Reporte
”Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales”

Martínez Cerda Mario Antonio

A 30 de abril de 2021

1 Introducción

Como bien vimos durante el curso de Física Computacional, aprendimos a resolver diversos problemas en Python sobre ecuaciones diferenciales parciales, aplicando diversos métodos para las soluciones y sus gráficas elaboradas que nos ayudan a visualizar tanto el contenido de las estabilidades, como el comportamiento de la fase. En este documento veremos las últimas actividades realizadas en el curso, viendo las soluciones de cada una de ellas y aplicando las evidencias y escribiendo un poco sobre las experiencias planteadas durante la realización de las mismas.

2 Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En matemáticas, una ecuación diferencial parcial (PDE) es una ecuación que impone relaciones entre las diversas derivadas parciales de una función multivariable.
Se denomina orden” de una ecuación diferencial parcial al orden de la derivada más alta que exista en dicha ecuación.
Una ecuación diferencial parcial lineal es aquella que es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes de la función.

Por ejemplo:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$ (lineal de segundo orden)
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 8u = 5y$ (lineal de tercer orden)

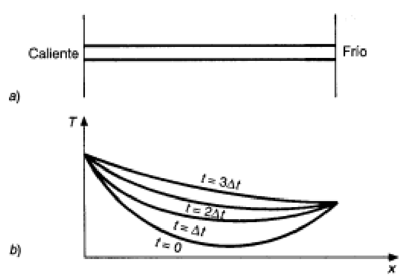
La mayoría de los problemas físicos y de ingeniería de importancia práctica están descritos por este tipo de ecuaciones diferenciales, y fundamentalmente por ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales pueden expresarse de forma general como:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D = 0$$

Donde A, B y C son funciones de x y de y, y D es una función de x,y,u,$\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$. Es decir, que estamso asumiendo que esta ecuación es lineal. Dependiendo de los valores de los coeficientes de los términos de la segunda derivada A, B y C, la anterior ecuación puede clasificarse en una de las tres categorías siguientes:

2.1 Ecuación diferencial parabólica.



Este tipo de ecuaciones permite resolver los denominados problemas de propagación que son problemas transitorios donde la solución de la ecuación diferencial parcial es requerida sobre un dominio abierto, sujeta a condiciones iniciales y de frontera prescritas. Los ejemplos más comunes son aquellos problemas donde la solución cambia con el tiempo.

En el caso unidimensional, la ecuación más simple de conductibilidad térmica tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u = u(x,t)$$

Aquí, $a^2 = \frac{K}{c\rho}$, donde ρ es la densidad del medio, c es el calor específico y K es el coeficiente de conductibilidad térmica.

2.2 Ecuación diferencial hiperbólica.

Las ecuaciones hiperbólicas también tratan con problemas de propagación, como por ejemplo la ecuación de onda, pero con la distinción de que aparece una segunda derivada respecto del tiempo. En consecuencia, la solución consiste en distintos estados característicos con los cuales oscila el sistema. Es el caso de problemas de vibraciones, ondas de un fluido, transmisión de señales acústicas y

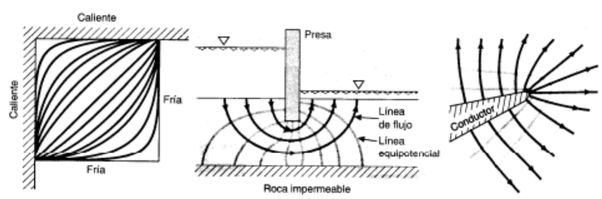
eléctricas.

La más simple de las ecuaciones de este tipo es la de vibraciones de la cuerda (ecuación ondulatoria unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u = u(x,t)$$

2.3 Ecuación diferencial elíptica.

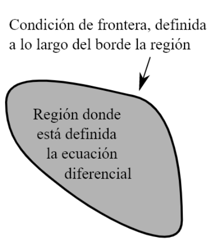
Este tipo de ecuaciones permite resolver los llamados problemas de equilibrio, que son problemas donde se busca la solución de una ecuación diferencial dada, en un dominio cerrado, sujeta a condiciones de frontera prescritas. Es decir, que los problemas de equilibrio son problemas de condiciones de frontera. Los ejemplos más comunes de tales problemas incluyen a distribuciones estacionarias de temperatura, flujo de fluidos incompresibles no viscosos, etc. En general de problemas donde el objetivo sea determinar un potencial.



La ecuación de **Laplace** es el representante típico de estas ecuaciones

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u = u(x,y)$$

3 Condiciones a la Frontera.



En matemáticas, en el campo de las ecuaciones diferenciales, un problema de valor de frontera, se lo denomina al conjunto de una ecuación diferencial y a las condiciones de frontera o contorno. Una solución de un problema de condiciones de frontera es una solución de una ecuación diferencial que también satisface condiciones de frontera.

3.1 Dirichlet.

La condición de límite de Dirichlet (o primer tipo) es una tipo de condición límite, que lleva el nombre de Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Esta se define mediante la forma integral ponderada de una ecuación diferencial. La incógnita dependiente "u" en la misma forma que la función de ponderación "w" que aparece en la expresión de frontera se denomina variable primaria, y su especificación constituye la condición de frontera inicial o de Dirichlet.

Los problemas de frontera de Dirichlet se encuentran en diversos sitios como en: la teoría de la viga, superficies a temperaturas fijas, en un nodo de un circuito que se mantiene a un voltaje fijo o en la condición de no deslizamiento en mecánica de fluidos.

3.2 Neumann.

Esta condición de límite es conocida también como "segundo tipo", es un tipo de condición límite, qe lleva el nombre de Carl Neumann. Cuando se impone sobre una ecuación diferencial ordinaria o parcial, la condición específica los valores de la derivada aplicados en el límite del dominio.

