Analiza complexă (Notițe de curs)

Material bibliografic pentru cursurile 2-3.

Proiecția stereografică

În cele ce urmează vom realiza o compactificare a planului complex $\mathbb{C}$ prin adăugarea unui punct notat cu ∞, astfel ca $\infty \notin \mathbb{C}$ dar $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ va fi un spațiu topologic compact.

$\mathbb{C}_\infty$ se numește planul complex extins.

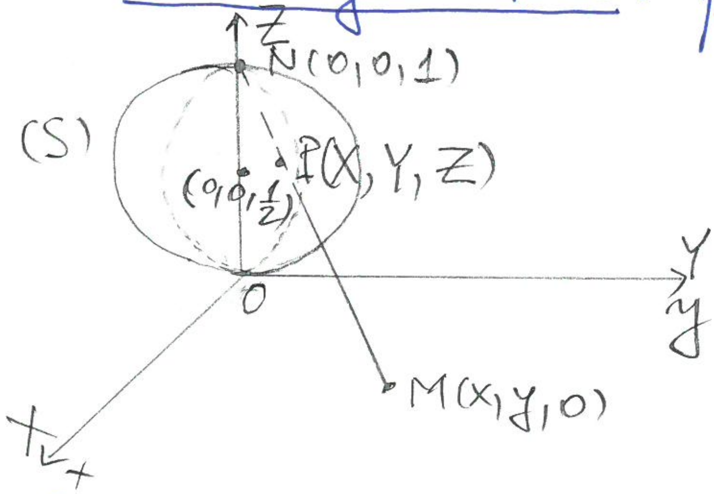
⊙ $\infty \notin \mathbb{C}$, dar vom extinde operațiile de adunare și înmulțire din $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}_\infty$, astfel:

$$\infty + a = a + \infty := \infty, \ \forall a \in \mathbb{C}$$

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty := \infty, \ \forall a \in \mathbb{C}^*$$

Nu au sens operațiile: $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$.

Model geometric: proiecția stereografică



$$(S)\ (X-0)^2+(Y-0)^2+\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$N(0,0,1)$ – polul nord al sferei (S).

Identificăm planul complex $\mathbb{C}$ cu planul XOY.

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ considerăm sfera (S) de ecuație:

$$(S)\ (X-0)^2+(Y-0)^2+\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}. \quad \text{(sfera lui Riemann)}$$

⊙ Se observă că oricărui punct $z = x+iy \in \mathbb{C}$

corespunde în mod unic un punct $P(X,Y,Z) \in S \setminus \{N\}$.

Într-adevăr, dacă $z = x+iy$ este afixul punctului $M(x,y,0)$, atunci dreapta NM intersectează pe $S\setminus\{N\}$ într-un singur punct $P(X,Y,Z)$.

Se obține astfel o bijecție φ între planul complex $\mathbb{C}$ și $S\setminus\{N\}$.

Deci $\varphi : \mathbb{C} \to S\setminus\{N\}$, $\varphi(z) = P(X,Y,Z) \in S\setminus\{N\}$.

⊙ $N(0,0,1) \longmapsto \infty \notin \mathbb{C}$.

∞ = punctul de la infinit

$\boxed{\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$ – planul complex extins.

(P1) Fie $\varphi : \mathbb{C} \to S\setminus\{N\}$ bijecția definită anterior. Atunci are loc relația:

$$(1)\quad \varphi(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstrație: Fie $z = x+iy \in \mathbb{C}$ afixul punctului $M(x,y,0)$, iar $P(X,Y,Z) \in NM \cap (S\setminus\{N(0,0,1)\})$.

