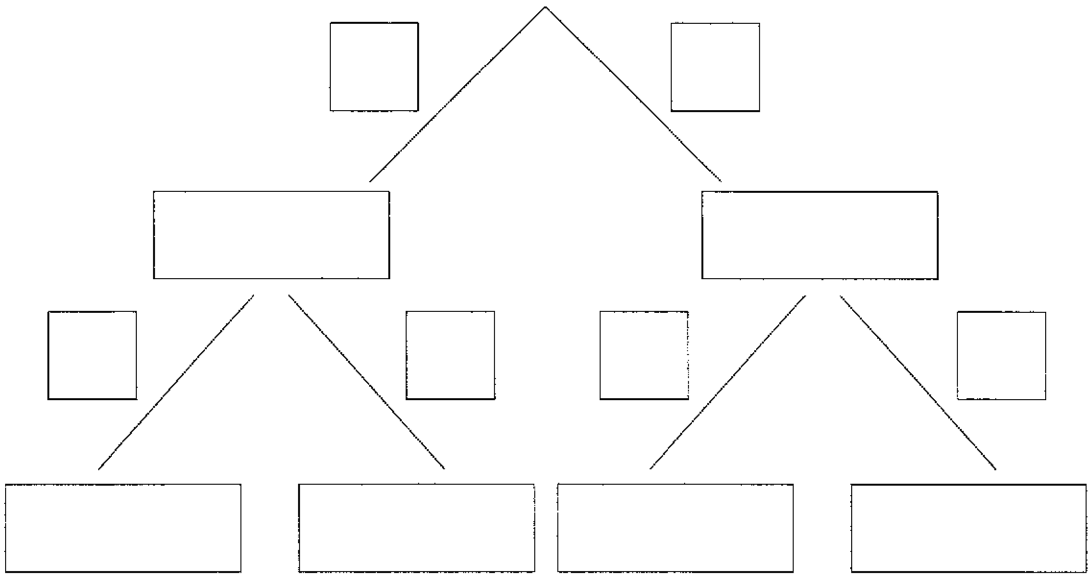
Aufgabe 1

Vergnügungspark

a) Bei einer Besucherbefragung in einem Vergnügungspark wurden folgende Daten erhoben:

60 % der Besucher sind aus dem Inland. Die Besucher aus dem Inland reisen zu 45 % mit dem PKW an, die restlichen Besucher aus dem Inland mit öffentlichen Verkehrsmitteln.
90 % der Besucher aus dem Ausland reisen mit öffentlichen Verkehrsmitteln an, die restlichen Besucher aus dem Ausland mit dem PKW.

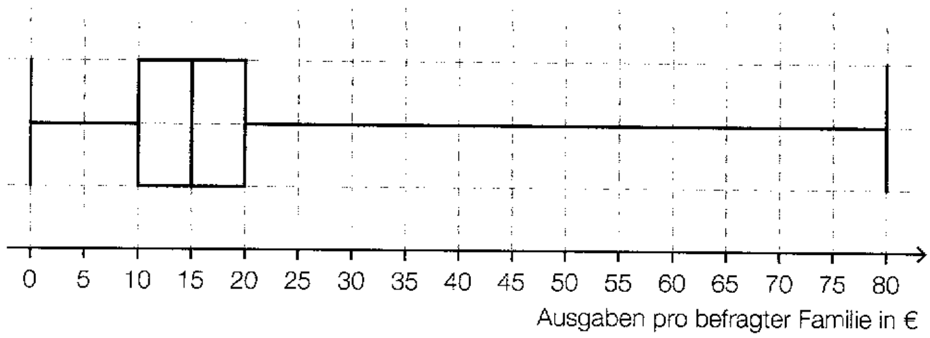
- Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*



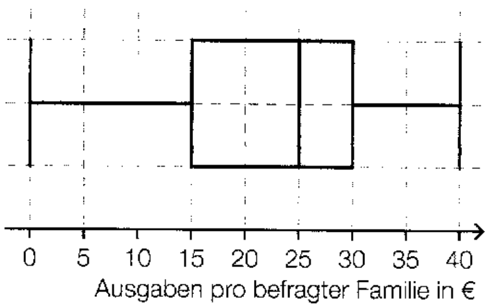
b) In einem Vergnügungspark werden Familien nach ihren Ausgaben befragt.

