Astronomie
Cursul 7 - Problema celor două corpuri
Mişcarea corpurilor din sistemul solar

Cristina Blaga

17 noiembrie 2025

Problema celor două corpuri

Fie m_1 şi m_2 masele a două corpuri grele şi $\vec{r}_{12}$ vectorul de poziţie al lui m_2 în raport cu m_1. Conform legii atracţiei universale a lui Newton, corpurile se atrag cu o forţă proporţională cu produsul maselor lor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele.
Forţa $\overrightarrow{F}_{21}$ cu care m_1 acţionează asupra lui m_2 este

$$\overrightarrow{F}_{21} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}_{12}}{r}, \tag{1}$$

unde $G = 6.668 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ este constanta atracţiei gravitaţionale, $r = ||\vec{r}_{12}||$ distanţa dintre corpuri şi $\frac{\overrightarrow{r}_{12}}{r}$ versorul vectorului $\overrightarrow{r}_{12}$.

Mişcarea planetelor sistemului solar

Soarele, planetele, Luna sunt corpuri grele, de aceea pentru a le explica mişcarea folosim legea atracţiei universale.
Dacă distanţa dintre corpuri este foarte mare în raport cu dimensiunile lor, dacă ele au simetrie sferică şi masa este uniform distribuită în interiorul lor, le putem considera a fi puncte materiale.
Presupunem că întreaga masă a lor este concentrată în centrul de masă şi distanţa dintre corpuri este egală cu distanţa dintre centrele de masă.
Soarele şi planetele din sistemul solar îndeplinesc aceste condiţii, de aceea pentru a explica mişcarea de revoluţie a planetelor, ele sunt considerate puncte materiale.

Legile lui Kepler

Rezolvând problema celor două corpuri regăsim legile lui Kepler. Ele au fost deduse empiric la începutul secolului al XVII-lea de Johannes Kepler, în urma analizei poziţiilor precise ale planetei Marte, determinate din observaţii de Tycho Brahe în a doua jumătate a secolului al XVI-lea.

Legea I-a: *Planetele se mişcă în jurul Soarelui pe* ***elipse****, cu Soarele aflat într-unul dintre focare.*

Observaţie

Dacă rezolvăm problema celor două corpuri obţinem că acestea descriu ***secţiuni conice*** *(elipse, parabole sau un arc de hiperbolă) în jurul centrului comun de masă.*

Care sunt elementele unei elipse?

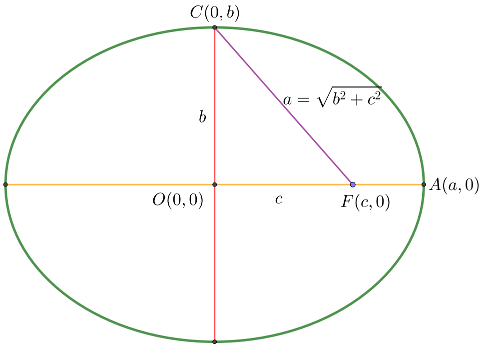


Figura: Semiaxele elipsei.

- Segmentul $OA = a$ este **semiaxa mare**, iar $OC = b$ este **semiaxa mică.**
- **Distanţa focală**, notată cu c sau f, este

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- **Excentricitatea**, **e**, este

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Observaţie

Observăm că e $\in (0, 1)$.
Cu cât excentricitatea elipsei ***e*** *este mai mare cu atât elipsa este mai alungită.*
Când ***e=0*** *se obţine un* ***cerc****. În acest caz, focarele coincid cu punctul O, centrul elipsei. Semiaxele elipsei devin egale cu raza cercului.*
Când ***e=1*** *se obţine o* ***parabolă****.*

Ce înseamnă periheliu sau afeliu?

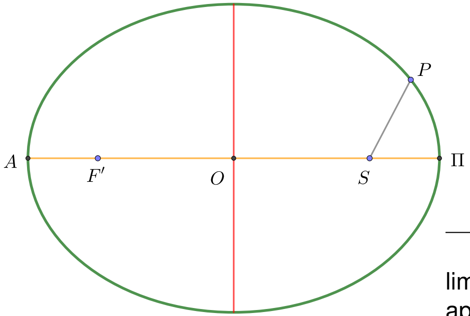


Figura: Soarele **S**, **periheliul** Π şi **afeliul A** de pe orbita planetei **P**.

