Analiza complexă (Notițe de curs)

Material litografiat pentru cursul 10

În continuare vom arăta că funcțiile olomorfe pe mulțimi deschise în $\mathbb{C}$ sunt nelimitat derivabile iar singurele funcții întregi și mărginite pe $\mathbb{C}$ sunt funcțiile constante. Pentru aceasta, avem nevoie de câteva rezultate esențiale referitoare la integrale complexe care depind de un parametru.

⊙ Integrale complexe depinzând de un parametru

Def 1. Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un drum rectificabil și $\varphi : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă pe suportul $\{\gamma\}$ al drumului γ. Considerăm funcția

$\Phi : \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{C}$,

$$(1) \quad \Phi(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}.$$

⊙ $\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ - integrală complexă (Cauchy) ce depinde de parametrul $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ (integrala de tip Cauchy).

(P1) Funcția Φ definită de relația (1) este bine definită și e nelimitat derivabilă pe $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. În plus, au loc egalitățile următoare:

$$(2) \quad \Phi^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}.$$

Demonstrația acestui rezultat se bazează pe un raționament inductiv (a se vedea [1]).

<u>Caz particular</u>: $\varphi \equiv 1$ și $\gamma_r(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $\forall t \in [0,1]$, unde $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$. Atunci $\{\gamma_r\} = \partial U(z_0, r)$ este conturul circular cu centrul în z_0 și de rază r, parcurs (orientat) în sens direct (trigonometric).

Din (1), avem că $\Phi(z) = \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(z_0, r)$, iar din (2), deducem că

$$(3)\quad \Phi^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(z_0, r), \forall n \in \mathbb{N}.$$

În particular, $\Phi'(z) = \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(z_0, r)$

Pe de altă parte, fie $z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(z_0, r)$ fixat și $p: \mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$, $p(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$. Atunci funcția p are primitive pe $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, deci $\int_{\gamma_r} p(\zeta) d\zeta = 0$, pe baza Teoremei de legătură între primitivă și integrală.

Deci $\Phi'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \partial U(z_0, r)$, de unde rezultă că $\Phi\big|_{U(z_0, r)} =$ constantă. Prin urmare,

$$(4)\quad \Phi(z) = \Phi(z_0), \forall z \in U(z_0, r).$$

Dar $\Phi(z_0) = \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^1 \frac{d\gamma(t)}{\gamma(t) - z_0} = \int_0^1 \frac{2\pi i \cdot re^{2\pi i t} dt}{re^{2\pi i t}} =$

$$= \int_0^1 2\pi i \, dt = 2\pi i.$$

În concluzie, din (4) și relația precedentă, obținem că $\Phi(z) = 2\pi i$, $\forall z \in U(z_0, r)$, deci

$$(5) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \ \forall z \in U(z_0, r),$$

unde $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$.

Cu un efort suplimentar, se poate arăta că

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}(z_0, r), \text{ unde } \{\gamma\} = \partial U(z_0, r).$$

(Formulele lui Cauchy pentru disc)

T1 Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ și $f : \overline{U}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe $U(z_0, r)$ și continuă pe $\overline{U}(z_0, r)$. Atunci f este nelimitat derivabilă pe $U(z_0, r)$ și au loc relațiile:

$$(6) \ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \ \forall z \in U(z_0, r), \ \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}.$$

⊙ (6) = formulele lui Cauchy pentru disc.

Obs: Relațiile (6) sunt echivalente cu următoarele:

$$(6') \ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \ \forall z \in U(z_0, r), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $\partial U(z_0, r)$ este conturul circular centrat în z_0 și de rază r, parcurs o singură dată în sens direct (trigonometric) (cercul orientat în sens direct).

Demonstrația T1. Vom folosi un raționament inductiv.

$\boxed{n=0}$. Fie $z \in U(z_0, r)$ fixat. Arătăm că

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Avem că
$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$
$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z)\int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$
$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta + 2\pi i f(z),$$
unde am folosit faptul că $\int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$, pe baza relației (5).

Mai departe arătăm că $\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$, iar din relațiile precedente și această egalitate, va rezulta că
$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z).$$
Fie $g : U(z_0, r) \to \mathbb{C}$, $g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in U(z_0,r)\setminus\{z\} \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$

Atunci g e derivabilă pe $U(z_0,r)\setminus\{z\}$ și e continuă pe $U(z_0,r)$. Cum $U(z_0,r)$ e un domeniu convex, deducem din Teorema de legătură dintre olomorfie și primitivă că funcția g are primitive pe $U(z_0,r)$. De aici rezultă că $\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0$, $\forall\, \gamma$ contur din $U(z_0,r)$, în conformitate cu Teorema de legătură între primitivă și integrală. În particular, $\int_{\gamma_\rho} g(\zeta)d\zeta = 0$, $\forall\, \rho \in (0,r)$, astfel încât $z \in U(z_0, \rho)$, unde $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$, $\forall\, t \in [0,1]$.