Die beiden nachstehenden Boxplots veranschaulichen die Ausgaben der befragten Familien für die Attraktionen und jene für Essen und Getränke.

Attraktionen:



Essen und Getränke:



Andreas behauptet, aus den beiden Boxplots Folgendes ablesen zu können: „Es gibt mit Sicherheit mindestens eine Familie, die insgesamt 120 Euro für Attraktionen sowie Essen und Getränke ausgibt."

– Argumentieren Sie, dass die Behauptung von Andreas falsch ist. *[1 Punkt]*

c) Aus Erfahrung weiß man, dass eine bestimmte Attraktion des Vergnügungsparks von jeder Person mit der Wahrscheinlichkeit p genutzt wird.

Es werden 10 Personen zufällig ausgewählt.

– Kreuzen Sie dasjenige Ereignis E an, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt: *[1 Punkt]*
$P(E) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^7$ *[1 aus 5]*

Genau 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Maximal 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Mindestens 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Genau 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Höchstens 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐

Aufgabe 2

Fußballspielen im Park

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ ... Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn. *[1 Punkt]*

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann. *[1 Punkt]*

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann. *[1 Punkt]*

Aufgabe 3

Medikamentenabbau

Der Abbau von Medikamenten im Körper kann näherungsweise durch exponentielle Modelle beschrieben werden.

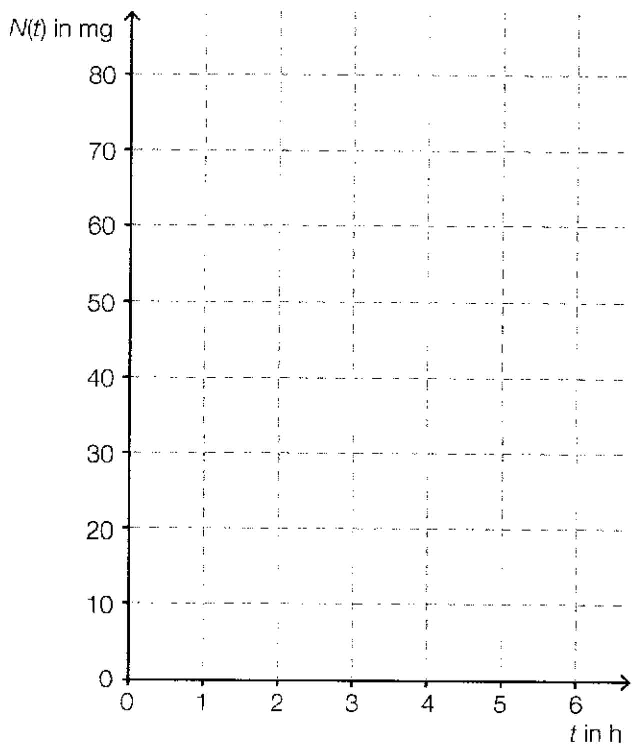
a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

- Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen. *[1 Punkt]*
- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die diesen Medikamentenabbau beschreibt. *[1 Punkt]*
- Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist. *[1 Punkt]*

b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang ($t = 0$ h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.
Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

- Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall [0 h; 6 h] ein. *[1 Punkt]*



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss. *[1 Punkt]*

Aufgabe 4

Rohmilchproduktion

a) Im Jahr 1995 betrug die Rohmilchproduktion der Kühe in Österreich insgesamt 2,948 Millionen Tonnen, im Jahr 2013 betrug sie 3,393 Millionen Tonnen. Die jährliche absolute Zunahme der Rohmilchproduktion wird als konstant angenommen.

