* la $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este o măsură pe $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Dem: Arătăm că $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este o σ-algebră pe X:

(A1) $\phi \in \mathcal{M}_{\mu^*}$: $\forall T \subseteq X$, $\mu^*(T \cap \phi) + \mu^*(T \cap \underbrace{C\phi}_{=X}) = \underbrace{\mu^*(\phi)}_{=0} + \mu^*(T) = \mu^*(T)$

(A2) Fie $A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow \forall T \subseteq X$, $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap CA) = \mu^*(T \cap CA) + \mu^*(T \cap \underbrace{A}_{C(CA)})$

$\Rightarrow CA \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Pentru a arăta că (A3) are loc, demonstrăm mai întâi următoarele:

Proprietatea 1: $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Dem. Prop. 1: Fie $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ şi $T \subseteq X$. Atunci:

$$\mu^*(T \cap (A \cup B)) \underset{A \in \mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(\underbrace{T \cap (A \cup B) \cap A}_{=T \cap A}) + \mu^*(\underbrace{T \cap (A \cup B) \cap CA}_{=T \cap B \cap CA}) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap CA \cap B)$$

$$\Rightarrow \mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap C(A \cup B)) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap CA \cap B) + \mu^*(T \cap CA \cap CB)$$

$$\underset{B \in \mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap CA) \underset{A \in \mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(T)$$

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Proprietatea 2: $k \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjuncte 2×2 $\Rightarrow$

$$\forall T \subseteq X, \ \mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(T \cap A_n).$$

Dem. Prop. 2: $k = 1$ ev.

Este suficient să considerăm $k = 2$. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ cu $A \cap B = \phi$.

Atunci $\forall T \subseteq X$,

$$\mu^*(T \cap (A \cup B)) \underset{A \in \mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(\underbrace{T \cap (A \cup B) \cap A}_{=T \cap A}) + \mu^*(\underbrace{T \cap (A \cup B) \cap CA}_{=T \cap B \text{ pt. că } B \subseteq CA}) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap B),$$

Proprietatea 3: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjunctă $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ și

$$\forall T \subseteq X, \quad \mu^*\Big(T \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_n). \quad (1)$$

Dem. Prop. 3: Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjunctă. Notăm $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$, $k\in\mathbb{N}$.

Din Proprietatea 1 $\Rightarrow B_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Atunci $\forall T \subseteq X$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(T) \underset{B_k\in\mathcal{M}_{\mu^*}}{=} \mu^*(T\cap B_k) + \mu^*(T\cap CB_k) \underset{\text{Prop. 2}}{=} \sum_{n=1}^{k} \mu^*(T\cap A_n) + \mu^*(T\cap CB_k)$$

$$\underset{\text{monotonie, } CA \subseteq CB_k \text{ pt că } B_k \subseteq A}{\geq} \sum_{n=1}^{k} \mu^*(T\cap A_n) + \mu^*(T\cap CA)$$

$k\to\infty \Rightarrow \forall T\subseteq X$, $\mu^*(T) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_n) + \mu^*(T\cap CA)$ $(*)$

$$\underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\geq} \mu^*\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}(T\cap A_n)}_{T\cap A}\Big) + \mu^*(T\cap CA) = \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T\cap CA)$$

Din Obs 2.(i), Curs 3 $\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Fie $T\subseteq X$. Aplicând $(*)$ pt $T\cap A$ în locul lui T $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\mu^*(T\cap A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{T\cap A\cap A_n}_{=T\cap A_n}) + \mu^*(\underbrace{T\cap A\cap CA}_{=\emptyset}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_n) \\ &\mu^*(T\cap A) \underset{\sigma\text{-subaditivitate}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu^*(T\cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_n)$.

