III

 Material bibliografic pentru cursurile 3-4

Analiză complexă (Notițe de curs)

T1 (Cauchy-Riemann) (caracterizare a derivabilității)

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ mulțime deschisă, $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Atunci f este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și au loc relațiile:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

⊙ (1) - sistemul Cauchy-Riemann în punctul z_0 (condițiile Cauchy-Riemann în z_0)

Demonstrație. "⇒" Admitem că f este derivabilă în z_0. Arătăm că funcțiile u și v sunt diferențiabile în (x_0, y_0) și au loc aceste relații de la (1).

⊙ Mai întâi arătăm că funcțiile u și v sunt diferențiabile în punctul (x_0, y_0).

Funcția $u = u(x, y)$ este diferențiabilă în (x_0, y_0) dacă $\exists\, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ și $\omega_1 : G \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_1(x, y) = 0$ și

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + \omega_1(x, y) \cdot \|(x, y) - (x_0, y_0)\|,$$

$\forall (x, y) \in G \setminus \{(x_0, y_0)\}$, unde

$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ - norma Euclidiană în $\mathbb{R}^2$.

În plus, $a_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ și $b_1 = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Pe de altă parte, f e derivabilă în $z_0 \Leftrightarrow f$ e $\mathbb{C}$-diferențiabilă în $z_0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ și $g : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, astfel încât $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ și

(2) $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$, $\forall z \in G \setminus \{z_0\}$.

În plus, $\boxed{\alpha = f'(z_0)}$

Fie $\alpha = a + ib$, $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\forall z = x + iy \in G$, $g(z) = u_1(z) + iv_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$, $\forall z = x + iy \in G$.

Din (2) obținem că

(3) $u(x,y) + iv(x,y) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + (a+ib)(x - x_0 + i(y - y_0)) + (u_1(x,y) + iv_1(x,y))(x - x_0 + i(y - y_0))$,

$\forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$.

Identificând părțile reale și imaginare în (3), deducem că

(4) $u(x,y) = u(x_0,y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + u_1(x,y)(x - x_0) - v_1(x,y)(y - y_0)$, $\forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$,

și

(5) $v(x,y) = v(x_0,y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + v_1(x,y)(x - x_0) + u_1(x,y)(y - y_0)$,

$\forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$.

Din relația (4), obținem că

(6) $u(x,y) = u(x_0,y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \omega_1(x,y)\|(x,y) - (x_0,y_0)\|$,

pentru orice $(x,y)\in G\setminus\{(x_0,y_0)\}$, unde

$$\omega_1(x,y)=\frac{u_1(x,y)(x-x_0)-v_1(x,y)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|},$$

$\forall (x,y)\in G\setminus\{(x_0,y_0)\}$. Atunci

$$(7)\quad |\omega_1(x,y)|\le |u_1(x,y)|\cdot\frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}+$$

$$+|v_1(x,y)|\cdot\frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

$\forall (x,y)\in G\setminus\{(x_0,y_0)\}$. Din faptul că

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=0 \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u_1(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v_1(x,y)=0,$$

deducem că $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\omega_1(x,y)=0$, pe baza relației (7).

Revenind la relația (6), deducem că funcția u este diferențiabilă în punctul (x_0,y_0). În plus, au loc următoarele relații

$$(8)\quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=a,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-b.$$

Cu un raționament analog, deducem că funcția v este diferențiabilă în (x_0,y_0), iar din relația (5) obținem că

$$(9)\quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=b,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=a.$$

Așadar, din relațiile (8) și (9) rezultă că funcțiile u și v satisfac sistemul (C-R)(1) în z_0.

"$\Leftarrow$" Admitem că funcția f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în punctul z_0 și este satisfăcut sistemul Cauchy-Riemann (1) în z_0. Arătăm că f este derivabilă în $z_0 \Longleftrightarrow f$ este $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0, adică $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ și $g : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, astfel ca $g(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$ și

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + g(z)(z - z_0),\ \forall z \in G \setminus \{z_0\}.$$

