Álgebra Lineal con Python

Martínez Cerda Mario Antonio

A 05 de Marzo de 2021

1 Introducción

Una de las herramientas matemáticas más utilizadas en machine learning y data mining es el Álgebra lineal; por tanto, si queremos incursionar en el fascinante mundo del aprendizaje automático y el análisis de datos es importante reforzar los conceptos que forman parte de sus cimientos.

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que es sumamente utilizada en el estudio de una gran variedad de ciencias, como ser, ingeniería, finanzas, investigación operativa, entre otras. Es una extensión del álgebra que aprendemos en la escuela secundaria, hacia un mayor número de dimensiones.

En el siguiente documento, veremos las aplicaciones del álgebra lineal en Python, como conocimiento básico y formas de realizar algunos resultados en base a los métodos tradicionales hechos a mano.

2 Actividades y Evidencias.

2.1 Actividad 1.

Defina las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y la matrix identidad:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule el resultado de 2*I + 3*A + A@B para definir la matriz identidad, se puede utilizar la función np.eye(2,dtype=int).

```
#Definimos las matrices que se nos indica.
A = np.array([[1,3],[-1,7]])
B = np.array([[5,2],[1,2]])
I = np.array([[1,0],[0,1]])
#Vemos si nos salieron como deseamos.
print(A)
print(B)
print(I)
```

```
[[ 1  3]
 [-1  7]]
[[5 2]
 [1 2]]
[[1 0]
 [0 1]]
```

```
#Calculamos el resultado de 2*I+3*A+A@B
2*I + 3*A + A@B
```

```
array([[13, 17],
       [-1, 35]])
```

2.2 Actividad 2.

Los polinomios característicos y el Teorema de Cayley-Hamilton. Demuestre esto para cualquier matriz M (2x2), ($\det(M) \neq 0$).

```
#podemos realizar una matriz aleatoria para esto.
N = np.random.randint(0,10,[2,2])
print(N)
I = np.array([[1,0],[0,1]])
```

```
[[3 8]
 [6 1]]
```

```
N@N - (np.trace(N))*N + (la.det(N))*I
```

```
array([[0., 0.],
       [0., 0.]])
```

2.3 Actividad 3.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 3x - 4y + z &= 5 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

```python
#Método de eliminación Gaussiana.
#Intercambio de posición de renglones.
def switch_rows(A,i,j):
  'Intercambiar renglones i y j en la matriz A.'
  n = A.shape[0]
  E = np.eye(n)
  E[i,i] = 0
  E[j,j] = 0
  E[i,j] = 1
  E[j,i] = 1
  return E @ A
#Multiplicar un renglón por una constante no nula.
def scale_row(A,k,i):
  'Multiplicar el renglón i por k en la matriz A.'
  n = A.shape[0]
  E = np.eye(n)
  E[i,i] = k
  return E @ A
#Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
def add_row(A,k,i,j):
  'Sumar k veces el renglón j al renglón i en la matriz A.'
  n = A.shape[0]
  E = np.eye(n)
  if i == j:
    E[i,i] = k + 1
  else:
      E[i,j] = k
  return E @ A
```

```
#Definimos la matriz.
M = np.array([[1,-3,1],[3,-4,1],[0,2,-1]])
print(M)
```

```
[[ 1 -3  1]
 [ 3 -4  1]
 [ 0  2 -1]]
```

```
#Matriz Aumentada.
A = np.hstack([M,np.eye(3)])
print(A)
```

```
[[ 1. -3.  1.  1.  0.  0.]
 [ 3. -4.  1.  0.  1.  0.]
 [ 0.  2. -1.  0.  0.  1.]]
```

```
[ ] #Comenzamos a utilizar el método Gauss Jordan.
    #1)-3L1 + L2 ==>L2
    A1 = add_row(A,-3,1,0)
    print(A1)
```

```
[[ 1. -3.  1.  1.  0.  0.]
 [ 0.  5. -2. -3.  1.  0.]
 [ 0.  2. -1.  0.  0.  1.]]
```

```
#2)(-2/5)L2+L3 ==> L3
A2_temp = add_row(A1, -2/5, 2, 1)
#3)(3/5)L2
A2 = scale_row(A2_temp, 3/5, 1)
A2 = add_row(A2,1,0,1)
print(A2)
```

```
[[ 1.   0.  -0.2 -0.8  0.6  0. ]
 [ 0.   3.  -1.2 -1.8  0.6  0. ]
 [ 0.   0.  -0.2  1.2 -0.4  1. ]]
```

```
A3_temp1 = scale_row(A2,-5,2)

A3_temp2 = scale_row(A3_temp1,-1/1.2,1)

A3_temp3 = add_row(A3_temp2, 0.4, 1, 2)

A3_temp3 = add_row(A3_temp2, 0.2, 0, 2)

A3_temp3 = add_row(A3_temp3, -1, 1, 2)

A3 = scale_row(A3_temp3, -1/2.5, 1)
print(np.round(A3, 2))
```

```
[[ 1.  0.  0. -2.  1. -1.]
 [ 0.  1. -0. -3.  1. -2.]
 [ 0.  0.  1. -6.  2. -5.]]
```

```
#Inversa
Minv = A3[:,3:]
print(Minv)
```

```
[[-2.  1. -1.]
 [-3.  1. -2.]
 [-6.  2. -5.]]
```

```
#Agregamos el vector resultados.
R = np.array([1,5,0])
#Hacemos que M inversa actue sobre R para obtener el resultado.
print(np.round(Minv @ R))
```

```
[3. 2. 4.]
```

```
#Ahora utilizando scipy.linalg.solve
solv = la.solve(M,R)
print(solv)
```

```
[3. 2. 4.]
```