Este tipo de condiciones de frontera se utilizan en flujos de calor prescrito de una superficie en termodinámica. Otra de las aplicaciones seria la intensidad del campo magnético que se puede prescribir como condición límite para encontrar la distribución de la densidad del flujo magnético en una matriz de imanes en el espacio., etc.

3.3 Robin (mixto).

Las condiciones de contorno de Robin son una combinación ponderada de las condiciones de Dirichlet y las condiciones de contorno de Neumann. Esto contrasta con las condiciones de frontera mixtas, que son condiciones de frontera de diferentes tipos especificadas en diferentes subconjuntos de la frontera. También se denominan condiciones de frontera de impedancia, por su aplicación en problemas electromagnéticos, o condiciones de frontera convectiva, por su aplicación en problemas de transferencia de calor.

Si Ω es el dominio en el que se va a resolver la ecuación dada y $\partial\Omega$ denota su límite, la condición de límite de Robin es:

$$au + b\tfrac{\partial u}{\partial n} = g \text{ on } \partial\Omega$$

4 Método de Diferencias Finitas.

En el análisis numérico , los métodos de diferencias finitas (FDM) son una clase de técnicas numéricas para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aproximación de derivadas con diferencias finitas . Tanto el dominio espacial como el intervalo de tiempo (si corresponde) se discretizan o se dividen en un número finito de pasos, y el valor de la solución en estos puntos discretos se aproxima resolviendo ecuaciones algebraicas que contienen diferencias finitas y valores de puntos cercanos.

Los métodos de diferencias finitas convierten las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o las ecuaciones diferenciales parciales (PDE), que pueden ser no lineales , en un sistema de ecuaciones lineales que pueden resolverse mediante técnicas de álgebra matricial.

5 Solución de la Ecuación del Calor.

Solución Numérica de la Ecuación del Calor

La ecuación del calor es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

donde la constante κ es el coefficiente de difusividad.

La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x,t)$.

En un medio unidimensional x, la ecuación se simplifica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Resolviendo la Ecuación de Calor mediante Diferencias Finitas.

El **método de diferencias finitas** utiliza Series de Taylor para aproximar las derivadas.

Aproximación de la primer derivada.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con h pequeño, utilzando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primer derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

El término $\mathcal{O}(h^2)$ denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como *diferencias finitas de $f'(x_0)$ hacia enfrente*, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.

De la misma forma se obtiene el término de diferencias finitas hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una *diferencia finita centrada* de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Aproximación de la segunda derivada

Podemos utilizar esta última ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y substituimos $f(x_0 + h)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y la derivada $f'(x_0)$ por una *diferencia finita hacia atrás*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finalmente obtenemos la *diferencia finita centrada de segundo orden* para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Solución de la Ecuación de Calor por un método híbrido (EDP > EDO).

Podemos escribir la ecuación del calor como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ &\approx \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \end{aligned}$$

y luego integrar en el tiempo como si tuviéramos una ecuación diferencial ordinaria.

Formalmente, para un determinado punto (jh, t), tendremos la ecuación diferencial ordinaria $u(jh,t) = u_j(t)$

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \kappa \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}$$

para la cual requerimos proporcionar la condición inicial al tiempo $t = 0$

$$u(0) = f(x)$$

Y condiciones a la frontera:

- $u_0 = c_1, u_N = c_2$, para el tipo de Dirichlet
- Del tipo Neumann, $du_0/dx = 0$ ó $dx_N/dx = 0$, para casos de equilibrio térmico.

Condiciones a la frontera tipo Neumann

Tenemos que definir cómo estimar la derivada en la frontera, digamos en la frontera $x = L$. Recordando que estamos usando un aproximación de segundo orden para $\partial^2 u/\partial x^2$, debemos encontrar una aproximación para la primer derivada también de orden h^2

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 0 \\ u_{N+1} &= u_{N-1} \end{aligned}$$

aunque formalmente u_{N+1} esta "fuera" de nuestro dominio, pero utilizamos esto para determinar la ecuación que se satisface en la frontera, reemplazando $u_{N+1} = u_{N-1}$ en la ecuación del calor obteniendo

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}$$

Aproximación Ecuación de Calor por el método de diferencias finitas

Un método para resolver la Ecuación del Calor es usar diferencias finitas hacia enfrente en el tiempo y diferencias finitas centradas en el espacio.

Discretizamos el espacio-tiempo, mediante una malla:

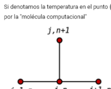
- Definimos n puntos entre x=0 y x=L, separados una distancia Δx.
- Definimos m puntos entre t=0 y t, separados en lapsos de tiempo Δt.

Supodremos que el incremento en el tiempo es $k = \Delta t$ y en el espacio $h = \Delta x$. La Ecuación del Calor es

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3, k^2)$$

donde error de aproximación es de orden $\mathcal{O}(h^3, k^2)$

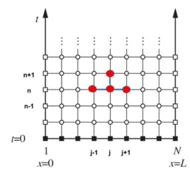
Si denotamos la temperatura en el punto $(x,t) = (jh, nk)$, por $u(x_j, t_n)$ = u_j^n, la ecuación anterior se puede representar geométricamente por la "molécula computacional"



Implementando el método de diferencias finitas

Si conocemos la condición inicial $u(x,0)=f(x)$ y las condiciones a la frontera $u(0,t), u(L,t)$ podemos calcular sin problema el valor desconocido de la temperatura en el tiempo $t=k$: $u(x,k)$. Una vez hecho lo anterior, podremos conocer la temperatura al tiempo $t=2k$, $u(x,2k)$ y así sucesivamente.