În continuare, alegem un şir strict crescător $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,r)$, astfel încât $z\in U(z_0,r_k)$, $\forall k\in\mathbb{N}$ suficient de mare.

Deoarece $\int_{\gamma_{r_k}} g=0$, $\gamma_{r_k} \rightrightarrows \gamma_r$ $(k\to\infty)$, iar γ_r e un drum rectificabil, deducem că

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\gamma_{r_k}} g=\int_{\gamma_r} g,$$

deci

$$(7)\quad \int_{\gamma_r} g(\zeta)\,d\zeta=0.$$

Pe de altă parte, dacă $\zeta\in\{\gamma_r\}$, atunci $\zeta\neq z$, deci $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$, iar din (7) obţinem că

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=0.$$

Aşadar, (6) are loc pentru $n=0$ şi $z\in U(z_0,r)$.

Fie $\Phi:\mathbb{C}\setminus\{\gamma_r\}\to\mathbb{C}$,

$$\Phi(z)=\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\gamma_r\}.$$

Deoarece f e continuă pe $\overline{U}(z_0,r)$, deducem din Propoziţia 1 că Φ e nelimitat derivabilă pe $\mathbb{C}\setminus\{\gamma_r\}$ şi au loc relaţiile

$$(8)\quad \Phi^{(n)}(z)=n!\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\gamma_r\},\ n\in\mathbb{N}.$$

Dar $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\Phi(z)$, $\forall z\in U(z_0,r)$, deci funcția f e nelimitat derivabilă pe $U(z_0,r)$ și

$$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\Phi^{(n)}(z),\ \forall z\in U(z_0,r),\ n\in\mathbb{N}.$$

În final, din (8) și relația precedentă obținem că

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\ \forall z\in U(z_0,r), n\in\mathbb{N},$$

adică au loc relațiile (6), $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_0\in U(z_0,r)$.

OK

Aplicații ale formulelor lui Cauchy

- În continuare vom prezenta câteva aplicații interesante ale formulelor lui Cauchy pentru disc.

(P2) Fie $G\subseteq\mathbb{C}$ deschisă și $f\in\mathcal{H}(G)$. Atunci f este nelimitat derivabilă pe G (deci $\exists f^{(n)}\in\mathcal{H}(G)$, $\forall n\in\mathbb{N}$).

Demonstrație. Fie $z_0\in G$ arbitrar. Deoarece G e mulțime deschisă în $\mathbb{C}$, $\exists r>0$ astfel încât $\overline{U}(z_0,r)\subset G$. Atunci $f\in\mathcal{H}(U(z_0,r))\cap C(\overline{U}(z_0,r))$, iar din T1 (formulele lui Cauchy pentru disc) deducem că f e nelimitat derivabilă pe discul $U(z_0,r)$. Deci $\exists f^{(n)}(z_0)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

T2 (Morera) Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Dacă funcția f admite primitive pe G, atunci $f \in \mathcal{H}(G)$.

Demonstrație. $\exists\, g \in \mathcal{H}(G)$ astfel încât $g' \equiv f$. Atunci g e nelimitat derivabilă pe G, pe baza Propoziției 2. În particular, $g' \in \mathcal{H}(G)$, adică $f \in \mathcal{H}(G)$.

Combinând Teorema fundamentală a lui Cauchy cu Teorema lui Morera, se obține următoarea consecință importantă.

C1 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f: D \to \mathbb{C}$. Atunci $f \in \mathcal{H}(D)$ dacă și numai dacă f admite primitive pe D.

Demonstrație. Dacă f are primitive, atunci $f \in \mathcal{H}(D)$, pe baza Teoremei lui Morera.

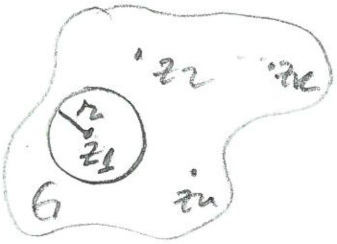
Dacă $f \in \mathcal{H}(D)$, atunci o aplicație a Teoremei fundamentale a lui Cauchy, combinată cu faptul că D este simplu conex, implică imediat că $f \in \mathcal{H}(D)$ (a se vedea Consecința 2 din materialul bibliografic pentru cursul 9).

OK

P3 Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă și $f: G \to \mathbb{C}$. Dacă $\exists\, z_1, \dots, z_n \in G$ astfel încât f e derivabilă pe $G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ și e continuă pe G, atunci $f \in \mathcal{H}(G)$.

Important

<u>Demonstrație</u>. Fie $E=\{z_1,\dots,z_n\}$ și $z_0\in G$ fixat. Arătăm că f e derivabilă în z_0. E suficient



să considerăm cazul $z_0\in E$.

Presupunem că $z_0=z_1$. Fie $r>0$ astfel încât $\overline{U}(z_0,r)\subset G$. Deoarece mulțimea E este finită, deducem că $U(z_0,r)\cap E := F$ - mulțime finită.