Dar f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0, deci u și v sunt funcții diferențiabile în (x_0, y_0). De aici rezultă că $\exists\, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ și funcțiile $A, B : G \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} A(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} B(x,y) = 0,$$

$$(10)\quad u(x,y) = u(x_0,y_0) + a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + A(x,y)\cdot \|(x,y) - (x_0,y_0)\|,\ \forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

$$(11)\quad v(x,y) = v(x_0,y_0) + a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + B(x,y)\cdot \|(x,y) - (x_0,y_0)\|,\ \forall (x,y) \in G \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

unde $a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b_1 = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$,
$a_2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b_2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Dar funcțiile u și v satisfac sistemul Cauchy-Riemann (1), deci

$$\boxed{a_1 = b_2 \ \text{ și } \ b_1 = -a_2}.$$

Ținând cont de relațiile precedente, dar și de (10), (11), obținem că:

$$f(z)=u(z)+iv(z)=f(z_0)+(a_1+ia_2)(x-x_0)+$$
$$+(b_1+ib_2)(y-y_0)+(A(z)+iB(z))\cdot|z-z_0|$$
$$=f(z_0)+(a_1+ia_2)(x-x_0)+(-a_2+ia_1)(y-y_0)$$
$$+\underbrace{\left[\frac{A(z)+iB(z)}{z-z_0}\cdot|z-z_0|\right]}_{:=g(z)}(z-z_0)=$$
$$=f(z_0)+(a_1+ia_2)(x-x_0+i(y-y_0))+g(z)(z-z_0)$$
$$=f(z_0)+(a_1+ia_2)(z-z_0)+g(z)(z-z_0),\ \forall z\in G\setminus\{z_0\},$$

unde $g: G\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$, $g(z)=\frac{A(z)+iB(z)}{z-z_0}\cdot|z-z_0|$.

⊙ Menționăm că în raționamentul anterior s-au folosit egalitățile:

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z-z_0|,$$

$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$, $z_0=x_0+iy_0$.

Notăm $\alpha=a_1+ia_2$. Atunci $\alpha\in\mathbb{C}$ și

$$\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Fie

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0):=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).}$$

Atunci $\boxed{\alpha=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)}$. În plus, am obținut că

$$f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+g(z)(z-z_0),\ \forall z\in G\setminus\{z_0\}$$

Mai rămâne să arătăm că $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=0$.

Într-adevăr, deoarece

$$|g(z)|=\left|\frac{A(z)+iB(z)}{z-z_0}\cdot|z-z_0|\right|\le|A(z)|+|B(z)|,\ z\in G\setminus\{z_0\}$$

iar din faptul că $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} A(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} B(x,y) = 0$, rezultă că $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$.

Deci, f e $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0. □.

<u>Observație</u>. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Din demonstrația Teoremei Cauchy-Riemann rezultă că dacă f e derivabilă în z_0, atunci

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \text{ unde } \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)} \tag{12}$$

Notăm cu

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).}$$

Ținând cont de sistemul Cauchy-Riemann (1) și de relația (12), obținem că

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \\ &= -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

Deci

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).} \tag{13}$$

⊙ Considerăm operatorii diferențiali $\frac{\partial}{\partial z}$ și $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).}$$

Are loc următorul rezultat:

(P2) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă, $z_0 \in G$, iar $f: G \to \mathbb{C}$ o funcție $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0. Atunci sistemul Cauchy-Riemann (1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0}$ (14).

Dacă f este derivabilă în z_0, atunci

$$(15) \quad \boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}.$$

Demonstrație. Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right].$$

Deci $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \text{și} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ are loc (1).

Dacă f este derivabilă în z_0, atunci din (13) obținem că

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}_{= i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0).$$

Deci $\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).}$

Observație. Din relațiile (14) și (15) deducem că dacă f e derivabilă în punctul $z_0 \in G$, atunci

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.}$$

important

Observație. (i) Fie f, g funcții $\mathbb{R}$-diferențiabile în punctul $z_0 \in G$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și au loc relațiile

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g)(z_0) = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \beta \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(z_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\alpha f + \beta g)(z_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) + \beta \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

Dacă, în plus, f și g sunt derivabile în z_0, atunci $\alpha f + \beta g$ este derivabilă în z_0 și

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta \cdot g'(z_0).$$

(ii) Dacă f și g sunt $\mathbb{R}$-diferențiabile în $z_0 \in G$, atunci funcția $f \cdot g$ (produsul celor două funcții) este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și au loc relațiile

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g)(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(z_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g)(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