+ Código + Texto



Despejamos la ecuación anterior para el valor desconocido $u(x,t+k)$, resultando

$$\begin{aligned} u(x,t+k) &= u(x,t)+\kappa\frac{k}{h^2}(u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)) \\ &= \kappa r u(x+h,t)+(1-2\kappa r)u(x,t)+\kappa r u(x-h,t) \end{aligned}$$

donde $r=\frac{k}{h^2}$.

Podemos simplificar la notación en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} u_j^{new} &= u_j+\kappa\frac{k}{h^2}(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}) \\ &= \alpha u_{j+1}+(1-2\alpha)u_j+\alpha u_{j-1} \end{aligned}$$

donde hemos definido $\alpha=\kappa k/h^2$.

NOTA IMPORTANTE: El método de diferencias finitas anterior para resolver la Ecuación del Calor es **estable y convergente si y sólo si** $r\leq 1/2$

6 Solución de la Ecuación de Onda.

Solución Numérica de la Ecuación de Onda

Referencias básicas: Sobre solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales con Python.

- Numerical Methods using Python. Prof. Vivi Andasari. Universidad de Boston.
- Programming for Computations. Sven Linge, Hans Petter Langtangen. Center for Biomedical Computing.

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial de segundo orden en el tiempo y las coordenadas espaciales y tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información. La función $u(x,y,z,t)$ representa la presión en una onda acústica, la intensidad de un campo electromagnético, el desplazamiento respecto a un nivel de referencia como lo puede ser la amplitud de una onda superficial en la superficie del agua o el desplazamiento respecto a la horizontal de una cuerda vibrante.

En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+f(x,t) \qquad x\in(0,L],\ t\in(0,T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= I(x) && (1) \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) &= 0 && (2) \\ u(0,t) &= 0 && (3) \\ u(L,t) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Se requiere también especificar el valor de la constante c y la función $I(x)$.

Solución de la Ecuación de Onda en una dimensión por el Método de Diferencias Finitas.

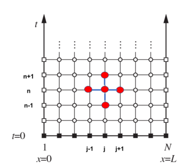
Podemos comenzar aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden.

Si h es el incremento en la dirección $x=\Delta x$ y $k=\Delta t$ es el incremento en el tiempo. Entonces en un punto de la malla discreta (x,t) tendremos

$$\frac{u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)}{k^2}=c^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

La ecuación anterior define un esténcil computacional de 5 puntos y se respresenta como

El cual nos permite calcular los valores de $u(x,t)$ en el espacio discretizado: $x_0=0, x_1, x_2, ..., x_M=L$, $t_0=0, t_1, t_2, ..., t_N=T$, espaciados uniformamente por $h=\Delta x$ y $k=\Delta t$.



Para inicial el algoritmo tendremos que calcular el primer nivel de $u(x,k)$ en $t=k$, usando sólo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos similar al que utilizamos en la Ecuación de Calor.

Una vez hecho esto, ya podremos calcular todos los valores futuros de $u(x,t+k)$ ya que se conocen los valores de $u(x,t)$ y $u(x,t-k)$.

Ecuación de Onda en diferencias finitas

Si definimos $u(x,t)=u(jh,nk)=u_j^n$, la ecuación de onde la podemos expresar

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2}=c^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$$

y despejamos para el valor desconocido u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1}=2u_j^n-u_j^{n-1}+C^2(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

donde hemos introducido la constante $C^2=c^2k^2/h^2$, conocida como la constante de Courant.

Iniciando el algoritmo

Como no se puede aplicar el esténcil de 5 puntos pata calcular el primer nivel usaremos un esténcil similar de 4 puntos con la información de la condición inicial para calcular $u(x,t=k)$.

Remplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j^0=\frac{u_j^1-u_j^{-1}}{2k}=0$$

lo que indica que $u_j^1=u_j^{-1}$.

Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1=u_j^0+\frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0-2u_j^0+u_{j-1}^0)$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1} usando el esténcil de 5 puntos.

7 Solución de la Ecuación de Poisson.

Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Elíptico

Veremos en esta semana la solución de la Ecuación de Poisson

$$-\nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

con distintas condiciones a la frontera:

- Condiciones de Dirichlet (especificando valores de la función u)
- Condiciones de Neumann (especificando valores de la derivada de la función u perpendicular a la frontera $\partial u / \partial n$).

La Ecuación de Poisson aparece en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas en la Física.

La Ecuación de Poisson es la generalización de la Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 u = 0$$

Solución Numérica de la Ecuación de Poisson por diferencias finitas en 2-D con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet.

Se busca la solución de la ecuación

$$-\nabla^2 u = f$$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x, y)_\Gamma = g(x, y)$$

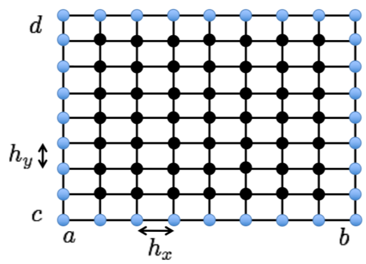
No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Sólo requerimos conocer los valores a la frontera.

Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a, b) \times (c, d)$, sobre el cual generamos una malla

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih_x \quad i = 0, 1, 2, ..., M \quad (1) \\ y_k &= c + kh_y \quad k = 0, 1, 2, ..., N \quad (2) \end{aligned}$$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{(b-a)}{M} \quad (1) \\ h_y &= \frac{(d-c)}{N} \quad (2) \end{aligned}$$



Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1}, y_k) - 2u(x_i, y_k) + u(x_{i-1}, y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^3) \quad (1) \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i, y_{k+1}) - 2u(x_i, y_k) + u(x_i, y_{k-1})}{h_y^2} + \mathcal{O}(h_y^3) \quad (2) \\ & \quad (3) \end{aligned}$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i, y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