2.4 Actividad 4.

Dadas las siguientes matrices B1,B2,B3.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de cada matriz utilizando la función de scipy.linalg.eig(), y contrasta tus resultados en cada caso con los que se desarrollan en los ejemplos de la Wikipedia.

```
#Ingresamos las matrices.
B1 = np.array([[2,0,0],[0,3,4],[0,4,9]])
B2 = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]])
B3 = np.array([[2,0,0,0],[1,2,0,0],[0,1,3,0],[0,0,1,3]])
print(B1)
print('----------------------------------------')
print(B2)
print('----------------------------------------')
print(B3)
```

```
[[2 0 0]
 [0 3 4]
 [0 4 9]]
----------------------------------------
[[0 1 0]
 [0 0 1]
 [1 0 0]]
----------------------------------------
[[2 0 0 0]
 [1 2 0 0]
 [0 1 3 0]
 [0 0 1 3]]
```

```
#Eigenvalores/vectores con cipy.linalg.eig()
eigvals1, eigvecs1 = la.eig(B1)
eigvals2, eigvecs2 = la.eig(B2)
eigvals3, eigvecs3 = la.eig(B3)

#Imprimimos para B1:
print('Eigenvalores B1')
print(np.round(eigvals1,2))
print('Eigenvectores B1')
print(np.round(eigvecs1,2))
print('---------------------------')
#Imprimimos para B2:
print('Eigenvalores B2')
print(np.round(eigvals2,2))
print('Eigenvectores B2')
print(np.round(eigvecs2,2))
print('---------------------------')
#Imprimimos para B3:
print('Eigenvalores B3')
print(np.round(eigvals3,2))
print('Eigenvectores B3')
print(np.round(eigvecs3,2))
```

```
Eigenvalores B1
[11.+0.j  1.+0.j  2.+0.j]
Eigenvectores B1
[[ 0.    0.    1.  ]
 [ 0.45  0.89  0.  ]
 [ 0.89 -0.45  0.  ]]
--------------------------
Eigenvalores B2
[-0.5+0.87j -0.5-0.87j  1. +0.j  ]
Eigenvectores B2
[[ 0.58+0.j   0.58-0.j  -0.58+0.j ]
 [-0.29+0.5j -0.29-0.5j -0.58+0.j ]
 [-0.29-0.5j -0.29+0.5j -0.58+0.j ]]
--------------------------
Eigenvalores B3
[3.+0.j 3.+0.j 2.+0.j 2.+0.j]
Eigenvectores B3
[[ 0.    0.    0.    0.  ]
 [ 0.    0.    0.58 -0.58]
 [ 0.    0.   -0.58  0.58]
 [ 1.   -1.    0.58 -0.58]]
```

```
#Matriz de eigenvectores en B1 (para observar.)
print(eigvecs1)
```

```
[[ 0.          0.          1.        ]
 [ 0.4472136   0.89442719  0.        ]
 [ 0.89442719 -0.4472136   0.        ]]
```

```
#Realizamos el ejemplo en wikipedia y comparamos.
#matriz de eigenvectores:
B1vec = np.array([[0,0,1],[0.4472136,0.89442719,0],[0.89442719,-0.4472136,0]])
print('Matriz de Eigenvalores de B1')
print(B1vec)
```

```
La Matriz de Eigenvalores de B1
[[ 0.          0.          1.        ]
 [ 0.4472136   0.89442719  0.        ]
 [ 0.89442719 -0.4472136   0.        ]]
```

```
#Observamos los eigenvalores de B1
print(eigvals1)
```

```
[11.+0.j  1.+0.j  2.+0.j]
```

```
#Definimos la diagonal de eigenvalores.
B1diag = np.diag((11,1,2))
print('Matriz Diagonal de Eigenvalores de B1')
print(B1diag)
```

```
Matriz Diagonal de Eigenvalores de B1
[[11  0  0]
 [ 0  1  0]
 [ 0  0  2]]
```

```
#Determinamos la B1 con lo siguiente: M = P D P^{-1}
M = B1vec@B1diag@la.inv(B1vec)
print(M)
```

```
[[2.          0.          0.        ]
 [0.          3.00000004 4.00000003]
 [0.          4.00000003 8.99999996]]
```

```
#Calculamos la potencia k=25 de B1
k=25
B1vec_inv = la.inv(B1vec)
print('Matriz de Eigenvectores:')
print(B1vec)
print('Matriz inversa de B1vec:')
print(B1vec_inv)
```

```
Matriz de Eigenvectores:
[[ 0.          0.          1.        ]
 [ 0.4472136   0.89442719  0.        ]
 [ 0.89442719 -0.4472136   0.        ]]
Matriz inversa de B1vec:
[[-0.          0.4472136   0.89442719]
 [-0.          0.89442719 -0.4472136 ]
 [ 1.          0.          0.        ]]
```

```
[ ] #Propiedad de diagonalización:
    print(B1vec@B1diag**25@B1vec_inv)
```

```
[[ 3.35544320e+07  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00 -5.12702763e+17 -1.02540552e+18]
 [ 0.00000000e+00 -1.02540552e+18 -2.05081101e+18]]
```

