

# Capítulo 1

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.1

1. Muestre que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una solución en los intervalos dados.
  - a.  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ ,  $[0.2, 0.3]$  y  $[1.2, 1.3]$
  - b.  $(x - 2)^2 - \ln x = 0$ ,  $[1, 2]$  y  $[e, 4]$
  - c.  $2x \cos(2x) - (x - 2)^2 = 0$ ,  $[2, 3]$  y  $[3, 4]$
  - d.  $x - (\ln x)^x = 0$ ,  $[4, 5]$
2. Muestre que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una solución en los intervalos dados.
  - a.  $\sqrt{x} - \cos x = 0$ ,  $[0, 1]$
  - b.  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ ,  $[0, 1]$
  - c.  $-3 \tan(2x) + x = 0$ ,  $[0, 1]$
  - d.  $\ln x - x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$
3. Encuentre los intervalos que contienen soluciones para las siguientes ecuaciones.
  - a.  $x - 2^{-x} = 0$
  - b.  $2x \cos(2x) - (x + 1)^2 = 0$
  - c.  $3x - e^x = 0$
  - d.  $x + 1 - 2 \sin(\pi x) = 0$
4. Encuentre los intervalos que contienen soluciones para las siguientes ecuaciones.
  - a.  $x - 3^{-x} = 0$
  - b.  $4x^2 - e^x = 0$
  - c.  $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$
  - d.  $x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$
5. Encuentre  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  para las siguientes funciones e intervalos.
  - a.  $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$ ,  $[0, 1]$
  - b.  $f(x) = (4x - 3)/(x^2 - 2x)$ ,  $[0.5, 1]$
  - c.  $f(x) = 2x \cos(2x) - (x - 2)^2$ ,  $[2, 4]$
  - d.  $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ ,  $[1, 2]$
6. Encuentre  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  para las siguientes funciones e intervalos.
  - a.  $f(x) = 2x/(x^2 + 1)$ ,  $[0, 2]$
  - b.  $f(x) = x^2 \sqrt{4 - x}$ ,  $[0, 4]$
  - c.  $f(x) = x^3 - 4x + 2$ ,  $[1, 2]$
  - d.  $f(x) = x \sqrt{3 - x^2}$ ,  $[0, 1]$
7. Muestre que  $f'(x)$  es 0 en por lo menos uno de los intervalos dados.
  - a.  $f(x) = 1 - e^x + (e - 1) \sin((\pi/2)x)$ ,  $[0, 1]$
  - b.  $f(x) = (x - 1) \tan x + x \sin \pi x$ ,  $[0, 1]$
  - c.  $f(x) = x \sin \pi x - (x - 2) \ln x$ ,  $[1, 2]$
  - d.  $f(x) = (x - 2) \sin x \ln(x + 2)$ ,  $[-1, 3]$
8. Suponga que  $f \in C[a, b]$  y  $f'(x)$  existe en  $(a, b)$ . Muestre que si  $f'(x) \neq 0$  para todas las  $x$  en  $(a, b)$ , entonces puede existir  $p$  en  $[a, b]$  con  $f(p) = 0$ .
9. Si  $f(x) = x^3$ .
  - a. Encuentre el segundo polinomio de Taylor  $P_2(x)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .
  - b. Encuentre  $R_2(0.5)$  y el error real al utilizar  $P_2(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ .
  - c. Repita la parte a) usando  $x_0 = 1$ .
  - d. Repita la parte b) usando el polinomio de la parte c).

10. Encuentre el tercer polinomio de Taylor  $P_3(x)$  para la función  $f(x) = \sqrt{x+1}$  alrededor de  $x_0 = 0$ . Aproxime  $\sqrt{0.5}$ ,  $\sqrt{0.75}$ ,  $\sqrt{1.25}$ , y  $\sqrt{1.5}$  mediante  $P_3(x)$  y encuentre los errores reales.
11. Encuentre el segundo polinomio de Taylor  $P_2(x)$  para la función  $f(x) = e^x \cos x$  alrededor de  $x_0 = 0$ .
  - a. Use  $P_2(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ . Encuentre un límite superior para el error  $|f(0.5) - P_2(0.5)|$  por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.
  - b. Encuentre una cota para el error  $|f(x) - P_2(x)|$  al usar  $P_2(x)$  para aproximar  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
  - c. Aproxime  $\int_0^1 f(x) dx$  por medio de  $\int_0^1 P_2(x) dx$ .
  - d. Encuentre una cota superior para el error en c) usando  $\int_0^1 |R_2(x)| dx$  y compárela con el error real.
12. Repita el ejercicio 11 usando  $x_0 = \pi/6$ .
13. Encuentre el tercer polinomio de Taylor  $P_3(x)$  para la función  $f(x) = (x-1) \ln x$  alrededor de  $x_0 = 1$ .
  - a. Use  $P_3(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ . Encuentre una cota superior para el error  $|f(0.5) - P_3(0.5)|$  por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.
  - b. Encuentre una cota para el error  $|f(x) - P_3(x)|$  al utilizar  $P_3(x)$  para aproximar  $f(x)$  en el intervalo  $[0.5, 1.5]$ .
  - c. Aproxime  $\int_{0.5}^{1.5} f(x) dx$  por medio de  $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x) dx$ .
  - d. Encuentre una cota superior para el error en c) a través de  $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)| dx$  y compárela con el error real.
14. Si  $f(x) = 2x \cos(2x) - (x-2)^2$  y  $x_0 = 0$ .
  - a. Encuentre el tercer polinomio de Taylor  $P_3(x)$  y utilícelo para aproximar  $f(0.4)$ .
  - b. Use la fórmula de error en el teorema de Taylor para encontrar una cota superior para el error  $|f(0.4) - P_3(0.4)|$ . Calcule el error real.
  - c. Encuentre el cuarto polinomio de Taylor  $P_4(x)$  y úselo para aproximar  $f(0.4)$ .
  - d. Utilice la fórmula de error en el teorema de Taylor para encontrar un límite superior para el error  $|f(0.4) - P_4(0.4)|$ . Calcule el error real.
15. Encuentre el cuarto polinomio de Taylor  $P_4(x)$  para la función  $f(x) = xe^{x^2}$  alrededor de  $x_0 = 0$ .
  - a. Encuentre una cota superior para  $|f(x) - P_4(x)|$ , para  $0 \leq x \leq 0.4$ .
  - b. Aproxime  $\int_0^{0.4} f(x) dx$  por medio de  $\int_0^{0.4} P_4(x) dx$ .
  - c. Encuentre una cota superior para el error en b) usando  $\int_0^{0.4} P_4(x) dx$ .
  - d. Aproxime  $f'(0.2)$  usando  $P_4'(0.2)$  y encuentre el error.
16. Utilice el término error de un polinomio de Taylor para calcular el error implicado al usar  $\sin x \approx x$  para aproximar  $\sin 1^\circ$ .
17. Utilice un polinomio de Taylor alrededor de  $\pi/4$  para aproximar  $\cos 42^\circ$  con una precisión de  $10^{-6}$ .
18. Si  $f(x) = (1-x)^{-1}$  y  $x_0 = 0$ . Encuentre el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor  $P_n(x)$  para  $f(x)$  alrededor de  $x_0$ . Encuentre un valor de  $n$  necesario para  $P_n(x)$  para aproximar  $f(x)$  dentro de  $10^{-6}$  en  $[0, 0.5]$ .
19. Si  $f(x) = e^x$  y  $x_0 = 0$ . Encuentre el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor  $P_n(x)$  para  $f(x)$  alrededor de  $x_0$ . Encuentre un valor de  $n$  necesario para que  $P_n(x)$  aproxime a  $f(x)$  con una precisión de  $10^{-6}$  en  $[0, 0.5]$ .
20. Encuentre el  $n$ -ésimo polinomio de Maclaurin  $P_n(x)$  para  $f(x) = \arctan x$ .
21. El polinomio  $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$  se utilizará para aproximar  $f(x) = \cos x$  en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Encuentre una cota para el error máximo.
22. Use el teorema del valor intermedio 1.11 y el teorema de Rolle 1.7 para mostrar que la gráfica de  $f(x) = x^3 + 2x + k$  corta al eje  $x$  exactamente una vez, independientemente del valor de la constante  $k$ .
23. Un polinomio de Maclaurin para  $e^x$  se utiliza para obtener la aproximación 2.5 para  $e$ . La cota del error en esta aproximación se establece como  $E = \frac{1}{6}$ . Encuentre una cota para el error en  $E$ .
24. La función de error definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

da la probabilidad de que cualquiera de una serie de pruebas se encontrará dentro de las unidades  $x$  de la media, suponiendo que las pruebas tienen una distribución normal con una media de 0 y una desviación estándar de  $\sqrt{2}/2$ . Esta integral no se puede evaluar en términos de funciones elementales, por lo que es preciso usar una técnica de aproximación.

- a. Integre la serie de Maclaurin para  $e^{-x^2}$  para mostrar que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

- b. La función de error también se puede expresar en forma

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}.$$

- c. Verifique que las dos series concuerdan en  $k = 1, 2, 3$  y  $4$ . [Sugerencia: Use la serie de Maclaurin para  $e^{-x^2}$ .]  
 d. Use la serie en la parte a) para aproximar  $\operatorname{erf}(1)$  con una precisión de  $10^{-7}$ .  
 e. Use el mismo número de términos que se utilizaron en la parte c) para aproximar  $\operatorname{erf}(1)$  con la serie en la parte b).  
 f. Explique por qué se presentan dificultades al usar la serie en la parte b) para aproximar  $\operatorname{erf}(x)$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

25. El  $n$ -ésimo polinomio de Taylor para una función  $f$  en  $x_0$  algunas veces recibe el nombre de polinomio de grado  $n$  que se aproxima “mejor” a  $f$  cerca de  $x_0$ .  
 a. Explique por qué esta descripción es precisa.  
 b. Encuentre el polinomio cuadrático que se aproxima mejor a la función  $f$  cerca de  $x_0 = 1$  si la recta tangente en  $x_0 = 1$  tiene la ecuación  $y = 4x - 1$  y si  $f''(1) = 6$ .  
 26. Pruebe el teorema generalizado de Rolle, teorema 1.10, al verificar lo siguiente.  
 a. Use el teorema de Rolle para mostrar que  $f'(z_i) = 0$  para  $n - 1$  números en  $[a, b]$  con  $a < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < b$ .  
 b. Use el teorema de Rolle para mostrar que  $f''(w_i) = 0$  para  $n - 2$  números en  $[a, b]$  con  $z_1 < w_1 < z_2 < w_2 \cdots w_{n-2} < z_{n-1} < b$ .  
 c. Continúe los argumentos en las partes a) y b) para mostrar que para cada  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , existen  $n - j$  números distintos en  $[a, b]$ , en donde  $f^{(j)}$  es 0.  
 d. Muestre que la parte c) implica la conclusión del teorema.  
 27. El ejemplo 3 establecía que para todas las  $x$  tenemos  $|\sin x| \leq |x|$ . Utilice lo siguiente para verificar esta declaración.  
 a. Muestre que para todas las  $x \geq 0$ ,  $f(x) = x - \sin x$  no disminuye, lo que implica que  $\sin x \leq x$  con igualdad, sólo cuando  $x = 0$ .  
 b. Use el hecho de que la función seno es impar para obtener la conclusión.  
 28. Una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que satisface una *condición de Lipschitz* con constante de Lipschitz  $L$  en  $[a, b]$  si, para cada  $x, y \in [a, b]$ , tenemos  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ .  
 a. Muestre que si  $f$  satisface una *condición de Lipschitz* con constante de Lipschitz  $L$  en un intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f \in C[a, b]$ .  
 b. Muestre que si  $f$  tiene una derivada limitada en  $[a, b]$  por  $L$ , entonces  $f$  satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz  $L$  en  $[a, b]$ .  
 c. Proporcione un ejemplo de una función continua en un intervalo cerrado, pero que no satisface una condición de Lipschitz en el intervalo.  
 29. Suponga que  $f \in C[a, b]$  y  $x_1$  y  $x_2$  se encuentran en  $[a, b]$ .  
 a. Muestre que existe un número  $\xi$  entre  $x_1$  y  $x_2$  con

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2).$$

- b. Suponga que  $c_1$  y  $c_2$  son constantes positivas. Muestre que existe un número entre  $x_1$  y  $x_2$  con

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}.$$

- c. Proporcione un ejemplo para mostrar que el resultado en la parte b) no necesariamente se mantiene cuando  $c_1$  y  $c_2$  tienen signos opuestos con  $c_1 \neq -c_2$ .

30. Sea  $f \in C[a, b]$  y sea  $p$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ .
- Suponga que  $f(p) \neq 0$ . Muestre que existe un  $\delta > 0$  tal que para todas las  $x$  en  $[p - \delta, p + \delta]$ ,  $f(x) \neq 0$ , con  $[p - \delta, p + \delta]$  es subconjunto de  $[a, b]$ .
  - Suponga que  $f(p) = 0$  y  $k > 0$  es dada. Muestre que existe un  $\delta > 0$  tal que para toda  $x$  en  $|f(x)| \leq k$ ,  $[p - \delta, p + \delta]$ , con  $[p - \delta, p + \delta]$  es un subconjunto de  $[a, b]$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Con palabras propias, describa la condición de Lipschitz. Proporcione varios ejemplos de funciones que satisfacen esta condición o de funciones que no la satisfacen.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.2

- Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de  $p$  por  $p^*$ .
  - $p = \pi, p^* = 22/7$
  - $p = \pi, p^* = 3.1416$
  - $p = e, p^* = 2.718$
  - $p = \sqrt{2}, p^* = 1.414$
- Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de  $p$  por  $p^*$ .
  - $p = e^{10}, p^* = 22000$
  - $p = 10^\pi, p^* = 1400$
  - $p = 8!, p^* = 39900$
  - $p = 9!, p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$
- Suponga que  $p^*$  se debe aproximar a  $p$  con error relativo máximo de  $10^{-3}$ . Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar  $p^*$  para cada valor de  $p$ .
  - 150
  - 900
  - 1500
  - 90
- Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar  $p^*$  para aproximarse a  $p$  con error relativo máximo de  $10^{-4}$  para cada valor de  $p$ .
  - $\pi$
  - $e$
  - $\sqrt{2}$
  - $\sqrt[3]{7}$
- Realice los siguientes cálculos i) de forma exacta, ii) con aritmética de corte de tres dígitos y iii) con aritmética de redondeo de tres dígitos. iv) Calcule los errores relativos en las partes ii) y iii).
  - $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$
  - $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$
  - $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$
  - $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$
- Utilice la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.
  - $133 + 0.921$
  - $133 - 0.499$
  - $(121 - 0.327) - 119$
  - $(121 - 119) - 0.327$
- Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.
  - $\frac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$
  - $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$
  - $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$
  - $\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$
- Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.
- Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de tres dígitos.
- Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.
- Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son  $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$ . Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de  $\pi$  mediante el polinomio en lugar del arcotangente:
  - $4 \left[ \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \right]$
  - $16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$



21. Suponga que dos puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  se encuentran en línea recta con  $y_1 \neq y_0$ . Existen dos fórmulas para encontrar la intersección  $x$  de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}.$$

- a. Muestre que ambas fórmulas son algebraicamente correctas.  
 b. Use los datos  $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$  y  $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$  y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con  $x$  de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?  
 22. El polinomio de Taylor de grado  $n$  para  $f(x) = e^x$  es  $\sum_{i=0}^n (x^i / i!)$ . Use el polinomio de Taylor de grado nueve y aritmética de corte de tres dígitos para encontrar una aproximación para  $e^{-5}$  con cada uno de los siguientes métodos.

a. 
$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^9 \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$$

b. 
$$e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!}}.$$

- c) Un valor aproximado de  $e^{-5}$  correcto para tres dígitos es  $6.74 \times 10^{-3}$ . ¿Qué fórmula, a) o b), es más precisa y por qué?  
 23. El sistema lineal dos por dos

$$ax + by = e,$$

$$cx + dy = f,$$

donde  $a, b, c, d, e, f$  están dadas, se puede resolver para  $x$  y  $y$  como sigue:

$$\text{determine } m = \frac{c}{a}, \quad \text{siempre que } a \neq 0;$$

$$d_1 = d - mb;$$

$$f_1 = f - me;$$

$$y = \frac{f_1}{d_1};$$

$$x = \frac{(e - by)}{a}.$$

Resuelva los siguientes sistemas lineales con aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

a. 
$$\begin{aligned} 1.130x - 6.990y &= 14.20 \\ 1.013x - 6.099y &= 14.22 \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} 8.110x + 12.20y &= -0.1370 \\ -18.11x + 112.2y &= -0.1376 \end{aligned}$$

24. Repita el ejercicio 23 con aritmética de corte de cuatro dígitos.  
 25. a. Muestre que la técnica anidada polinomial descrita en el ejemplo 6 también se puede aplicar a la evaluación de

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99.$$

- b. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos y la suposición de que  $e^{1.53} = 4.62$  y el hecho de que  $e^{nx} = (e^x)^n$  para evaluar  $f(1.53)$  como se establece en la parte a).  
 c. Haga nuevamente el cálculo en la parte b) al anidar primero los cálculos.  
 d. Compare las aproximaciones en las partes b) y c) con el resultado verdadero de tres dígitos  $f(1.53) = -7.61$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

26. El ejemplo de apertura para este capítulo describía un experimento físico que involucra la temperatura de un gas bajo presión. En esta aplicación se nos proporcionaba  $P = 1.00$  atm,  $V = 0.100$  m<sup>3</sup>,  $N = 0.00420$  mol y  $R = 0.08206$ . Al resolver para  $T$  en la ley de gas ideal obtenemos

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15 \text{ K} = 17^\circ\text{C}.$$

En el laboratorio, se encontró que  $T$  era  $15^\circ\text{C}$  en estas condiciones y, cuando al duplicar la presión y reducir a la mitad el volumen,  $T$  era  $19^\circ\text{C}$ . Suponga que los datos son valores redondeados exactos para los lugares determinados y muestre que ambas cifras de laboratorio se encuentran dentro de los límites de precisión para la ley de gas ideal.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

27. El coeficiente binomial

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

describe el número de formas de seleccionar un subconjunto de  $k$  objetos a partir de un conjunto de  $m$  elementos.

- a. Suponga números máquina decimales de la forma

$$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n, \quad \text{con } 1 \leq d_1 \leq 9, 0 \leq d_i \leq 9,$$

$$\text{sí } i = 2, 3, 4 \quad \text{y} \quad |n| \leq 15.$$

¿Cuál es el valor más grande de  $m$  para el que el coeficiente binomial  $\binom{m}{k}$  se puede calcular para todas las  $k$  por medio de la definición sin causar desbordamiento (sobreflujo)?

- b. Muestre que  $\binom{m}{k}$  también se puede calcular a través de

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{k} \left( \frac{m-1}{k-1} \right) \cdots \left( \frac{m-k+1}{1} \right).$$

- c. ¿Cuál es el valor más grande de  $m$  para el que el coeficiente binomial  $\binom{m}{3}$  se puede calcular con la fórmula en la parte b) sin causar desbordamiento?
- d. Use la ecuación en b) y la aritmética de corte de cuatro dígitos para calcular el número de juegos de cinco cartas posible en una baraja de 52 cartas. Calcule los errores real y relativo.

28. Suponga que  $fl(y)$  es una aproximación de redondeo de  $k$  dígitos para  $y$ . Muestre que

$$\left| \frac{y - fl(y)}{y} \right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

[Sugerencia: Si  $d_{k+1} < 5$ , entonces  $fl(y) = 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n$ . Si  $d_{k+1} \geq 5$ , entonces  $fl(y) = 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$ .]

29. Si  $f \in C[a, b]$  es una función cuya derivada existe en  $(a, b)$ . Suponga que  $f$  se va a evaluar en  $x_0$  dentro de  $(a, b)$ , pero en lugar de calcular el valor real  $f(x_0)$ , el valor aproximado,  $\tilde{f}(x_0)$ , es el valor real de  $f$  en  $x_0 + \epsilon$ ; es decir,  $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$ .
- a. Utilice el teorema del valor medio 1.8 para calcular el error absoluto  $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$  y el error relativo  $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$ , al suponer que  $f(x_0) \neq 0$ .
- b. Si  $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$  y  $x_0 = 1$ , encuentre límites para los errores absoluto y relativo para
- $f(x) = e^x$
  - $f(x) = \sin x$
- c. Repita la parte b) con  $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$  y  $x_0 = 10$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la diferencia entre la aritmética realizada por computadora y la aritmética tradicional. ¿Por qué es tan importante reconocer la diferencia?
2. Proporcione diferentes ejemplos de la vida real acerca de errores catastróficos que se han presentado a partir del uso de la aritmética digital finita y explique lo que salió mal.
3. Analice las múltiples formas de redondear números.
4. Analice la diferencia entre un número escrito en notación estándar y uno que está escrito en formato de punto flotante decimal, normalizado. Proporcione varios ejemplos.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.3

1. Utilice aritmética de corte de tres dígitos para calcular las siguientes sumas. Para cada parte, ¿qué método es más preciso y por qué?
  - a.  $\sum_{i=1}^{10} (1/i^2)$  primero por  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$  y luego por  $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{1}$ .
  - b.  $\sum_{i=1}^{10} (1/i^3)$  primero por  $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{1000}$  y luego por  $\frac{1}{1000} + \frac{1}{729} + \cdots + \frac{1}{1}$ .
2. El número  $e$  se define mediante  $e = \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ , donde  $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$  para  $n \neq 0$  y  $0! = 1$ . Utilice aritmética de corte de cuatro dígitos para calcular las siguientes aproximaciones para  $e$  y determine los errores absoluto y relativo.

$$\text{a. } e \approx \sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$$

$$\text{b. } e \approx \sum_{j=0}^5 \frac{1}{(5-j)!}$$

$$\text{c. } e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$$

$$\text{d. } e \approx \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(10-j)!}$$

3. La serie de Maclaurin para la función arcotangente converge para  $-1 < x \leq 1$  y está dada por

$$\arctan x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}.$$

- a. Utilice el hecho de que  $\tan \pi/4 = 1$  para determinar el número  $n$  de términos de la serie que se necesita sumar para garantizar que  $|4P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$ .
  - b. El lenguaje de programación C++ requiere que el valor de  $\pi$  se encuentre dentro de  $10^{-10}$ . ¿Cuántos términos de la serie se necesitarían sumar para obtener este grado de precisión?
4. El ejercicio 3 describe con detalle un método bastante ineficiente para obtener una aproximación para  $\pi$ . El método puede mejorar considerablemente al observar que  $\pi/4 = \text{arcotangente } \frac{1}{2} + \text{arcotangente } \frac{1}{3}$  y evaluar la serie para la arcotangente en  $\frac{1}{2}$  y en  $\frac{1}{3}$ . Determine el número de términos que deben sumarse para garantizar una aproximación para  $\pi$  dentro de  $10^{-3}$ .
  5. Otra fórmula para calcular  $\pi$  se puede deducir a partir de la identidad  $\pi/4 = 4 \text{ arcotangente } \frac{1}{5} - \text{arcotangente } \frac{1}{239}$ . Determine el número de términos que se deben sumar para garantizar una aproximación  $\pi$  dentro de  $10^{-3}$ .
  6. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes sucesiones conforme  $n \rightarrow \infty$ .