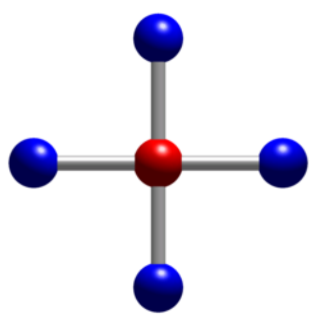
$$-\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} - \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k} + \mathcal{O}(h_x^3, h_y^3) \quad (1)$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{h_y^2}\right) \quad (1) \\ & + 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{i,k} = f_{i,k} \quad (2) \end{aligned}$$

donde los valores de $i = 1, 2, ..., M-1$ y $k = 1, 2, ..., N-1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

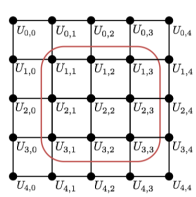
La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad



Supongamos por conveniencia que $h_x = h_y = h$, entonces el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson se simplifica

$$4U_{i,k} - U_{i-1,k} - U_{i,k-1} - U_{i+1,k} - U_{i,k+1} = h^2 f_{i,k}$$

Resolvamos el caso $M = N = 5$.



Y definamos las siguientes matrices de los puntos internos

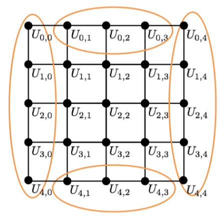
$$\mathbf{U_1} = \begin{bmatrix} U_{1,\,1} \\ U_{2,\,1} \\ U_{3,\,1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_2} = \begin{bmatrix} U_{1,\,2} \\ U_{2,\,2} \\ U_{3,\,2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_3} = \begin{bmatrix} U_{1,\,3} \\ U_{2,\,3} \\ U_{3,\,3} \end{bmatrix};$$

las cuales las integramos en un vector $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \\ \mathbf{U_3} \end{bmatrix}$$

Los puntos de la frontera se encuentran definidos por las condiciones de Dirichlet

Los puntos de la frontera se encuentran definidos por las condiciones de Dirichlet



Trabajamos sobre el **primer grupo** de valores internos:

$$\begin{aligned} i=1,\, k=1 &: \ 4U_{1,\,1} - U_{1,\,2} - U_{2,\,1} = h^2 f_{1,\,1} + U_{1,\,0} + U_{0,\,1} && (1) \\ i=2,\, k=1 &: \ 4U_{2,\,1} - U_{1,\,1} - U_{3,\,1} - U_{2,\,2} = h^2 f_{2,\,1} + U_{2,\,0} && (2) \\ i=3,\, k=1 &: \ 4U_{3,\,1} - U_{2,\,1} - U_{3,\,2} = h^2 f_{3,\,1} + U_{3,\,0} + U_{4,\,1} && (3) \end{aligned}$$

Matricialmente el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,1} \\ U_{2,\,1} \\ U_{3,\,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,2} \\ U_{2,\,2} \\ U_{3,\,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,\,1} \\ f_{2,\,1} \\ f_{3,\,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,\,0} + U_{0,\,1} \\ U_{2,\,0} \\ U_{3,\,0} + U_{4,\,1} \end{bmatrix}$$

De forma similar, trabajando en la **segunda columna interior** se obtiene una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,1} \\ U_{2,\,1} \\ U_{3,\,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,2} \\ U_{2,\,2} \\ U_{3,\,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,3} \\ U_{2,\,3} \\ U_{3,\,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,\,2} \\ f_{2,\,2} \\ f_{3,\,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,\,2} \\ 0 \\ U_{4,\,2} \end{bmatrix}$$

Y por último de la **tercera columna interior** se obtiene la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,2} \\ U_{2,\,2} \\ U_{3,\,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\,3} \\ U_{2,\,3} \\ U_{3,\,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,\,3} \\ f_{2,\,3} \\ f_{3,\,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,\,3} + U_{1,\,4} \\ U_{2,\,4} \\ U_{4,\,3} + U_{3,\,4} \end{bmatrix}$$

En resumen, las expresiones anteriores se pueden expresar como

$$-\mathbf{U}_{i-1} + B\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1} = h^2 \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i$$

En resumen, las expresiones anteriores se pueden expresar como

$$-\mathbf{U}_{i-1} + B\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1} = h^2 \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i$$

donde B es la matriz tridiagonal $(M-2) \times (M-2)$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{g}$ surge de los valores de la frontera superior e inferior

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{0,\,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{M,\,i} \end{bmatrix}$$

Cuando $i = 1$ ó $i = M-1$, los valores de las fornteras verticales se aplican

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} g_{0,\,1} \\ g_{0,\,2} \\ \vdots \\ g_{0,\,M-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_M = \mathbf{g}_M = \begin{bmatrix} g_{M,\,1} \\ g_{M,\,2} \\ \vdots \\ g_{M,\,M-1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la ecuación matricial de diferencias se puede compactar como

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

donde la matriz A es una matriz de estructura tridiaginal de $(M-2)^2 \times (M-2)^2$ de la forma

donde la matriz A es una matriz de estructura tridiaginal de $(M-2)^2 \times (M-2)^2$ de la forma

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix}$$

y la matriz de valores desconocidos $\mathbf{U}$ y valores conocidos $\mathbf{F}$ son de dimensiones $R^{(M-2)^2}$.

La matriz I es la matriz identidad $(M-2) \times (M-2)$ y el vector $\mathbf{F}$ de la derecha de dimensiones $(M-2)^2 \times 1$, está dado por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 + (g_0 + g_1) / h^2 \\ f_2 + g_2 / h^2 \\ \vdots \\ f_{M-2} + g_{M-2} / h^2 \\ f_{M-1} + (g_{M-1} + g_M) / h^2 \end{bmatrix}$$

Es importante a la hora de crear las matrices A y B sólo guardar los valores distintos de cero (sparse matrix o matriz rala)

Ejemplo resuelto de Condiciones de Dirichlet:

Resuelva la ecuación de Poisson sobre un cuadrado unitario

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u(x,\, y) &= 20\cos(3\pi x)\sin(2\pi y) && (1) \\ \text{dadas las condiciones} & && (2) \\ u(0,\, y) &= y^2 && (3) \\ u(1,\, y) &= 1 && (4) \\ u(x,\, 0) &= x^3 && (5) \\ u(x,\, 1) &= 1 && (6) \end{aligned}$$

Ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Neumann.