- Cel mai apropiat punct de Soare de pe orbita planetei, Π, se numeşte *periheliu*[a].
- Cel mai îndepărtat punct de Soare de pe orbita planetei, *A*, se numeşte *afeliu*[b].

[a] Cuvânt compus, provenit din limba greacă *peri*=cel mai apropiat, *Helios* este numele grecesc al Soarelui.

[b] Cuvânt compus, provenit din limba greacă, de la *apo*=cel mai îndepărtat de Soare şi *Helios*.

Ce este linia apsidelor?

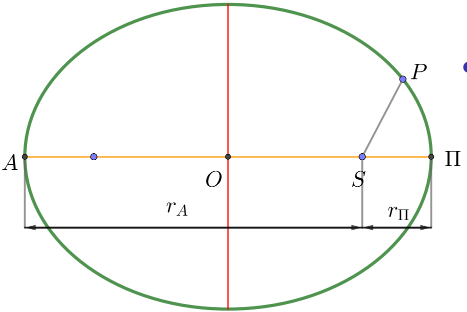


Figura: Linia apsidelor $A\Pi$

- Dreapta determinată de afeliu A şi periheliu Π se numeşte *linia apsidelor*.
- Distanţa Soare - planetă la periheliul orbitei sale este minimă

$$r_\Pi = a(1-e),$$

iar când ea se află la afeliu este maximă

$$r_A = a(1+e).$$

Ce spun legile lui Kepler?

Legea a II-a a lui Kepler (1609)

Legea a II-a: *În intervale de timp egale, segmentul determinat de Soare şi planetă, notat SP, descrie (sau mătură) arii egale.*

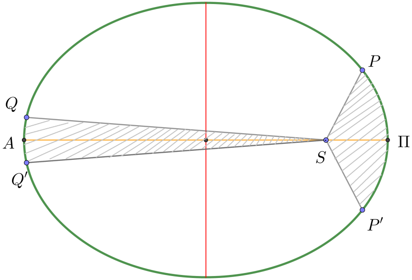


Figura: Legea ariilor

Ce consecinţă are legea a II-a a lui Kepler?

Mişcarea în jurul Soarelui a corpurilor sistemului solar, este neuniformă.
Mărimea vitezei planetei este dată de

$$v = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T \cdot r}, \tag{2}$$

unde $r = |SP|$ este distanţa de la planetă la Soare

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{3}$$

iar T este perioada de revoluţie în jurul Soarelui, iar $\theta = m(\widehat{\Pi SP})$.

Legea a III-a: *Pătratul perioadei siderale a planetelor care se mişcă în jurul Soarelui este proporţional cu cubul semiaxelor mari ale orbitelor descrise de acestea*

$$\frac{T_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \tag{4}$$

unde T_p *este perioada siderală a planetei, iar* a_p *semiaxa mare a orbitei ei,* G *constanta atracţiei universale şi* $M_\odot$ *masa Soarelui.*

Forma redusă a legii a III-a a lui Kepler

pentru mişcarea în jurul Soarelui

Dacă notăm cu T perioada orbitală a corpului în jurul Soarelui, exprimată în ani siderali, şi cu a semiaxa mare a orbitei sale, exprimată în unităţi astronomice, atunci, legea a treia a lui Kepler se poate scrie sub forma

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_\oplus^2}{a_\oplus^3} = 1\,, \tag{5}$$

pentru că $T_\oplus = 1$ an sideral, iar $a_\oplus = 1$ unitate astronomică.

Legea a treia exactă a lui Kepler

Legea a III-a exactă: *Pătratul perioadei de revoluţie a corpului m_1, respectiv m_2, creşte proporţional cu semiaxa mare a orbitei sale şi invers proporţional cu suma maselor corpurilor din sistem.*

Adică

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{6}$$

unde T_i, $i \in \{1, 2\}$, sunt perioadele de revoluţie a celor două corpuri în jurul centrului comun de masă, a_i, $i \in \{1, 2\}$, semiaxele mari ale orbitelor, iar m_i, $i \in \{1, 2\}$, masele celor două corpuri.