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{b. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{c. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)^2 = 0$$

$$\text{d. } \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$$

7. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes funciones como  $h \rightarrow 0$ .

$$\text{a. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\text{b. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$$

$$\text{c. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - h \cos h}{h} = 0$$

$$\text{d. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{h} = -1$$



## EJERCICIOS TEÓRICOS

8. Suponga que  $0 < q < p$  y que  $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$ .
  - a. Muestre que  $\alpha_n = \alpha + O(n^{-q})$ .
  - b. Haga una tabla donde enumere  $1/n$ ,  $1/n^2$ ,  $1/n^3$ , y  $1/n^4$  para  $n = 5, 10, 100$ , y  $1000$ , y analice la rapidez de variación de convergencia de estas sucesiones conforme  $n$  se vuelve más grande.
9. Suponga que  $0 < q < p$  y que  $F(h) = L + O(h^p)$ .
  - a. Muestre que  $F(h) = L + O(h^q)$ .
  - b. Haga una tabla en donde enumere  $h$ ,  $h^2$ ,  $h^3$  y  $h^4$  para  $h = 0.5, 0.1, 0.01$  y  $0.001$  y analice la rapidez de convergencia de estas potencias de  $h$  conforme  $h$  se aproxima a cero.
10. Suponga que cuando  $x$  se aproxima a cero,

$$F_1(x) = L_1 + O(x^\alpha) \quad \text{y} \quad F_2(x) = L_2 + O(x^\beta).$$

Si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes diferentes a cero y definen

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) \quad \text{y} \quad G(x) = F_1(c_1 x) + F_2(c_2 x).$$

Muestre que si  $\gamma = \text{mínimo} \{\alpha, \beta\}$ , entonces, conforme  $x$  se aproxima a cero,

- a.  $F(x) = c_1 L_1 + c_2 L_2 + O(x^\gamma)$
  - b.  $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$ .
11. La sucesión  $\{F_n\}$  descrita por  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$ , y  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ , si  $n \geq 0$ , recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci*. Sus términos se presentan de manera natural en muchas especies botánicas, en especial aquellas con pétalos o escalas ordenadas en forma de espiral logarítmica. Considere la sucesión  $\{x_n\}$ , donde  $x_n = F_{n+1}/F_n$ . Suponga que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , muestre que  $x = (1 + \sqrt{5})/2$ . Este número recibe el nombre de *número áureo*.
  12. Muestre que la sucesión de Fibonacci también satisface la ecuación

$$F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

13. Describa la salida del siguiente algoritmo. ¿Cómo se compara este algoritmo con la ilustración en la página 24?

ENTRADA  $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

SALIDA SUM.

Paso 1 Determine SUM =  $x_1$ .

Paso 2 Para  $i = 2, 3, \dots, n$  efectúe el paso 3.

Paso 3 SUM = SUM +  $x_i$ .

Paso 4 SALIDA SUM;

PARE.

14. Compare los siguientes tres algoritmos. ¿Cuándo es correcto el algoritmo de la parte 1a?

a. ENTRADA  $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

SALIDA PRODUCT.

Paso 1 Determine PRODUCT = 0.

Paso 2 Para  $i = 1, 2, \dots, n$  haga

Determine PRODUCT = PRODUCT \*  $x_i$ .

Paso 3 SALIDA PRODUCT;

PARE.

b. ENTRADA  $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

SALIDA PRODUCT.

Paso 1 Determine PRODUCT = 1.

Paso 2 Para  $i = 1, 2, \dots, n$  haga

Set PRODUCT = PRODUCT \*  $x_i$ .

Paso 3 SALIDA PRODUCT;

PARE.

- c. ENTRADA  $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
 SALIDA PRODUCT.  
*Paso 1* Determine PRODUCT = 1.  
*Paso 2* Para  $i = 1, 2, \dots, n$  haga  
     si  $x_i = 0$  entonces determine PRODUCT = 0;  
         SALIDA PRODUCT;  
         PARE  
     también determine PRODUCT = PRODUCT \*  $x_i$ .  
*Paso 3* SALIDA PRODUCT;  
 PARE.

15. a. ¿Cuántas multiplicaciones y sumas se requieren para determinar una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i b_j?$$

- b. Modifique la suma en la parte a) a un formato equivalente que reduzca el número de cálculos.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Escriba un algoritmo para sumar la serie finita  $\sum_{i=1}^n x_i$  en orden inverso.
2. Construya un algoritmo que tenga como entrada un entero  $n \geq 1$ , números  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y un número  $x$  y que produzca como salida el producto  $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ .
3. Si  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  es un polinomio y si se proporciona  $x_0$ . Construya un algoritmo para evaluar  $P(x_0)$  por medio de la multiplicación anidada.
4. Las ecuaciones (1.2) y (1.3) en la sección 1.2 proporcionan formas alternativas para las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de  $ax^2 + bx + c = 0$ . Construya un algoritmo con entrada  $a, b, c$  y salida  $x_1, x_2$  que calcule las raíces  $x_1$  y  $x_2$  (que pueden ser iguales con conjugados complejos) mediante la mejor fórmula para cada raíz.
5. Suponga que

$$\frac{1-2x}{1-x+x^2} + \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4} + \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8} + \cdots = \frac{1+2x}{1+x+x^2},$$

para  $x < 1$  y si  $x = 0.25$ . Escriba y ejecute un algoritmo que determine el número de términos necesarios en el lado izquierdo de la ecuación de tal forma que el lado izquierdo difiera del lado derecho en menos de  $10^{-6}$ .

6. ¿Qué calculan los algoritmos en la parte a) y en la parte b)?

- a. ENTRADA  $a_0, a_1, x_0, x_1$ .  
 SALIDA S.  
*Paso 1* Para  $i = 0, 1$  haga que sea  $s_i = a_i$ .  
*Paso 2* Para  $i = 0, 1$  haga  
     para  $j = 0, 1$  haga  
         para  $i \neq j$  determine  $s_i = \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} * s_i$ .  
*Paso 3* Determine  $S = s_0 + s_1$ .  
*Paso 4* SALIDA S;  
 PARE.
- b. ENTRADA  $a_0, a_1, a_2, x_0, x_1, x_2$ .  
 SALIDA S.  
*Paso 1* Para  $i = 0, \dots, 2$  haga que sea  $s_i = a_i$ .  
*Paso 2* Para  $i = 0, 1, 2$  haga  
     para  $j = 0, 1$  haga  
         si  $i \neq j$  entonces determine  $s_i = \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} * s_i$ .  
*Paso 3* Determine  $S = s_0 + s_1 + s_2$ .  
*Paso 4* SALIDA S;  
 PARE.

- c. Generalice los algoritmos para tener entrada  $n, a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_n$ . ¿Cuál es el valor de entrada S?

## PREGUNTA DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Analice las diferencias entre algunos de los paquetes de software disponibles para cálculo numérico.

## CONCEPTOS CLAVE

Algoritmos de representación de dígitos finitos	Errores de redondeo del teorema de Taylor	Teorema de Rolle
Aritmética de dígitos finitos	Estabilidad	Teorema del valor extremo
Convergencia	Integración	Teorema del valor intermedio
Continuidad	Integral Riemann	Teorema del valor medio
Diferenciabilidad	Límites	Teorema generalizado de Rolle
	Software numérico	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

Revisemos el capítulo 1 en términos de las habilidades que necesitará en los siguientes capítulos.

En la sección 1.1 debe ser capaz de utilizar el teorema de Rolle, el teorema del valor intermedio y el teorema del valor extremo, según corresponda para:

- i. Determinar si una ecuación tiene por lo menos una solución dentro de un intervalo determinado.
- ii. Encontrar un intervalo que contenga una solución para una ecuación determinada.
- iii. Mostrar que  $f'(x) = 0$  en un intervalo determinado.
- iv. Maximizar una función en un intervalo determinado.

También debe ser capaz de usar el teorema de Taylor para encontrar el polinomio de Taylor de grado  $n^{\text{th}}$   $P_n(x)$  para una función determinada,  $f$  alrededor de  $x_0$ . Además, debe ser capaz de usar el teorema del valor extremo para maximizar el término restante (error) para la expansión. Los estudiantes también deben observar que al calcular una cota superior para el término restante  $R_n(x)$  normalmente minimizamos el límite del error. Esto se logra al encontrar el máximo del valor absoluto de una derivada particular sobre el intervalo adecuado.

En la sección 1.2 usted debe ser capaz de convertir números al *formato de máquina decimal de  $k$  dígitos*. También de utilizar de manera competente la aritmética de redondeo o corte, según se requiera. Además debe ser capaz de calcular el error real, el error absoluto y el error relativo en las aproximaciones de  $p$  mediante  $p^*$  y de encontrar el intervalo más grande en el que  $p^*$  debe encontrarse para aproximarse a  $p$  con un error relativo que se encuentre dentro de la tolerancia específica. Los estudiantes deben saber que al realizar aritmética de dígitos finitos, cada cálculo individual debe redondearse o cortarse antes de realizar cualquier otro paso.

En la sección 1.3, siempre que sea posible, debe ser capaz de determinar el número de  $n$  términos de una serie que se sumará para garantizar que el error absoluto se encuentra dentro de una tolerancia específica. Al tratar con series alternantes, el error producido por el truncamiento de las series en cualquier término es menor a la magnitud del siguiente término. Siempre que sea posible, debe ser capaz de determinar la rapidez de convergencia de una sucesión. También debe tener la capacidad para seguir los pasos de un algoritmo y describir la salida.

La sección 1.4 resalta algunas de las diferencias entre los paquetes de software de propósito general y los algoritmos provistos en este texto. La principal “ventaja” de esta sección es exponerse al hecho de que los paquetes de software de propósito general consideran dos formas de reducir errores debido a redondeo máquina, subdesbordamiento y desbordamiento. También describe el rango de entrada que conducirá a resultados de cierta precisión específica.

# Capítulo 2

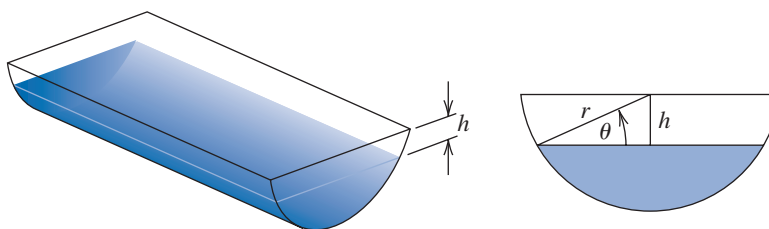
## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.1

1. Use el método de bisección para encontrar  $p_3$  para  $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$  en  $[0, 1]$ .
2. Sea  $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1) = 0$ . Use el método de bisección sobre los siguientes intervalos para encontrar  $p_3$ .
  - a.  $[-2, 1.5]$
  - b.  $[-1.25, 2.5]$
3. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-2}$  para  $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$  en cada intervalo.
  - a.  $[0, 1]$
  - b.  $[1, 3.2]$
  - c.  $[3.2, 4]$
4. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-2}$  para  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$  en cada intervalo.
  - a.  $[-2, -1]$
  - b.  $[0, 2]$
  - c.  $[2, 3]$
  - d.  $[-1, 0]$
5. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.
  - a.  $x - 2^{-x} = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$
  - b.  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$
  - c.  $2x \cos(2x) - (x+1)^2 = 0$  para  $-3 \leq x \leq -2$  y  $-1 \leq x \leq 0$
  - d.  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$  para  $0.2 \leq x \leq 0.3$  y  $1.2 \leq x \leq 1.3$
6. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.
  - a.  $3x - e^x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$
  - b.  $2x + 3 \cos x - e^x = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$
  - c.  $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$  y  $2 \leq x \leq 4$
  - d.  $x + 1 - 2 \sin \pi x = 0$  para  $0 \leq x \leq 0.5$  y  $0.5 \leq x \leq 1$
7.
  - a. Dibuje las gráficas para  $y = x$  y  $y = \sin x$ .
  - b. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para el primer valor positivo de  $x$  con  $x = 2 \sin x$ .
8.
  - a. Dibuje las gráficas para  $y = x$  y  $y = \tan x$ .
  - b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de  $10^{-5}$  para el primer valor positivo de  $x$  con  $x = \tan x$ .
9.
  - a. Dibuje las gráficas para  $y = e^x - 2$  y  $y = \cos(e^x - 2)$ .
  - b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de  $10^{-5}$  para un valor en  $[0.5, 1.5]$  con  $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$ .
10.
  - a. Dibuje las gráficas de  $y = x^2 - 1$  y  $y = e^{1-x^2}$ .
  - b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de  $10^{-3}$  para un valor en  $[-2, 0]$  con  $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$ .
11. Sea  $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$ . ¿En qué cero de  $f$  converge el método de bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?
  - a.  $[-3, 2.5]$
  - b.  $[-2.5, 3]$
  - c.  $[-1.75, 1.5]$
  - d.  $[-1.5, 1.75]$
12. Sea  $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-1)^3(x-2)$ . ¿En qué cero de  $f$  converge el método de bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?
  - a.  $[-1.5, 2.5]$
  - b.  $[-0.5, 2.4]$
  - c.  $[-0.5, 3]$
  - d.  $[-3, -0.5]$
13. Encuentre una aproximación para  $\sqrt[3]{25}$  correcto dentro de  $10^{-4}$  con el algoritmo de bisección. [Sugerencia: Considere  $f(x) = x^3 - 25$ .]
14. Encuentre una aproximación para  $\sqrt{3}$  correcto dentro de  $10^{-4}$  con el algoritmo de bisección. [Sugerencia: Considere  $f(x) = x^2 - 3$ .]

## EJERCICIOS APLICADOS

15. Un abrevadero de longitud  $L$  tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio  $r$ . (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia  $h$  a partir de la parte superior, el volumen  $V$  de agua es

$$V = L [0.5\pi r^2 - r^2 \arcsen(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}].$$



Suponga que  $L = 10$  pies,  $r = 1$  pie y  $V = 12.4$  pies<sup>3</sup>. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01 pies.

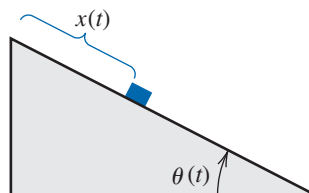
16. Una partícula inicia en reposo en un plano ligeramente inclinado, cuyo ángulo  $\theta$  cambia a una velocidad constante

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0.$$

Al final de  $t$  segundos, la posición del objeto está determinada por

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t \right).$$

Suponga que la partícula se ha movido 1.7 ft en 1 segundo. Encuentre, dentro de  $10^{-5}$ , la velocidad  $\omega$  a la que  $\theta$  cambia. Suponga que  $g = 32.17$  ft/s<sup>2</sup>.



## EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Use el teorema 2.1 para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de  $10^{-4}$  para la solución de  $x^3 - x - 1 = 0$  que se encuentra dentro del intervalo  $[1, 2]$ . Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.
18. Use el teorema 2.1 a fin de encontrar una cota al número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de  $10^{-3}$  para la solución de  $x^3 + x - 4 = 0$  que se encuentra dentro del intervalo  $[1, 4]$ . Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.
19. Sea  $\{p_n\}$  la sucesión definida por  $p_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Muestre que  $\{p_n\}$  diverge incluso cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - p_{n-1}) = 0$ .
20. Sea  $f(x) = (x - 1)^{10}$ ,  $p = 1$  y  $p_n = 1 + 1/n$ . Muestre que  $|f(p_n)| < 10^{-3}$  siempre que  $n > 1$  pero que  $|p - p_n| < 10^{-3}$  requiere que  $n > 1000$ .
21. La función definida por  $f(x) = \sin \pi x$  tiene ceros en cada entero. Muestre que cuando  $-1 < a < 0$  y  $2 < b < 3$ , el método de bisección converge a
  - a. 0, si  $a + b < 2$
  - b. 2, si  $a + b > 2$
  - c. 1, si  $a + b = 2$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Obtenga una función  $f$  para la que el método de bisección converge a un valor que no es un cero de  $f$ .
2. Obtenga una función  $f$  para la que el método de bisección converge a un valor cero de  $f$ , pero  $f$  no es continua en ese punto.
3. ¿El método de bisección es sensible al valor de inicio? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.2

- Use una manipulación algebraica para mostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un punto fijo en  $p$  precisamente cuando  $f(p) = 0$ , donde  $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ .
  - $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$
  - $g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$
  - $g_3(x) = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$
  - $g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$
- Realice cuatro iteraciones, de ser posible, en cada una de las funciones de  $g$  que se definen en el ejercicio 1. Sea  $p_0 = 1$  y  $p_{n+1} = g(p_n)$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$ .
  - ¿Cuál función cree que proporciona la mejor aproximación a la solución?
- Sea  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ . Para resolver  $f(x) = 0$ , se proponen los siguientes cuatro problemas de punto fijo. Derive cada método de punto fijo y calcule  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ . ¿Cuáles métodos parecen apropiados?
  - $x = \frac{1}{2}(x^3 + 1), \quad p_0 = \frac{1}{2}$
  - $x = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad p_0 = \frac{1}{2}$
  - $x = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}, \quad p_0 = \frac{1}{2}$
  - $x = -\sqrt[3]{1 - 2x}, \quad p_0 = \frac{1}{2}$
- Si  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ . Para resolver  $f(x) = 0$ , se proponen los siguientes cuatro problemas de punto fijo. Derive cada método de punto fijo y calcule  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ . ¿Cuáles métodos parecen apropiados?
  - $x = \sqrt{\frac{2 - x^4}{3}}, \quad p_0 = 1$
  - $x = \sqrt[4]{2 - 3x^2}, \quad p_0 = 1$
  - $x = \frac{2 - x^4}{3x}, \quad p_0 = 1$
  - $x = \sqrt[3]{\frac{2 - 3x^2}{x}}, \quad p_0 = 1$
- Se proponen los siguientes cuatro métodos para calcular  $21^{1/3}$ . Clasifíquelos en orden, con base en su velocidad de convergencia aparente, suponiendo que  $p_0 = 1$ .
  - $p_n = \frac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$
  - $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$
  - $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$
  - $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$
- Se proponen los siguientes cuatro métodos para calcular  $7^{1/5}$ . Clasifíquelos en orden, con base en su velocidad de convergencia aparente, al suponer  $p_0 = 1$ .
  - $p_n = p_{n-1} \left(1 + \frac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$
  - $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$
  - $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$
  - $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$
- Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de  $10^{-2}$  para  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$  en  $[1, 2]$ . Utilice  $p_0 = 1$ .
- Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución exacta dentro de  $10^{-2}$  para  $x^3 - x - 1 = 0$  en  $[1, 2]$ . Use  $p_0 = 1$ .
- Use el teorema 2.3 para mostrar que  $g(x) = \pi + 0.5 \sin(x/2)$  tiene un único punto fijo en  $[0, 2\pi]$ . Use la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación que es precisa para el punto fijo dentro de  $10^{-2}$ . Use el corolario 2.5 para calcular el número de iteraciones que se requiere para lograr una precisión de  $10^{-2}$  y compare esta estimación teórica con el número que realmente se requiere.
- Use el teorema 2.3 para mostrar que  $g(x) = 2^{-x}$  tiene un único punto fijo en  $[\frac{1}{5}, 1]$ . Use la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación para el punto fijo que es precisa dentro de  $10^{-4}$ . Utilice el corolario 2.5 para calcular el número de iteraciones que se requiere para lograr una precisión de  $10^{-4}$  y compárela con el número que realmente se requiere.

11. Use un método de iteración de punto fijo para hallar una aproximación a  $\sqrt{3}$  que sea precisa dentro de  $10^{-4}$ . Compare su resultado y el número de iteraciones requeridas con la respuesta obtenida en el ejercicio 14 de la sección 2.1.
12. Use un método de iteración de punto fijo para encontrar una aproximación para  $\sqrt[3]{25}$  que sea precisa dentro de  $10^{-4}$ . Compare su resultado y el número de iteraciones requeridos con la respuesta obtenida en el ejercicio 13 de la sección 2.1.
13. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine un intervalo  $[a, b]$  en el que la iteración de punto fijo converja. Calcule el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones precisas dentro de  $10^{-5}$  y realice los cálculos.
 

<ol style="list-style-type: none"> <li>a. <math>x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}</math></li> <li>c. <math>x = (e^x/3)^{1/2}</math></li> <li>e. <math>x = 6^{-x}</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>b. <math>x = \frac{5}{x^2} + 2</math></li> <li>d. <math>x = 5^{-x}</math></li> <li>f. <math>x = 0.5(\sin x + \cos x)</math></li> </ol>
--	---
14. Para cada una de las siguientes ecuaciones, use el intervalo dado o determine un intervalo  $[a, b]$  en el que la iteración de punto fijo converja. Calcule el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones precisas dentro de  $10^{-5}$  y realice los cálculos.
 

<ol style="list-style-type: none"> <li>a. <math>2 + \sin x - x = 0</math> use <math>[2, 3]</math></li> <li>c. <math>3x^2 - e^x = 0</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>b. <math>x^3 - 2x - 5 = 0</math> use <math>[2, 3]</math></li> <li>d. <math>x - \cos x = 0</math></li> </ol>
--	--
15. Encuentre todos los ceros de  $f(x) = x^2 = 10 \cos x$  usando el método de iteración de punto fijo para una función de iteración adecuada  $g$ . Encuentre los ceros con una precisión dentro de  $10^{-4}$ .
16. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de  $10^{-4}$  para  $x = \tan x$ , para  $x$  en  $[4, 5]$ .
17. Use un método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de  $10^{-2}$  para  $x = 2 \sin(\pi x) + x = 0$ , para  $x$  en  $[1, 2]$ . Utilice  $p_0 = 1$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

18. Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa  $m$  cae desde una altura  $s_0$  y que la altura del objeto después de  $t$  segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

donde  $g = 32.17$  pies/s<sup>2</sup> y  $k$  representa el coeficiente de la resistencia del aire en lb-s/pie. Suponga  $s_0 = 300$  pies,  $m = 0.25$  lb y  $k = 0.1$  lb-s/pie. Encuentre, dentro de 0.01 segundos, el tiempo que tarda un cuarto de libra en golpear el piso.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Sea  $g \in C^1[a, b]$  y  $p$  en  $(a, b)$  con  $g(p) = p$  y  $|g'(p)| > 1$ . Muestre que existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |p_0 - p| < \delta$ , entonces  $|p_0 - p| < |p_1 - p|$ . Entonces, sin importar qué tan cercana esté la aproximación inicial  $p_0$  de  $p$ , la siguiente iteración  $p_1$  está más alejada, por lo que la iteración de punto fijo no converge si  $p_0 \neq p$ .
20. Sea  $A$  una constante positiva y  $g(x) = 2x - Ax^2$ .
  - a. Muestre que si la iteración de punto fijo converge en un límite diferente de cero, entonces el límite es  $p = 1/A$ , por lo que la inversa de un número se puede encontrar de usando solamente multiplicaciones y restas.
  - b. Encuentre un intervalo sobre  $1/A$  para el que la iteración de punto fijo converge, siempre y cuando  $p_0$  se encuentre en ese intervalo.
21. Encuentre una función  $g$  definida sobre  $[0, 1]$  que no satisface ninguna de las hipótesis del teorema 2.3, pero sigue siendo un punto fijo único sobre  $[0, 1]$ .
22.
  - a. Muestre que el teorema 2.3 es verdad si la desigualdad  $|g'(x)| \leq k$  se reemplaza con  $g'(x) \leq k$ , para todas las  $x \in (a, b)$ . [Pista: Solamente la singularidad está en cuestión].
  - b. Muestre que el teorema 2.4 podría no mantenerse si la desigualdad  $|g'(x)| \leq k$  se reemplaza con  $g'(x) \leq k$ . [Pista: Muestre que  $g(x) = 1 - x^2$ , para  $x$  en  $[0, 1]$ , provee un ejemplo contrario.]