2.5 Actividad 5.

$$
\begin{array}{lll}
(x & , \ y) & (1) \\
(0.0 & , \ 0.0), & (2) \\
(0.5 & , \ 0.47942), & (3) \\
(1.0 & , \ 0.84147), & (4) \\
(1.5 & , \ 0.99749), & (5) \\
(2.0 & , \ 0.90930), & (6) \\
(2.5 & , \ 0.59847), & (7) \\
(3.0 & , \ 0.14112), & (8) \\
(3.5 & , \ -0.35078) & (9)
\end{array}
$$

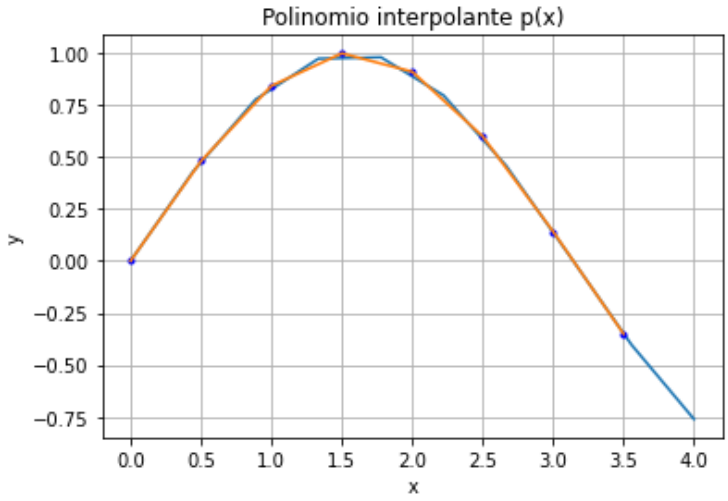
Encuentre un polinomio interpolante p(x) que pase por los 8 puntos. Sobreponga la función y=sin(x) y contrástela con el polinomio p(x).

```
#Polinomio de grado 7.
x = np.array([0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5])
y = np.array([0,0.47942,0.84147,0.99749,0.90930,0.59847,0.14112,-0.35078]).reshap

X = np.column_stack([x**k for k in range(0,8)])
#Solución para Xa=y usando spicy.linalg=la
a = la.solve(X,y)
print(a)
```

```
[[ 0.00000000e+00]
 [ 1.00067181e+00]
 [-3.70788889e-03]
 [-1.58867889e-01]
 [-8.30222222e-03]
 [ 1.31964444e-02]
 [-1.54488889e-03]
 [ 2.46349206e-05]]
```

```
#Graficamos.
#Resultados del polinomio interpolante de a0,a1,a2-
xs = np.linspace(0,4,10)
ys_temp = 0
for k in range(0,8):
  ys = ys_temp + a[k]*xs**k
  ys_temp = ys
plt.plot(xs,ys,x,y,'b.',x,np.sin(x))
plt.grid()
plt.title('Polinomio interpolante p(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```



3 Conclusión

El ingreso al álgebra lineal para Python es bastante interesante pero, durante el desarrollo de la práctica se me dificultaba mucho identificar cada celda. Entonces al hacer el método de Gauss-Jordan tardé mucho en realizarlo. Es

cuestión de práctica. Todo lo demás estuvo genial en la práctica, no es duradera y es un poco compleja para los que nos olvidamos del álgebra lineal aprendido anteriormente.