Când folosim legea a treia exactă?

Observaţie

Dacă corpurile m_1 şi m_2 au mase comparabile folosim legea a treia a lui Kepler exactă.

Un exemplu este un sistem de stele binar, în care componentele au mase comparabile.

- **Planetos** = **rătăcitor** (gr.). Planetele se mişcă printre stele.
- Astronomii antichităţii considerau 7 *planete*: Soarele, Luna, Mercur, Venus, Marte, Jupiter şi Saturn, corpuri cereşti care au dat numele zilelor săptămânii.

Mişcarea geocentrică a planetelor

Definiţie

Mişcarea planetelor observată de pe Pământ este numită **mişcare geocentrică**.

- Pentru a explica mai uşor mişcarea planetelor văzută de pe Pământ presupunem că planete şi Pământul se mişcă pe cercuri situate în planul eclipticii.
- În funcţie de poziţia orbitei planetei faţă de cea terestră planetele se împart în planete *interioare* şi *exterioare*. Planetele interioare se mişcă între Soare şi Pământ, iar cele exterioare în afara orbitei terestre.

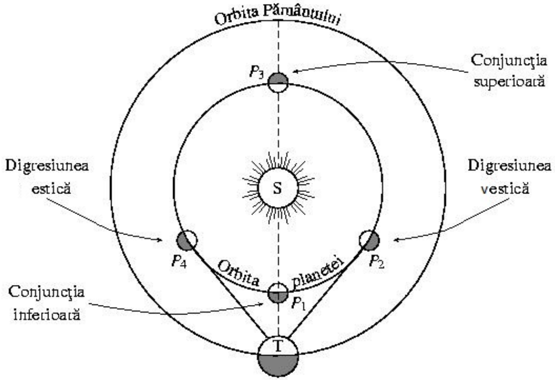
Planete interioare ($a < 1$u.a.)

Definiţie

Unghiul Soare-Pământ-planetă se numeşte elongaţia planetei.

- Observate de pe Pământ, Mercur şi Venus se văd mereu în vecinătatea Soarelui.
- Valoarea maximă a elongaţiei planetelor interioare se atinge când direcţia Pământ-planetă este tangentă orbitei descrise de planetă, *i.e.* este unghiul sub care se vede raza orbitei planetei de pe Pământ.

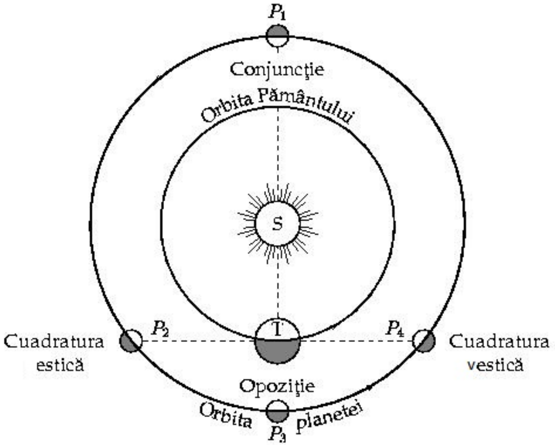
Configuraţii ale planetelor interioare



Planetele exterioare ($a > 1$u.a.)

- Planetele Marte, Jupiter, Saturn, Uranus şi Neptun au orbitele în afara orbitei terestre.
- Elongaţia planetelor exterioare variază între 0° şi 360°, *i.e.* că, în anumite perioade ale anului, aceste planete pot fi văzute la orice oră din noapte.

Configuraţii ale planetelor exterioare



Perioada sinodică

Definiţie

Timpul scurs între două configuraţii consecutive de acelaşi tip ale unei planete în raport cu Soarele, observate de pe Pământ se numeşte **perioada sinodică** a planetei.

Observaţie

Presupunem că planeta şi Pământul descriu orbite circulare situate în planul eclipticii.