La Ecuación de Poisson puede también ser resuelta en un dominio $D = (0,\, a) \times (0,\, b)$ con frontera Γ

$$-\nabla^2 u(x,\, y) = f(x,\, y)$$

para las condiciones de frontera de tipo Neumann.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,\, y), \quad \text{para}\,(x,\, y) \in \Gamma$$

La derivada de u normal a la frontera Γ, descrita por $g(x,\, y)$ debe ser continua en toda la frontera.

Para resolver la Ecuación de Poisson por el método de diferencias finitas centradas, dentro del dominio mallado utilizaremos de nuevo el esténcil de 5 puntos que ya hemos usado con anterioridad.

$$4U_{i,\,k} - U_{i-1,\,k} - U_{i,\,k-1} - U_{i+1,\,k} - U_{i,\,k+1} = h^2 f_{i,\,k}$$

Primero describiremos las **condiciones de frontera en la fronteras verticales**.

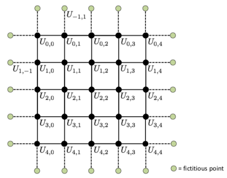
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \pm \frac{\partial u}{\partial x}$$

Si hacemos las expansiones de Taylor de la función u hacia enfrente y hacia atrás respecto a x

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu_x + \tfrac{h^2}{2}u_{xx} + \tfrac{h^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) && (1) \\ u(x-h) &= u(x) - hu_x + \tfrac{h^2}{2}u_{xx} - \tfrac{h^3}{3!}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) && (2) \end{aligned}$$

Calculamos la diferencia de estas dos series

$$\begin{aligned} u(x+h) - u(x-h) &= 2hu_x + \mathcal{O}(h^3) && (1) \\ & && (2) \\ u_x &= \tfrac{1}{2h}(u(x+h) - u(x-h)) + \mathcal{O}(h^2) && (3) \end{aligned}$$



En el caso de la **frontera superior**, la condición es $\partial u / \partial n = -\partial u / \partial x$, la parcial apunta hacia afuera, y que al aplicarse a los puntos $(0, y_k)$, se tiene

$$\tfrac{1}{2h}(U_{-1,k} - U_{1,k}) = g_{0,k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N \qquad \text{BCNeumann 1}$$

Aplicamos esta ecuación en el algoritmo del esténcil de 5 puntos en la frontera $(i = 0, k)$

$$\begin{aligned} 4U_{0,k} - U_{-1,k} - U_{0,k-1} - U_{1,k} - U_{0,k+1} &= h^2 f_{0,k} && (1)\\ 4U_{0,k} - (U_{1,k} + 2hg_{0,k}) - U_{0,k-1} - U_{1,k} - U_{0,k+1} &= h^2 f_{0,k} && (2)\\ 4U_{0,k} - 2U_{1,k} - U_{0,k-1} - U_{0,k+1} &= h^2 f_{0,k} + 2hg_{0,k} && (3) \end{aligned}$$

o bien

$$2U_{0,k} - U_{1,k} - \tfrac{1}{2}U_{0,k-1} - \tfrac{1}{2}U_{0,k+1} = \tfrac{1}{2}h^2 f_{0,k} + hg_{0,k} \qquad \text{(Upper BC)}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Para la **frontera inferior**, $i = M$ tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Entonces

$$\tfrac{1}{2h}(U_{M+1,k} - U_{M-1,k}) = g_{M,k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N \qquad \text{BCNeumann 2}$$

Al sustituir esta expresión en el esténcil de 5 puntos, obtenemos

$$2U_{M,k} - U_{M-1,k} - \tfrac{1}{2}U_{M,k+1} - \tfrac{1}{2}U_{M,k-1} = \tfrac{1}{2}h^2 f_{M,k} + hg_{M,k} \qquad \text{(Lower BC)}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

La *Ecuación Upper BC*, también se cumple para $k = N$, en la esquina $(0, b)$, donde $\partial u / \partial n = \partial u / \partial y = g$, que aproximadamente es igual a

$$\tfrac{1}{2h}(U_{0,N+1} - U_{0,N-1}) = g_{0,N} \qquad \text{BCNeumann 3}$$

Combinando la *Ecuación BCNeumann 3* anterior con la *Ecuación de Upper BC* en $k = N$, encontramos que

$$2U_{0,N} - U_{1,N} - U_{0,N-1} = \tfrac{1}{2}h^2 f_{0,N} + 2hg_{0,N}$$

Entonces en el punto en la esquina superior derecha $(0, N)$

$$U_{0,N} - \tfrac{1}{2}U_{1,N} - \tfrac{1}{2}U_{0,N-1} = \tfrac{1}{4}h^2 f_{0,N} + hg_{0,N}$$

Para el punto a lo largo de $y = 0$ la normal hacia afuera es $\partial u / \partial n = -\partial u / \partial y$, la aproximación es

$$\tfrac{1}{2h}(U_{i,0-1} - U_{i,0+1}) = g_{i,0}$$

de donde obtenemos que el punto ficticio

$$U_{i,-1} = 2hg_{i,0} + U_{i,1} \qquad \text{BCNeumann 4}$$

Entonces en el punto superior izquierdo $(0, 0)$, si sustituimos los valores de la BC Neumann 1 y 4 en la ecuación del esténcil de 5 puntos, obtenemos

$$U_{0,0} - \tfrac{1}{2}U_{0,1} - \tfrac{1}{2}U_{1,0} = \tfrac{1}{4}h^2 f_{0,0} + hg_{0,0}$$