23. a. Use el teorema 2.4 para mostrar que la secuencia definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

converge a  $\sqrt{2}$  siempre que  $x_0 > \sqrt{2}$ .

- b. Use el hecho de que  $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$  siempre que  $x_0 \neq \sqrt{2}$  para mostrar que si  $0 < x_0 < \sqrt{2}$ , entonces  $x_1 > \sqrt{2}$ .
- c. Use los resultados de las partes a) y b) para mostrar que la sucesión en a) converge a  $\sqrt{2}$  siempre que  $x_0 > 0$ .
24. a. Muestre que si  $A$  es cualquier número positivo, entonces la sucesión definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

converge a  $\sqrt{A}$  siempre que  $x_0 > 0$ .

- b. ¿Qué pasa si  $x_0 < 0$ ?
25. Reemplace la suposición en el teorema 2.4 que establece que existe “un número positivo  $k < 1$  con  $|g'(x)| \leq k$ ” con “ $g$  satisface la condición de Lipschitz en el intervalo  $[a, b]$  con constante de Lipschitz  $L < 1$ .” (Consulte el ejercicio 28, sección 1.1.) Muestre que las conclusiones de este teorema siguen siendo válidas.
26. Suponga que  $g$  es continuamente diferenciable en algún intervalo  $(c, d)$  que contiene el punto fijo  $p$  de  $g$ . Muestre que si  $|g'(p)| < 1$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|p_0 - p| \leq \delta$ , entonces la iteración de punto fijo converge.

## PREGUNTA DE ANÁLISIS

1. Proporcione una descripción general de la forma en la que se relaciona la teoría del caos y la iteración de punto fijo. Como punto de inicio, consulte lo siguiente:  
<http://pages.cs.wisc.edu/~goadl/cs412/examples/chaosNR.pdf> y  
<http://www.cut-the-knot.org/blue/chaos.shtml>. Summarize your readings.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.3

- Sea  $f(x) = x^2 - 6$  y  $p_0 = 1$ . Use el método de Newton para encontrar  $p_2$ .
- Sea  $f(x) = -x^3 - \cos x$  y  $p_0 = -1$ . Use el método de Newton para encontrar  $p_2$ . ¿Se podría usar  $p_0 = 0$ ?
- Sea  $f(x) = x^2 - 6$ . Con  $p_0 = 3$  y  $p_1 = 2$ . Encuentre  $p_3$ .
  - Use el método de la secante
  - Use el método de posición falsa
  - ¿Cuál parte a) o b) está más cerca de  $\sqrt{6}$ ?
- Sea  $f(x) = -x^3 - \cos x$ . Con  $p_0 = -1$  y  $p_1 = 0$ , encuentre  $p_3$ .
  - Use el método de la secante
  - Use el método de posición falsa
- Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-4}$  para los siguientes problemas.
 

a. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad [1, 4]$	b. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad [-3, -2]$
c. $x - \cos x = 0, \quad [0, \pi/2]$	d. $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0, \quad [0, \pi/2]$
- Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.
  - $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0 \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2$
  - $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0 \quad \text{para } 1.3 \leq x \leq 2$



- c.  $2x \cos 2x - (x - 2)^2 = 0$  para  $2 \leq x \leq 3$  y  $3 \leq x \leq 4$   
 d.  $(x - 2)^2 - \ln x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$  y  $e \leq x \leq 4$   
 e.  $e^x - 3x^2 = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$  y  $3 \leq x \leq 5$   
 f.  $\sin x - e^{-x} = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$   $3 \leq x \leq 4$  y  $6 \leq x \leq 7$
7. Repita el ejercicio 5 con el método de la secante.  
 8. Repita el ejercicio 6 con el método de la secante.  
 9. Repita el ejercicio 5 con el método de posición falsa.  
 10. Repita el ejercicio 6 con el método de posición falsa.  
 11. Use los tres métodos en esta sección para encontrar las soluciones dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.  
 a.  $3x - e^x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$   
 b.  $2x + 3 \cos x - e^x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$
12. Use los tres métodos en esta sección para encontrar las soluciones dentro de  $10^{-7}$  para los siguientes problemas.  
 a.  $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$  para  $1 \leq x \leq 2$  y para  $2 \leq x \leq 4$   
 b.  $x + 1 - 2 \sin \pi x = 0$  para  $0 \leq x \leq 1/2$  y para  $1/2 \leq x \leq 1$
13. El polinomio de cuarto grado  

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$
 tiene dos ceros reales, uno en  $[-1, 0]$  y el otro en  $[0, 1]$ . Intente aproximar estos ceros dentro de  $10^{-6}$  con  
 a. El método de posición falsa  
 b. El método de la secante  
 c. El método de Newton  
 Use los extremos de cada intervalo como aproximaciones iniciales en las partes a) y b) y los puntos medios como la aproximación inicial en la parte c).
14. La función  $f(x) = \tan \pi x - 6$  tiene cero en  $(1/\pi) \arctan 6 \approx 0.447431543$ . Sea  $p_0 = 0$  y  $p_1 = 0.48$  y use 10 iteraciones en cada uno de los siguientes métodos para aproximar esta raíz. ¿Cuál método es más eficaz y por qué?  
 a. método de bisección  
 b. método de posición falsa  
 c. método de la secante
15. La ecuación  $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$  tiene dos soluciones positivas  $x_1$  y  $x_2$ . Utilice el método de Newton para aproximar la solución dentro de  $10^{-5}$  con los siguientes valores de  $p_0$ .  
 a.  $p_0 = -10$                       b.  $p_0 = -5$                       c.  $p_0 = -3$   
 d.  $p_0 = -1$                       e.  $p_0 = 0$                       f.  $p_0 = 1$   
 g.  $p_0 = 3$                       h.  $p_0 = 5$                       i.  $p_0 = 10$
16. La ecuación  $x^2 - 10 \cos x = 0$  tiene dos soluciones  $\pm 1.3793646$ . Use el método de Newton para aproximar la solución dentro de  $10^{-5}$  con los siguientes valores de  $p_0$ .  
 a.  $p_0 = -100$                       b.  $p_0 = -50$                       c.  $p_0 = -25$   
 d.  $p_0 = 25$                       e.  $p_0 = 50$                       f.  $p_0 = 100$
17. La función descrita por  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$  tiene un número infinito de ceros.  
 a. Determine, dentro de  $10^{-6}$ , el único cero negativo.  
 b. Determine, dentro de  $10^{-6}$ , los cuatro ceros positivos más pequeños.  
 c. Determine una aproximación inicial razonable para encontrar el enésimo cero positivo más pequeño de  $f$ . [Sugerencia: Dibuje una gráfica aproximada de  $f$ .]  
 d. Use la parte c) para determinar, dentro de  $10^{-6}$ , el vigesimoquinto cero positivo más pequeño de  $f$ .
18. Use el método de Newton para resolver la ecuación

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \text{con } p_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Itere con el método de Newton hasta obtener una precisión de  $10^{-5}$ . Explique por qué el resultado parece poco común para el método de Newton. Además resuelva la ecuación con  $p_0 = 5\pi$  y  $p_0 = 10\pi$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

19. Use el método de Newton para aproximar, dentro de  $10^{-4}$ , el valor de  $x$  que en la gráfica de  $y = x^2$  produce el punto que está más cerca de  $(0, 1)$ . [Sugerencia: Minimice  $[d(x)^2]$ , en donde  $d(x)$  representa la distancia desde  $(x, x^2)$  hasta  $(1, 0)$ .]
20. Use el método de Newton para aproximar, dentro de  $10^{-4}$ , el valor de  $x$  que en la gráfica  $y = 1/x$  produce el punto que está más cerca de  $(2, 1)$ .
21. La suma de dos números es 20. Si cada número se suma a su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es 155.55. Determine los dos números dentro de  $10^{-4}$ .
22. Encuentre una aproximación para  $\lambda$ , precisa dentro de  $10^{-4}$ , para la ecuación de crecimiento poblacional

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000 e^{\lambda} + \frac{435\,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

que se ha analizado en la introducción de este capítulo. Use este valor para predecir la población al final del segundo año, al suponer que la tasa de inmigración durante este año sigue siendo 435 000 individuos por año.

23. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca por un periodo fijo incluye la fórmula

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}],$$

Conocida como *ecuación de anualidad ordinaria*. En esta ecuación,  $A$  es la cantidad de la hipoteca,  $P$  es la cantidad de cada pago e  $i$  es la tasa de interés por periodo para los  $n$  periodos de pago. Suponga que se necesita una hipoteca por \$135 000 a 30 años para una vivienda y que el prestatario puede efectuar pagos de máximo \$1 000 por mes. ¿Cuál es la tasa de interés máximo que el prestatario puede pagar?

24. El valor acumulado de una cuenta de ahorros con base en pagos periódicos regulares se puede determinar a partir de la *ecuación debida a la anualidad*,

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1].$$

En esta ecuación,  $A$  es la cantidad en la cuenta,  $P$  es la cantidad depositada regularmente e  $i$  es la tasa de interés por periodo para los  $n$  periodos de depósito. A un ingeniero le gustaría tener una cuenta de ahorro con un monto de \$750 000 para su jubilación en 20 años y puede pagar \$1 500 por mes para esta meta. ¿Cuál es la tasa mínima de interés a la que se invierte esta cantidad, al suponer que es un interés compuesto mensual?

25. El modelo de crecimiento de población logístico se describe con una ecuación en la forma

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}},$$

donde  $P_L$ ,  $c$  y  $k > 0$  son constantes y  $P(t)$  es la población en el tiempo  $t$ .  $P_L$  representa el valor límite de la población ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_L$ . Use los datos de los censos para las décadas 1960 y 1970 listados en la tabla de la página 77 para determinar las constantes  $P_L$ ,  $c$  y  $k$  para un modelo logístico de crecimiento. Utilice el modelo logístico para predecir la población de Estados Unidos en 1980 y 2010, al suponer que  $t = 0$  en 1950. Compare la predicción de 1980 con el valor real.

26. El modelo de crecimiento de población Gompertz se describe por

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}},$$

donde  $P_L$ ,  $c$  y  $k > 0$  son constantes y  $P(t)$  es la población en el tiempo  $t$ . Repita el ejercicio 25 con el modelo de crecimiento Gompertz en lugar del modelo logístico.

27. El jugador A dejará fuera (ganará por una puntuación de 21–0) al jugador B en un juego de rquetbol con probabilidad

$$P = \frac{1+p}{2} \left( \frac{p}{1-p+p^2} \right)^{21},$$

donde  $p$  denota la probabilidad de que A ganará cualquier rally específico (independientemente del servicio). (Consulte [Keller, J], p. 267). Determine, dentro de  $10^{-3}$ , el valor mínimo de  $p$  que garantice que A dejará fuera a B en por lo menos la mitad de los partidos que jueguen.

28. Un medicamento administrado a un paciente produce una concentración en el torrente sanguíneo determinado por  $c(t) = Ate^{-t/3}$  miligramos por mililitro,  $t$  horas después de que se han inyectado las unidades A. La concentración máxima segura es 1 mg/mL.
- ¿Qué cantidad se debería inyectar para alcanzar la concentración máxima segura y cuándo se presenta este máximo?
  - Una cantidad adicional de este medicamento se administrará al paciente después de que la concentración cae hasta 0.25 mg/mL. Determine, al minuto más cercano, cuándo se debería aplicar la segunda inyección.
  - Suponga que la concentración a partir de las inyecciones consecutivas es adictiva y que 75% de la cantidad que originalmente se inyectó se administra en la segunda inyección. ¿Cuándo será el momento para una tercera inyección?
29. En el diseño de los vehículos todo terreno, es necesario considerar la falla del vehículo al tratar de superar dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla recibe el nombre de *falla compleja* y se presenta cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que causa que la parte inferior del vehículo toque el suelo. El otro tipo recibe el nombre de *falla de nariz* y se presenta cuando el vehículo desciende en una zanja y su nariz toca el suelo.

La figura de acompañamiento, adaptada de [Beck], muestra los componentes relacionados con la falla de nariz de un vehículo. En esta referencia, se muestra que el ángulo máximo a que un vehículo puede superar cuando  $\beta$  es el ángulo máximo en el que la falla compleja no ocurre satisface la ecuación

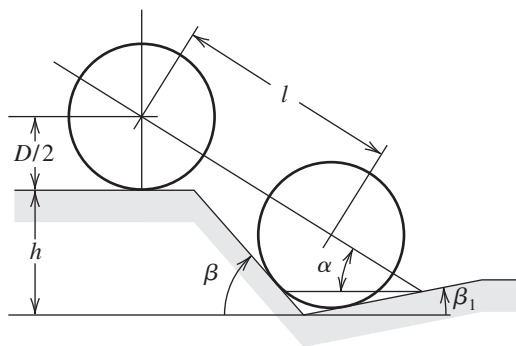
$$A \sin \alpha \cos \alpha + B \sin^2 \alpha - C \cos \alpha + E \sin \alpha = 0,$$

donde

$$A = l \sin \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \sin \beta_1 - 0.5 D \tan \beta_1,$$

$$\text{y} \quad E = (h + 0.5 D) \cos \beta_1 - 0.5 D.$$

- Se establece que cuando  $l = 89$  pulgadas,  $h = 49$  pulgadas,  $D = 55$  pulgadas y  $\beta_1 = 11.5^\circ$ , el ángulo  $\alpha$  es aproximadamente  $33^\circ$ . Verifique el resultado.
- Encuentre  $\alpha$  para la situación cuando  $l$ ,  $h$  y  $\beta_1$  son las mismas en la parte a) pero  $D = 30$  pulgadas.



## EJERCICIOS TEÓRICOS

30. La ecuación de iteración para el método de la secante se puede escribir en la forma más simple

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Explique por qué, en general, es probable que esta ecuación de iteración sea menos precisa que la proporcionada en el algoritmo 2.4.

31. Lo siguiente describe gráficamente el método de Newton: suponga que  $f'(x)$  existe en  $[a, b]$  y que  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$ . Además, suponga que existe una  $p \in [a, b]$  por lo que  $f(p) = 0$  y sea  $p_0 \in [a, b]$

sea arbitraria. Si  $p_1$  es el punto en el que la recta tangente a  $f$  en  $(p_0, f(p_0))$  cruza el eje  $x$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea  $p_n$  la intersección con el eje  $x$  de la recta tangente a  $f$  en  $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ . Deduzca la fórmula que describe este método.

32. Deduzca la fórmula de error para el método de Newton

$$|p - p_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(p_n)|} |p - p_n|^2$$

suponiendo que la hipótesis del teorema 2.6 se mantiene, que  $|f'(p_n)| \neq 0$ , y  $M = \max |f''(x)|$ . [Sugerencia: Use el polinomio de Taylor como se hizo en la deducción del método de Newton al inicio de esta sección.]

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- ¿El método de Newton converge para cualquier aproximación inicial  $x_0$ ? En este caso, ¿cuál es la razón de convergencia y cuál es el orden de convergencia? ¿El método sigue convergiendo cuando  $f(x)$  tiene múltiples ceros en  $p$ ?
- Si la aproximación inicial no está suficientemente cerca de la raíz, el método de Newton puede no converger a una raíz errónea. Encuentre uno o dos ejemplos donde esto puede presentarse y proporcione una justificación sobre por qué lo hace.
- La función  $f(x) = 0.5x^3 - 6x^2 + 21.5x - 22$  tiene un cero en  $x = 4$ . Usando el punto de inicio  $p_0 = 5$ ,  $p_1 = 4.5$  para el método de la secante, compare los resultados de la secante y los métodos de Newton.
- La función  $f(x) = x^{(1/3)}$  tiene una raíz en  $x = 0$ . Usando el punto de inicio de  $x = 1$  y  $p_0 = 5$ ,  $p_1 = 0.5$  para el método de secante, compare los resultados de los métodos de secante y Newton.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.4

- Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.
  - $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ , para  $0 \leq x \leq 1$
  - $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$ , para  $-2 \leq x \leq -1$
  - $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$ , para  $0 \leq x \leq 1$
  - $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$ , para  $-1 \leq x \leq 0$
- Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de  $10^{-5}$  para los siguientes problemas.
  - $1 - 4x \cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0$ , para  $0 \leq x \leq 1$
  - $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ , para  $-3 \leq x \leq -2$
  - $\sin 3x + 3e^{-2x} \sin x - 3e^{-x} \sin 2x - e^{-3x} = 0$ , para  $3 \leq x \leq 4$
  - $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4 e^x - 9x^2 e^{2x} = 0$ , para  $3 \leq x \leq 5$
- Repita el ejercicio 1 con el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13). ¿Hay alguna mejora en la velocidad o la precisión en comparación con el ejercicio 1?
- Repita el ejercicio 2 con el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13). ¿Hay alguna mejora en la velocidad o la precisión en comparación con el ejercicio 2?
- Use el método de Newton y el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13) para encontrar una solución precisa dentro de  $10^{-5}$  para el problema

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0, \quad \text{para } -1 \leq x \leq 0.$$

Éste es el mismo problema que en 1d) sólo que los coeficientes han sido reemplazados con aproximaciones de cuatro dígitos. Compare las soluciones con los resultados en 1d) y 2d).

## EJERCICIOS TEÓRICOS

6. Muestre que las siguientes sucesiones convergen linealmente a  $p = 0$ . ¿Qué tan grande debe ser  $n$  antes de  $|p_n - p| \leq 5 \times 10^{-2}$ ?
  - a.  $p_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$
  - b.  $p_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$
7.
  - a. Muestre que para cualquier entero  $k$ , la sucesión definida por  $p_n = 1/n^k$  converge linealmente a  $p = 0$ .
  - b. Para cada par de enteros  $k$  y  $m$ , determine un número  $N$  para el que  $1/N^k < 10^{-m}$ .
8.
  - a. Muestre que la sucesión  $p_n = 10^{-2n}$  converge cuadráticamente a 0.
  - b. Muestre que la sucesión  $p_n = 10^{-nk}$  no converge cuadráticamente a 0, independientemente del tamaño del exponente  $k > 1$ .
9.
  - a. Construya una sucesión que converja a 0 de orden 3.
  - b. Suponga que  $\alpha > 1$ . Construya una sucesión que converja en 0 de orden  $\alpha$ .
10. Suponga que  $p$  es un cero de multiplicidad  $m$  de  $f$ , donde  $f^{(m)}$  es continua en un intervalo abierto que contiene  $p$ . Muestre que el siguiente método de punto fijo tiene  $g'(p) = 0$ :

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}.$$

11. Muestre que el algoritmo de bisección 2.1 proporciona una sucesión con una cota de error que converge linealmente a 0.
12. Suponga que  $f$  tiene  $m$  derivadas continuas. Modifique la prueba del teorema 2.11 para mostrar que  $f$  tiene un cero de multiplicidad  $m$  en  $p$  si y sólo si

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p), \quad \text{pero } f^{(m)}(p) \neq 0.$$

13. El método iterativo para resolver  $f(x) = 0$ , dado por el método de punto fijo  $g(x) = x$ , donde

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})} \left[ \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \right]^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

tiene  $g'(p) = g''(p) = 0$ . En general, esto producirá convergencia cúbica ( $\alpha = 3$ ). Amplíe el análisis del ejemplo 1 para comparar la convergencia cuadrática y cúbica.

14. Se puede demostrar (véase, por ejemplo, [DaB], pp. 228–229) que si  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  son aproximaciones de la solución  $f(x) = 0$ , obtenidas con el método de la secante, entonces existe una constante  $C$  con  $|p_{n+1} - p| \approx C |p_n - p| |p_{n-1} - p|$  para los valores suficientemente grandes de  $n$ . Suponga que  $\{p_n\}$  converge a  $p$  de orden  $\alpha$  y muestre que  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ . (Nota: Esto implica que el orden de convergencia del método de la secante es aproximadamente 1.62).

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La rapidez a la que converge la sucesión generada por un método iterativo recibe el nombre de razón de convergencia del método. Existen muchos tipos de razones de convergencia: lineal, superlineal, sublineal, logarítmica, cuadrática y así sucesivamente.  
El inconveniente de estas razones de convergencia es que no captan algunas sucesiones que siguen convergiendo con rapidez, pero cuya “velocidad” es variable. Seleccione una de las razones de convergencia y describa cómo se puede acelerar esa razón.
2. Analice cuándo el método de Newton provee convergencia lineal o cuadrática para la función  $f(x) = x^2(x - 1)$ .
3. Lea el documento que se encuentra en <http://www.uark.edu/misc/arnold/publichtml/4363/OrderConv.pdf> y explique en palabras propias lo que implica el error asintótico.
4. ¿Cuál es la diferencia entre la razón de convergencia y el orden de convergencia? ¿Están relacionados de alguna forma? ¿Dos sucesiones podrían tener las mismas razones de convergencia, pero diferentes órdenes de convergencia y viceversa?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.5

- Las siguientes sucesiones son linealmente convergentes. Genere los primeros cinco términos de la sucesión  $\{\hat{p}_n\}$  con el método  $\Delta^2$  de Aitken.
  - $p_0 = 0.5, \quad p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3, \quad n \geq 1$
  - $p_0 = 0.75, \quad p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2}, \quad n \geq 1$
  - $p_0 = 0.5, \quad p_n = 3^{-p_{n-1}}, \quad n \geq 1$
  - $p_0 = 0.5, \quad p_n = \cos p_{n-1}, \quad n \geq 1$
- Considere la función  $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3$ . Use el método de Newton con  $p_0 = 0$  para aproximar cero de  $f$ . Genere términos hasta que  $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$ . Construya la sucesión  $\{\hat{p}_n\}$ . ¿Mejora la convergencia?
- Sea  $g(x) = \cos(x - 1)$  y  $p_0^{(0)} = 2$ . Use el método de Steffensen para encontrar  $p_0^{(1)}$ .
- Sea  $g(x) = 1 + (\sin x)^2$  y  $p_0^{(0)} = 1$ . Use el método de Steffensen para encontrar  $p_0^{(1)}$  y  $p_0^{(2)}$ .
- El método de Steffensen se aplica a una función  $g(x)$  usando  $p_0^{(0)} = 1$  y  $p_2^{(0)} = 3$  para obtener  $p_0^{(1)} = 0.75$ . ¿Qué es  $p_1^{(0)}$ ?
- El método de Steffensen se aplica a una función  $g(x)$  usando  $p_0^{(0)} = 1$  y  $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$  para obtener  $p_0^{(1)} = 2.7802$ . ¿Qué es  $p_2^{(0)}$ ?
- Use el método de Steffensen para encontrar, con una precisión de  $10^{-4}$ , la raíz de  $x^3 - x - 1 = 0$  que se encuentra en  $[1, 2]$  y compare esto con los resultados del ejercicio 8 de la sección 2.2.
- Use el método de Steffensen para encontrar, con una precisión de  $10^{-4}$ , la raíz de  $x - 2^{x-1} = 0$  que se encuentra en  $[0, 1]$  y compare esto con los resultados del ejercicio 10 de la sección 2.2.
- Use el método de Steffensen con  $p_0 = 2$  para calcular una aproximación para  $\sqrt{3}$  precisa dentro de  $10^{-4}$ . Compare este resultado con los resultados obtenidos en el ejercicio 11 de la sección 2.2 y el ejercicio 14 de la sección 2.1.
- Use el método de Steffensen con  $p_0 = 3$  para calcular una aproximación de  $\sqrt[3]{25}$  precisa dentro de  $10^{-4}$ . Compare este resultado con los obtenidos en el ejercicio 12 de la sección 2.2 y el ejercicio 13 de la sección 2.1.
- Use el método de Steffensen para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones dentro de  $10^{-5}$ .
  - $x = (2 - e^x + x^2)/3$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 13a) de la sección 2.2
  - $x = 0.5(\sin x + \cos x)$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 13f) de la sección 2.2
  - $x = (e^x/3)^{1/2}$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 13c) de la sección 2.2
  - $x = 5^{-x}$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 13d) de la sección 2.2
- Use el método de Steffensen para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones dentro de  $10^{-5}$ .
  - $2 + \sin x - x = 0$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 14a) de la sección 2.2
  - $x^3 - 2x - 5 = 0$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 14b) de la sección 2.2
  - $3x^2 - e^x = 0$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 14c) de la sección 2.2
  - $x - \cos x = 0$ , donde  $g$  es la función en el ejercicio 14d) de la sección 2.2

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Las siguientes sucesiones convergen a 0. Use el método  $\Delta^2$  de Aitken para generar  $\{\hat{p}_n\}$  hasta  $|\hat{p}_n| \leq 5 \times 10^{-2}$ :

a.  $p_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

b.  $p_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$

- Se dice que una sucesión  $\{p_n\}$  es **superlinealmente** convergente en  $p$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0.$$

- Muestre que si  $p_n \rightarrow p$  de orden  $\alpha > 1$ , entonces  $\{p_n\}$  es superlinealmente convergente a  $p$ .
- Muestre que  $p_n = \frac{1}{n^n}$  es superlinealmente convergente a 0 pero no converge en 0 de orden  $\alpha$  para cualquier  $\alpha > 1$ .