Perioada sinodică

Fie T_1 şi T_2, $T_1 < T_2$, perioadele orbitale ale planetelor.

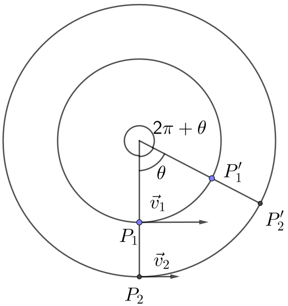


Figura: Perioada sinodică a planetei

- Presupunem că planetele pleacă din P_1, P_2. Ele vor fi din nou aliniate după o perioadă sinodică S, în P_1', P_2'.
- Planetele se mişcă cu vitezele unghiulare

$$n_i = 2\pi / T_i \, , i = \overline{1,2}.$$

- În intervalul de timp S, prima planetă a parcurs unghiul $2\pi + \theta$, iar a doua unghiul θ.

Aşadar pentru prima planetă are loc

$$2\pi + \theta = n_1 \cdot S$$

iar pentru a doua

$$\theta = n_2 \cdot S$$

relaţii din care, după înlocuirea vitezelor unghiulare ale planetelor, obţinem

$$2\pi + \frac{2\pi}{T_2} \cdot S = \frac{2\pi}{T_1} \cdot S \quad | : (2\pi S)$$

După efectuarea împărţirii şi simplificarea expresiei găsim

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \ . \tag{7}$$

Perioada sinodică a planetelor interioare

Pentru o **planetă interioară** T_1 este perioada orbitală a planetei (T_{pl}), T_2 este perioada orbitală terestră ($T_{\oplus}$), iar **perioada sinodică** a planetei, S, se calculează cu ajutorul formulei

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{pl}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \ . \tag{8}$$

Perioada sinodică a planetelor exterioare

În cazul **planetelor exterioare** $T_1 = T_\oplus$, $T_2 = T_{pl}$, iar **perioada sinodică** S este dată de formula

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_{pl}} \ . \tag{9}$$

Orbitele planetelor din sistemul solar

- În prima aproximaţie mişcarea corpurilor din sistemul solar poate fi descrisă cu ajutorul legilor lui Kepler.
- Mişcarea planetelor este plană, orbitele lor se află în plane înclinate cu cel mult $i = 3^\circ$ faţă de ecliptică. Excepţie Mercur: $i = 7^\circ$.
- Planetele se mişcă pe orbită de la apus la răsărit, sens considerat *direct* în astronomie.
- Orbitele planetelor mari sunt aproape circulare ($e < 0.1$). Excepţie Mercur $e = 0,21$.

Legea Titius-Bode

Semiaxa mare a orbitelor planetelor sistemului solar, exprimată în unităţi astronomice, se obţine cu ajutorul formulei de recurenţă:

$$a_n(\text{ u.a.}) = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n \tag{10}$$

unde $n = -\infty, 0, 1, 2, ..., 6$.

Semiaxele mari ale planetelor interioare

- $n = -\infty$ obţinem a(u.a.) $= 0,4$, valoarea aproximativă a semiaxei mari a planetei Mercur ($a_M = 0,38$ u.a).
- $n = 0$ - $a = 0,7$ u.a., valoare aproximativă pentru distanţa medie de la Soare la Venus (0,72 unităţi astronomice).
- $n = 1$, a(u.a.) $= 1$ semiaxa mare a orbitei terestre, $n = 2$ obţinem a(u.a.) $= 1,6$, valoarea aproximativă a semiaxei mari a planetei Marte ($1,52$ u.a).

Descoperirea brâului principal de asteroizi

Pe când s-a publicat legea Titius-Bode la distanţa corespunzătoare lui $n = 3$, $a = 2,8$ unităţi astronomice de Soare, nu se cunoştea nici o planetă.
În 1800, încurajaţi de descoperirea planetei Uranus la o distanţa medie de Soare apropiată de cea dată de legea Titius-Bode, astronomii au început căutarea planetei dintre Marte şi Jupiter, acţiune care a dus descoperirea *brâului principal de asteroizi*.