Analiza Complexă (Notițe de curs)

Material bibliografic pentru cursul 5

Proprietăți ale funcțiilor olomorfe

(T1) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente

(i) $f \equiv$ constantă

(ii) $f'(z) = 0, \forall z \in D$

(iii) $\operatorname{Re} f \equiv$ constantă

(iv) $\operatorname{Im} f \equiv$ constantă

(v) $|f| \equiv$ constantă.

Demonstrație. Este evident că (i) implică oricare din celelalte afirmații.

⊙ Arătăm că $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$.

Fie $z_0 \in D$ fixat, dar ales în mod arbitrar. Considerăm mulțimea

$$E = \{z \in D : f(z) = f(z_0)\}.$$

Vom arăta că $E = D$. Deoarece D e o mulțime conexă, e suficient să demonstrăm că E e nevidă, deschisă și închisă în D $\Rightarrow \boxed{E = D}$.

Într-adevăr $E \neq \emptyset$ pentru că $z_0 \in E$.

Deoarece $E = f^{-1}(\{f(z_0)\})$, iar f e continuă pe D, fiind funcție olomorfă pe D, rezultă că E este închisă în D (am folosit aici faptul că $\{f(z_0)\}$ e închisă în $\mathbb{C}$).

Arătăm acum că mulțimea E este deschisă în D, adică orice punct din E este interior pentru E.

Fie $a \in E$, ales în mod arbitrar. Arătăm că $\exists r>0$, astfel ca $U(a,r) \subseteq E$.

Dar $a \in E \subseteq D$, iar D este deschisă, deci $\exists r>0$ astfel încât $U(a,r) \subseteq D$. Vom arăta că $U(a,r) \subseteq E$. Într-adevăr, dacă $b \in U(a,r)$, atunci $|b-a|<r$. Vom demonstra că $b \in E \Leftrightarrow f(b)=f(z_0)$.

Considerăm funcția $g:[0,1] \to \mathbb{C}$,

$$g(t) = f((1-t)a+tb),\ t \in [0,1].$$

Deoarece $(1-t)a+tb \in U(a,r)$, $\forall t \in [0,1]$, rezultă că g este bine definită. În plus, g este derivabilă pe $[0,1]$ (funcția $f \in \mathcal{H}(D)$, iar $\gamma(t) \equiv (1-t)a+tb$ e derivabilă pe $[0,1]$, deci compunerea celor două funcții rămâne derivabilă pe $[0,1]$), iar

$$g'(t) = \underbrace{f'((1-t)a+tb)}_{=0}(b-a)=0,\ \forall t \in [0,1].$$

$$f'(z)=0,\ \forall z \in D.$$

Deci $g \equiv$ constantă $\Rightarrow g(0)=g(1)$, adică $f(a)=f(b)$. Dar $a \in E$, deci $f(a)=f(z_0)$.

Prin urmare, $f(b)=f(z_0)$, adică $b \in E$.

În concluzie, E este deschisă în D.

- Arătăm că $\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$.

Fie $f=u+iv$. Deoarece $u \equiv$ constantă, e clar că:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0.$

Folosind sistemul Cauchy-Riemann, deducem că $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, deci

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \forall z \in D$$

Ţinând cont de faptul că (ii) $\Leftrightarrow$ (i), deducem că $f \equiv$ constantă.

(iv) $\Rightarrow$ (i) - analog.

(v) $\Rightarrow$ (i). $|f| \equiv$ constantă $\Rightarrow \exists\, c \geq 0$ astfel ca $|f| \equiv c$.

Fie $f = u + iv$, unde $u = \text{Re} f$, $v = \text{Im} f$.

Cazul I: $c = 0 \Rightarrow |f| \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Cazul II: $c > 0$. Avem că $|f|^2 \equiv c^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \equiv c^2$.

Derivând parţial în raport cu x şi y în egalitatea $u^2 + v^2 \equiv c^2$,

obţinem că

$$(1) \begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0. \end{cases}$$

Dar $f \in \mathcal{H}(D)$, deci f satisface sistemul Cauchy-Riemann în $\forall z = x + iy \in D$.

Prin urmare, din (1) obţinem relaţiile:

$$(2)\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} \equiv 0. \end{cases}$$

Considerăm sistemul (2) în necunoscutele $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ și $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$. Atunci

$$\Delta := \begin{vmatrix} u & v \\ v & -u \end{vmatrix} = -(u^2+v^2) \equiv -c^2 < 0.$$

Deci sistemul (2) admite singura soluție nulă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

Prin urmare, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0, \forall z\in D$, adică $f \equiv$ constantă. □

Din Teorema 1 se obține imediat următoarea consecință:

(C1) Fie $D\subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f\in \mathcal{H}(D)$. Dacă $f(D)\subseteq \mathbb{R}$ sau $f(D)\subseteq i\mathbb{R}$, atunci $f\equiv$ constantă.

Demonstrație. Dacă $f(D)\subseteq \mathbb{R}$, atunci $\operatorname{Im} f \equiv 0 \Longrightarrow f\equiv$ constantă, conform Teoremei 1.

Dacă $f(D)\subseteq i\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re} f \equiv 0 \Longrightarrow f\equiv$ constantă.