Se observă că

$$(S)\quad X^2+Y^2+Z^2-Z=0, \qquad (2)$$

iar ecuația dreptei NM este:

$$\boxed{(NM)\quad \frac{X-0}{x-0} = \frac{Y-0}{y-0} = \frac{Z-1}{0-1}.} \qquad (3)$$

Deci, $X = x(1-Z)$, $Y = y(1-Z)$, iar din (2) obținem că

$$x^2(1-Z)^2 + y^2(1-Z)^2 + Z(Z-1) = 0 \ \Big| : 1-Z \underset{\substack{\uparrow \\ P \neq N}}{\neq} 0$$

Cum $P \neq N$, avem că $Z \neq 1$, iar din egalitatea precedentă, deducem că

$$(x^2+y^2)(1-Z)-Z=0,$$

adică $Z=\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}=\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

De aici rezultă că

$$X=x(1-Z)=\frac{x}{1+|z|^2}=\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}$$

și

$$Y=y(1-Z)=\frac{y}{1+|z|^2}=\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}. \qquad \underline{\underline{ok}}.$$

<u>Obs</u>: Fie $\varphi: \mathbb{C} \to S\setminus\{N\}$ bijecția dată de (1). Atunci $\varphi^{-1}: S\setminus\{N\} \to \mathbb{C}$, $\varphi^{-1}(X,Y,Z)=z$, unde

$$\boxed{z=\frac{X}{1-Z}+i\frac{Y}{1-Z}}.$$

Într-adevăr, din (3) avem că

$$x=\frac{X}{1-Z} \text{ și } y=\frac{Y}{1-Z} \Rightarrow z=x+iy=\frac{X+iY}{1-Z}.$$

<u>Def 1</u>. Fie $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}_\infty \to S$, $\tilde{\varphi}(z)=\begin{cases}\varphi(z), & z\in\mathbb{C}\\ N(0,0,1), & z=\infty.\end{cases}$

<u>$\tilde{\varphi}$ se numește proiecția stereografică.</u>

<u>Topologizarea planului complex extins $\mathbb{C}_\infty$</u>

⊙ Fie $P(X,Y,Z)\in S\setminus\{N\}$. Atunci

$$\|PN\|:=\sqrt{(X-0)^2+(Y-0)^2+(Z-1)^2}=\sqrt{\underbrace{X^2+Y^2+Z^2}_{=Z}-2Z+1}$$

$$\underset{(1)}{=}\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \Rightarrow \left[\|PN\|\to 0 \iff |z|\to+\infty\right].$$

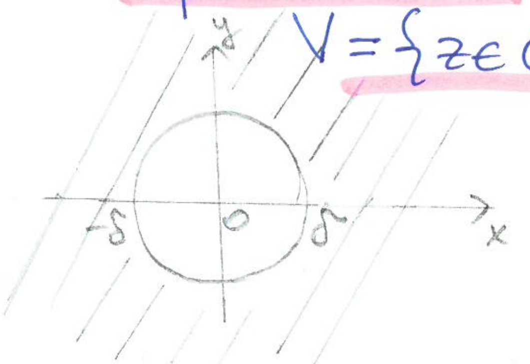
Fie $r\in(0,1)$ și $P(X,Y,Z)\in S\setminus\{N\}$ cu $Z>r$.

Deci $\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}>r \iff |z|>\rho$, unde

$\rho = \sqrt{\frac{r}{1-r}}$. Deci, dacă $P(X,Y,Z) \in S \setminus \{N\}$ astfel ca $Z > r$, atunci $z = \varphi^{-1}(P(X,Y,Z)) \in \mathbb{C}$ şi $|z| > \sqrt{\frac{r}{1-r}}$.

Def 2. Fie $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$. Spunem că V e o vecinătate a punctului ∞ dacă $\exists\, \delta > 0$ astfel încât

$$V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \delta\} \cup \{\infty\}.$$



E clar că dacă $W \subseteq \mathbb{C}_\infty$ astfel ca $W \supseteq V$, atunci W este vecinătate a lui ∞.

⊙ Aşadar, exterioarele cercurilor centrate în origine sunt vecinătăţi reduse ale punctului de la ∞.

Notăm cu $\mathcal{V}(\infty)$ familia vecinătăţilor lui ∞.

