Aplicații ale formulelor lui Cauchy

① Calculați $\int_{\gamma_r} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz$, unde $r\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\infty\right)$,
$\gamma_r(t) = re^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$.

Soluție: Fie $\int_{\gamma_r} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz = I_r$, $r\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\infty\right)$.

• $r\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2}\notin \overline{U}(0,r) \Rightarrow \exists R>r$ a.î. $\{\gamma_r\}\subset U(0,R)$ și $\frac{\pi}{2}\notin U(0,R)$. Din T. fundamentală a lui Cauchy, $U(0,R)$ fiind simplu conex, avem $I_r=\int_{\gamma_r} f = 0$, unde $f(z)=\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}$, $z\in U(0,R)$, $f\in \mathcal{H}(U(0,R))$.

• $r\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right)$. Fie $g(z)=\sin z$, $z\in\overline{U}(0,r)$.
$g\in\mathcal{H}(U(0,r))\cap C(\overline{U}(0,r))$ implică, pe baza formulelor lui Cauchy,

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{g(z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz=\frac{1}{\pi i}\cdot I_r .$$

$g''=\sin''=\cos'=-\sin$

$\Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1 \Rightarrow I_r=-\pi i.$

Deci, $I_r=\begin{cases}0, & r\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ -\pi i, & r\in\left(\frac{\pi}{2},\infty\right).\end{cases}$

2. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi $u : G \to \mathbb{R}$ armonică. Demonstraţi că $u \in C^{\infty}(G)$.

Soluţie: Fie $z_0 \in G$ arbitrar. G deschisă $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $U(z_0, r) \subset G$.

Deoarece $U(z_0, r)$ este convex, deducem (a se vedea Teorema 1 din Curs 6) că $\exists\, f \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ a.î. $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $z \in U(z_0, r)$.

Din Propoziţia 2 din Curs 10, f este nelimitat derivabilă pe $U(z_0, r) \Rightarrow f \in C^{\infty}(U(z_0, r)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Re} f = u\big|_{U(z_0,r)} \in C^{\infty}(U(z_0, r))$.

Deoarece $z_0 \in G$ a fost ales arbitrar, $u \in C^{\infty}(G)$.

3. (teorema de medie pentru funcţii armonice)
Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi $u : G \to \mathbb{R}$ armonică.
Atunci $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$, $\forall z_0 \in G, r > 0$ a.î. $\overline{U}(z_0, r) \subset G$.

Soluţie: Fie $z_0 \in G$ şi $r > 0$ a.î. $\overline{U}(z_0, r) \subset G$.
$\exists\, R > r$ a.î. $U(z_0, R) \subset G$. u este armonică pe $U(z_0, R)$, rezultă că $\exists\, f \in \mathcal{H}(z_0, R)$ a.î. $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $z \in U(z_0, R)$.

Avem $f \in \mathcal{H}(U(z_0,r)) \cap C(\bar{U}(z_0,r))$ și, din formulele lui Cauchy, deducem:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \ , \text{ unde } \gamma_r(t) = z_0 + r e^{2\pi i t}, t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r e^{2\pi i t})}{r e^{2\pi i t}} \cdot r e^{2\pi i t} \cdot (2\pi i)\, dt$$

$$= \int_0^1 f(z_0 + r e^{2\pi i t})\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z_0) \xlongequal[dt = \frac{1}{2\pi} d\theta]{2\pi t = \theta} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) \frac{1}{2\pi}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f(z_0) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta})\, d\theta .$$

(4) Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Demonstrați:

a) Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $\operatorname{Re} f(z) \le M$, $z \in \mathbb{C}$, atunci $f \equiv$ constantă.

b) Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $\operatorname{Re} f(z) \ge M$, $z \in \mathbb{C}$, atunci $f \equiv$ constantă.

Soluție: a) Fie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = e^{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \le e^M$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Teorema lui Liouville implică $g \equiv$ constantă

$\Rightarrow g' \equiv 0 \Rightarrow e^{f(z)} \cdot f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f' \equiv 0$

$\Rightarrow f \equiv$ constantă.

b) $\operatorname{Re}(-f)(z) \le -M$, $\forall z \in \mathbb{C} \overset{a)}{\Rightarrow} -f \equiv$ constantă

$\Rightarrow f \equiv$ constantă.

(5) Arătați că nu există funcții olomorfe $f : \mathbb{C} \to U(0,1)$ care sunt bijective.
Dați un exemplu de $f : \mathbb{C} \to U(0,1)$ a.î. $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ și f este bijectivă.

Soluție: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ și $f(\mathbb{C}) = U(0,1) \overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow f \equiv$ constantă, contradicție cu f bijectivă.

Fie $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$, $z \in \mathbb{C}$. $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ și este bijectivă cu $f(\mathbb{C}) = U(0,1)$ și $f^{-1}(w) = \dfrac{w}{1-|w|}$, $w \in U(0,1)$.

(6) Calculați $\displaystyle J_r = \int_{\partial U(0,r)} \frac{\sin z}{z(z-1)^2}\, dz$, $r \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

Soluție: Fie $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-1)^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

• $r \in (0,1) \Rightarrow \exists R \in (r,1)$ a.î. $f \in \mathcal{H}(\dot{U}(0,R))$.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = 1.$$

Fie $g : U(0,R) \to \mathbb{C}$, $g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \dot{U}(0,R) \\ 1, & z = 0. \end{cases}$

Atunci $g \in \mathcal{H}(\dot{U}(0,R)) \cap C(U(0,R))$.