Dacă, în plus, f și g sunt derivabile în z_0, atunci produsul $f \cdot g$ este ~~o funcție~~ derivabilă în z_0 și

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

(iii) Dacă f și g sunt derivabile în z_0, iar $g(z_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în z_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(iv) Dacă $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ deschise, $f: G_1 \to G_2$ e derivabilă în $z_0 \in G_1$, iar $g: G_2 \to \mathbb{C}$ e derivabilă în $w_0 = f(z_0)$, atunci funcția $g \circ f: G_1 \to \mathbb{C}$ e derivabilă în z_0 și are loc relația

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

⊙ Așadar, regulile uzuale de derivare în cazul funcțiilor complexe de o variabilă complexă sunt similare celor din cazul real.

(v) Dacă f e derivabilă în z_0, atunci f e continuă în z_0.

Observație. (i) Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Atunci f este derivabilă în $\forall z \in \mathbb{C}$, deci

Important $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1 \text{ și } \dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \ \forall z \in \mathbb{C}}$.

(ii) ⊙ Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ și $f: G \to \mathbb{C}$. Dacă în expresia funcției f apar explicit variabilele z și $\bar{z}$, atunci putem calcula derivatele parțiale $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ ca și când variabilele z și $\bar{z}$ sunt independente, unde $z_0 \in G$.

Exemplu. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Az^2 + B|z|^2 + C\bar{z}^2 + Dz + E\bar{z} + F$, unde $A, B, \dots, F \in \mathbb{C}$. Căutăm punctele $z \in \mathbb{C}$ în care funcția f este derivabilă.

Deoarece $\mathrm{Re} f$ și $\mathrm{Im} f$ sunt funcții de clasă C^∞ pe $\mathbb{C}$, rezultă că f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă pe $\mathbb{C}$ ($u = \mathrm{Re} f$ și $v = \mathrm{Im} f$ sunt funcții elementare).

Avem că
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = Bz + 2C\bar{z} + E, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$
Prin urmare, sistemul Cauchy-Riemann $\Leftrightarrow$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = Bz + 2C\bar{z} + E.$$
Pe de altă parte, din expresia funcției f obținem că
$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 2Az + B\bar{z} + D.$$

Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ mulțime deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Spunem că f este olomorfă pe G dacă f e derivabilă în $\forall z \in G$.

$\mathcal{H}(G) := \{f: G \to \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfă pe } G\}$ - mulțimea funcțiilor olomorfe pe G.

Def 2. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Spunem că funcția f e întreagă dacă $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Def 3. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime oarecare și $f: A \to \mathbb{C}$. Spunem că f este olomorfă pe A dacă $\exists G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, astfel încât $A \subseteq G$ și $f \in \mathcal{H}(G)$.

Def 4. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Spunem că funcția complexă f este olomorfă în z_0 dacă $f \in \mathcal{H}(\{z_0\})$.

Observație. Din Def 3 și Def 4, avem că:

important

f este olomorfă în z_0 dacă $\exists r > 0$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$.

Important: există funcții derivabile într-un punct care nu sunt olomorfe în același punct.

Ex. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z|z|^2$. Atunci f este derivabilă în $z=0$, dar f nu e olomorfă în $z=0$.

Demonstrație. Deoarece

$$\exists \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 \cdot \bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} |z|^2 = 0,$$

rezultă că f e derivabilă în $z=0$ și $f'(0)=0$.

Fie $u = \operatorname{Re} f$ și $v = \operatorname{Im} f$. Atunci

$$u(x,y) = x^3 + xy^2 \text{ și } v(x,y) = x^2y + y^3, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deci $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Prin urmare f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în $\forall z \in \mathbb{C}$.

Pe de altă parte, sistemul Cauchy-Riemann

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2 \cdot \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Deci, singurul punct în care funcția f e derivabilă este $z_0 = 0 \Rightarrow \nexists\, r > 0$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U(0,r))$, adică f nu e olomorfă în $z=0$.

Important: există funcții $\mathbb{R}$-diferențiabile, într-un punct, care nu sunt derivabile în același punct.

Ex: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. Atunci f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în $\forall z \in \mathbb{C}$, dar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 1 \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Deci $\nexists\, z_0 \in \mathbb{C}$ astfel ca f să fie derivabilă în z_0, pe baza Teoremei Cauchy-Riemann.

Bibliografie: [1], [4], [7].