Obs: Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un şir de numere complexe.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \forall\, V \in \mathcal{V}(\infty),\ \exists\, n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $z_n \in V \cap \mathbb{C},\ \forall\, n \geq n_V \iff$

$\iff \forall\, r > 0,\ \exists\, n_r \in \mathbb{N}$ astfel ca $|z_n| > r,\ \forall\, n \geq n_r$

$\iff |z_n| \longrightarrow +\infty \iff \forall\, r > 0,\ \exists\, n_r \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left|\frac{1}{z_n}\right| < \frac{1}{r},\ \forall\, n \geq n_r \iff \frac{1}{z_n} \longrightarrow 0$.

Deci (important): $z_n \longrightarrow \infty \iff |z_n| \to +\infty \iff \frac{1}{z_n} \to 0$.

Ex: Fie $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \neq 1$. Dacă $|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, iar dacă $|z| > 1 \Rightarrow z^n \to \infty$.

Distanţa (metrica) cordală

Def 3. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty$, $P_j = \tilde{\varphi}(z_j)$, $j = \overline{1,2}$; $P_j(X_j, Y_j, Z_j) \in S$, $j = \overline{1,2}$.

$$d_c(z_1, z_2) := \|P_1 P_2\| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}.$$

Se verifică imediat că

$$d_c(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \forall z_1\in\mathbb{C};\ z_2=\infty\\[2ex] 0, & z_1=z_2=\infty.\end{cases}$$

⊙ $d_c:\mathbb{C}_\infty\times\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{R}_+$, definită de relația precedentă, se numește distanța (metrica) cordală.

<u>Obs</u>: (i) Deoarece $d_c(z_1,z_2)=\|P_1P_2\|$, unde

$$P_j(X_j,Y_j,Z_j)=\tilde{\varphi}_j(z_j),\ j=\overline{1,2},$$

iar $\|\cdot\|$ este norma euclidiană în $\mathbb{R}^3$, rezultă că d_c este o metrică veritabilă pe $\mathbb{C}_\infty$.

(ii) Fie $d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$, $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Atunci metricile d și d_c sunt echivalente pe mulțimile mărginite în $\mathbb{C}$.

<u>Dem</u>. Într-adevăr, fie $A\subset\mathbb{C}$ mărginită $\Rightarrow\exists r>0$, astfel încât $A\subseteq U(0,r)$. Dacă $z_1,z_2\in A$, atunci

$$|z_1-z_2|\geq d_c(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}\geq\frac{|z_1-z_2|}{1+r^2},$$

deci

$$\alpha d(z_1,z_2)\leq d_c(z_1,z_2)\leq d(z_1,z_2),\ \forall z_1,z_2\in A,$$

unde $\alpha=\dfrac{1}{1+r^2}$. Relația precedentă arată că d și d_c sunt echivalente pe A. <u>OK</u>

(iii) Fie $\tilde{\varphi}:\mathbb{C}_\infty\to S$ proiecția stereografică. Se poate arăta că $\tilde{\varphi}$ este un <u>omeomorfism</u> (bijecție + bicontinuă) între $\mathbb{C}_\infty$ și S.