15. Suponga que  $\{p_n\}$  es superlinealmente convergente a  $p$ . Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1.$$

16. Pruebe el teorema 2.14 [Sugerencia: Si  $\delta_n = (p_{n+1} - p)/(p_n - p) - \lambda$  y muestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Entonces exprese  $(\hat{p}_{n+1} - p)/(p_n - p)$  en términos de  $\delta_n$ ,  $\delta_{n+1}$ , y  $\lambda$ .]
17. Sea  $P_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor para  $f(x) = e^x$  expandido alrededor de  $x_0 = 0$ .
- Para  $x$  fija, muestre que  $p_n = P_n(x)$  satisface la hipótesis del teorema 2.14.
  - Si  $x = 1$ , use el método  $\Delta^2$  de Aitken para generar la sucesión  $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_8$ .
  - ¿El método Aitken acelera la convergencia en esta situación?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Lea el artículo titulado *A Comparison of Iterative Methods for the Solution of Non-Linear Systems*, (*Una comparación de los métodos iterativos para la solución de sistemas no lineales*), de Noreen Jamil, que se encuentra en <http://ijes.info/3/2/42543201.pdf>. Observe algunas de las referencias. Resuma su lectura.
- En algunas ocasiones, la bisección se empareja con los métodos de Newton y de secante hasta que se identifica un intervalo suficientemente pequeño cerca de la raíz para realizar una buena conjetura inicial. Otro enfoque es usar el método de Brent. Describa este método. ¿Acelera la convergencia, y, en este caso, por qué?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.6

- Encuentre las aproximaciones dentro de  $10^{-4}$  para todos los ceros reales de los siguientes polinomios con el método de Newton.
  - $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$
  - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
  - $f(x) = x^3 - x - 1$
  - $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$
  - $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$
  - $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$
- Encuentre las aproximaciones dentro de  $10^{-5}$  para todos los ceros de cada uno de los siguientes polinomios, primero al encontrar los ceros reales con el método de Newton y, después, al reducir los polinomios de grado inferior para determinar cualquier cero complejo.
  - $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$
  - $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$
  - $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
  - $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$
  - $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$
  - $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$
  - $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
  - $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$
- Repita el ejercicio 1 con el método de Müller.
- Repita el ejercicio 2 con el método de Müller.
- Use el método de Müller para encontrar, dentro de  $10^{-3}$ , los ceros y puntos críticos de las siguientes funciones. Utilice esta información para dibujar la gráfica de  $f$ .
  - $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$
  - $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$
- $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$  tiene una raíz en  $x = 0.29$ . Use el método de Newton con una aproximación inicial  $x_0 = 0.28$  para intentar encontrar esta raíz. Explique lo que pasa.

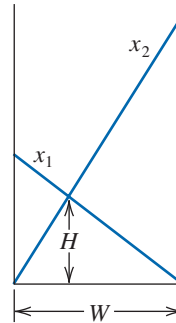
7. Use cada uno de los siguientes métodos para encontrar una solución en  $[0.1, 1]$  precisa dentro de  $10^{-4}$  para

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0.$$

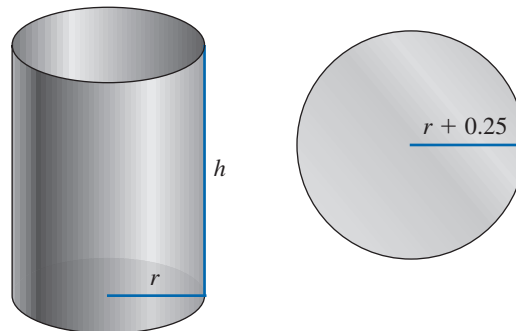
- Método de bisección
- Método de Newton
- Método de la secante
- Método de posición falsa
- Método de Müller

## EJERCICIOS APLICADOS

8. Dos escaleras se entrecruzan en un pasillo de ancho  $W$ . Cada escalera llega desde la base de una pared hasta algún punto en la pared opuesta. Las escaleras cruzan a una altura  $H$  sobre el pavimento. Encuentre  $W$  dado que las longitudes de las escaleras son  $x_1 = 20$  pies y  $x_2 = 30$  pies, y que  $H = 8$  pies.



9. Una lata en forma de un cilindro circular recto se construye para contener  $1000 \text{ cm}^3$ . Las partes superior e inferior de la lata deben tener un radio de  $0.25 \text{ cm}$  más que el radio de la lata, de tal forma que el exceso se pueda usar para formar un sello con la parte lateral. La hoja de material que se forma dentro de la parte lateral de la lata también debe ser  $0.25 \text{ cm}$  más grande que la circunferencia de la lata, de tal forma que se pueda formar un sello. Encuentre, dentro de  $10^{-4}$ , la cantidad mínima de material necesario para construir la lata.



10. En 1224, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, respondió el desafío matemático de Juan de Palermo en presencia del emperador Federico II: encontrar una raíz de la ecuación  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . Primero mostró que la ecuación no tenía raíces racionales y ninguna raíz euclidiana irracional, es decir, ninguna raíz de ninguna de las formas  $a \pm \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ , o  $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ , donde  $a$  y  $b$  son números racionales. A continuación, aproximó la única raíz real, probablemente con una técnica algebraica de Omar Khayyam, relacionada con la intersección de un círculo y una parábola. Su respuesta fue proporcionada en el sistema de numeración base 60 como

$$1 + 22 \left( \frac{1}{60} \right) + 7 \left( \frac{1}{60} \right)^2 + 42 \left( \frac{1}{60} \right)^3 + 33 \left( \frac{1}{60} \right)^4 + 4 \left( \frac{1}{60} \right)^5 + 40 \left( \frac{1}{60} \right)^6.$$

¿Qué tan precisa fue su aproximación?



## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la posibilidad de combinar el método de posición falsa con el método de Müller para obtener un método para el que se acelera la convergencia. Compare esta aproximación con el método de Brent.
2. Analice la diferencia, si existe, entre el método de Müller y la interpolación cuadrática inversa.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Analice las diferencias entre algunos de los paquetes de software disponibles para el cálculo numérico de una solución para  $f(x) = 0$ .
2. Compare y contraste las razones de convergencia en por lo menos dos de los métodos que se analizan en este capítulo.
3. Compare y contraste los métodos de Cauchy y de Müller.

## CONCEPTOS CLAVE

Iteración de punto fijo	Método de Horner	Método de posición falsa
Medición del error	Método de la secante	Método de Steffensen
Método de bisección	Método de Müller	Razones de convergencia
Método de $\Delta^2$ de Aitken	Método de Newton	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

Revisemos el capítulo 2 en términos de habilidades desarrolladas.

Hemos considerado el problema de resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función continua determinada. Todos los métodos comenzaron con aproximaciones iniciales y generaron una sucesión que convergía a una raíz de la ecuación, si el método era exitoso. Si  $[a, b]$  era un intervalo en el que  $f(a)$  y  $f(b)$  son de signo opuesto, entonces el método de bisección y el método de posición falsa convergían. Sin embargo, encontramos que la convergencia de estos métodos puede ser lenta. Aprendimos que la convergencia más rápida se obtenía por lo general con el método de secante o de Newton. Sin embargo, se requerían dos buenas aproximaciones iniciales para el método de la secante y una buena aproximación inicial para el método de Newton. Descubrimos que las técnicas de agrupación de raíz, como los métodos de bisección o de posición falsa, se pueden usar como métodos de inicio para el método de la secante o de Newton.

Observamos que el método de Müller proporcionaba convergencia rápida sin una buena aproximación inicial especial. Aunque no era tan eficiente como el método de Newton, su orden de convergencia cercano a la raíz fue de aproximadamente  $\alpha = 1.84$ , en comparación con el orden cuadrático,  $\alpha = 2$  del método de Newton. Sin embargo, era mejor que el método de la secante, cuyo orden es aproximadamente  $\alpha = 1.62$  y tiene la ventaja de que es capaz de aproximar raíces complejas.

En general, la deflación se usaba con los métodos de Newton o de Müller una vez que se había determinado la raíz de un polinomio. Descubrimos que después de una aproximación a la raíz de la ecuación deflactada éramos capaces de usar el método de Müller o el método de Newton sobre el polinomio original con esta raíz como aproximación inicial. Este procedimiento garantizaba que la raíz aproximada fuera una solución para la verdadera ecuación, no para la ecuación deflactada. Recomendamos el método de Müller para encontrar todos los ceros de los polinomios, reales o complejos. Observamos que el método de Müller también se podría usar para una función continua arbitraria.

Existen otros métodos de orden superior para determinar las raíces de los polinomios. Si este tema es de interés particular, recomendamos considerar el método de Laguerre, el cual proporciona convergencia cúbica y también aproxima raíces complejas (consulte [Ho], pp. 176–179 para un análisis completo), el método de Jenkins–Traub (consulte [JT]), y el método de Brent (consulte [Bre]).

Otro método de interés, el método de Cauchy, es similar al método de Müller, pero evita el problema de falla cuando  $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$ , para alguna  $i$ . Para un análisis interesante de este método, así como más detalles sobre el método de Müller, recomendamos [YG], secciones 4.10, 4.11 y 5.4.

# Capítulo 3

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.1

- Para las funciones dadas  $f(x)$ , sean  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.6$ , y  $x_2 = 0.9$ . Construya polinomios de interpolación de grados a lo sumo uno y dos para aproximar  $f(0.45)$  y encuentre el error absoluto.
  - $f(x) = \cos x$
  - $f(x) = \sqrt{1+x}$
  - $f(x) = \ln(x+1)$
  - $f(x) = \tan x$
- Para las funciones dadas  $f(x)$ , sean  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.25$ , y  $x_2 = 1.6$ . Construya polinomios de interpolación de grados a lo sumo uno y máximo dos para aproximar  $f(1.4)$  y encuentre el error absoluto.
  - $f(x) = \sin \pi x$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
  - $f(x) = \log_{10}(3x-1)$
  - $f(x) = e^{2x} - x$
- Use el teorema 3.3 para encontrar una cota del error para las aproximaciones en el ejercicio 1.
- Use el teorema 3.3 para encontrar una cota del error para las aproximaciones en el ejercicio 2.
- Use polinomios de interpolación de Lagrange adecuados de grados 1, 2 y 3 para aproximar cada una de las siguientes imágenes:
  - $f(8.4)$  si  $f(8.1) = 16.94410$ ,  $f(8.3) = 17.56492$ ,  $f(8.6) = 18.50515$ ,  $f(8.7) = 18.82091$
  - $f(-\frac{1}{3})$  si  $f(-0.75) = -0.07181250$ ,  $f(-0.5) = -0.02475000$ ,  $f(-0.25) = 0.33493750$ ,  $f(0) = 1.10100000$
  - $f(0.25)$  si  $f(0.1) = 0.62049958$ ,  $f(0.2) = -0.28398668$ ,  $f(0.3) = 0.00660095$ ,  $f(0.4) = 0.24842440$
  - $f(0.9)$  si  $f(0.6) = -0.17694460$ ,  $f(0.7) = 0.01375227$ ,  $f(0.8) = 0.22363362$ ,  $f(1.0) = 0.65809197$
- Use polinomios de interpolación de Lagrange adecuados de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:
  - $f(0.43)$  si  $f(0) = 1$ ,  $f(0.25) = 1.64872$ ,  $f(0.5) = 2.71828$ ,  $f(0.75) = 4.48169$
  - $f(0)$  si  $f(-0.5) = 1.93750$ ,  $f(-0.25) = 1.33203$ ,  $f(0.25) = 0.800781$ ,  $f(0.5) = 0.687500$
  - $f(0.18)$  si  $f(0.1) = -0.29004986$ ,  $f(0.2) = -0.56079734$ ,  $f(0.3) = -0.81401972$ ,  $f(0.4) = -1.0526302$
  - $f(0.25)$  si  $f(-1) = 0.86199480$ ,  $f(-0.5) = 0.95802009$ ,  $f(0) = 1.0986123$ ,  $f(0.5) = 1.2943767$
- Los datos para el ejercicio 5 se generaron usando las siguientes funciones. Use la fórmula del error para encontrar una cota del error y compárela con el error real en los casos  $n = 1$  y  $n = 2$ .
  - $f(x) = x \ln x$
  - $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$
  - $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$
  - $f(x) = \sin(e^x - 2)$
- Los datos para el ejercicio 6 se generaron usando las siguientes funciones. Use la fórmula del error para encontrar una cota del error y compárela con el error real en los casos  $n = 1$  y  $n = 2$ .
  - $f(x) = e^{2x}$
  - $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
  - $f(x) = x^2 \cos x - 3x$
  - $f(x) = \ln(e^x + 2)$
- Si  $P_3(x)$  es el polinomio de interpolación para los datos  $(0, 0)$ ,  $(0.5, y)$ ,  $(1, 3)$  y  $(2, 2)$ . El coeficiente de  $x^3$  en  $P_3(x)$  es 6. Encuentre  $y$ .
- Sea  $f(x) = \sqrt{x-x^2}$  y  $P_2(x)$  es el polinomio de interpolación en  $x_0 = 0$ ,  $x_1$  y  $x_2 = 1$ . Encuentre el valor más grande de  $x_1$  en  $(0, 1)$  para el que  $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$ .
- Use los siguientes valores y la aritmética de redondeo de cuatro dígitos para construir una aproximación del tercer polinomio de Lagrange para  $f(1.09)$ . La función aproximada es  $f(x) = \log_{10}(\tan x)$ . Use esta información para encontrar una cota para el error en la aproximación.

$$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$$

12. Use el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 o menos y la aritmética de corte de cuatro dígitos para aproximar  $\cos 0.750$  con los siguientes valores. Encuentre una cota para el error en la aproximación

$$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432 \quad \cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$$

El valor real de  $\cos 0.750$  es 0.7317 (para cuatro lugares decimales). Explique la discrepancia entre el error real y la cota del error.

13. Construya los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo  $[x_0, x_n]$ .
- $f(x) = e^{2x} \cos 3x$ ,  $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2$
  - $f(x) = \sin(\ln x)$ ,  $x_0 = 2.0, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6, n = 2$
  - $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3$
  - $f(x) = \cos x + \sin x$ ,  $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$
14. Construya los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo  $[x_0, x_n]$ .
- $f(x) = e^{-2x} \sin 3x$ ,  $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, n = 2$
  - $f(x) = \log_{10} x$ ,  $x_0 = 3.0, x_1 = 3.2, x_2 = 3.5, n = 2$
  - $f(x) = e^x + e^{-x}$ ,  $x_0 = -0.3, x_1 = 0, x_2 = 0.3, n = 2$
  - $f(x) = \cos(2 \ln(3x))$ ,  $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$
15. Sea  $f(x) = e^x$ , para  $0 \leq x \leq 2$ .
- Aproxime  $f(0.25)$  usando interpolación lineal con  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 0.5$ .
  - Aproxime  $f(0.75)$  usando interpolación lineal con  $x_0 = 0.5$  y  $x_1 = 1$ .
  - Aproxime  $f(0.25)$  y  $f(0.75)$  usando el segundo polinomio de interpolación con  $x_0 = 0, x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$ .
  - ¿Cuáles aproximaciones son mejores y por qué?
16. Sea  $f(x) = e^{-x} \cos x$ , para  $0 \leq x \leq 1$ .
- Aproxime  $f(0.25)$  usando interpolación lineal con  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 0.5$ .
  - Aproxime  $f(0.75)$  usando interpolación lineal con  $x_0 = 0.5$  y  $x_1 = 1$ .
  - Aproxime  $f(0.25)$  y  $f(0.75)$  usando el segundo polinomio de interpolación con  $x_0 = 0, x_1 = 0.5$  y  $x_2 = 1.0$ .
  - ¿Cuáles aproximaciones son mejores y por qué?
17. Suponga que usted necesita construir tablas de ocho lugares decimales para la función logarítmica común, o de base 10, desde  $x = 1$  hasta  $x = 10$  de tal forma que la interpolación lineal sea precisa dentro de  $10^{-6}$ . Determine una cota del tamaño de paso para esta tabla. ¿Qué selección de tamaño de paso realizaría para garantizar que  $x = 10$  se encuentra en la tabla?
18. En el ejercicio 24 de la sección 1.1 se integró una serie de Maclaurin para aproximar  $\operatorname{erf}(1)$ , donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función de error de distribución normal definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- Use la serie de Maclaurin para construir una tabla para  $\operatorname{erf}(x)$  que sea precisa dentro de  $10^{-4}$  para  $\operatorname{erf}(x_i)$ , donde  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 0, 1, \dots, 5$ .
- Use tanto la interpolación lineal como la interpolación cuadrática para obtener una aproximación para  $\operatorname{erf}(\frac{1}{3})$ . ¿Qué enfoque parece más factible?

## EJERCICIOS APLICADOS

19. a. La introducción para este capítulo incluyó una tabla que enumera la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use la interpolación de Lagrange para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.
- b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que era de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree usted que son sus cifras para 1975 y 2020?
20. Se sospecha que las grandes cantidades de tanino en las hojas maduras de los robles inhiben el crecimiento de la larva de polilla de invierno (*Operophtera bromata* L., *Geometridae*) que daña en exceso estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla enumera el peso promedio de dos muestras de la larva

en los primeros 28 días después de su nacimiento. Mientras la primera muestra se crió en las hojas jóvenes de roble, la segunda muestra se crió en las hojas maduras.

- Use la interpolación de Lagrange para aproximar la curva de peso promedio para cada muestra.
- Encuentre un peso promedio máximo aproximado para cada muestra determinando el máximo del polinomio de interpolación.

Día	0	6	10	13	17	20	28
Muestra 1 peso promedio (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Muestra 2 peso promedio (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Muestre que  $\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$ , donde  $g(x) = (x - jh)(x - (j + 1)h)$ .
- Pruebe el teorema de Taylor 1.14 siguiendo el procedimiento en la demostración del teorema 3.3. [Sugerencia: Sea

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}},$$

donde  $P$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Taylor y use el teorema de generalización de Rolle 1.10.]

- El polinomio de Bernstein de grado  $n$  para  $f \in C[0, 1]$  está dado para

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

donde  $\binom{n}{k}$  denota  $n!/k!(n-k)!$ . Estos polinomios se pueden usar en una prueba constructiva del teorema de aproximación de Weierstrass 3.1 (consulte [Bart]) porque  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = f(x)$  para cada  $x \in [0, 1]$ .

- Encuentre  $B_3(x)$  para las funciones
  - $f(x) = x$
  - $f(x) = 1$
- Muestre que para cada  $k \leq n$ ,

$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k}.$$

- Use la parte b) y el hecho, a partir de ii) en la parte a), de que

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{para cada } n,$$

para mostrar que, para  $f(x) = x^2$ ,

$$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

- Use la parte c) para calcular el valor de  $n$  necesario para que  $|B_n(x) - x^2| \leq 10^{-6}$  sea válido para todas las  $x$  en  $[0, 1]$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Suponga que usamos el polinomio de Lagrange para ajustar dos conjuntos de datos determinados que concuerdan exactamente, excepto por una pequeña perturbación en uno de los puntos de datos debido al error de medición. A pesar de que la perturbación es pequeña, el cambio en el polinomio de Lagrange es grande. Explique por qué se presenta esta discrepancia.
- Si decidimos incrementar el grado del polinomio de interpolación al agregar nodos, ¿existe una forma fácil de usar un polinomio de interpolación previo para obtener un polinomio de interpolación de grado más alto o necesitamos volver a empezar?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.2

- Con el método de Neville obtenga las aproximaciones para los polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:
  - $f(8.4)$  si  $f(8.1) = 16.94410$ ,  $f(8.3) = 17.56492$ ,  $f(8.6) = 18.50515$ ,  $f(8.7) = 18.82091$
  - $f(-\frac{1}{3})$  si  $f(-0.75) = -0.07181250$ ,  $f(-0.5) = -0.02475000$ ,  $f(-0.25) = 0.33493750$ ,  $f(0) = 1.10100000$
  - $f(0.25)$  si  $f(0.1) = 0.62049958$ ,  $f(0.2) = -0.28398668$ ,  $f(0.3) = 0.00660095$ ,  $f(0.4) = 0.24842440$
  - $f(0.9)$  si  $f(0.6) = -0.17694460$ ,  $f(0.7) = 0.01375227$ ,  $f(0.8) = 0.22363362$ ,  $f(1.0) = 0.65809197$
- Use el método de Neville a fin de obtener las aproximaciones para los polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:
  - $f(0.43)$  si  $f(0) = 1$ ,  $f(0.25) = 1.64872$ ,  $f(0.5) = 2.71828$ ,  $f(0.75) = 4.48169$
  - $f(0)$  si  $f(-0.5) = 1.93750$ ,  $f(-0.25) = 1.33203$ ,  $f(0.25) = 0.800781$ ,  $f(0.5) = 0.687500$
  - $f(0.18)$  si  $f(0.1) = -0.29004986$ ,  $f(0.2) = -0.56079734$ ,  $f(0.3) = -0.81401972$ ,  $f(0.4) = -1.0526302$
  - $f(0.25)$  si  $f(-1) = 0.86199480$ ,  $f(-0.5) = 0.95802009$ ,  $f(0) = 1.0986123$ ,  $f(0.5) = 1.2943767$
- Use el método de Neville para aproximar  $\sqrt{3}$  con las siguientes funciones y valores.
  - $f(x) = 3^x$  y los valores  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ , y  $x_4 = 2$ .
  - $f(x) = \sqrt{x}$  y los valores  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$ , y  $x_4 = 5$ .
  - Compare la precisión de la aproximación en las partes a) y b).
- Sea  $P_3(x)$  el polinomio de interpolación para los datos  $(0, 0)$ ,  $(0.5, y)$ ,  $(1, 3)$  y  $(2, 2)$ . Encuentre y si el coeficiente de  $x^3$  en  $P_3(x)$  es 6.
- El método de Neville se usa para aproximar  $f(0.4)$ , dada la siguiente tabla.