Exemple de funcții întregi

(I) Funcția polinomială complexă

Fie $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, unde $a_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,n}$. Atunci $p\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ și

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}, \ \forall z\in\mathbb{C}.$$

II Funcția exponențială complexă de variabilă complexă

Dacă $z=x+iy\in\mathbb{C}$, atunci (seminar):

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z,$$

unde $\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\sin y)}$.

Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $f(z)=e^z$ – funcția exponențială complexă de variabilă complexă.

Notăm și cu $\boxed{\exp(z):=e^z,\ \forall z\in\mathbb{C}.}$

⊙ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ și $f'(z)=e^z$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Într-adevăr, dacă $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$, atunci

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y,$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. E clar că $u,v\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, deci f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă pe $\mathbb{C}$. În plus,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)&=e^x\cdot\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)&=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{aligned}\right\},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Din Teorema lui Cauchy–Riemann rezultă că f e derivabilă în $\forall z\in\mathbb{C}$, deci $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$. De asemenea,

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z,$$

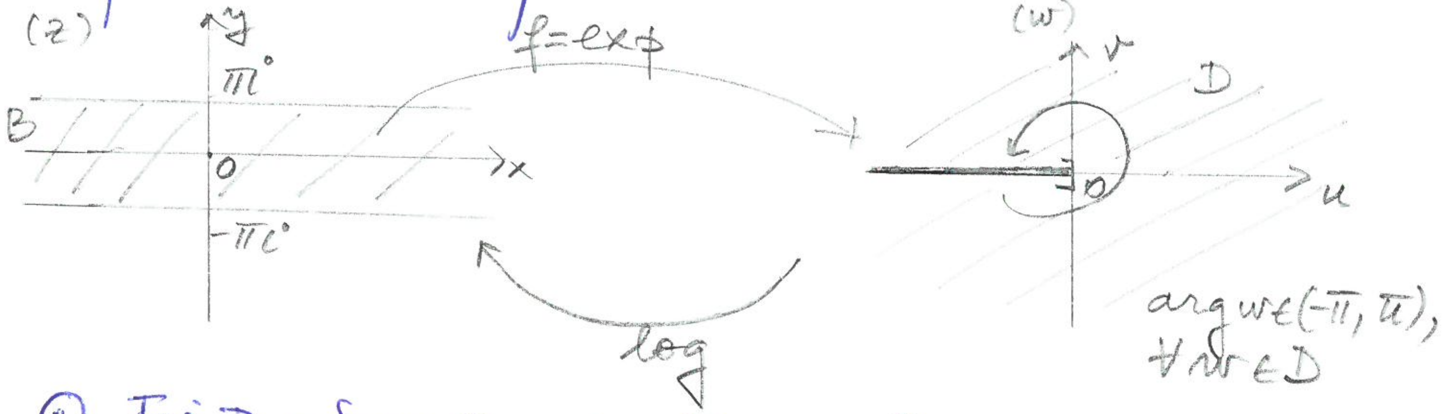
$\forall z\in\mathbb{C}$.

⊙ $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

⊙ $e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

- $e^{z+2k\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$.

Din această relație rezultă că funcția exponențială complexă de variabilă complexă nu este injectivă pe întreg planul complex $\mathbb{C}$.



- Fie $B = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

Funcția exponențială complexă exp este injectivă pe banda B și $\exp(B) = D$, unde
$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w = 0\}$

Atunci $f^{-1} : D \to B$ este dată de relația
$$f^{-1}(w) = \ln|w| + i \arg w, \ \forall w \in D.$$
Notăm f^{-1} cu log pe D, deci
$$(*) \quad \boxed{\log w = \ln|w| + i \arg w, \ \forall w \in D}$$

Folosind sistemul Cauchy-Riemann în coordonate polare (seminar), rezultă că $\boxed{\log \in \mathcal{H}(D) \text{ și } (\log)'(w) = \frac{1}{w}, \ \forall w \in D}$.

- Funcția log se numește determinarea principală (ramura principală) a aplicației multivoce logaritm. E clar că $\log x = \ln x, \ \forall x \in (0, \infty)$, din (*).

⊙ $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$; $\arg e^z = y \pmod{2\pi}$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$

$$\Updownarrow$$

$y \in \operatorname{Arg}(e^z)$.

⊙ Dacă $z = \pi i$, atunci $\boxed{e^{\pi i} = -1}$

Dacă $z = 2\pi i$, atunci $\boxed{e^{2\pi i} = 1}$

⊙ Dacă $z = iy$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Dacă $z = -iy$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-iy} = \cos y - i \sin y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ (formulele lui Euler)}$$

III Funcțiile trigonometrice complexe cos și sin

$\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$\forall z \in \mathbb{C}$.

Au loc următoarele proprietăți (seminar):

(i) $\cos, \sin \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\begin{cases} \cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 \end{cases}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(iv) $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(v) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

(v) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$.

(vi) $\sin z = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$.

(vii) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + sh^2 y$, $|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$.

IV Funcțiile hiperbolice complexe ch și sh

$ch, sh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$ch z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Au loc relațiile:

(i) $ch, sh \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(ch z)' = sh z$, $(sh z)' = ch z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) $ch^2 z - sh^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(iii) $ch(iz) = \cos z$, $sh(iz) = i \sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Bibliografie [1], [2], [4], [7].