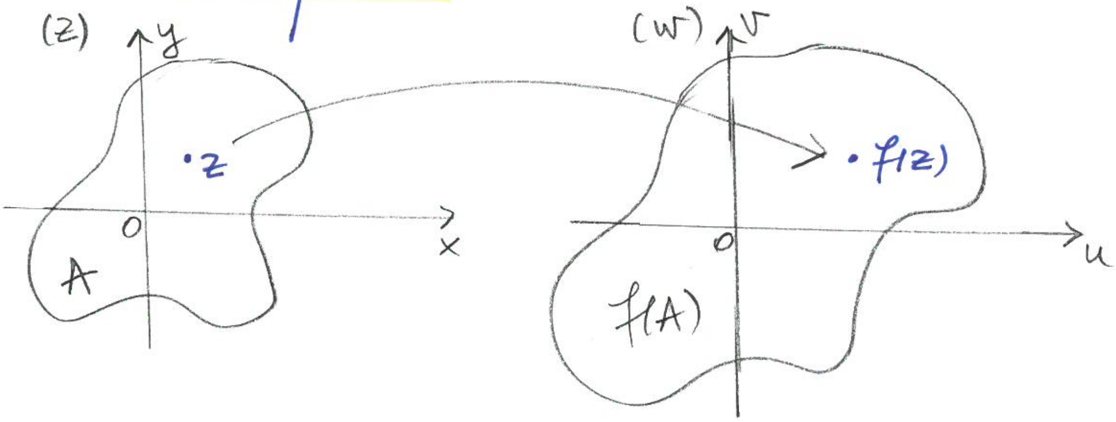
Deoarece $S\subset\mathbb{R}^3$ compactă $\Rightarrow(\mathbb{C}_\infty,d_c)=$ spațiu metric compact (deci complet).

(iv) Cercurilor de pe sfera S le corespund prin proiecția stereografică cercuri în sens larg (cercuri sau drepte). Mai precis, cercurile de pe S care conțin polul nord $N(0,0,1)$ se transformă în drepte, iar celelalte cercuri de pe S se transformă în cercuri obișnuite (seminar).

⊙ Dreptele în $\mathbb{C}_\infty$ = cercurile din $\mathbb{C}_\infty$ care trec prin

Funcții complexe de o variabilă complexă

Def 1. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Funcția $f: A \to \mathbb{C}$ ($f(z) \in \mathbb{C}, \forall z \in A$) se numește funcție complexă de o variabilă complexă.



Fie $z = x + iy \in A$ și $f(z) = u(z) + i v(z)$.

Not: $u = \operatorname{Re} f$ – partea reală a funcției f

$v = \operatorname{Im} f$ – partea imaginară a funcției f

Deci $u, v: A \to \mathbb{R}$.

Dar $z = x + iy = (x, y) \in A \Rightarrow f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$.

Deci funcțiile u și v pot fi considerate și ca funcții reale de variabilele reale x și y.

⊙ Funcția $f: A \subseteq \mathbb{C} \to f(A)$ este o transformare punctuală a mulțimii A din planul (z) în planul (w).

<u>Def 2</u>. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ nevidă, $z_0 \in A'$, $l \in \mathbb{C}$ și $f: A \to \mathbb{C}$.
Funcția f are limita l în z_0 dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât

$$\forall z \in A \text{ cu } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

<u>Not</u>: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ sau $f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} l$.

<u>Obs</u>: (i) Fie $l \in \mathbb{C}$, $z_0 \in A'$, $f: A \to \mathbb{C}$. Atunci

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l \text{ și } \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re} l \text{ și } \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im} l,$$

unde $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $\forall z = x + iy \in A$.

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C} \Leftrightarrow [\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{z_0\}$ cu

$z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to l]$.

<u>Def 3</u>. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ și $f: A \to \mathbb{C}$. Funcția f e continuă în z_0 dacă $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
Funcția f e continuă pe A dacă f e continuă în $\forall z \in A$.

<u>Obs</u>: f e continuă în $z_0 \Leftrightarrow$ funcțiile u și v sunt continue în z_0, unde $u = \operatorname{Re} f$ și $v = \operatorname{Im} f$.

<u>Def 4</u>. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in A'$ și $f: A \to \mathbb{C}$. Funcția f are limita ∞ în z_0 (notăm $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$) dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât

$$\forall z \in A \text{ cu } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon.$$

<u>Obs</u>: (i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow [\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{z_0\}$ cu

$z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to \infty]$.

(ii) $\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0}$.

(iii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Def 5. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Funcția f are limita ∞ în punctul ∞ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)$, $\exists W \in \mathcal{V}(\infty)$ astfel încât $f(W \cap \mathbb{C}) \subseteq V \cap \mathbb{C}$.