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{01} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	$P_2$	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

Determine  $P_2 = f(0.5)$ .

- El método de Neville se usa para aproximar  $f(0.5)$ , dada la siguiente tabla.

$x_0 = 0$	$P_0 = 0$		
$x_1 = 0.4$	$P_1 = 2.8$	$P_{0,1} = 3.5$	
$x_2 = 0.7$	$P_2$	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2} = \frac{27}{7}$

Determine  $P_2 = f(0.7)$ .

- Suponga que  $x_j = j$ , para  $j = 0, 1, 2, 3$ , y se sabe que

$$P_{0,1}(x) = 2x + 1, \quad P_{0,2}(x) = x + 1, \quad \text{y} \quad P_{1,2,3}(2.5) = 3.$$

Encuentre  $P_{0,1,2,3} = (2.5)$ .

- Suponga  $x_j = j$ , para  $j = 0, 1, 2, 3$ , y se sabe que

$$P_{0,1}(x) = x + 1, \quad P_{1,2}(x) = 3x - 1, \quad \text{y} \quad P_{1,2,3}(1.5) = 4.$$

Encuentre  $P_{0,1,2,3}(1.5)$ .

- El algoritmo de Neville se usa para aproximar  $f(0)$  usando  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$  y  $f(2)$ . Suponga que  $f(-1)$  se disminuyó en 2 y  $f(1)$  se incrementó en 3. Determine el error en el cálculo original del valor del polinomio de interpolación para aproximar  $f(0)$ .
- El algoritmo de Neville se utiliza para aproximar  $f(0)$  mediante  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$  y  $f(2)$ . Suponga que  $f(-1)$  se disminuyó en 2 y  $f(1)$  se incrementó en 3. Determine el error en el cálculo original del valor del polinomio de interpolación para aproximar  $f(0)$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Construya una sucesión de valores interpolantes  $y_n$  para  $f(1 + \sqrt{10})$ , donde  $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$  para  $-5 \leq x \leq 5$ , como sigue: para cada  $n = 1, 2, \dots, 10$ , sea  $h = 10/n$  y  $y_n = P_n(1 + \sqrt{10})$ , donde  $P_n(x)$  es el polinomio de interpolación para  $f(x)$  en los nodos  $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  y  $x_j^{(n)} = -5 + jh$ , para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ . ¿La sucesión  $\{y_n\}$  parece converger a  $f(1 + \sqrt{10})$ ?

**Interpolación inversa** Suponga que  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y  $f$  tiene un cero  $p$  en  $[a, b]$ . Si  $x_0, \dots, x_n$  son  $n + 1$  números distintos en  $[a, b]$  con  $f(x_k) = y_k$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ . Para aproximar  $p$ , construya el polinomio de interpolación de grado  $n$  en los nodos  $y_0, \dots, y_n$  para  $f^{-1}$ . Puesto que  $y_k = f(x_k)$  y  $0 = f(p)$ , sigue que  $f^{-1}(y_k) = x_k$  y  $p = f^{-1}(0)$ . El uso de la interpolación iterada para aproximar  $f^{-1}(0)$  recibe el nombre de *interpolación iterada inversa*.

12. Use la interpolación inversa para encontrar una aproximación a la solución de  $x - e^{-x} = 0$ , usando los datos

$x$	0.3	0.4	0.5	0.6
$e^{-x}$	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

13. Construya un algoritmo que pueda usarse para la interpolación inversa.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Fiabilidad: ¿Qué es y cómo se mide? Lea el artículo que se encuentra en <http://www.slideshare.net/analisedecurvas/reliability-what-is-it-and-how-is-it-measured>. Resuma sus hallazgos y describa cómo se aplica el método de Neville para medir el error.
2. ¿El método de Neville se puede usar para obtener el polinomio de interpolación en un punto general en oposición a un punto específico?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.3

1. Utilice la ecuación (3.10) o el algoritmo 3.2 para construir polinomios interpolantes de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
  - a.  $f(8.4)$  si  $f(8.1) = 16.94410$ ,  $f(8.3) = 17.56492$ ,  $f(8.6) = 18.50515$ ,  $f(8.7) = 18.82091$
  - b.  $f(0.9)$  si  $f(0.6) = -0.17694460$ ,  $f(0.7) = 0.01375227$ ,  $f(0.8) = 0.22363362$ ,  $f(1.0) = 0.65809197$
2. Utilice la ecuación (3.10) o el algoritmo 3.2 para construir polinomios interpolantes de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
  - a.  $f(0.43)$  si  $f(0) = 1$ ,  $f(0.25) = 1.64872$ ,  $f(0.5) = 2.71828$ ,  $f(0.75) = 4.48169$
  - b.  $f(0)$  si  $f(-0.5) = 1.93750$ ,  $f(-0.25) = 1.33203$ ,  $f(0.25) = 0.800781$ ,  $f(0.5) = 0.687500$
3. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
  - a.  $f(-\frac{1}{3})$  si  $f(-0.75) = -0.07181250$ ,  $f(-0.5) = -0.02475000$ ,  $f(-0.25) = 0.33493750$ ,  $f(0) = 1.10100000$
  - b.  $f(0.25)$  si  $f(0.1) = -0.62049958$ ,  $f(0.2) = -0.28398668$ ,  $f(0.3) = 0.00660095$ ,  $f(0.4) = 0.24842440$
4. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
  - a.  $f(0.43)$  si  $f(0) = 1$ ,  $f(0.25) = 1.64872$ ,  $f(0.5) = 2.71828$ ,  $f(0.75) = 4.48169$
  - b.  $f(0.18)$  si  $f(0.1) = -0.29004986$ ,  $f(0.2) = -0.56079734$ ,  $f(0.3) = -0.81401972$ ,  $f(0.4) = -1.0526302$

5. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.
- a.  $f(-1/3)$  si  $f(-0.75) = -0.07181250$ ,  $f(-0.5) = -0.02475000$ ,  $f(-0.25) = 0.33493750$ ,  $f(0) = 1.10100000$
- b.  $f(0.25)$  si  $f(0.1) = -0.62049958$ ,  $f(0.2) = -0.28398668$ ,  $f(0.3) = 0.00660095$ ,  $f(0.4) = 0.24842440$
6. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grado uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado mediante cada uno de los polinomios.
- a.  $f(0.43)$  si  $f(0) = 1$ ,  $f(0.25) = 1.64872$ ,  $f(0.5) = 2.71828$ ,  $f(0.75) = 4.48169$
- b.  $f(0.25)$  si  $f(-1) = 0.86199480$ ,  $f(-0.5) = 0.95802009$ ,  $f(0) = 1.0986123$ ,  $f(0.5) = 1.2943767$
7. a. Utilice el algoritmo 3.2 para construir el polinomio interpolante de grado tres para los puntos espaciados de manera desigual que se dan en la siguiente tabla:

$x$	$f(x)$
-0.1	5.30000
0.0	2.00000
0.2	3.19000
0.3	1.00000

- b. Agregue  $f(0.35) = 0.97260$  a la tabla y construya el polinomio interpolante de grado cuatro.
8. a. Use el algoritmo 3.2 para construir el polinomio interpolante de grado cuatro para los puntos espaciados de manera desigual que se dan en la siguiente tabla:

$x$	$f(x)$
0.0	-6.00000
0.1	-5.89483
0.3	-5.65014
0.6	-5.17788
1.0	-4.28172

- b. Agregue  $f(1.1) = -3.99583$  a la tabla y construya el polinomio interpolante de grado cinco.
9. a. Aproxime  $f(0.05)$  usando los siguientes datos y la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton:

$x$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

- b. Use la fórmula de diferencias hacia atrás de Newton para aproximar  $f(0.65)$ .
- c. Use la fórmula de Stirling para aproximar  $f(0.43)$ .
10. a. Aproxime  $f(-0.05)$  usando los siguientes datos y la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton:

$x$	-1.2	-0.9	-0.6	-0.3	0.0
$f(x)$	0.18232	-0.105083	-0.51036	-1.20397	-3.12145

- b. Use la fórmula de diferencias hacia atrás de Newton para aproximar  $f(-0.2)$ .
- c. Use la fórmula de Stirling para aproximar  $f(-0.43)$ .
11. Se proporcionan los siguientes datos para un polinomio  $P(x)$  de grado desconocido.

$x$	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

Determine el coeficiente de  $x^2$  en  $P(x)$  si las diferencias hacia adelante de tercer orden son 1.

12. Se proporcionan los siguientes datos para un polinomio  $P(x)$  de grado desconocido.

$x$	0	1	2	3
$P(x)$	4	9	15	18

Determine el coeficiente de  $x^3$  en  $P(x)$  si las diferencias hacia adelante de cuarto orden son 1.

13. La fórmula de la diferencias hacia adelante de Newton se usa para aproximar  $f(0.3)$  dada la siguiente tabla.

$x$	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	15.0	21.0	30.0	51.0

Suponga que se descubre que  $f(0.4)$  se subestimó en 10 y que  $f(0.6)$  se exageró en 5. ¿En cuánto debería modificarse la aproximación de  $f(0.3)$ ?

14. Para una función  $f$ , la fórmula de diferencias divididas de Newton da el polinomio interpolante

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5),$$

en los nodos  $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5$  y  $x_3 = 0.75$ . Encuentre  $f(0.75)$ .

15. Un polinomio de cuarto grado  $P(x)$  satisface  $\Delta^4 P(0) = 24$ ,  $\Delta^3 P(0) = 6$ , y  $\Delta^2 P(0) = 0$ , donde  $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ . Calcule  $\Delta^2 P(10)$ .
16. Para una función  $f$ , las diferencias divididas hacia adelante están dadas por

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

Determine las entradas faltantes en la tabla.

## EJERCICIOS APLICADOS

17. a. La introducción de este capítulo incluyó una tabla que lista la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use diferencias divididas adecuadas para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.
- b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que sería de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree usted que son las cifras para 1975 y 2020?
18. El tiempo más rápido jamás registrado en el Derby de Kentucky fue de un caballo llamado Secretariat en 1973. Él cubrió la pista de  $1\frac{1}{4}$  de milla en  $1:59\frac{2}{5}$  (1 minuto y 59.4 segundos). Los tiempos para los palos de cuarto de milla, media milla y una milla fueron:  $0:25\frac{1}{5}$ ,  $0:49\frac{1}{5}$ , y  $1:36\frac{2}{5}$ .
- a. Use la interpolación para predecir el tiempo en el palo de tres cuartos de milla y compárelo con el tiempo real de 1:13.
- b. Use la derivada del polinomio de interpolación para calcular la velocidad de Secretariat al final de la carrera.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Muestre que el polinomio que interpola los siguientes datos tiene grado tres.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4



20. a. Muestre que los polinomios cúbicos

$$P(x) = 3 - 2(x + 1) + 0(x + 1)(x) + (x + 1)(x)(x - 1)$$

y

$$Q(x) = -1 + 4(x + 2) - 3(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x + 1)(x)$$

interpolan los datos

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

- b. ¿Por qué la parte a) no viola la propiedad de unicidad de los polinomios de interpolación?
21. Dado

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

use  $P_n(x_2)$  para mostrar que  $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ .

22. Muestre que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!},$$

para algunos  $\xi(x)$ . [Sugerencia: A partir de la ecuación (3.3)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Considerando el polinomio de interpolación de grado  $n + 1$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ , tenemos

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

23. Sea  $i_0, i_1, \dots, i_n$  una reorganización de los enteros  $0, 1, \dots, n$ . Muestre que  $f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ . [Sugerencia: Considere el coeficiente principal del enésimo polinomio de Lagrange sobre los datos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ .]

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Compare y contraste varios de los diferentes métodos de diferencias divididas que leyó en este capítulo.
- ¿Es más fácil agregar un nuevo par de datos usando métodos de diferencias divididas con el fin de obtener un polinomio de Lagrange de grado superior?
- El polinomio de Lagrange se usó para deducir la fórmula del error en la interpolación polinomial. ¿Es posible usar alguna de estas fórmulas de diferencias divididas para deducir ese error? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.4

1. Use el teorema 3.9 o el algoritmo 3.3 para construir un polinomio de aproximación para los siguientes datos.

a.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

b.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

c.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$	d.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	-0.5	-0.0247500	0.7510000		0.1	-0.62049958	3.58502082
	-0.25	0.3349375	2.1890000		0.2	-0.28398668	3.14033271
	0	1.1010000	4.0020000		0.3	0.00660095	2.66668043
					0.4	0.24842440	2.16529366

2. Use el teorema 3.9 o el algoritmo 3.3 para construir un polinomio de aproximación para los siguientes datos.

a.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$	b.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	0	1.00000	2.00000		-0.25	1.33203	0.437500
	0.5	2.71828	5.43656		0.25	0.800781	-0.625000
c.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$	d.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	0.1	-0.29004996	-2.8019975		-1	0.86199480	0.15536240
	0.2	-0.56079734	-2.6159201		-0.5	0.95802009	0.23269654
	0.3	-0.81401972	-2.9734038		0	1.0986123	0.33333333
					0.5	1.2943767	0.45186776

3. Los datos en el ejercicio 1 se generaron usando las siguientes funciones. Use los polinomios construidos en el ejercicio 1 para aproximar  $f(x)$  en el valor de  $x$  dado y calcular el error absoluto.

- $f(x) = x \ln x$ ; aproxime  $f(8.4)$ .
- $f(x) = \sin(e^x - 2)$ ; aproxime  $f(0.9)$ .
- $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ ; aproxime  $f(-1/3)$ .
- $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ ; aproxime  $f(0.25)$ .

4. Los datos en el ejercicio 2 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los polinomios construidos en el ejercicio 2 para aproximar  $f(x)$  en el valor de  $x$  dado y calcule el error absoluto.

- $f(x) = e^{2x}$ ; aproxime  $f(0.43)$ .
- $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ ; aproxime  $f(0)$ .
- $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ ; aproxime  $f(0.18)$ .
- $f(x) = \ln(e^x + 2)$ ; aproxime  $f(0.25)$ .

5. a. Use los siguientes valores y la aritmética de redondeo de cinco dígitos para construir el polinomio de interpolación de Hermite para aproximar  $\sin 0.34$ .

$x$	$\sin x$	$D_x \sin x = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

- Determine una cota del error para la aproximación en la parte a) y compárela con el error real.
- Agregue  $\sin 0.33 = 0.32404$  y  $\cos 0.33 = 0.94604$  a los datos y repita los cálculos.

6. Sea  $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ .

- Aproxime  $f(1.03)$  mediante el polinomio de interpolación de Hermite de grado máximo tres usando  $x_0 = 1$  y  $x_1 = 1.05$ . Compare el error real con la cota del error.
- Repita a) con el polinomio de interpolación de Hermite de grado máximo cinco usando  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.05$  y  $x_2 = 1.07$ .

7. La siguiente tabla lista los datos para la función descrita mediante  $f(x) = e^{0.1x^2}$ . Aproxime  $f(1.25)$  por medio de  $H_5(1.25)$  y  $H_3(1.25)$ , donde  $H_5$  usa los nodos  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$  y  $H_3$  usa los nodos  $\bar{x}_0 = 1$  y  $\bar{x}_1 = 1.5$ . Encuentre las cotas del error para estas aproximaciones.

$x$	$f(x) = e^{0.1x^2}$	$f'(x) = 0.2xe^{0.1x^2}$
$x_0 = \bar{x}_0 = 1$	1.105170918	0.2210341836
$\bar{x}_1 = 1.5$	1.252322716	0.3756968148
$x_1 = 2$	1.491824698	0.5967298792
$x_2 = 3$	2.459603111	1.475761867

## EJERCICIOS APLICADOS

8. Un lanzador de béisbol lanza una bola rápida desde el montículo del lanzador hacia el receptor. A pesar de que la distancia desde el montículo hasta el plato de home es 60 pies y 6 pulgadas, normalmente, la bola viaja aproximadamente 55 pies y 5 pulgadas. Suponga que la velocidad inicial de la bola es 95 millas por hora y que la velocidad final en el plato de home es 92 millas por hora. Construya un polinomio de interpolación de Hermite para los datos

Tiempo $t$ (en segundos)	0	0.4
Distancia $d$ (en pies)	0	55.5
Velocidad (millas por hora)	95	92

- a. Use la derivada del polinomio de Hermite para calcular la velocidad de la bola de béisbol en millas por hora en  $t = 0.2$  segundos.
- b. ¿La velocidad máxima de la pelota se presenta en  $t = 0$ , o la derivada del polinomio de Hermite tiene un máximo que supera las 95 millas por hora? En ese caso, ¿esto parece razonable? [Sugerencia: Convierta las millas por hora en pies por segundo para resolver el problema y después regresar a las millas por hora para dar las respuestas.]
9. La información de un automóvil que circula por un camino recto se registra en diversos puntos. Los datos a partir de las observaciones se muestran en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies por segundo.

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

- a. Use el polinomio de Hermite para predecir la posición del vehículo y su velocidad cuando  $t = 10$  segundos.
- b. Use la derivada del polinomio de Hermite para determinar si el automóvil excede en algún punto el límite de velocidad de 55 millas por hora. En ese caso, ¿cuál es la primera vez que el automóvil excede esta velocidad?
- c. ¿Cuál es la velocidad máxima prevista para el automóvil?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Sea  $z_0 = x_0$ ,  $z_1 = x_0$ ,  $z_2 = x_1$ , y  $z_3 = x_1$ . Forme la siguiente tabla de diferencias divididas.

$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$			
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2]$	
		$f[z_1, z_2]$		$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3]$	
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$		
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$			

Muestre que el polinomio cúbico de Hermite  $H_3(x)$  también se puede escribir como  $f[z_0] + f[z_0, z_1](x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1)$ .

11. a. Muestre que  $H_{2n+1}(x)$  es el único polinomio de menor grado que concuerda con  $f$  y  $f'$  en  $x_0, \dots, x_n$ . [Sugerencia: Suponga que  $P(x)$  es otro polinomio y considere  $D = H_{2n+1} - P$  y  $D'$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .]
- b. Deduzca el término del error en el teorema 3.9 [Sugerencia: Use el mismo método en la deducción del error de Lagrange, teorema 3.3, al definir

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \cdots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2} [f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

y usar el hecho de que  $g'(t)$  tiene  $(2n+2)$  ceros distintos en  $[a, b]$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Uno de los problemas con interpolación polinomial es que a pesar de que se ajusta a los puntos, la forma de la curva no siempre concuerda muy bien. Un enfoque es usar los polinomios de interpolación y ajustar las derivadas y los puntos, describa, con palabras propias, cómo se logra esto.
2. En esta sección se presentaron dos métodos para encontrar el polinomio de Hermite. Explique la utilidad para cada uno de los dos métodos.
3. Investigue la derivación del método de diferencias divididas para calcular el polinomio de interpolación de Hermite. [Sugerencia: Consulte la referencia de Powell].

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.5

1. Determine el spline cúbico natural  $S$  que interpola los datos  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , y  $f(2) = 2$ .
2. Determine el spline cúbico condicionado  $s$  que interpola los datos  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  y  $f(2) = 2$  y satisface  $s'(0) = s'(2) = 1$ .
3. Construya el spline cúbico natural para los siguientes datos.

a.

$x$	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

b.

$x$	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

c.

$x$	$f(x)$
-0.5	-0.0247500
-0.25	0.3349375
0	1.1010000

d.

$x$	$f(x)$
0.1	-0.62049958
0.2	-0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

4. Construya el spline cúbico natural para los siguientes datos.

a.

$x$	$f(x)$
0	1.00000
0.5	2.71828

b.

$x$	$f(x)$
-0.25	1.33203
0.25	0.800781

c.

$x$	$f(x)$
0.1	-0.29004996
0.2	-0.56079734
0.3	-0.81401972

d.

$x$	$f(x)$
-1	0.86199480
-0.5	0.95802009
0	1.0986123
0.5	1.2943767

5. Los datos en el ejercicio 3 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los splines cúbicos contruidos en dicho ejercicio para el valor determinado de  $x$  con el fin de aproximar  $f(x)$  y  $f'(x)$  y calcule el error real.

- a.  $f(x) = x \ln x$ ; aproxime  $f(8.4)$  y  $f'(8.4)$ .
- b.  $f(x) = \sin(e^x - 2)$ ; aproxime  $f(0.9)$  y  $f'(0.9)$ .
- c.  $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ ; aproxime  $f(-\frac{1}{3})$  y  $f'(-\frac{1}{3})$ .
- d.  $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ ; aproxime  $f(0.25)$  y  $f'(0.25)$ .

6. Los datos en el ejercicio 4 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los splines cúbicos contruidos en dicho ejercicio para el valor determinado de  $x$  a fin de aproximar  $f(x)$  y  $f'(x)$  y calcule el error real.

- a.  $f(x) = e^{2x}$ ; aproxime  $f(0.43)$  y  $f'(0.43)$ .
- b.  $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ ; aproxime  $f(0)$  y  $f'(0)$ .
- c.  $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ ; aproxime  $f(0.18)$  y  $f'(0.18)$ .
- d.  $f(x) = \ln(e^x + 2)$ ; aproxime  $f(0.25)$  y  $f'(0.25)$ .

7. Construya el spline cúbico condicionado usando los datos del ejercicio 3 y el hecho de que
  - a.  $f'(8.3) = 1.116256$  y  $f'(8.6) = 1.151762$ .
  - b.  $f'(0.8) = 2.1691753$  y  $f'(1.0) = 2.0466965$ .
  - c.  $f'(-0.5) = 0.7510000$  y  $f'(0) = 4.0020000$ .
  - d.  $f'(0.1) = 3.58502082$  y  $f'(0.4) = 2.16529366$ .
8. Construya el spline cúbico condicionado usando los datos del ejercicio 3 y el hecho de que
  - a.  $f'(0) = 2$  y  $f'(0.5) = 5.43656$ .
  - b.  $f'(-0.25) = 0.437500$  y  $f'(0.25) = -0.625000$ .
  - c.  $f'(0.1) = -2.8004996$  y  $f'(0) = -2.9734038$ .
  - d.  $f'(-1) = 0.15536240$  y  $f'(0.5) = 0.45186276$ .
9. Repita el ejercicio 5 usando los splines cúbicos condicionados construidos en el ejercicio 7.
10. Repita el ejercicio 6 usando los splines cúbicos condicionados construidos en el ejercicio 8.
11. Un spline cúbico natural  $S$  en  $[0, 2]$  se define mediante

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Encuentre  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

12. Un spline cúbico natural  $S$  se define mediante

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Si  $S$  interpola los datos  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$  y  $(3, 0)$  encuentre  $B$ ,  $D$ ,  $b$  y  $d$ .