En resumen, para las condiciones de frontera de Neumann, necesitamos las aproximaciones en las cuatro esquinas, que utilizando la ecuación de diferencia finita

$$4U_{i,k} - U_{i+1,k} - U_{i-1,k} - U_{i,k+1} - U_{i,k-1} = f_{i,k}$$

tendremos

$$\begin{aligned} (0, 0) &: 4U_{0,0} - U_{1,0} - U_{-1,0} - U_{0,1} - U_{0,-1} = f_{0,0} && (1)\\ (0, N) &: 4U_{0,N} - U_{1,N} - U_{-1,N} - U_{0,N+1} - U_{0,N-1} = f_{0,N} && (2)\\ (M, 0) &: 4U_{M,0} - U_{M+1,0} - U_{M-1,0} - U_{M,1} - U_{M,-1} = f_{M,0} && (3)\\ (M, N) &: 4U_{M,N} - U_{M+1,N} - U_{M-1,N} - U_{M,N+1} - U_{M,N-1} = f_{M,N} && (4) \end{aligned}$$

- Los puntos fuera de la frontera de abajo $U_{-1,0}$ y $U_{-1,N}$ son aproximados por la *Ecuación BCNeumann 1*.
- Los puntos fuera de la frontera superior $U_{M+1,0}$ y $U_{M+1,N}$ son aproximados por la *Ecuación BCNeumann 2*.
- Los puntos fuera de la frontera vertical derecha $U_{0,N+1}$ y $U_{M,N+1}$ son aproximados por la *Ecuación BC Neumann 3*.
- Los puentos fuera de la frontera vertical izquierda $U_{0,-1}$ y $U_{M,-1}$ son aproximados por la *Ecuación BCNeumann 4*.

.l igual que el ejemplo resuelto anterior, escribimos las ecuaciones para el nivel $k = 0$:

$$\begin{aligned} i = 0, k = 0 &: 4U_{0,0} - U_{-1,0} - U_{0,-1} - U_{1,0} - U_{0,1} = h^2 f_{0,0} && (1)\\ & 4U_{0,0} - 2U_{1,0} - 2U_{0,1} = h^2 f_{0,0} + 4hg_{0,0} && (2)\\ i = 1, k = 0 &: 4U_{1,0} - U_{0,0} - U_{1,-1} - U_{2,0} - U_{1,1} = h^2 f_{1,0} && (3)\\ & 4U_{1,0} - U_{0,0} - 2U_{1,1} - U_{2,0} = h^2 f_{1,0} + 2hg_{1,0} && (4)\\ i = 2, k = 0 &: 4U_{2,0} - U_{1,0} - 2U_{2,1} - U_{3,0} = h^2 f_{2,0} + 2hg_{2,0} && (5)\\ i = 3, k = 0 &: 4U_{3,0} - U_{2,0} - 2U_{3,1} - U_{4,0} = h^2 f_{3,0} + 2hg_{3,0} && (6)\\ i = 4, k = 0 &: 4U_{4,0} - 2U_{3,0} - 2U_{4,1} = h^2 f_{4,0} + 4hg_{4,0} && (7)\\ & && (8) \end{aligned}$$

as ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,0}\\ U_{1,0}\\ U_{2,0}\\ U_{3,0}\\ U_{4,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1}\\ U_{1,1}\\ U_{2,1}\\ U_{3,1}\\ U_{4,1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{0,0}\\ f_{1,0}\\ f_{2,0}\\ f_{3,0}\\ f_{4,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4hg_{0,0}\\ 2hg_{1,0}\\ 2hg_{2,0}\\ 2hg_{3,0}\\ 4hg_{4,0} \end{bmatrix}$$

lacemos lo mismo para calcular los valores de U en los puntos de la segunda columna,

Hacemos lo mismo para calcular los valores de U en los puntos de la segunda columna,

$$\begin{aligned} i = 0, k = 1 &: 4U_{0,1} - U_{-1,1} - U_{0,0} - U_{1,1} - U_{0,2} = h^2 f_{0,1} && (1)\\ & 4U_{0,1} - U_{0,0} - 2U_{1,1} - U_{0,2} = h^2 f_{0,1} + 2hg_{0,1} && (2)\\ i = 1, k = 1 &: 4U_{1,1} - U_{0,1} - U_{1,0} - U_{2,1} - U_{1,2} = h^2 f_{1,1} && (3)\\ i = 2, k = 1 &: 4U_{2,1} - U_{1,1} - U_{2,0} - U_{3,1} - U_{2,2} = h^2 f_{2,1} && (4)\\ i = 3, k = 1 &: 4U_{3,1} - U_{2,1} - U_{3,0} - U_{4,1} - U_{3,2} = h^2 f_{3,1} && (5)\\ i = 4, k = 1 &: 4U_{4,1} - U_{3,1} - U_{4,0} - U_{5,1} - U_{4,2} = h^2 f_{4,1} && (6)\\ & 4U_{4,1} - 2U_{3,1} - U_{4,0} - U_{4,2} = h^2 f_{4,1} + 2hg_{4,1} && (7)\\ & && (8) \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir de forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,0}\\ U_{1,0}\\ U_{2,0}\\ U_{3,0}\\ U_{4,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1}\\ U_{1,1}\\ U_{2,1}\\ U_{3,1}\\ U_{4,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,2}\\ U_{1,2}\\ U_{2,2}\\ U_{3,2}\\ U_{4,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{0,1}\\ f_{1,1}\\ f_{2,1}\\ f_{3,1}\\ f_{4,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2hg_{0,1}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 2hg_{4,1} \end{bmatrix}$$

De continuar así para cada segmento de frontera y cada punto de las esquinas, tendremos M^2 ecuaciones para los valores de U en el dominio y fronteras.