Notăm: $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Obs: (i) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Longleftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon]$.

(ii) Dacă există una din limitele următoare, atunci există și cealaltă și are loc relația:

$$\boxed{\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

(iii) Operațiile cu limite de funcții complexe de o variabilă complexă sunt similare celor de pe $\mathbb{R}$.

Derivabilitate în $\mathbb{C}$

I) Cazul funcțiilor complexe de o variabilă reală

Def 1. Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ deschisă, $f: J \to \mathbb{C}$, $t_0 \in J$. Funcția f e derivabilă în punctul t_0 dacă

$$\exists \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} := f'(t_0) \in \mathbb{C}.$$

Obs. Fie $f: J \to \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + i v(t)$, $\forall t \in J$.

Atunci

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} + i\,\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0},$$

$\forall t \in J \setminus \{t_0\}$. Trecând la limită în egalitatea de mai sus, obținem că

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} + i\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

deci f e derivabilă în t_0 $\Leftrightarrow$ u și v sunt derivabile în t_0. În plus,

$$\boxed{f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0)}$$

II) Cazul funcțiilor complexe de o variabilă complexă

Def 1. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ mulțime deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Funcția f este derivabilă în punctul $z_0 \in G$ dacă există în $\mathbb{C}$ limita:

$$(1)\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = l \in \mathbb{C}.$$

Not: $l = f'(z_0)$ – derivata funcției f în z_0.

Def 2. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $z_0 \in G$, $f: G \to \mathbb{C}$. Funcția f este $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0 dacă $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ și $g: G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ astfel încât $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ și

$$(2)\quad f(z) = f(z_0) + \alpha(z-z_0) + g(z)(z-z_0),\ \forall z \in G \setminus \{z_0\}.$$

<u>Def 3</u>. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Funcția f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 dacă funcțiile u și v sunt diferențiabile în (x_0, y_0).

An loc următoarele rezultate:

(P1) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f : G \to \mathbb{C}$, $z_0 \in G$. Atunci f este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă f este $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0.

<u>Demonstrație</u>. "$\Rightarrow$" Admitem că f e derivabilă în z_0. Fie $\alpha = f'(z_0)$ și $g : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha, \ \forall z \in G \setminus \{z_0\}.$$

Atunci $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$ și $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$, $\forall z \in G \setminus \{z_0\}$.

Deci f e $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0.

"$\Leftarrow$" Dacă f este $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0, atunci $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ și $g : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ cu $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, astfel încât are loc relația (2). Atunci

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + g(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \alpha \in \mathbb{C},$$

deci f e derivabilă în z_0 și $f'(z_0) = \alpha$.

<u>Obs</u>. Din demonstrația precedentă rezultă că f e derivabilă în $z_0 \Leftrightarrow f$ e $\mathbb{C}$-diferențiabilă în z_0. În plus, $f'(z_0) = \alpha$, unde α este constanta din egalitatea (2).

<u>Obs</u>: Există funcții $\mathbb{R}$-diferențiabile care <u>nu</u> sunt derivabile (deci $\mathbb{C}$-diferențiabile).

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z} \Rightarrow f$ este $\mathbb{R}$-diferențiabilă

pe $\mathbb{C}$, dar f nu e derivabilă în niciun punct $z \in \mathbb{C}$.

Rezultatul următor furnizează o condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție $\mathbb{R}$-diferențiabilă într-un punct să fie derivabilă în același punct.

(T1) (Cauchy-Riemann) (caracterizare a derivabilității)

Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ mulțime deschisă, $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Atunci funcția f este derivabilă în punctul z_0 dacă și numai dacă f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și au loc relațiile:

$$(3) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

⊙ (3) - sistemul Cauchy-Riemann în z_0 (condițiile Cauchy-Riemann în z_0).

Bibliografie: [1], [2], [4], [7], [8].