13. Un spline cúbico condicionado  $s$  para una función  $f$  se define en  $[1, 3]$  mediante

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Donde  $f'(1) = f'(3)$ , encuentre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

14. Un spline cúbico condicionado  $s$  para una función  $f$  se define mediante

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Encuentre  $f'(0)$  y  $f'(2)$ .

15. Dada la partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.05$ , y  $x_2 = 0.1$  de  $[0, 0.1]$ , de  $[0, 0.1]$  encuentre la función de interpolación lineal por tramos  $F$  para  $f(x) = e^{2x}$ . Aproxime  $\int_0^{0.1} e^{2x} dx$  con  $\int_0^{0.1} F(x) dx$  y compare los resultados con el valor real.
16. Dada la partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.3$ , y  $x_2 = 0.5$  de  $[0, 0.5]$ , encuentre la función de interpolación lineal por tramos  $F$  para  $f(x) = \sin 3x$ . Aproxime  $\int_0^{0.5} \sin 3x dx$  con  $\int_0^{0.5} F(x) dx$  y compare los resultados con el valor real.
17. Construya un spline cúbico natural para aproximar  $f(x) = \cos \pi x$  al usar los valores dados por  $f(x)$  en  $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ , y  $1.0$ . Integre el spline sobre  $[0, 1]$  y compare el resultado para  $\int_0^1 \cos \pi x dx = 0$ . Use las derivadas del spline para aproximar  $f'(0.5)$  y  $f''(0.5)$ . Compare estas aproximaciones con los valores reales.
18. Construya un spline cúbico natural para aproximar  $f(x) = e^{-x}$  al usar los valores dados por  $f(x)$  en  $x = 0, 0.25, 0.75$  y  $1.0$ . Integre el spline sobre  $[0, 1]$  y compare el resultado para  $\int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 1/e$ . Use las derivadas del spline para aproximar  $f'(0.5)$  y  $f''(0.5)$ . Compare las aproximaciones con los valores reales.
19. Repita el ejercicio 17, al construir en su lugar el spline cúbico condicionado con  $f'(0) = f'(1) = 0$ .
20. Repita el ejercicio 18, al construir en su lugar el spline cúbico condicionado con  $f'(0) = -1$ ,  $f'(1) = -e^{-1}$ .
21. Dada la partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.05$ ,  $x_2 = 0.1$  de  $[0, 0.1]$  y  $f(x) = e^{2x}$ :
  - a. Encuentre el spline cúbico  $s$  con condiciones de frontera que interpola  $f$ .
  - b. Encuentre una aproximación para  $\int_0^{0.1} e^{2x} dx$  al evaluar  $\int_0^{0.1} s(x) dx$ .

- c. Use el teorema 3.13 para calcular  $\max_{0 \leq x \leq 0.1} |f(x) - s(x)|$  y

$$\left| \int_0^{0.1} f(x) dx - \int_0^{0.1} s(x) dx \right|.$$

- d. Determine el spline cúbico  $S$  con condiciones de frontera naturales y compare  $S(0.02)$ ,  $s(0.02)$  y  $e^{0.04} = 1.04081077$ .
22. Dada la partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.3$ ,  $x_2 = 0.5$  de  $[0, 0.5]$  y  $f(x) = \sin 3x$ :
- Encuentre el spline cúbico  $s$  con condiciones de frontera que interpola  $f$ .
  - Encuentre una aproximación para  $\int_0^{0.5} \sin 3x dx$  con  $\int_0^{0.5} s(x) dx$  y compare los resultados con el valor real.

## EJERCICIOS APLICADOS

23. Un automóvil que circula por un camino recto se registra en una serie de puntos. Los datos a partir de las observaciones se dan en la siguiente tabla, donde el tiempo se representa en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies por segundo.

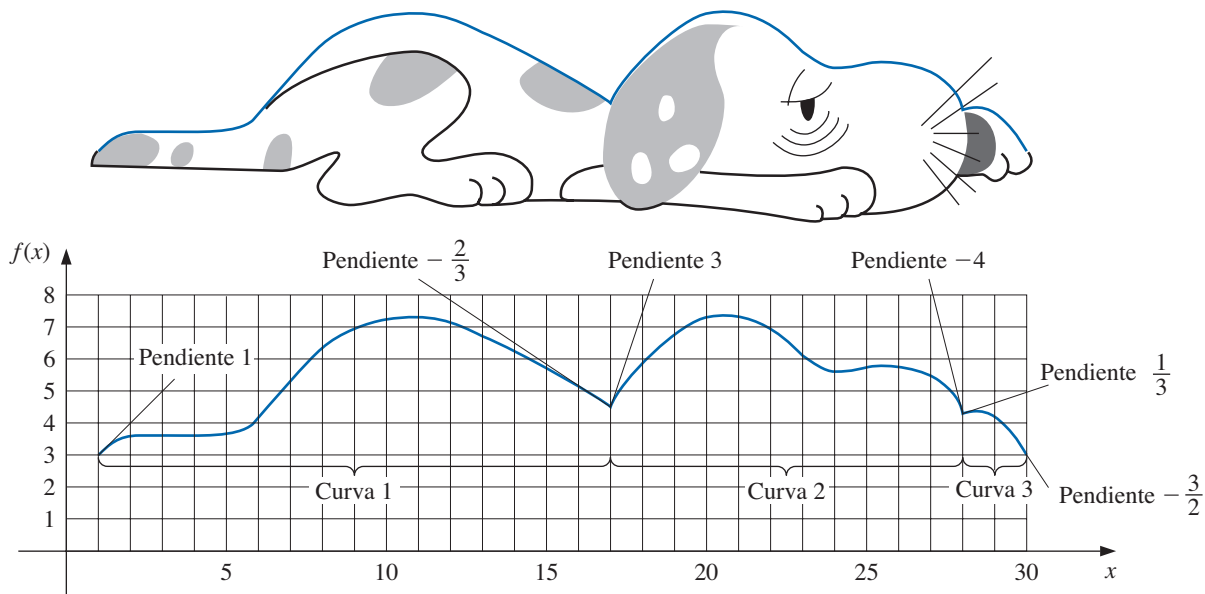
Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

- Use un spline cúbico condicionado para predecir la posición del automóvil y su velocidad cuando  $t = 10$  segundos.
  - Use la derivada del spline para determinar si el automóvil excede un límite de velocidad de 55 millas por hora en algún punto en el camino; en ese caso, ¿cuál es la primera vez que el automóvil excede esta velocidad?
  - ¿Cuál es la velocidad máxima prevista para el vehículo?
24. a. La introducción para este capítulo incluía una tabla que enumeraba la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use interpolación de spline cúbico natural para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.
- b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que era de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree que son sus cifras para 1975 y 2020?
25. Se sospecha que las grandes cantidades de cortido en hojas maduras de roble inhiben el crecimiento de la larva (*Operophtera bromata* L., *Geometridae*) de polilla de invierno que daña considerablemente estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla lista el peso promedio de dos muestras de larva en tiempos en los primeros 28 días después del nacimiento. Mientras la primera muestra se crió en hojas jóvenes de roble, la segunda muestra se crió en hojas maduras del mismo árbol.
- Use un spline cúbico natural para aproximar la curva de peso promedio para cada muestra.
  - Encuentre un peso promedio máximo aproximado para cada muestra al determinar el máximo del spline.

Día	0	6	10	13	17	20	28
Muestra 1 peso promedio (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Muestra 2 peso promedio (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

26. Un caballo llamado California Chrome ganó el Derby de Kentucky de 2014 (5:2 probabilidades para el favorito) en un tiempo de 2:03:66 (2 minutos y 3.66 segundos) para la carrera de  $\frac{1}{4}$  de milla. Los tiempos de los postes de cuarto de milla, media milla y una milla fueron 0:23.04, 0:47.37 y 1:37.45.
- Use esos valores junto con el tiempo de inicio para construir un spline cúbico natural para la carrera de California Chrome.
  - Use el spline para predecir el tiempo en el poste de tres cuartos de milla y compárelo con el tiempo real de 1:11:80.
  - Use el spline para predecir la velocidad de inicio y la velocidad en la meta de California Chrome.
27. La parte superior de este dócil perro se aproxima mediante splines cúbicos interpolantes condicionados. La curva se dibuja en una cuadrícula a partir de la cual se construye la tabla. Use el algoritmo 3.5 para construir los tres splines cúbicos condicionados.

28. Repita el ejercicio 27, construya los tres splines cúbicos naturales con el algoritmo 3.4.



Curva 1				Curva 2				Curva 3			
$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1	3.0	1.0	0	17	4.5	3.0	0	27.7	4.1	0.33
1	2	3.7		1	20	7.0		1	28	4.3	
2	5	3.9		2	23	6.1		2	29	4.1	
3	6	4.2		3	24	5.6		3	30	3.0	-1.5
4	7	5.7		4	25	5.8					
5	8	6.6		5	27	5.2					
6	10	7.1		6	27.7	4.1	-4.0				
7	13	6.7									
8	17	4.5	-0.67								

## EJERCICIOS TEÓRICOS

29. Suponga que  $f(x)$  es un polinomio de grado tres. Muestre que  $f(x)$  es un spline cúbico condicionado, pero que no puede ser su propio spline cúbico natural.
30. Suponga que  $\{x_i, f(x_i)\}_{i=1}^n$  se encuentran en una línea recta. ¿Qué se puede decir sobre los splines cúbicos naturales y condicionados para la función  $f$ ? [Sugerencia: Siga el ejemplo de los resultados de los ejercicios 1 y 2.]
31. Extienda los algoritmos 3.4 y 3.5 para incluir como salida la primera y la segunda derivada del spline en los nodos.
32. Extienda los algoritmos 3.4 y 3.5 para incluir como salida la integral del spline sobre el intervalo  $[x_0, x_n]$ .
33. Sea  $f \in C^2[a, b]$  y sean los nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  dados. Deduzca una estimación error similar a la del teorema 3.13 para la función de interpolación lineal por tramos  $F$ . Use esta estimación para derivar cotas del error para el ejercicio 15.
34. Sea  $f$  definida sobre  $[a, b]$  y sean los nodos  $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$  dados. Un spline cuadrático  $S$  interpolante consiste en el polinomio cuadrático

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \quad \text{en } [x_0, x_1]$$

y el polinomio cuadrático

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \quad \text{en } [x_1, x_2],$$

tal que

- i.  $S(x_0) = f(x_0)$ ,  $S(x_1) = f(x_1)$ , y  $S(x_2) = f(x_2)$ ,
- ii.  $S \in C^1[x_0, x_2]$ .

Muestre que las condiciones i) y ii) conducen a cinco ecuaciones en seis variables desconocidas  $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1$ , y  $c_1$ . El problema es decidir cuál condición adicional imponer para hacer que la solución sea única. ¿La condición  $S \in C^2[x_0, x_2]$  conduce a una solución significativa?

35. Determine un spline cuadrático  $s$  que interpole los datos  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , y  $f(2) = 2$  y satisfaga  $s'(0) = 2$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- En esta sección se analizó la interpolación por splines cúbicos y la interpolación lineal por tramos. La interpolación por spline cuadrático se presentó en un ejercicio. Los splines de grado superior pueden calcularse. Compare el uso de la interpolación por spline cuadrático *versus* la interpolación por spline cúbico.
- Investigue la llamada interpolación sin nudo, la cual es una alternativa a la interpolación de spline cúbico condicionado y natural.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.6

- Sean  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y  $(x_1, y_1) = (5, 2)$  los extremos de una curva. Use los puntos guía dados para construir aproximaciones paramétricas cúbicas de Hermite  $(x(t), y(t))$  para la curva y trace las aproximaciones.
  - a.  $(1, 1)$  y  $(6, 1)$
  - b.  $(0.5, 0.5)$  y  $(5.5, 1.5)$
  - c.  $(1, 1)$  y  $(6, 3)$
  - d.  $(2, 2)$  y  $(7, 0)$
- Repita el ejercicio 1 usando los polinomios de Bézier cúbicos.
- Construya y grafique los polinomios de Bézier cúbicos dados los siguientes puntos y puntos guía.
  - a. Punto  $(1, 1)$  con el punto guía  $(1.5, 1.25)$  para el punto  $(6, 2)$  con el punto guía  $(7, 3)$
  - b. Punto  $(1, 1)$  con el punto guía  $(1.25, 1.5)$  para el punto  $(6, 2)$  con el punto guía  $(5, 3)$
  - c. Punto  $(0, 0)$  con el punto guía  $(0.5, 0.5)$  para el punto  $(4, 6)$  con el punto guía de entrada  $(3.5, 7)$  y con el punto guía de salida  $(4.5, 5)$  para el punto  $(6, 1)$  con el punto guía  $(7, 2)$
  - d. Punto  $(0, 0)$  con el punto guía  $(0.5, 0.5)$  para el punto  $(2, 1)$  con el punto guía de entrada  $(3, 1)$  y el punto guía de salida  $(3, 1)$  para el punto  $(4, 0)$  con el punto guía de entrada  $(5, 1)$  y el punto guía de salida  $(3, -1)$  para el punto  $(6, -1)$  con el punto guía  $(6.5, -0.25)$
- Use los datos en la siguiente tabla y el algoritmo 3.6 para aproximar la forma de la letra N.

$i$	$x_i$	$y_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\alpha'_i$	$\beta'_i$
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Suponga que un polinomio de Bézier cúbico está colocado a través de  $(u_0, v_0)$  y  $(u_3, v_3)$  con puntos guía  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$ , respectivamente.
  - a. Derive las ecuaciones paramétricas para  $u(t)$  y  $v(t)$  al suponer que

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

y

$$v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2.$$



- b. Sea  $f(i/3) = u_i$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$ , y  $g(i/3) = v_i$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Muestre que el polinomio de Bernstein de grado tres en  $t$  para  $f$  es  $u(t)$  y el polinomio de Bernstein de grado tres en  $t$  para  $g$  es  $v(t)$  (consulte el ejercicio 23 de la sección 3.1.)

## PREGUNTA DE ANÁLISIS

1. Investigue la utilidad de los métodos en esta sección para los paquetes de gráficas.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Los polinomios de interpolación resultan afectados negativamente por datos malos. Es decir, un error en un punto de datos afectará todo el polinomio de interpolación. Los splines hacen que sea posible limitar los efectos malos de un punto de datos erróneo. Analice la forma de lograrlo.
2. Los splines cúbicos tienen las siguientes propiedades: a) interpolan los datos proporcionados; b) tienen continuidad de cero, primera y segunda derivada en puntos interiores y c) satisfacen ciertas condiciones de frontera. Analice las opciones para las condiciones límite

## CONCEPTOS CLAVE

Aproximación polinomial por tramos	Fórmulas de error	Polinomio osculante
Condición de frontera	Interpolación	Spline cúbico
Condición de frontera natural	Interpolación de Hermite	Spline cúbico condicionado
Curva de Bézier	Interpolación por splines cúbicos	Spline cúbico natural
Curva paramétrica	Método de Neville	Teorema de aproximación de Weierstrass
Diferencias divididas	Operador de diferencias hacia adelante	
Diferencias hacia adelante	Operador de diferencias hacia atrás	
Diferencias hacia atrás	Polinomio de Lagrange	
Fórmula de Stirling		

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos aproximar una función usando polinomios y polinomios por tramos. Encontramos que la función podría especificarse mediante una ecuación de definición dada o al proporcionar puntos en el plano por los que pasa la gráfica de la función. En cada caso se determinó un conjunto de nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , y podría requerirse más información, como el valor de diferentes derivadas. Necesitamos encontrar una función de aproximación que satisfaga las condiciones especificadas por estos datos.

El polinomio de interpolación  $P(x)$  fue el polinomio de grado mínimo que satisfacía, para una función  $f$ ,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n.$$

Encontramos que aunque este polinomio de interpolación era único, podría tomar muchas formas diferentes. A menudo se usaba la forma de Lagrange para interpolar tablas cuando  $n$  era pequeña y deducir fórmulas para aproximar derivadas e integrales. El método de Neville se usó para evaluar varios polinomios de interpolación en el mismo valor de  $x$ . Observamos que las formas del polinomio de Newton eran más apropiadas para el cálculo y también se usaban ampliamente para derivar fórmulas en la resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la interpolación polinomial tenía debilidades inherentes de oscilación, en especial

si el número de nodos era grande. En este caso, había otros métodos que podían aplicarse mejor.

Los polinomios de Hermite interpolaban una función y su derivada en los nodos. Podían ser muy precisos, pero requerían más información sobre la función que se aproximaba. Cuando había un gran número de nodos, los polinomios de Hermite también presentaban debilidades de oscilación.

La forma de interpolación que se usa de manera más común fue la interpolación polinomial por tramos. Cuando los valores de la función y la derivada estaban disponibles, se recomendaba la interpolación cúbica de Hermite por tramos. De hecho, éste fue el método preferido para interpolar los valores de una función que fue la solución para una ecuación diferencial. Observamos que sólo cuando los valores de la función estaban disponibles, se podía usar la interpolación de spline cúbico natural. Este spline forzaba que la segunda derivada fuera cero en los extremos. Otros splines cúbicos requerían datos adicionales. Por ejemplo, el spline cúbico condicionado necesitaba valores de la derivada de una función en los extremos del intervalo.

Como establecimos en la sección 3.3, nuestro tratamiento de métodos de diferencias divididas fue breve ya que los resultados en esta sección no se usarán en gran medida en material subsiguiente. La mayoría de los textos más antiguos sobre análisis numérico incluyen tratamientos amplios de los métodos de diferencias divididas. Si se necesita un tratamiento exhaustivo, el libro de Hildebrand [Hild] es una referencia especialmente buena.

Como nota final, existen otros métodos de interpolación que se usan comúnmente. La interpolación trigonométrica, en particular, la transformada rápida de Fourier que se analiza en el capítulo 8, se utiliza con grandes cantidades de datos cuando se asume que la función tiene una naturaleza periódica. También se usa la interpolación mediante funciones racionales.

Si se sospecha que los datos son imprecisos, es posible aplicar técnicas de suavizado y se recomienda alguna forma de mínimos cuadrados para ajustar los datos. Los polinomios, las funciones trigonométricas, las funciones racionales y los splines se pueden usar para ajustar datos con mínimos cuadrados. Nosotros los consideramos en el capítulo 8.

Las referencias generales para los métodos en este capítulo son los libros de Powell [Pow] y de Davis [Da]. El artículo fundamental sobre splines se debe a Schoenberg [Scho]. Los libros importantes sobre splines son los de Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Dierckx [Di] y Schumaker [Schum].

# Capítulo 4

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.1

1. Utilice las fórmulas de diferencias hacia adelante y de diferencias hacia atrás para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

b.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

2. Utilice las fórmulas de diferencias hacia adelante y de diferencias hacia atrás para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	1.9507	
-0.1	2.0421	
-0.1	2.0601	

b.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
1.0	1.0000	
1.2	1.2625	
1.4	1.6595	

3. Los datos en el ejercicio 1 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 1 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a.  $f(x) = \sin x$

b.  $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

4. Los datos en el ejercicio 2 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 2 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a.  $f(x) = 2 \cos 2x - x$

b.  $f(x) = x^2 \ln x + 1$

5. Utilice la fórmula de tres puntos más adecuada para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	

b.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

c.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	-4.827866	
3.0	-4.240058	
3.1	-3.496909	
3.2	-2.596792	

d.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	3.6887983	
2.1	3.6905701	
2.2	3.6688192	
2.3	3.6245909	

6. Use la fórmula de tres puntos más adecuada para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	-0.27652	
-0.2	-0.25074	
-0.1	-0.16134	
0	0	

b.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	-68.3193	
7.6	-71.6982	
7.8	-75.1576	
8.0	-78.6974	

c.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	1.52918	
1.2	1.64024	
1.3	1.70470	
1.4	1.71277	

d.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$
-2.7	0.054797	
-2.5	0.11342	
-2.3	0.65536	
-2.1	0.98472	

7. Los datos en el ejercicio 5 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 5 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

**a.**  $f(x) = e^{2x}$

**b.**  $f(x) = x \ln x$

**c.**  $f(x) = x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

**d.**  $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \operatorname{sen} x$

8. Los datos en el ejercicio 6 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 6 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

**a.**  $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$

**b.**  $f(x) = \ln(x + 2) - (x + 1)^2$

c.  $f(x) = x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

**d.**  $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

9. Use las fórmulas provistas en esta sección para determinar, con tanta precisión como sea posible, las aproximaciones para todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	2.1	-1.709847	
	2.2	-1.373823	
	2.3	-1.119214	
	2.4	-0.9160143	
	2.5	-0.7470223	
	2.6	-0.6015966	

<b>b.</b>	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	-3.0	9.367879	
	-2.8	8.233241	
	-2.6	7.180350	
	-2.4	6.209329	
	-2.2	5.320305	
	-2.0	4.513417	

10. Use las fórmulas provistas en esta sección para determinar, con tanta precisión como sea posible, las aproximaciones para todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

<b>a.</b>	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	1.05	-1.709847	
	1.10	-1.373823	
	1.15	-1.119214	
	1.20	-0.9160143	
	1.25	-0.7470223	
	1.30	-0.6015966	

<b>b.</b>	$x$	$f(x)$	$f'(x)$
	-3.0	16.08554	
	-2.8	12.64465	
	-2.6	9.863738	
	-2.4	7.623176	
	-2.2	5.825013	
	-2.0	4.389056	

11. Los datos en el ejercicio 9 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 9 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

**a.**  $f(x) = \tan x$

**b.**  $f(x) = e^{x/3} + x^2$

12. Los datos en el ejercicio 10 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 10 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

**a.**  $f(x) = \tan 2x$

**b.**  $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

13. Use los siguientes datos y el conocimiento de que las primeras cinco derivadas de  $f$  están acotadas en  $[1, 5]$  por 2, 3, 6, 12 y 23, respectivamente, para aproximar  $f'(3)$ , con tanta precisión como sea posible. Encuentre una cota para el error.

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

14. Repita el ejercicio 13, suponiendo, por el contrario, que la tercera derivada de  $f$  está acotada en  $[1, 5]$  por 4.

