Aplicații ale teoremei maximului modulului

1. Să se demonstreze Lema lui Schwarz:
Dacă $f \in \mathcal{H}(U(0,1))$ satisface $f(0)=0$ și $|f(z)|<1$, $\forall z \in U(0,1)$, atunci $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in U(0,1)$, și $|f'(0)| \leq 1$. Dacă, în plus, $\exists z_0 \in \dot{U}(0,1)$ a.î. $|f(z_0)| = |z_0|$ sau $|f'(0)| = 1$, atunci $\exists \lambda \in \partial U(0,1)$ a.î. $f(z) = \lambda z$, $\forall z \in U(0,1)$.

Soluție: Fie $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \dot{U}(0,1) \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$.

Avem $g \in \mathcal{H}(\dot{U}(0,1)) \cap C(U(0,1))$, deci $g \in \mathcal{H}(U(0,1))$.
Fie $r \in (0,1)$. Teorema maximului modulului implică $\max\limits_{z \in \overline{U(0,r)}} |g(z)| = \max\limits_{z \in \partial U(0,r)} |g(z)| = \frac{1}{r} \max\limits_{z \in \partial U(0,r)} |f(z)|$
$\leq \frac{1}{r}$ (din ipoteză).

Trecând la limită $r \nearrow 1$, deducem că
$$|g(z)| \leq 1, \ \forall z \in U(0,1).$$

Deci $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in U(0,1)$, și $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Dacă $\exists z_0 \in U(0,1)$ a.î. $|g(z_0)| = 1$ (adică $\exists z_0 \in \dot{U}(0,1)$ a.î. $|f(z_0)| = |z_0|$ sau $|f'(0)| = 1$), atunci Teorema maximului modulului implică $g \equiv$ constantă.

Deci $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ a.î. $f(z) = \lambda z$, $\forall z \in U(0,1)$.

Deoarece $|g(z_0)| = |\lambda| = 1$, avem $\lambda \in \partial U(0,1)$.

② Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$.

Să se demonstreze:

a) dacă $|f|$ are un punct de maxim local în D, atunci $f \equiv$ constantă.

b) dacă $\operatorname{Re} f$ are un punct de extrem local în D, atunci $f \equiv$ constantă.

Soluție:

a) Fie $z_0 \in D$, $r > 0$ a.î. $U(z_0, r) \subset D$ și $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in U(z_0, r)$.

Atunci Teorema maximului modulului implică $f|_{U(z_0,r)} \equiv$ constantă. Teorema identității funcțiilor olomorfe implică $f \equiv$ constantă (pe D), deoarece $U(z_0, r)$ are puncte de acumulare.

b) Folosind Consecința 3 a Teoremei maximului modulului și argumente similare cu cele de la a), deducem că f este constantă pe un disc din D, deci f este constantă pe D (pe baza Teoremei identității funcțiilor olomorfe).

Puncte singulare izolate

③ Să se determine natura punctelor singulare izolate pentru următoarele funcții:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

c) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

d) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

e) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$

f) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Soluție:

a) $z_0 = 0$ punct singular izolat pentru f
($\exists r > 0$ a.î. $\dot{U}(0,r) \subset \mathbb{C}^*$).

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow z_0 = 0$ este eliminabil pentru f.

b) $z_0 = 0$ punct singular izolat pentru f.

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z^2} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} \cdot \frac{\sin z}{z} = \infty \Rightarrow z_0 = 0$ este pol pentru f.

Fie $g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \in \mathbb{C}^* \\ 1, & z = 0 \end{cases}$.

$g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*) \cap C(\mathbb{C}) \Rightarrow g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$f(z) = \frac{g(z)}{z - 0}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, și $g(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = 0$ este pol de ordinul I.

c) $z_0 = 0$ și $z_1 = 1$ sunt puncte singulare izolate pentru f.

$\lim\limits_{z \to 1} f(z) = \lim\limits_{z \to 1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z} = \infty \Rightarrow z_1 = 1$ este pol pentru f.

Fie $g(z) = -e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

$f(z) = \frac{g(z)}{z-1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ și $g(1) = -e \neq 0$

$\Rightarrow z_1 = 1$ este pol de ordinul I.

$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-z} = \lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$, dar

$\nexists \lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$, deoarece:

$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{2n\pi i}}} = \lim_{n \to \infty} e^{2n\pi i} = 1$

$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \to \infty} e^{n} = \infty$.

Deci, $z_0 = 0$ este punct esențial izolat pentru f.

d) $z_1 = -\frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2}$ sunt puncte singulare izolate pentru f.

$$\lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos z - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{z - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{-\pi} \cdot \cos'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-\pi}\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{z + \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cos z - \cos\frac{\pi}{2}}{z - \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

Deci $z_1 = -\frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2}$ sunt puncte eliminabile.

e) $z_0 = 0$ este punct singular izolat pentru f.

$\lim\limits_{z \to 0} \sin \frac{1}{z}$ nu există, pentru că:

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim_{n \to \infty} \sin(n\pi) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Deci, $z_0 = 0$ este punct esențial izolat.

f) $z_0 = 0$ este punct singular izolat pentru f.

Avem dezvoltarea în serie Taylor pentru sin: $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \dots$, $\forall y \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} + \dots$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

Deci,

$f(z) = \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} + \dots - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + z$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

dezvoltarea în serie Laurent a lui f în jurul lui $z_0 = 0$. Partea principală are o infinitate de termeni nenuli, deci $z_0 = 0$

este punct esențial izolat.

(4) Să se calculeze reziduul funcției f,
$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, în punctul $z_0 = 0$.

Soluție:

Avem: $e^{\zeta} = 1 + \frac{1}{1!}\zeta + \frac{1}{2!}\zeta^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\zeta^n + \ldots, \forall \zeta \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z} + 1, \forall z \in \mathbb{C}^*$.

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \forall z \in U(0,1)$.

Deci, f se dezvoltă în serie Laurent în jurul lui $z_0 = 0$ în $\dot{U}(0,1) = \mathbb{C}^* \cap U(0,1)$:

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad \forall z \in \dot{U}(0,1),$$

unde

$$a_{-1} = 1\cdot\frac{1}{1!} + 1\cdot\frac{1}{2!} + \ldots + 1\cdot\frac{1}{n!} + \ldots$$
$$= e^1 - 1.$$

Deci, $\text{Rez}(f; 0) = a_{-1} = e - 1$.