Juntando todas las ecuaciones terminaremos con una ecuación matricial de la forma

$$A\mathbf{U} = h^2\mathbf{F} + h\mathbf{G}$$

donde la matriz de matrices A de dimensión $M^2 \times M^2$, tiene la forma

De continuar así para cada segmento de frontera y cada punto de las esquinas, tendremos M^2 ecuaciones para los valores de U en el dominio y fronteras.

Juntando todas las ecuaciones terminaremos con una ecuación matricial de la forma

$$A\mathbf{U} = h^2\mathbf{F} + h\mathbf{G}$$

donde la matriz de matrices A de dimensión $M^2 \times M^2$, tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} B & -2I & & & & \\ -I & B & -I & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -I & B & -I\\ & & & & -2I & B \end{bmatrix}$$

donde la matrix B de dimensión $M \times M$ es la matriz tridiagonal

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo resuelto de Condiciones de Neumann:

Resuelva la ecuación de Poisson sobre un cuadrado unitario

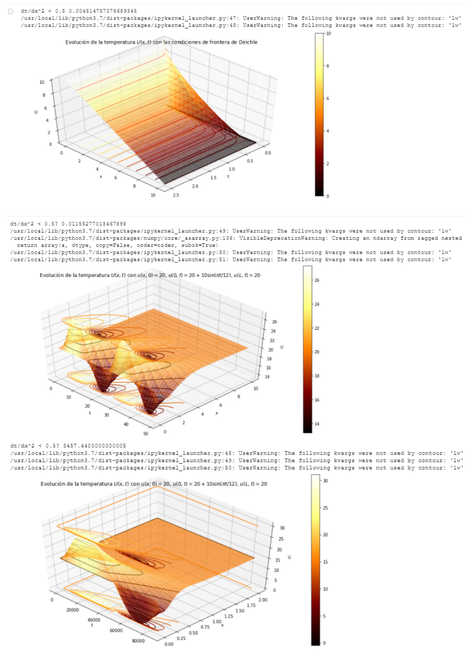
$$-\nabla^2 u(x, y) = 20\cos(3\pi x)\sin(2\pi y)$$

con condiciones de flujo cero en las fronteras

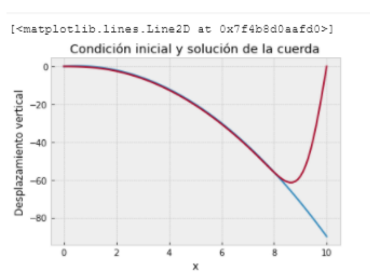
$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= 0 && (1)\\ u_x(1, y) &= 0 && (2)\\ u_y(x, 0) &= 0 && (3)\\ u_y(x, 1) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

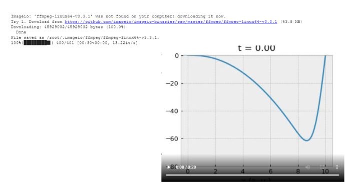
8 Evidencias gráficas de las actividades

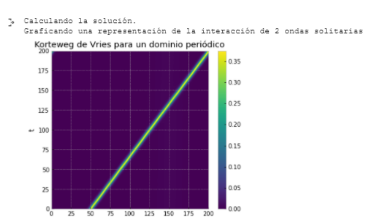
8.1 Actividad 10.

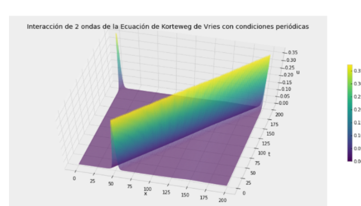


8.2 Actividad 11.

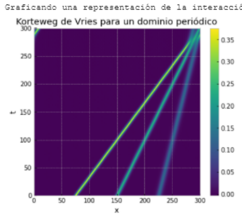


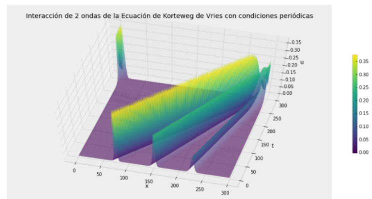




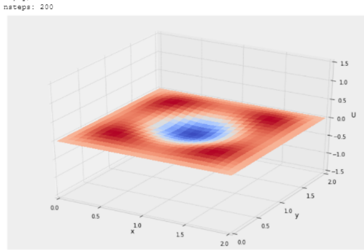


```
Calculando la solución.
Graficando una representación de la interacción de 2 ondas solitarias
```

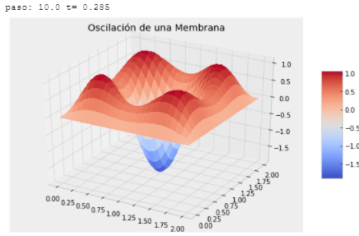




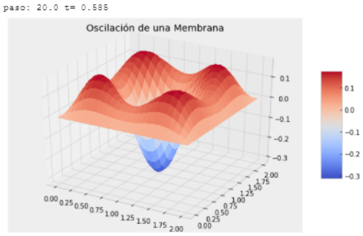

```
N: 200
D: 0.25
Mx: 50
My 50
dx,dy; 0.04 0.04
nsteps: 200
```