Revenim la demonstrația că $\mathcal{M}_{\mu^*}$ este o σ-algebră pe X:

(A3) Fie $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Luăm $A_1 = C_1$, $A_n = C_n \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$, $n \geq 2$

$$\Rightarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{(\text{TEMĂ})}{\subseteq} \mathcal{M}_{\mu^*} \text{ disjunctă } \underset{\text{Prop. 3}}{\Rightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ este o măsură:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjunctă $\underset{\text{Prop. 3 luând } T = X \text{ în (1)}}{\Rightarrow} \mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Definiţia 1. Fie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură. Spunem că măsura μ este *completă* dacă pentru oricare $A \in \mathcal{A}$ cu $\mu(A) = 0$ şi oricare $B \subseteq A$ avem $B \in \mathcal{A}$.

Observaţia 1. Fie X o mulţime şi μ^* o măsură exterioară pe X. Atunci $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ este o măsură completă.

Fie $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ cu $\mu^*(A) = 0$ şi fie $B \subseteq A$ şi $T \subseteq X$.

$T \cap B \subseteq B \subseteq A \underset{\text{monotonie}}{\Longrightarrow} \mu^*(T \cap B) \le \mu^*(A) = 0$

$T \cap \complement B \subseteq T \underset{\text{monotonie}}{\Longrightarrow} \mu^*(T \cap \complement B) \le \mu^*(T)$

$\Rightarrow \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap \complement B) \le \mu^*(T) \overset{\text{Obs. 2.(i), Curs 3}}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^m$

Ne reamintim definiţia măsurii exterioare Lebesgue pe $\mathbb{R}^m$: $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0, \infty]$,

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(H_n) : (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right\}.$$

Familia $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ a submulţimilor lui $\mathbb{R}^m$ care sunt λ^*-măsurabile se mai numeşte şi *familia mulţimilor măsurabile Lebesgue* şi va fi notată în continuare $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ (sau chiar $\mathcal{L}$). Cu alte cuvinte,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^m \mid \forall T \subseteq \mathbb{R}^m, \lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \cap \complement(A)) \right\}.$$

De asemenea, vom nota $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}$. Conform Teoremei 1 şi Observaţiei 1, λ este o măsură completă numită *măsura Lebesgue*.

Propoziţia 1. *Dacă $H \in \mathcal{H}$, atunci $H \in \mathcal{L}$ (şi $\lambda(H) = \text{vol}(H)$).*

Dem Fie $H \in \mathcal{H}$. Arătăm că $\forall T \subseteq \mathbb{R}^m$, $\lambda^*(T) \ge \lambda^*(T \cap H) + \lambda^*(T \cap \complement H)$.

Fie $T \subseteq \mathbb{R}^m$ şi $\varepsilon > 0$. Luăm $\tilde{H} \in \mathcal{H}$ a.î. $\tilde{H} \subseteq H$, $\lambda^*(H \setminus \tilde{H}) < \varepsilon$ şi $d(\tilde{H}, \complement H) > 0$

$\Rightarrow d(T \cap \tilde{H}, T \cap \complement H) > 0$

Atunci:

$\lambda^*(T \cap \tilde{H}) + \lambda^*(T \cap \complement H) \overset{\text{Prop 2, Curs 3}}{=} \lambda^*((T \cap \tilde{H}) \cup (T \cap \complement H)) = \lambda^*(T \cap (\tilde{H} \cup \complement H)) \underset{\text{monotonie}}{\le} \lambda^*(T)$ (1)

$\lambda^*(T \cap H) = \lambda^*(T \cap (\tilde{H} \cup (H \setminus \tilde{H}))) = \lambda^*((T \cap \tilde{H}) \cup (T \cap (H \setminus \tilde{H}))) \underset{\text{subaditivitate finită}}{\le} \lambda^*(T \cap \tilde{H}) + \lambda^*(T \cap (H \setminus \tilde{H}))$

$\underset{\text{monotonie}}{\le} \lambda^*(T \cap \tilde{H}) + \lambda^*(H \setminus \tilde{H}) < \lambda^*(T \cap \tilde{H}) + \varepsilon$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \lambda^*(T) \ge \lambda^*(T \cap H) + \lambda^*(T \cap \complement H) - \varepsilon$

$\varepsilon \searrow 0 \Rightarrow \lambda^*(T) \ge \lambda^*(T \cap H) + \lambda^*(T \cap \complement H)$.

Corolarul 1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

Observaţia 2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.