15. Repita el ejercicio 1 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 3.

16. Repita el ejercicio 5 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 7.

17. Repita el ejercicio 9 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 11.

- 18.** Considere la siguiente tabla de datos:

$x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.808038	0.6386093	0.3843735

- a. Utilice todas las fórmulas apropiadas dadas en esta sección para aproximar  $f'(0.4)$  y  $f''(0.4)$ .
  - b. Utilice todas las fórmulas apropiadas dadas en esta sección para aproximar  $f'(0.6)$  y  $f''(0.6)$ .
19. Si  $f(x) = \cos \pi x$ . Utilice la ecuación (4.9) y los valores  $f(x)$  para  $x = 0.25, 0.5$ , y  $0.75$  para aproximar  $f''(0.5)$ . Compare este resultado con el valor exacto y con la aproximación encontrada en el ejercicio 15 de la sección 3.5. Explique por qué este método es especialmente preciso para este problema y encuentre una cota para el error.
  20. Sea  $f(x) = 3xe^x - \cos x$ . Utilice los siguientes datos y la ecuación (4.9) para aproximar  $f''(1.3)$  con  $h = 0.1$  y con  $h = 0.001$ .

$x$	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

Compare sus resultados con  $f''(1.3)$ .

21. Considere la siguiente tabla de datos:

$x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

- a. Use la ecuación (4.7) para aproximar  $f'(0.2)$ .
- b. Use la ecuación (4.7) para aproximar  $f'(1.0)$ .
- c. Use la ecuación (4.6) para aproximar  $f'(0.6)$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

22. En un circuito con voltaje  $\mathcal{E}(t)$  e inductancia  $L$ , la primera ley de Kirchhoff provee la relación

$$\mathcal{E}(t) = L \frac{di}{dt} + Ri,$$

donde  $R$  es la resistencia en el circuito e  $i$  es la corriente. Suponga que medimos la corriente para varios valores de  $t$  y obtenemos

$t$	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
$i$	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

donde  $t$  se mide en segundos,  $i$  está en amperes, la inductancia  $L$  es una constante de 0.98 henrios y la resistencia es 0.142 ohms. Aproxime el valor  $\mathcal{E}(t)$  cuando  $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03$ , y  $1.04$ .

23. En el ejercicio 9 de la sección 3.4, se proporcionaron datos que describen un automóvil que viaja por un camino recto. Ese problema pedía predecir la posición y la velocidad del automóvil cuando  $t = 10$  segundos. Utilice los siguientes tiempos y posiciones para predecir la velocidad en cada tiempo listado.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	225	383	623	742	993

## EJERCICIOS TEÓRICOS

24. Deduzca el error en una fórmula de cinco puntos  $O(h^4)$  para aproximar  $f'(x_0)$  que usa  $f(x_0 - h)$ ,  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 + h)$ ,  $f(x_0 + 2h)$ , y  $f(x_0 + 3h)$ . [Sugerencia: Considere la expresión  $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$ . Expand  $f$  en el cuarto polinomio de Taylor y seleccione  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  adecuadamente.]
25. Use la fórmula derivada en el ejercicio 24 y los datos en el ejercicio 21 para aproximar  $f'(0.4)$  y  $f'(0.8)$ .
26. a. Analice los errores de redondeo, como en el ejemplo 4, para la fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_0).$$

- b. Encuentre una  $h > 0$  óptima para la función dada en el ejemplo 2.

27. Todos los estudiantes de cálculo saben que la derivada de una función  $f$  en  $x$  se puede definir como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Seleccione su función  $f$  favorita, un número  $x$  diferente a cero y computador o calculadora. Genere aproximaciones  $f'_n(x)$  para  $f'(x)$  mediante

$$f'_n(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}},$$

para  $n = 1, 2, \dots, 20$ , y describa lo que pasa.

28. Deduzca un método para aproximar  $f'''(x_0)$  cuyo término de error sea del orden  $h^2$  expandiendo la función  $f$  en un cuarto polinomio de Taylor alrededor de  $x_0$  y evalúe en  $x_0 \pm h$  y  $x_0 \pm 2h$ .
29. Considere la función

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde  $M$  es una cota para la tercera derivada de una función. Muestre que  $e(h)$  tiene un mínimo en  $\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- En esta sección, usted estudió una variedad de fórmulas para aproximar las derivadas. Compare y contraste estas fórmulas y su medida de error. ¿Cómo sabe cuál fórmula usar?
- Deduzca un método para aproximar  $f(x_0)$  cuyo término de error es del orden  $h^2$  al expandir la función de  $f$  en el cuarto polinomio de Taylor alrededor de  $x_0$  y evalúe en  $x_0 + 2h$ .

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.2

- Aplique el proceso de extrapolación descrito en el ejemplo 1 para determinar  $N_3(h)$ , una aproximación para  $f'(x_0)$ , para las funciones y los tamaños de paso siguientes.
  - $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$
  - $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$
  - $f(x) = 2^x \sin x, x_0 = 1.05, h = 0.4$
  - $f(x) = x^3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$
- Añada otra línea a la tabla de extrapolación en el ejercicio 1 para obtener la aproximación  $N_4(h)$ .
- Repita el ejercicio 1 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.
- Repita el ejercicio 2 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.
- Los siguientes datos dan aproximaciones para la integral

$$M = \int_0^\pi \sin x \, dx.$$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570.$$

Al suponer que  $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$ , construya una tabla de extrapolación para determinar  $N_4(h)$ .

6. Los siguientes datos se pueden usar para aproximar la integral

$$M = \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx.$$

$$N_1(h) = 2.356194, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837,$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157.$$

Suponga que existe una fórmula del tipo dado en el ejercicio 5 y determine  $N_4(h)$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que la fórmula de cinco puntos en la ecuación (4.6) aplicada para  $f(x) = xe^x$  en  $x_0 = 2.0$  da  $N_2(0.2)$  en la tabla 4.6 cuando  $h = 0.1$  y  $N_2(0.1)$  cuando  $h = 0.05$ .
8. La fórmula de diferencias hacia adelante se puede expresar como

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3).$$

Utilice la extrapolación para derivar una fórmula  $O(h^3)$  para  $f'(x_0)$ .

9. Suponga que  $N(h)$  es una aproximación para  $M$  para cada  $h > 0$  y que

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots,$$

para algunas constantes  $K_1, K_2, K_3, \dots$ . Use los valores  $N(h)$ ,  $N(\frac{h}{3})$ , y  $N(\frac{h}{9})$  para producir una aproximación  $O(h^3)$  para  $M$ .

10. Suponga que  $N(h)$  es una aproximación para  $M$  para cada  $h > 0$  y que

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \dots,$$

para algunas constantes  $K_1, K_2, K_3, \dots$ . Use los valores  $N(h)$ ,  $N(\frac{h}{3})$ , y  $N(\frac{h}{9})$  para producir una aproximación  $O(h^6)$  para  $M$ .

11. En cálculo, aprendemos que  $e = \lim_{h \rightarrow 0}(1 + h)^{1/h}$ .
  - a. Determine aproximaciones para  $e$  correspondientes a  $h = 0.04, 0.02$ , y  $0.01$ .
  - b. Use la extrapolación en las aproximaciones, suponiendo que las constantes  $K_1, K_2, \dots$ , existen con  $e = (1 + h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots$ , para producir una aproximación  $O(h^3)$  para  $e$ , donde  $h = 0.04$ .
  - c. ¿Cree que la suposición en la parte b) es correcta?
12. a. Muestre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2+h}{2-h} \right)^{1/h} = e.$$

- b. Calcule aproximaciones para  $e$  mediante la fórmula  $N(h) = \left( \frac{2+h}{2-h} \right)^{1/h}$ , para  $h = 0.04, 0.02$ , y  $0.01$ .
- c. Suponga que  $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots$ . Use la extrapolación por lo menos con 16 dígitos de precisión para calcular una aproximación  $O(h^3)$  para  $e$  con  $h = 0.04$ . ¿Cree que la suposición es correcta?
- d. Muestre que  $N(-h) = N(h)$ .
- e. Use la parte d) para mostrar que  $K_1 = K_3 = K_5 = \dots = 0$  en la fórmula

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + K_4h^4 + K_5h^5 + \dots$$

de tal forma que la fórmula se reduce a

$$e = N(h) + K_2h^2 + K_4h^4 + K_6h^6 + \dots$$

- f. Use los resultados de la parte e) y la extrapolación para calcular una aproximación  $O(h^6)$  para  $e$  con  $h = 0.04$ .
13. Suponga que la siguiente tabla de extrapolación se ha construido para aproximar el número  $M$  con  $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$ :

<hr/>		
$N_1(h)$		
$N_1\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_2(h)$	
$N_1\left(\frac{h}{4}\right)$	$N_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_3(h)$
<hr/>		

- a. Muestre que el polinomio de interpolación lineal  $P_{0,1}(h)$  a través de  $(h^2, N_1(h))$  y  $(h^2/4, N_1(h/2))$  satisface  $P_{0,1}(0) = N_2(h)$ . De igual forma, muestre que  $P_{1,2}(0) = N_2(h/2)$ .
- b. Muestre que el polinomio de interpolación lineal  $P_{0,2}(h)$  a través de  $(h^4, N_2(h))$  y  $(h^4/16, N_2(h/2))$  satisface  $P_{0,2}(0) = N_3(h)$ .

14. Suponga que  $N_1(h)$  es una fórmula que produce aproximaciones  $O(h)$  para un número  $M$  y que

$$M = N_1(h) + K_1h + K_2h^2 + \dots,$$

para un conjunto de constantes positivas  $K_1, K_2, \dots$ . Entonces  $N_1(h), N_1(h/2), N_1(h/4), \dots$  son todos cotas inferiores para  $M$ . ¿Qué se puede decir sobre las aproximaciones  $N_2(h), N_3(h), \dots$  extrapoladas?

15. Los semiperímetros de polígonos regulares con  $k$  lados que inscriben y circunscriben el círculo de unidad utilizado por Arquímedes antes de 200 a.C., para aproximar  $\pi$ , la circunferencia de un semicírculo. La geometría se puede utilizar para mostrar que la secuencia de semiperímetros inscritos y circunscritos  $\{p_k\}$  y  $\{P_k\}$ , respectivamente, satisfacen

$$p_k = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{y} \quad P_k = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

con  $p_k < \pi < P_k$ , siempre que  $k \geq 4$ .

- a. Muestre que  $p_4 = 2\sqrt{2}$  y  $P_4 = 4$ .  
b. Muestre que para  $k \geq 4$ , las secuencias satisfacen las relaciones de recurrencia

$$P_{2k} = \frac{2p_k P_k}{p_k + P_k} \quad \text{y} \quad p_{2k} = \sqrt{p_k P_{2k}}.$$

- c. Aproxime  $\pi$  dentro de  $10^{-4}$  al calcular  $p_k$  y  $P_k$  hasta que  $P_k - p_k < 10^{-4}$ .  
d. Use la serie de Taylor para mostrar que

$$\pi = p_k + \frac{\pi^3}{3!} \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{\pi^5}{5!} \left(\frac{1}{k}\right)^4 + \dots$$

y

$$\pi = P_k - \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2\pi^5}{15} \left(\frac{1}{k}\right)^4 - \dots.$$

- e. Use la extrapolación con  $h = 1/k$  para mejorar la aproximación de  $\pi$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- ¿Cómo se puede aplicar la extrapolación de Richardson a la integración? ¿Cómo afecta esta aplicación la medición del error?
- Si la extrapolación de Richardson se aplica a un procedimiento inestable, tal como la diferenciación numérica, ¿la inestabilidad mostrada en la tabla de extrapolación se volverá más pequeña conforme  $h$  disminuye?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.3

1. Aproxime las siguientes integrales usando la regla trapezoidal.

a.  $\int_{0.5}^1 x^4 dx$

c.  $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$

e.  $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} dx$

g.  $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$

b.  $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$

d.  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

f.  $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} dx$

h.  $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx$



2. Aproxime las siguientes integrales con la regla trapezoidal.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2 dx \\ \text{b.} & \int_{-0.5}^0 x \ln(x+1) dx \\ \text{c.} & \int_{0.75}^{1.3} ((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1) dx \\ \text{d.} & \int_e^{e+1} \frac{1}{x \ln x} dx \end{array}$$

3. Encuentre una cota para el error en el ejercicio 1 con la fórmula de error y compárela con el error real.  
 4. Encuentre una cota para el error en el ejercicio 2 por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.  
 5. Repita el ejercicio 1 con la regla de Simpson.  
 6. Repita el ejercicio 2 con la regla de Simpson.  
 7. Repita el ejercicio 3 con la regla de Simpson y los resultados del ejercicio 5.  
 8. Repita el ejercicio 4 con la regla de Simpson y los resultados del ejercicio 6.  
 9. Repita el ejercicio 1 con la regla del punto medio.  
 10. Repita el ejercicio 2 con la regla del punto medio.  
 11. Repita el ejercicio 3 con la regla del punto medio y los resultados del ejercicio 9.  
 12. Repita el ejercicio 4 con la regla del punto medio y los resultados del ejercicio 10.  
 13. La regla trapezoidal aplicada a  $\int_0^2 f(x) dx$  da el valor de 4 y la regla de Simpson da el valor de 2. ¿Cuál es  $f(1)$ ?  
 14. La regla trapezoidal aplicada a  $\int_0^2 f(x) dx$  da el valor de 5, y la regla del punto medio da el valor de 4. ¿Qué valor da la regla de Simpson?  
 15. Aproxime las siguientes integrales con las fórmulas (4.25) a (4.32). ¿Las precisiones de las aproximaciones son consistentes con las fórmulas de error?

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \int_0^{0.1} \sqrt{1+x} dx \\ \text{b.} & \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx \\ \text{c.} & \int_{1.1}^{1.5} e^x dx \\ \text{d.} & \int_0^1 x^{1/3} dx \end{array}$$

16. Aproxime las siguientes integrales con las fórmulas (4.25) a (4.32). ¿Las precisiones de las aproximaciones son consistentes con las fórmulas de error? ¿Cuáles partes c) y d) dan la mejor aproximación?

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \int_2^{2.5} \frac{(\ln x)^3}{3x} dx \\ \text{b.} & \int_{0.5}^1 5xe^{3x^2} dx \\ \text{c.} & \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \\ \text{d.} & \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \end{array}$$

17. Dada la función  $f$  en los siguientes valores,

$x$	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

aproxime  $\int_{1.8}^{2.6} f(x) dx$  usando todas las fórmulas adecuadas de cuadratura de esta sección.

18. Suponga que los datos del ejercicio 17 tienen errores de redondeo determinados por la siguiente tabla.

$x$	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
Error en $f(x)$	$2 \times 10^{-6}$	$-2 \times 10^{-6}$	$-0.9 \times 10^{-6}$	$-0.9 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-6}$

Calcule los errores debidos al redondeo en el ejercicio 17.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Encuentre el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

20. Sea  $h = (b - a)/3$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ , y  $x_2 = b$ . Encuentre el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2).$$

21. La fórmula de cuadratura  $\int_{-1}^1 f(x) dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$  es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos. Determine  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ .
22. La fórmula de cuadratura  $\int_0^2 f(x) dx = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$  es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos. Determine  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ .
23. Encuentre las constantes  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $x_1$  de tal forma que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x) dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible.

24. Encuentre las constantes  $x_0$ ,  $x_1$ , y  $c_1$  de tal forma que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión lo más alto posible.

25. Pruebe la declaración que sigue a la definición 4.1; muestre que una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión  $n$  si y sólo si el error  $E(P(x)) = 0$  para todos los polinomios  $P(x)$  de grado  $k = 0, 1, \dots, n$ , pero  $E(P(x)) \neq 0$  para algún polinomio  $P(x)$  de grado  $n + 1$ .
26. Derive la regla de Simpson con el término de error por medio de

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + kf^{(4)}(\xi).$$

Encuentre  $a_0$ ,  $a_1$ , y  $a_2$  a partir del hecho de que la regla de Simpson es exacta para  $f(x) = x^n$  cuando  $n = 1, 2$ , y  $3$ . A continuación, encuentre  $k$  al aplicar la fórmula de integración con  $f(x) = x^4$ .

27. Derive la regla abierta con  $n = 1$  con término de error por medio del teorema 4.3
28. Derive la regla de tres octavos de Simpson (la regla cerrada con  $n = 3$ ) con el término de error por medio del teorema 4.2.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- El método básico para aproximar una integral definida de una función que no tiene antiderivada explícita o cuya derivada no es fácil de obtener recibe el nombre de cuadratura numérica. Usted estudió una variedad de métodos de cuadratura en la sección 4.3, analícelos.
- Analice el uso de fórmulas abiertas para integrar una función desde 0 hasta 1 que tiene una singularidad en 0. Por ejemplo,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- Seleccione una de las funciones en el ejemplo 1 de la sección 4.3 y cree una hoja de cálculo que aproximará la integral desde 0 hasta 2 con la regla trapezoidal. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.7.
- Seleccione una de las funciones en el ejemplo 1 de la sección 4.3 y cree una hoja de cálculo que aproximará la integral desde 0 hasta 2 con la regla de Simpson. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.7.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.4

1. Utilice la regla compuesta trapezoidal con los valores indicados de  $n$  para aproximar las siguientes integrales.

a.  $\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4$

b.  $\int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4$

c.  $\int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} \, dx, \quad n = 6$

d.  $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$

e.  $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8$

f.  $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 4} \, dx, \quad n = 8$

g.  $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx, \quad n = 8$

h.  $\int_0^{3\pi/8} \tan x \, dx, \quad n = 8$

2. Use la regla compuesta trapezoidal con los valores indicados de  $n$  para aproximar las siguientes integrales.

a.  $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x \, dx, \quad n = 4$

b.  $\int_{-0.5}^{0.5} x \ln(x + 1) \, dx, \quad n = 6$

c.  $\int_{.75}^{1.75} (\sin^2 x - 2x \sin x + 1) \, dx, \quad n = 8$

d.  $\int_e^{e+2} \frac{1}{x \ln x} \, dx, \quad n = 8$

3. Use la regla compuesta de Simpson para aproximar las integrales en el ejercicio 1.  
 4. Use la regla compuesta de Simpson para aproximar las integrales en el ejercicio 2.  
 5. Use la regla compuesta de punto medio con  $n + 2$  subintervalos para aproximar las integrales en el ejercicio 1.  
 6. Use la regla compuesta de punto medio con  $n + 2$  subintervalos para aproximar las integrales en el ejercicio 2.  
 7. Aproxime  $\int_0^2 x^2 \ln(x^2 + 1) \, dx$  por medio de  $h = 0.25$ . Utilice  
 a. Regla compuesta trapezoidal  
 b. Regla compuesta de Simpson  
 c. Regla compuesta de punto medio  
 8. Aproxime  $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} \, dx$  por medio de  $h = 0.25$ . Utilice  
 a. Regla compuesta trapezoidal  
 b. Regla compuesta de Simpson  
 c. Regla compuesta de punto medio  
 9. Suponga que  $f(0) = 1$ ,  $f(0.5) = 2.5$ ,  $f(1) = 2$ , y  $f(0.25) = f(0.75) = \alpha$ . Encuentre  $\alpha$  si la regla compuesta trapezoidal con  $n = 4$  da el valor de 1.75 para  $\int_0^1 f(x) \, dx$ .  
 10. La regla del punto medio para aproximar  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$  da el valor 12, la regla compuesta de punto medio con  $n = 2$  da 5 y la regla compuesta de Simpson da 6. Utilice el hecho de que  $f(-1) = f(1)$  y  $f(-0.5) = f(0.5) - 1$  para determinar  $f(-1)$ ,  $f(-0.5)$ ,  $f(0)$ ,  $f(0.5)$ , y  $f(1)$ .  
 11. Determine los valores de  $n$  y  $h$  requeridos para aproximar

$$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx$$

dentro de  $10^{-4}$ . Use

- a. Regla compuesta trapezoidal  
 b. Regla compuesta de Simpson  
 c. Regla compuesta de punto medio  
 12. Repita el ejercicio 11 para la integral  $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$ .  
 13. Determine los valores de  $n$  y  $h$  requeridos para aproximar

$$\int_0^2 \frac{1}{x + 4} \, dx$$

dentro de  $10^{-5}$  y calcule la aproximación. Utilice

- a. Regla compuesta trapezoidal  
 b. Regla compuesta de Simpson  
 c. Regla compuesta de punto medio

14. Repita el ejercicio 13 para la integral  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .
15. Si  $f$  está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0 \leq x \leq 0.1, \\ 1.001 + 0.03(x - 0.1) + 0.3(x - 0.1)^2 + 2(x - 0.1)^3, & 0.1 \leq x \leq 0.2, \\ 1.009 + 0.15(x - 0.2) + 0.9(x - 0.2)^2 + 2(x - 0.2)^3, & 0.2 \leq x \leq 0.3. \end{cases}$$

- a. Investigue la continuidad de las derivadas de  $f$ .
- b. Use la regla compuesta trapezoidal con  $n = 6$  para aproximar  $\int_0^{0.3} f(x) \, dx$  y calcular el error por medio del límite de error.
- c. Utilice la regla compuesta trapezoidal con  $n = 6$  para aproximar  $\int_0^{0.3} f(x) \, dx$ . ¿Los resultados son más precisos que en la parte b)?
16. En cursos de cálculo multivariado y de estadística, se muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2} \, dx = 1,$$

para cualquier  $\sigma$ . La función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$$

es la *función de densidad normal* con *media*  $\mu = 0$  y *desviación estándar*  $\sigma$ . La probabilidad de que un valor seleccionado de manera aleatoria descrito por esta distribución se encuentre en  $[a, b]$  está determinada por  $\int_a^b f(x) \, dx$ . Aproxime dentro de  $10^{-5}$  la probabilidad de que un valor seleccionado de manera aleatoria descrito por esta distribución se encontrará en

- a.  $[-\sigma, \sigma]$                       b.  $[-2\sigma, 2\sigma]$                       c.  $[-3\sigma, 3\sigma]$

## EJERCICIOS APLICADOS

17. Determine, dentro de  $10^{-6}$ , la longitud de la gráfica de la elipse con la ecuación  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .
18. Un automóvil completa una vuelta del circuito de carreras en 84 segundos. La velocidad de este automóvil en cada intervalo de 6 segundos se determina con una pistola radar y se da desde el principio de la vuelta, en pies por segundo, por las entradas en la siguiente tabla.

Tiempo	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
Velocidad	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

¿Cuánto mide la pista?

19. Una partícula de masa  $m$  que se mueve hacia un fluido está sujeta a una resistencia viscosa  $R$ , la cual es una función de la velocidad  $v$ . La relación entre la resistencia  $R$ , velocidad  $v$  y el tiempo  $t$  está dada por la ecuación

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} \, du.$$

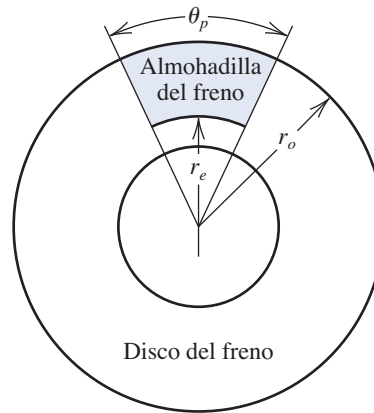
Suponga que  $R(v) = -v\sqrt{v}$  para un fluido especial, en donde  $R$  está en Newtons y  $v$  en metros por segundo. Si  $m = 10$  kg y  $v(0) = 10$  m/s, aproxime el tiempo requerido para que la partícula reduzca su velocidad a  $v = 5$  m/s.

