Seminar 7 Analiză complexă

Funcții armonice

① Fie $G \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $u: G \to \mathbb{R}$ se numește armonică pe G dacă $u \in C^2(G)$ și $\Delta u \equiv 0$, unde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}.$$

① Dacă $f \in \mathcal{H}(G) \Rightarrow \operatorname{Re} f$ și $\operatorname{Im} f$ sunt funcții armonice.

① Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ e un domeniu convex, iar $u: D \to \mathbb{R}$ e o funcție armonică, atunci $\exists\, f \in \mathcal{H}(D)$ astfel ca $\operatorname{Re} f \equiv u$.

Caz particular: $D = \mathbb{C}$ sau $D = U(z_0, r)$.

Problemă: Fie $u: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ o funcție armonică. Să se determine toate funcțiile $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Re} f = u$.

Soluție. Căutăm $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ astfel încât funcțiile u și v să satisfacă sistemul Cauchy-Riemann $\Rightarrow f = u + iv$ soluție.

Deci, căutam $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ astfel ca

$$(1)\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$(2)\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixat. Atunci din (1) rezultă că

$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx \Rightarrow v(x,y) - v(x_0,y) =$

$= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx$

$\Rightarrow v(x,y) - \varphi(y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx$, unde

$\varphi(y) := v(x_0,y),\ y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow v(x,y) = \varphi(y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$

Derivând parțial în (3) în raport cu y, obținem că

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx =$$

$$\underset{u \in C^2(\mathbb{R}^2)}{=} \varphi'(y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\,dx \underset{\Delta u \equiv 0}{=}$$

$$= \varphi'(y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\,dx =$$

$$= \varphi'(y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)\,dx =$$

$$= \varphi'(y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)$$

Deci:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Din (2) $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$, iar din relația precedentă, obținem că

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \varphi'(y) + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)} - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y), \ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y} \varphi'(y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) - \varphi(y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\,dy + \text{constantă}$$

Revenind acum la relația (3), obținem că

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\,dy + \text{constantă}. \quad (*)$$

$\Rightarrow f = u + iv$ – soluție

<u>Soluția 2</u> Din (2) deducem că

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x,y) - \underbrace{v(x,y_0)}_{\overset{\text{not}}{=}\,\psi(x)} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \psi(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy \quad (4)$$

$\Rightarrow$ derivând în raport cu x, obținem că

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \psi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy$$

$$= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta u \equiv 0}}{=} \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\,dy$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$$

Dar $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.

Deci $-\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} = \varphi'(x) - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0),\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)\,dx + \text{constantă}.$$

În final, din (4) și relația precedentă, obținem

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy + \text{constant} \qquad (**)^a$$

$\Rightarrow f = u + iv$ – soluție.

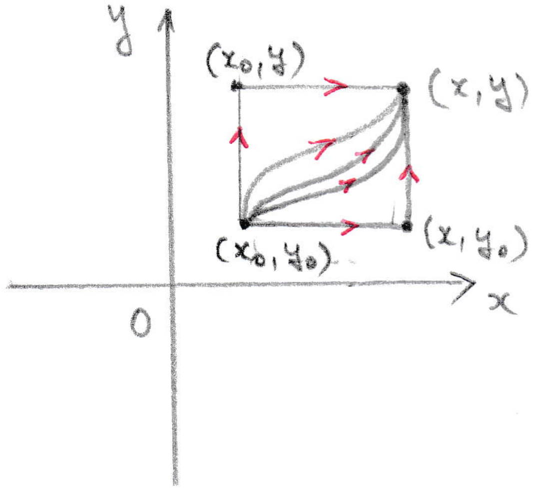
<u>Observație</u>. Avem că $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy =$

$$= \underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_{=P}dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=Q}dy = P\,dx + Q\,dy;$$

Din $\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \omega := dv$ este o diferențială liniară de clasă C^1 pe $\mathbb{C}$ și închisă $\Rightarrow \omega = P\,dx + Q\,dy$ este o diferențială totală exactă pe $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$).

Atunci $v = \int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma \left[-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy \right]$,

iar integrala curbilinie de speța a doua precedentă nu depinde de drumul γ ales între (x_0, y_0) și $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



Aplicații: 1) Să se determine funcția întreagă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$) astfel încât $f(0) = 1$ și $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$.

2) Să se determine $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Im} f(z) = x^3 - 3xy^2$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, știind că $f(0) = 0$.

Soluție: 1) Fie $u(x,y)=e^x\cos y$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Arătăm că funcția u este armonică.

E clar că $u\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. În plus,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-e^x\cos y.$$

Deci $\Delta u\equiv 0$. $\Rightarrow u$ este armonică pe $\mathbb{R}^2(\mathbb{C})$.

Fie $(x_0,y_0)=(0,0)$. Pe baza formulei $(*)$, avem

$$v(x,y)=-\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dx+\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)\,dy+\text{constantă}$$

$$=-\int_0^x -e^x\sin y\,dx+\int_0^y e^x\cos y\Big|_{x=0}dy+\text{constantă}$$

$$=\int_0^x e^x\sin y\,dx+\int_0^y \cos y\,dy+\text{const.}$$

$$=e^x\sin y\Big|_0^x+\sin y\Big|_0^y+\text{constantă}$$

$$=e^x\sin y-\cancel{\sin y}+\cancel{\sin y}+\text{constantă}=$$

$$=e^x\sin y+\text{constantă}.$$

Deci $v(x,y)=e^x\sin y+C$, $C\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^x\cos y+ie^x\sin y+C_1$

$=e^z+C_1$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

$\Rightarrow f(z)=e^z+C_1$, $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$.

Dar $f(0)=1 \Rightarrow 1+C_1=1\Rightarrow C_1=0\Rightarrow f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$.