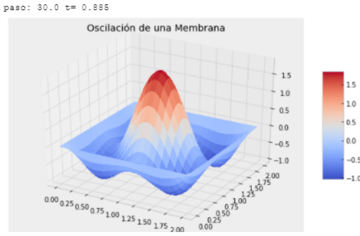
```
paso: 10.0 t= 0.285
```



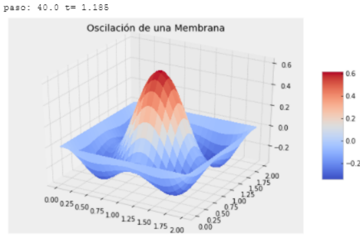

```
paso: 20.0 t= 0.585
```



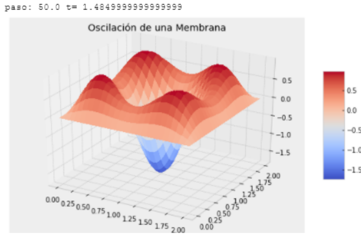

```
paso: 30.0 t= 0.885
```



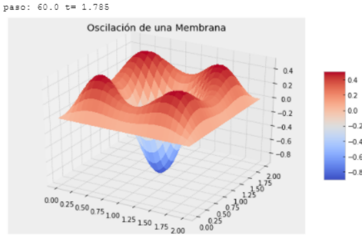

```
paso: 40.0 t= 1.185
```



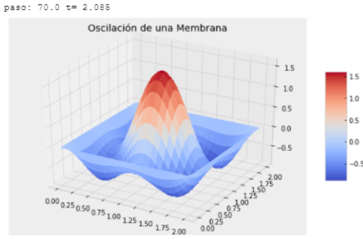

```
paso: 50.0 t= 1.4849999999999999
```

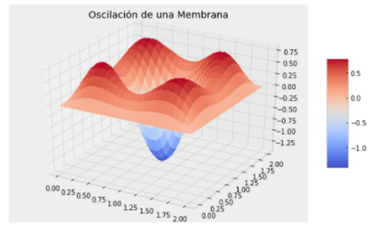



```
paso: 60.0 t= 1.785
```

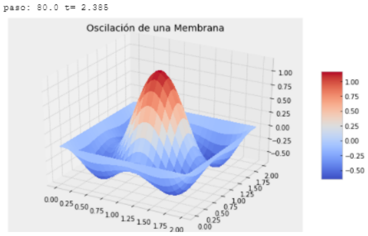



```
paso: 70.0 t= 2.085
```

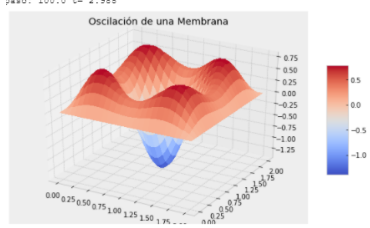




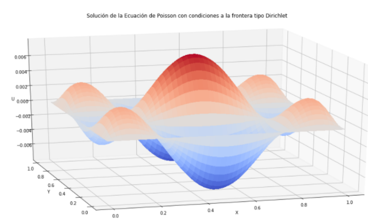
paso: 80.0 t= 2.385

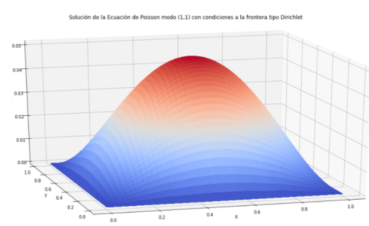


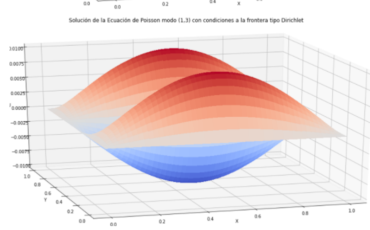
paso: 100.0 t= 2.985

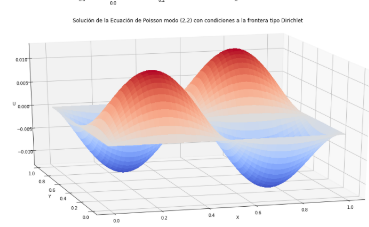


8.3 Actividad 12.

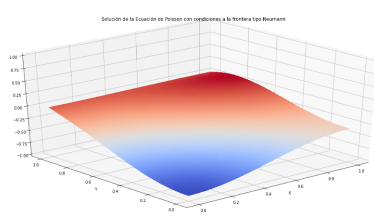


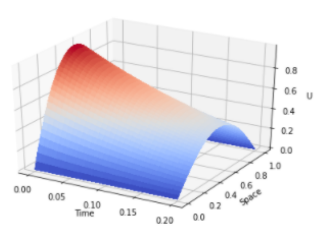


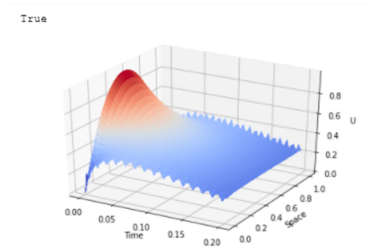




True







9 Conclusión

Esta mega actividad a realizar fue de gran ayuda para entender bien las condiciones de frontera hablados durante clase. Lo único que no me gustó de las actividades son la cantidad de horas de dedicación a observar el código y verificar para que sirve cada situación en el trabajo. Además, la actividad 11 fue demasiado larga para mi gusto. Sin embargo, ayudó muy bien en el comprendimiento de los temas y cada una de las situaciones presentadas en la teoría, es algo de gran utilidad y que se debe tomar con más dedicación para comprenderlo del todo. Es muy complicado para alguien nuevo en programación, ver estos temas de ecuaciones diferenciales parciales, debido a que los maestros que dan los temas en otras clases no lo enseñan bien. Por mi parte recurrí a internet para entender de forma media, la solución de cada situación.

10 Bibliografía

http://computacional1.pbworks.com/w/page/72847919/FrontPage
http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/hect/Ecuaciones_en_Derivadas_Parciales/libro_Gabrile.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method#Explicit_method
https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_conditioncite_note−2
https://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script = sci$_a$rttextpid = S1405−77432019000300008