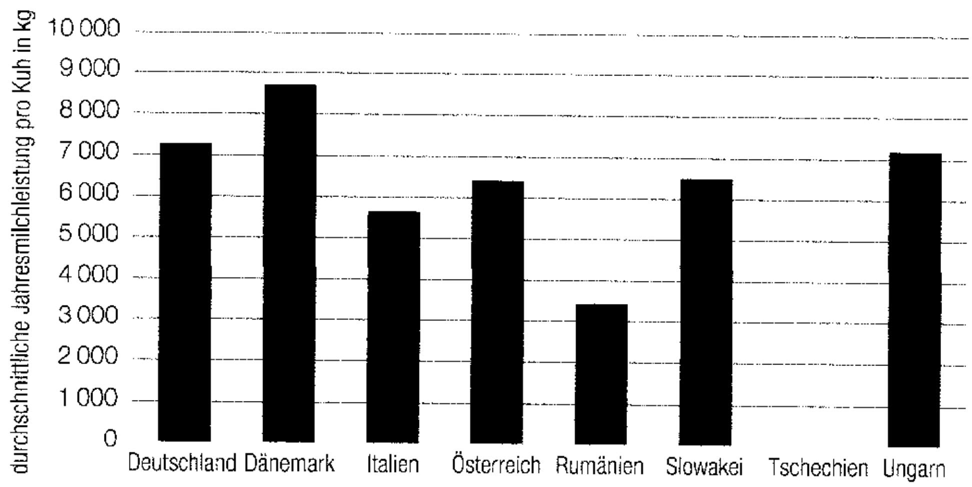
- Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f, die die Rohmilchproduktion in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1995. *[1 Punkt]*
- Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die voraussichtliche Rohmilchproduktion im Jahr 2017. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Tabelle ist die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Kilogramm (kg) für einige ausgewählte europäische Länder im Jahr 2012 angegeben.

Land	durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in kg
Deutschland	7 280
Dänemark	8 701
Italien	5 650
Österreich	6 418
Rumänien	3 429
Slowakei	6 501
Tschechien	7 705
Ungarn	7 184

- Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Dänemark höher als jene in Rumänien war. *[1 Punkt]*

Diese Daten sind, mit Ausnahme der durchschnittlichen Jahresmilchleistung pro Kuh in Tschechien, im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Zeichnen Sie im obigen Diagramm die fehlende Säule für Tschechien ein. *[1 Punkt]*

c) In Österreich produzierte Rohmilch enthält unmittelbar nach dem Melken durchschnittlich 20000 Keime pro Milliliter (ml). Ein Modell geht davon aus, dass sich die Anzahl der Keime alle 25 Minuten verdoppelt.

– Argumentieren Sie, dass die unten angegebene Funktion N nicht diesem Modell entspricht.

$N(t) = 20000 + 800 \cdot t$

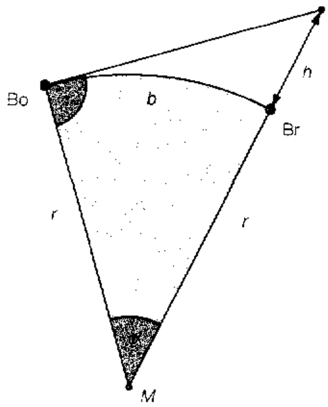
t … Zeit nach dem Melken in min
$N(t)$ … Anzahl der Keime pro ml zur Zeit t *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

Der Bodensee

a) Der Bodensee misst in seiner längsten Ausdehnung von Bregenz (Br) bis Bodman (Bo) 66 Kilometer (km). Aufgrund der Erdkrümmung ist von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman nicht zu sehen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze):

r ... Erdradius (6371 km)
b ... Bogenlänge, entspricht der Entfernung zwischen Bregenz und Bodman
M ... Erdmittelpunkt