Rezultă (a se vedea Propoziția 3 din Cursul 10) $g \in \mathcal{H}(U(0,R))$ și, pe baza Teoremei fundamentale a lui Cauchy, deducem că

$$\int_{\partial U(0,r)} g = 0 \Rightarrow J_r = 0.$$

• $r \in (1,\infty)$. Fie $h(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \in \mathbb{C}^* \\ 1, & z = 0. \end{cases}$

Atunci $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*) \cap C(\mathbb{C}) \Rightarrow h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$$J_r = \int_{\partial U(0,r)} \frac{\frac{\sin z}{z}}{(z-1)^2}\,dz = \int_{\partial U(0,r)} \frac{h(z)}{(z-1)^2}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formulele} \\ \text{lui Cauchy}}}{=} \frac{2\pi i}{1!} h'(1).$$

$$h'(z) = \frac{\cos z \cdot z - \sin z}{z^2}, \ \forall z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow h'(1) = \cos 1 - \sin 1$$

$$\Rightarrow J_r = 2\pi i(\cos 1 - \sin 1).$$

Deci, $J_r = \begin{cases} 0, & r \in (0,1) \\ 2\pi i(\cos 1 - \sin 1), & r \in (1,\infty). \end{cases}$

Serii de puteri

(7) Să se determine razele de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n} \cdot (z-1)^n$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot (z-i)^n$.

Soluție : (i) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n+4^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+4^{n+1}}\cdot\frac{2^n+4^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{2^n+4^n}{2^{n+1}+4^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{4}\right)^{n+1}+1} = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{l} = \dfrac{4}{3}$ raza de convergență a seriei

$\Rightarrow U(1, \frac{4}{3})$ este discul de convergență a seriei.

(ii) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow R = e$ raza de convergență a seriei $\Rightarrow U(i, e)$ discul de convergență a seriei.

⑧ Fie $f: U(0,1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = (1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+z)}$, $z \in U(0,1)$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ și log este determinarea principală (ramura uniformă principală) a lui Log pe $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0] = \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui $z_0 = 0$ funcția f.

Soluție:

$1+U(0,1)\subset \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \Rightarrow f\in \mathcal{H}(U(0,1))$.

Teorema dezvoltării în serie Taylor implică:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot z^n,\quad z\in U(0,1),$$

unde $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$f'(z)=\left((1+z)^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\log(1+z)}\right)'=e^{\alpha\log(1+z)}\cdot\frac{\alpha}{1+z}$$

$$=\alpha\cdot e^{\alpha\log(1+z)}\cdot e^{-\log(1+z)}=\alpha(1+z)^{\alpha-1},\ \forall z\in U(0,1).$$

Aplicând inductiv raționamentul de mai sus, deducem:

$$\left((1+z)^{\alpha}\right)^{(n)}=\left(\alpha(1+z)^{\alpha-1}\right)^{(n-1)}=\left(\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\right)^{(n-2)}=\dots=$$

$$=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot(1+z)^{\alpha-n},\ \forall z\in U(0,1),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Deci, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_0=1$

$$\Rightarrow f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\quad z\in U(0,1).$$

⑨ Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui $z_0=0$ funcția $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z+z^2}{(1-z)^3}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, și să se determine raza de convergență corespunzătoare.

Soluție:

Teorema dezvoltării în serie Taylor $\Rightarrow$

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n, \quad \forall z \in U(0,1),$$

deoarece $U(0,1) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ și $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$.

Raza de convergență a seriei de puteri $(*)$ este 1, pentru că raza maximă a discului centrat în 0 pe care f este olomorfă este 1: $f \in \mathcal{H}(U(0,1))$ și $\lim\limits_{z \to 1} f(z) = \infty$.

Avem: $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots, \quad z \in U(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = 1 + 2z + \ldots + n z^{n-1} + \ldots, \quad z \in U(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = 2 + 3 \cdot 2 \cdot z + \ldots + n \cdot (n-1) z^{n-2} + \ldots, \quad z \in U(0,1)$$

$$\Rightarrow f(z) = (z + z^2) \cdot \frac{1}{(1-z)^3} = (z+z^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} \cdot z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} \cdot z^n$$

$$= z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2} \cdot z^m + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{2} z^m$$

$$= z + \sum_{m=2}^{\infty} m^2 z^m = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 z^m, \quad z \in U(0,1).$$

Tema 4

1. a) Să se determine funcția omografică $f:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a.î. $f(1)=\infty$, $f(0)=0$, $f(\infty)=1$.

   b) Fie $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$. Să se reprezinte grafic $f(D)$ pentru f obținută la a).

2. Calculați următoarele integrale:

   a) $\int_{\gamma_r} (\bar{z}+e^z \sin z)\,dz$, unde $r>0$, $\gamma_r(t)=re^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$.

   b) $\int_{\gamma} \frac{\cos z-1}{z(z-2i)^2}\,dz$, unde γ e un contur din $U(0,1)$ a.î. $0\notin\{\gamma\}$.

   c) $\int_{\gamma} \frac{z^m}{2-z}\,dz$, unde $m\in\mathbb{Z}$ și $\gamma(t)=e^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$.

3. a) Să se determine razele de convergență ale seriilor de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(ni)z^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}z^n$.

   b) Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0 funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\cos^4 z+\sin^4 z$, $z\in\mathbb{C}$.

4. Fie $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ~~$M>0$~~ și $n\in\mathbb{N}$. Demonstrați că dacă există un polinom p de grad cel mult n a.î.

$$|f(z)|\le|p(z)|,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

atunci f este un polinom de grad cel mult n.