Atunci $f\in \mathcal{H}(U(z_0,r)\setminus F)\cap C(F)$, pe baza ipotezei. Dar $U(z_0,r)$ e un domeniu convex, deci f are primitive pe $U(z_0,r)$, în conformitate cu Teorema de legătură între olomorfie și primitivă.

În final, deducem că $f\in\mathcal{H}(U(z_0,r))$, pe baza Teoremei 2 (Teorema lui Morera). În particular, f e derivabilă în z_0. <u>OK</u>

În cele ce urmează prezentăm o altă aplicație a formulelor lui Cauchy.

(T4) (<u>Inegalitățile lui Cauchy</u>)

Fie $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$ și $f:\overline{U}(z_0,r)\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe $U(z_0,r)$ și continuă pe $\overline{U}(z_0,r)$. Fie $M=\max\{|f(z)| : z\in\overline{U}(z_0,r)\}$. Atunci au loc relațiile (<u>inegalitățile lui Cauchy</u>):

$$(9)\quad |f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!\,M}{r^n},\ \forall n\in\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}.$$

<u>Demonstrație</u>. Fie $\gamma_r(t)=z_0+re^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$. Atunci $\{\gamma_r\}=\partial U(z_0,r)$, iar din formulele lui

Cauchy (6) obținem că

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{(\gamma_r(t)-z_0)^{n+1}}\,d\gamma_r(t)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(z_0+re^{2\pi i t})\cdot 2\pi i r e^{2\pi i t}\,dt}{(re^{2\pi i t})^{n+1}}$$

$$= \frac{n!}{r^n}\int_0^1 \frac{f(z_0+re^{2\pi i t})}{e^{2\pi i n t}}\,dt.$$

Prin urmare, am dedus relația

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{r^n}\int_0^1 \frac{f(z_0+re^{2\pi i t})}{e^{2\pi i n t}}\,dt, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

iar de aici rezultă că

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n}\int_0^1 \frac{|f(z_0+re^{2\pi i t})|}{|e^{2\pi i n t}|}\,dt$$

$$= \frac{n!}{r^n}\int_0^1 \underbrace{|f(z_0+re^{2\pi i t})|}_{\le M}\,dt.$$

Dar $|f(z)| \le M$, $\forall z \in \overline{U}(z_0, r)$, deci

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n}\int_0^1 M\,dt = \frac{M\cdot n!}{r^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

OK

Folosind inegalitățile lui Cauchy, putem acum demonstra următorul rezultat interesant.

T3 (Liouville) Dacă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e o funcție întreagă ($f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$) și mărginită pe $\mathbb{C}$, atunci $f \equiv$ constantă.

Demonstrație: $\exists M \geq 0$ astfel încât $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ și $r>0$, alese în mod arbitrar. Atunci $\overline{U}(z_0,r) \subset \mathbb{C}$, deci $f \in \mathcal{H}(U(z_0,r)) \cap C(\overline{U}(z_0,r))$, deoarece f e funcție întreagă. Din relația (9) deducem că

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Cum $r>0$ a fost ales în mod arbitrar, deducem că $|f'(z_0)| \leq \lim\limits_{r\to\infty} \frac{M}{r} = 0$, adică $f'(z_0)=0$.

Așadar, $f'(z_0)=0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$, deci $f \equiv$ constantă.

OK

Obs. Teorema lui Liouville nu este adevărată în cazul funcțiilor derivabile reale de variabilă reală.

Ex: $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, e mărginită, dar nu e constantă.

⊙ Vom da în continuare o demonstrație simplă a Teoremei fundamentale a algebrei, bazată pe aplicabilitatea Teoremei lui Liouville.

P5 (T. fundamentală a algebrei)

Fie $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \forall z \in \mathbb{C}$, unde $a_k \in \mathbb{C}$, $k=\overline{0,n}$, $a_n \neq 0$, iar $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât $p(z_0)=0$.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că $p(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Atunci

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ și $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \dfrac{1}{\lim\limits_{z\to\infty} p(z)} = 0$. Deci $\exists\, r > 0$ astfel încât $|f(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > r$.

Pe de altă parte, $\overline{U}(0,r)$ e un compact iar f e continuă pe $\overline{U}(0,r)$. Prin urmare, f e mărginită pe $\overline{U}(0,r) \Rightarrow \exists M \geq 0$ astfel încât $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \overline{U}(0,r)$.

Așadar, f e mărginită atât pe $\overline{U}(0,r)$ cât și pe $\mathbb{C} \setminus \overline{U}(0,r)$, deci f e mărginită pe $\mathbb{C}$, iar din Teorema lui Liouville rezultă că $f \equiv$ constantă. De aici deducem că $p = \frac{1}{f} \equiv$ constantă $\Rightarrow$ contradicție.

Deci, $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât $p(z_0) = 0$. OK.

⊙ Alte aplicații ale formulelor lui Cauchy la seminar.

Bibliografie: [1], [2], [4], [6], [7].