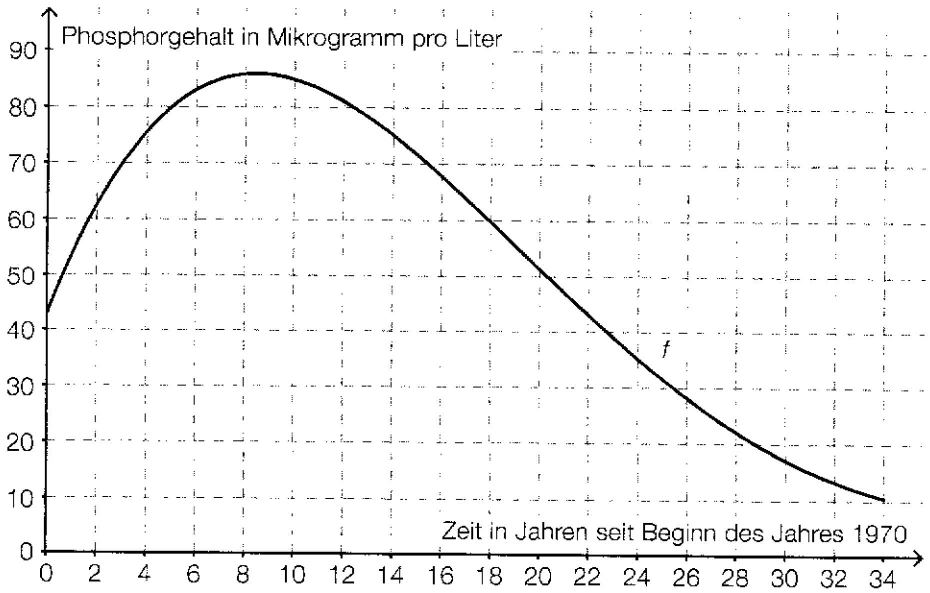


– Berechnen Sie den Winkel φ. *[1 Punkt]*

Um bei sehr guten Sichtverhältnissen von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman sehen zu können, muss sich ein Beobachter in Bregenz mindestens auf einer Höhe h über dem Seeniveau befinden (siehe obige nicht maßstabgetreue Skizze).

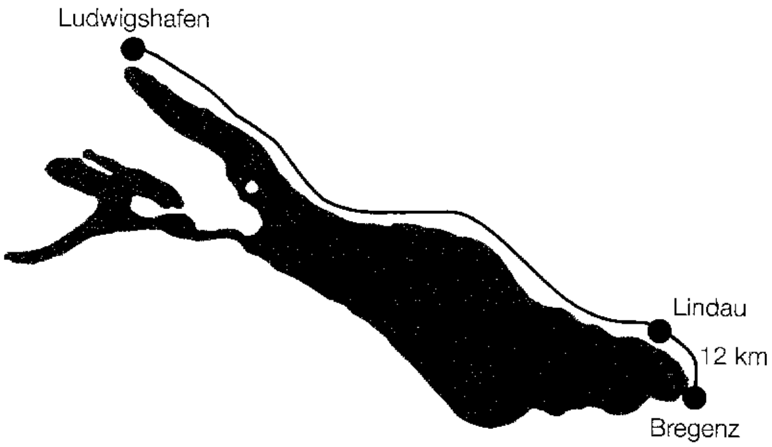
– Berechnen Sie die Höhe h. *[1 Punkt]*

b) Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion f beschrieben werden.

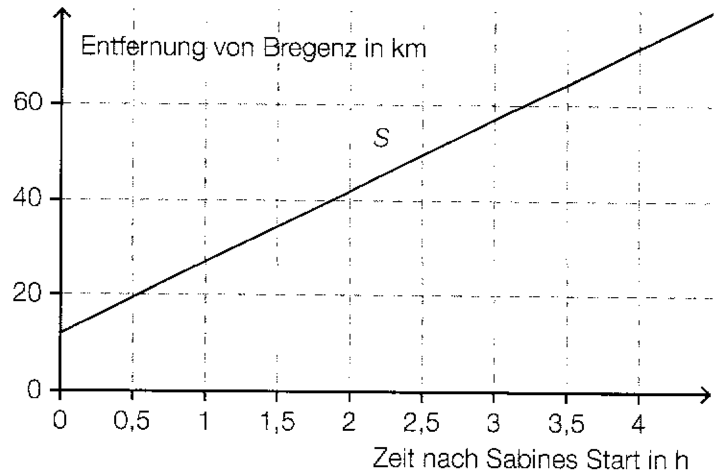


– Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von f die mittlere Änderungsrate des Phosphorgehalts im Zeitintervall [12; 18]. *[1 Punkt]*
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung berechnen kann, wann der Phosphorgehalt am stärksten gesunken ist. *[1 Punkt]*

c) Sabine und Johanna fahren mit ihren Fahrrädern auf einem Radweg in Richtung Ludwigshafen (siehe nachstehende Skizze). Sabine startet im 12 Kilometer von Bregenz entfernten Lindau und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Johanna startet mit einem E-Bike eine Stunde später in Bregenz und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h.



Sabines Entfernung von Bregenz kann näherungsweise durch die lineare Funktion S beschrieben werden.



- Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der linearen Funktion J ein, der Johannas Entfernung von Bregenz darstellt. *[1 Punkt]*
- Lesen Sie ab, wie lange Johanna unterwegs ist, bis sie Sabine einholt. *[1 Punkt]*

Auch Otto fährt auf diesem Radweg von Bregenz in Richtung Ludwigshafen. Seine Geschwindigkeit kann durch eine Funktion v beschrieben werden.

t ... Zeit in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

- Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit $\int_0^2 v(t)\,dt$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*