20. Para simular las características térmicas de los frenos de disco (véase la siguiente figura), D. A. Secrist y R. W. Hornbeck [SH] necesitaron aproximar numéricamente el “aumento promedio de la temperatura del revestimiento”  $T$ , de la almohadilla del freno a partir de la ecuación

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r)r\theta_p \, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r\theta_p \, dr},$$

donde  $r_e$  representa el radio en el que comienza el contacto almohadilla-disco,  $r_o$  representa el radio externo del contacto almohadilla-disco,  $\theta_p$  representa el ángulo subtendido por las almohadillas del freno del sector y  $T(r)$  es la temperatura en cada punto de la almohadilla, obtenido numéricamente a partir del análisis de la ecuación térmica (consulte la sección 12.2). Suponga que  $r_e = 0.308$  pies,  $r_o = 0.478$  pies, y  $\theta_p = 0.7051$  radianes y que las temperaturas provistas en la siguiente tabla se han calculado en los diferentes puntos del disco. Aproxime  $T$ .

$r$ (pies)	$T(r)$ (°F)	$r$ (pies)	$T(r)$ (°F)	$r$ (pies)	$T(r)$ (°F)
0.308	640	0.376	1034	0.444	1204
0.325	794	0.393	1064	0.461	1222
0.342	885	0.410	1114	0.478	1239
0.359	943	0.427	1152		



21. Encuentre una aproximación dentro de  $10^{-4}$  del valor de la integral en la aplicación con que inicia este capítulo:

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx.$$

22. La ecuación

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0.45$$

se puede resolver para  $x$  a través del método de Newton con

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt - 0.45$$

y

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Para evaluar  $f$  en la aproximación  $p_k$ , necesitamos una fórmula de cuadratura para aproximar

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

- Encuentre una solución para  $f(x) = 0$  precisa dentro de  $10^{-5}$  por medio del método de Newton con  $p_0 = 0.5$  y la regla compuesta de Simpson.
- Repita a) por medio de la regla compuesta trapezoidal en lugar de la regla compuesta de Simpson.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

23. Muestre que el error  $E(f)$  para la regla compuesta de Simpson se puede aproximar por medio de

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)].$$

[Sugerencia:  $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$  es la suma de Riemann para  $\int_a^b f^{(4)}(x) dx$ .]

24. a. Deduzca un estimado para  $E(f)$  en la regla compuesta trapezoidal con el método en el ejercicio 23.  
b. Repita la parte a) para la regla compuesta de punto medio.
25. Utilice los cálculos de error de los ejercicios 23 y 24 para calcular los errores en el ejercicio 12.
26. Utilice los cálculos de error de los ejercicios 23 y 24 para calcular los errores en el ejercicio 14.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Deduzca un método compuesto con base en la regla de los tres octavos de Simpson.
- La regla de los tres octavos de Simpson es otro método para la integración numérica. ¿Cómo difiere este método del método de Simpson? ¿Vale la pena? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.5

1. Utilice la integración de Romberg para calcular  $R_{3,3}$  para las siguientes integrales.

a. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$	b. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$
c. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$	d. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$
e. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$	f. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$
g. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$	h. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. Utilice la integración de Romberg para calcular  $R_{3,3}$  para las siguientes integrales.

a. $\int_{-1}^1 (\cos x)^2 \, dx$	b. $\int_{-0.75}^{0.75} x \ln(x+1) \, dx$
c. $\int_1^4 ((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1) \, dx$	d. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

- Calcule  $R_{4,4}$  para las integrales en el ejercicio 1.
- Calcule  $R_{4,4}$  para las integrales en el ejercicio 2.
- Use la integración de Romberg para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de  $10^{-6}$ . Calcule la tabla de Romberg hasta que  $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$  o  $n = 10$ . Compare sus resultados con los valores exactos de las integrales.
- Use la integración de Romberg para aproximar las integrales en el ejercicio 2 dentro de  $10^{-6}$ . Calcule la tabla de Romberg hasta que  $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$  o  $n = 10$ . Compare sus resultados con los valores exactos de las integrales.
- Use los siguientes datos para aproximar  $\int_1^5 f(x) \, dx$  con tanta precisión como sea posible.

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

8. Use los siguientes datos para aproximar  $\int_0^6 f(x) dx$  con tanta precisión como sea posible.

$x$	0	0.75	1.5	2.25	3	3.75	4.5	5.25	6
$f(x)$	0	0.866025	1.22474	1.5	1.7321	1.9365	2.1213	2.2913	2.4495

9. La integración de Romberg se utiliza para aproximar

$$\int_2^3 f(x) dx.$$

Si  $f(2) = 0.51342$ ,  $f(3) = 0.36788$ ,  $R_{31} = 0.43687$ , y  $R_{33} = 0.43662$ , encuentre  $f(2.5)$ .

10. La integración de Romberg se usa para aproximar

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx.$$

Si  $R_{11} = 0.250$  y  $R_{22} = 0.2315$ , ¿cuál es  $R_{21}$ ?

11. La integración de Romberg para aproximar  $\int_a^b f(x) dx$  da  $R_{11} = 8$ ,  $R_{22} = 16/3$ , y  $R_{33} = 208/45$ . Encuentre  $R_{31}$ .
12. La integración de Romberg para aproximar  $\int_0^1 f(x) dx$  da  $R_{11} = 4$  y  $R_{22} = 5$ . Encuentre  $f(1/2)$ .
13. Use la integración de Romberg para calcular las siguientes aproximaciones para

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx.$$

[Nota: Los resultados en este ejercicio son más interesantes si usted usa un dispositivo con aritmética entre siete y nueve dígitos.]

- Determine  $R_{1,1}$ ,  $R_{2,1}$ ,  $R_{3,1}$ ,  $R_{4,1}$  y  $R_{5,1}$ , y utilice estas aproximaciones para predecir el valor de la integral.
  - Determine  $R_{2,2}$ ,  $R_{3,3}$ ,  $R_{4,4}$ , y  $R_{5,5}$ , y modifique su predicción.
  - Determine  $R_{6,1}$ ,  $R_{6,2}$ ,  $R_{6,3}$ ,  $R_{6,4}$ ,  $R_{6,5}$ , y  $R_{6,6}$ , y modifique su predicción.
  - Determine  $R_{7,7}$ ,  $R_{8,8}$ ,  $R_{9,9}$ , y  $R_{10,10}$ , y realice su predicción final.
  - Explique por qué esta integral causa dificultad con la integración de Romberg y cómo se puede reformular para determinar con mayor facilidad una aproximación precisa.
14. En el ejercicio 24 de la sección 1.1 se integró una serie de Maclaurin para aproximar  $\text{erf}(1)$ , donde  $\text{erf}(x)$  es la función de error de distribución normal definida por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Aproxime  $\text{erf}(1)$  dentro de  $10^{-7}$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

15. Encuentre una aproximación dentro de  $10^{-4}$  del valor de la integral considerada en la aplicación de apertura de este capítulo:

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx.$$

16. En la sección 4.4, ejercicio 19. El método compuesto de Simpson se utilizó para aproximar el tiempo requerido para que una partícula disminuya su velocidad a 5 metros por segundo. La partícula tiene una masa  $m = 10$  kg y se mueve a través de fluido. Está sujeta a una resistencia viscosa  $R = -v\sqrt{v}$  donde  $v$  es su velocidad en metros por segundo.

La relación entre  $R$ ,  $v$  y el tiempo  $t$  está dada por

$$t = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$$

Suponiendo  $v(0) = 10$  metros por segundo, utilice la integración de Romberg con  $n = 4$  para obtener la aproximación.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Muestre que la aproximación obtenida a partir de  $R_{k,2}$  es la misma que la provista por la regla compuesta de Simpson descrita en el teorema 4.4 con  $h = h_k$ .
18. Muestre que, para cualquier  $k$ ,

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}).$$

19. Utilice el resultado del ejercicio 18 para verificar la ecuación (4.34); es decir, muestre que para todas las  $k$ ,

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[ R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) \right].$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Una modificación de la integración de Romberg es construir  $R_k(h)$  al duplicar el tamaño de paso  $h$ , y la otra es construir  $R_k(h)$  al reducir a la mitad el tamaño de paso  $h$ . Analice la utilidad de ambas modificaciones si un número limitado de valores de datos  $(t_k, I_k)$  se determina como entrada.
2. Recree la tabla 4.9 al crear una hoja de cálculo que aproximará la integral. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.9. Describa las similitudes y diferencias en las tablas.
3. El valor promedio de una función está definido por  $\int_a^b \frac{f(x)}{(b-a)} dx$  usando la función  $T(x) = 0.001t^4 - 0.280t^2 + 25$ , donde  $t$  es el número de horas desde el mediodía ( $-12 < t < 12$ ). ¿La extrapolación de Richardson se puede usar para encontrar el valor promedio? En este caso, ¿qué modificaciones, si hay alguna, se deben hacer?
4. Si se elige usar la regla compuesta de Simpson en lugar de la regla trapezoidal como la primera columna en una tabla de Romberg, ¿las columnas a la derecha serán diferentes a aquellas en la tabla original de Romberg?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.6

1. Calcule las aproximaciones de la regla de Simpson  $S(a, b)$ ,  $S(a, (a+b)/2)$ , y  $S((a+b)/2, b)$  para las siguientes integrales y verifique el cálculo determinado en la fórmula de aproximación.

a.  $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$

b.  $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

c.  $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$

d.  $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

2. Calcule las aproximaciones de la regla de Simpson  $S(a, b)$ ,  $S(a, (a+b)/2)$ , y  $S((a+b)/2, b)$  para las siguientes integrales y verifique el cálculo determinado para la fórmula de aproximación.

a.  $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$

b.  $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$

c.  $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$

d.  $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$



3. Utilice la cuadratura adaptable para encontrar aproximaciones dentro de  $10^{-3}$  para las integrales en el ejercicio 1. No use un programa de computadora para generar estos resultados.
4. Utilice la cuadratura adaptable para encontrar aproximaciones dentro de  $10^{-3}$  para las integrales en el ejercicio 2. No use un programa de computadora para generar estos resultados.
5. Utilice la cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de  $10^{-5}$ .

a.  $\int_1^3 e^{2x} \sin 3x \, dx$

b.  $\int_1^3 e^{3x} \sin 2x \, dx$

c.  $\int_0^5 (2x \cos(2x) - (x-2)^2) \, dx$

d.  $\int_0^5 (4x \cos(2x) - (x-2)^2) \, dx$

6. Utilice la cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de  $10^{-5}$ .

a.  $\int_0^\pi (\sin x + \cos x) \, dx$

b.  $\int_1^2 (x + \sin 4x) \, dx$

c.  $\int_{-1}^1 x \sin 4x \, dx$

d.  $\int_0^{\pi/2} (6 \cos 4x + 4 \sin 6x) e^x \, dx$

7. Utilice la regla compuesta de Simpson con  $n = 4, 6, 8, \dots$ , hasta que las aproximaciones sucesivas para las siguientes integrales concuerden dentro de  $10^{-6}$ . Determine el número de nodos requerido. Use el algoritmo de cuadratura adaptable para aproximar la integral dentro de  $10^{-6}$ , y cuente el número de nodos. ¿El procedimiento de cuadratura adaptable produjo alguna mejora?

a.  $\int_0^\pi x \cos x^2 \, dx$

b.  $\int_0^\pi x \sin x^2 \, dx$

8. Utilice la regla compuesta de Simpson con  $n = 4, 6, 8, \dots$ , hasta que las aproximaciones sucesivas para las siguientes integrales concuerden dentro de  $10^{-6}$ . Determine el número de nodos requerido. Use el algoritmo de cuadratura adaptable para aproximar la integral dentro de  $10^{-6}$ , y cuente el número de nodos. ¿El procedimiento de cuadratura adaptable produjo alguna mejora?

a.  $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$

b.  $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

9. Bosqueje las gráficas de  $\sin(1/x)$  y  $\cos(1/x)$  en  $[0.1, 2]$ . Utilice cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de  $10^{-3}$ .

a.  $\int_{0.1}^2 \sin \frac{1}{x} \, dx$

b.  $\int_{0.1}^2 \cos \frac{1}{x} \, dx$

## EJERCICIOS APLICADOS

10. El estudio de difracción de la luz en una apertura rectangular implica las integrales de Fresnel

$$c(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi}{2} w^2 \, dw \quad \text{y} \quad s(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi}{2} w^2 \, dw.$$

Construya una tabla de valores para  $c(t)$  y  $s(t)$  que sea precisa dentro de  $10^{-4}$  para valores de  $t = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ .

11. La ecuación diferencial

$$mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$$

describe un sistema masa-resorte con una masa  $m$ , una constante de resorte  $k$  y sin amortiguamiento aplicado. El término  $F_0 \cos \omega t$  describe una fuerza externa periódica aplicada al sistema. La solución a la ecuación cuando inicialmente el sistema está en reposo ( $u'(0) = u(0) = 0$ ) es

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t), \quad \text{en donde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega.$$

Bosqueje la gráfica de  $u$  cuando  $m = 1, k = 9, F_0 = 1, \omega = 2$ , y  $t \in [0, 2\pi]$ . Aproxime  $\int_0^{2\pi} u(t) dt$  dentro de  $10^{-4}$ .

12. Si el término  $cu'(t)$  se añade al lado izquierdo de la ecuación de movimiento en el ejercicio 7, la ecuación diferencial resultante describe un sistema masa-resorte amortiguado con una constante de amortiguamiento  $c \neq 0$ . La solución a esta ecuación cuando el sistema está inicialmente en reposo es

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2 \omega^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} (c \omega \sin \omega t + m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t),$$

Donde

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}.$$

- a. Si  $m = 1, k = 9, F_0 = 1, c = 10$ , y  $\omega = 2$ . Encuentre los valores de  $c_1$  y  $c_2$  de tal forma que  $u(0) = u'(0) = 0$ .
- b. Bosqueje la gráfica de  $u(t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$  y aproxime  $\int_0^{2\pi} u(t) dt$  dentro de  $10^{-4}$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Sean  $T(a, b)$  y  $T(a, \frac{a+b}{2}) + T(\frac{a+b}{2}, b)$  las aplicaciones sencilla y doble de la regla trapezoidal para  $\int_a^b f(x) dx$ . Obtenga la relación entre

$$\left| T(a, b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

y

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La integración de Romberg reemplazará la regla de Simpson en cuadratura adaptable? En este caso, ¿se determinaría  $n$ ?
2. La eficiencia de la cuadratura adaptable disminuye considerablemente si la función tiene singularidades integrables en los extremos del intervalo. Esta situación podría requerir miles de iteraciones para disminuir el error de integración a un nivel que sea aceptable. Analice cómo se puede evitar esto.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.7

1. Aproxime las siguientes integrales por medio de cuadratura gaussiana con  $n = 2$  y compare sus resultados para los valores exactos de las integrales.

a.  $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$

b.  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

c.  $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} dx$

d.  $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx$

2. Aproxime las siguientes integrales por medio de cuadratura gaussiana con  $n = 2$  y compare sus resultados para los valores exactos de las integrales.

a.  $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx$

b.  $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} dx$

c.  $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$

d.  $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 dx$

3. Repita el ejercicio 1 con  $n = 3$ .
4. Repita el ejercicio 2 con  $n = 3$ .
5. Repita el ejercicio 1 con  $n = 4$ .
6. Repita el ejercicio 2 con  $n = 4$ .
7. Repita el ejercicio 1 con  $n = 5$ .
8. Repita el ejercicio 2 con  $n = 5$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

9. Aproxime la longitud de la gráfica de la elipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  en el primer cuadrante mediante cuadratura gaussiana con  $n = 5$ . Determine el error en la aproximación dado que la longitud real es 3.7437137.
10. Utilice la cuadratura gaussiana para aproximar la integral

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx,$$

considerada en la aplicación con que se inicio este capítulo. Para la aproximación, divida el intervalo  $[0, 48]$  en 16 subintervalos y sume las aproximaciones obtenidas a través de la cuadratura gaussiana con  $n = 5$  para cada uno de los subintervalos. ¿Cómo se compara la aproximación con el valor real de la integral?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Determine las constantes  $a, b, c$  y  $d$  que producirá una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

que tiene un grado de precisión de tres.

12. Determine las constantes  $a, b, c$  y  $d$  que producirán una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

que tiene grado de precisión cuatro.

13. Verifique las entradas para los valores de  $n = 2$  y  $3$  en la tabla 4.12 en la página 172 al encontrar las raíces de los polinomios de Legendre respectivos y utilice las ecuaciones anteriores a esta tabla para encontrar los coeficientes relacionados con los valores.
14. Muestre que la fórmula  $Q(P) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$  no tiene grado de precisión superior a  $2n - 1$ , independientemente de la elección de  $c_1, \dots, c_n$  y  $x_1, \dots, x_n$ . [Sugerencia: Construya un polinomio que tenga una raíz doble en cada una de las  $x_i$ ].

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa las diferencias y similitudes entre la cuadratura gaussiana y el método de cuadratura gaussiana adaptable conocido como cuadratura de Gauss-Kronrod.
2. Describa las diferencias y similitudes entre la cuadratura de Hermite-Gauss y la cuadratura gaussiana.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.8

1. Utilice el algoritmo 4.4 con  $n = m = 4$  para aproximar las siguientes integrales dobles y compare los resultados con las respuestas exactas.

a.  $\int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy dx$

b.  $\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} e^{y-x} dy dx$

c.  $\int_2^{2.2} \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$

d.  $\int_1^{1.5} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y}) dy dx$

2. Encuentre los valores más pequeños para  $n = m$  de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.4 para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de  $10^{-6}$  del valor real.
3. Utilice el algoritmo 4.5 con  $n = m = 2$  para aproximar las integrales en el ejercicio 1 y compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio 1.
4. Encuentre los valores más pequeños para  $n = m$  de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.5 para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de  $10^{-6}$  del valor real. No continúe más allá de  $n = m = 5$ . Compare el número de evaluaciones funcionales requeridas con el número requerido en el ejercicio 2.
5. Utilice el algoritmo 4.4 con (i)  $n = 4, m = 8$ , (ii)  $n = 8, m = 4$ , y (iii)  $n = m = 6$  para aproximar las siguientes integrales dobles y compare los resultados con las respuestas exactas.

a.  $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} (2y \sin x + \cos^2 x) dy dx$

b.  $\int_1^e \int_1^x \ln xy dy dx$

c.  $\int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx$

d.  $\int_0^1 \int_x^{2x} (y^2 + x^3) dy dx$

e.  $\int_0^\pi \int_0^x \cos x dy dx$

f.  $\int_0^\pi \int_0^x \cos y dy dx$

g.  $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy dx$

h.  $\int_{-\pi}^{3\pi/2} \int_0^{2\pi} (y \sin x + x \cos y) dy dx$

6. Encuentre los valores más pequeños para  $n = m$  de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.4 para aproximar las integrales en el ejercicio 5 dentro de  $10^{-6}$  del valor real.
7. Utilice el algoritmo 4.5 con (i)  $n = m = 3$ , (ii)  $n = 3, m = 4$ , (iii)  $n = 4, m = 3$ , y (iv)  $n = m = 4$  para aproximar las integrales en el ejercicio 5.
8. Utilice el algoritmo 4.5 con  $n = m = 5$  para aproximar las integrales en el ejercicio 5. Compare el número de evaluaciones funcionales requeridas con el número requerido en el ejercicio 6.
9. Utilice el algoritmo 4.4 con  $n = m = 14$  y el algoritmo 4.5 con  $n = m = 4$  para aproximar

$$\iint_R e^{-(x+y)} dA$$

para la región  $R$  en el plano limitado por las curvas  $y = x^2$  y  $y = \sqrt{x}$ .

10. Utilice el algoritmo 4.4 para aproximar

$$\iint_R \sqrt{xy + y^2} dA,$$

donde  $R$  es la región en el plano limitada por las rectas  $x + y = 6$ ,  $3y - x = 2$ , y  $3x - y = 2$ . Primero subdivida  $R$  en dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  en donde se pueda aplicar el algoritmo 4.4. Utilice  $n = m = 6$  tanto en  $R_1$  y  $R_2$ .

11. Utilice el algoritmo 4.6 con  $n = m = p = 2$  para aproximar las siguientes integrales triples y compare los resultados con las respuestas exactas.

a.  $\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z} dz dy dx$

b.  $\int_0^1 \int_x^1 \int_0^y y^2 z dz dy dx$

c.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} y dz dy dx$

d.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} z dz dy dx$

$$\text{e. } \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{xy} \frac{1}{y} \sin \frac{z}{y} dz dy dx \quad \text{f. } \int_0^1 \int_0^1 \int_{-xy}^{xy} e^{x^2+y^2} dz dy dx$$

12. Repita el ejercicio 11 con  $n = m = p = 3$ .
13. Repita el ejercicio 11 con  $n = m = p = 4$ .
14. Repita el ejercicio 11 con  $n = m = p = 5$ .
15. Utilice el algoritmo 4.6 con  $n = m = p = 5$  para aproximar

$$\iiint_S \sqrt{xyz} dV,$$

donde  $S$  es la región en el primer octante limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , y el plano  $x + y + z = 8$ . ¿Cuántas evaluaciones funcionales se requieren para la aproximación?

16. Utilice el algoritmo 4.6 con  $n = m = p = 4$  para aproximar

$$\iiint_S xy \sin(yz) dV,$$

donde  $S$  es el sólido limitado por los planos coordenados y los planos  $x = \pi$ ,  $y = \pi/2$  y  $z = \pi/3$ . Compare esta aproximación con el resultado exacto.

## EJERCICIOS APLICADOS

17. Una lámina plana es una hoja delgada de masa distribuida de manera continua. Si  $\sigma$  es una función que describe la densidad de una lámina que tiene la forma de una región  $R$  en el plano  $xy$ , entonces, el centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y})$  de la lámina es

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \sigma(x, y) dA}{\iint_R \sigma(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \sigma(x, y) dA}{\iint_R \sigma(x, y) dA}.$$

Utilice el algoritmo 4.4 con  $n = m = 14$  para encontrar el centro de masa de la lámina descrita mediante  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$  con función de densidad  $\sigma(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ . Compare la aproximación con el resultado exacto.

18. Repita el ejercicio 17 utilizando el algoritmo 4.5 con  $n = m = 5$ .
19. El área de la superficie descrita mediante  $z = f(x, y)$  para  $(x, y)$  en  $R$  está dada por

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA.$$

Utilice el algoritmo 4.4 con  $n = m = 8$  para encontrar una aproximación del área de la superficie en el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$  que se encuentra arriba de la región en el plano descrito por  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

20. Repita el ejercicio 19 usando el algoritmo 4.5 con  $n = m = 4$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mayor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de éstos es el algoritmo Metropolis-Hastings. Compare y contraste este método con el método de integral doble de Simpson.
2. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mejor precisión que los analizados en esta sección. Uno de ellos es el algoritmo Metropolis-Hastings. Compare y contraste este método con el método de integral triple de Simpson.
3. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mejor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de estos métodos es el algoritmo de muestreo de Gibb. Compare y contraste este método con el método de integral doble de Simpson.

4. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Pueden producir mayor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de ellos es el algoritmo de muestreo de Gibb. Compare y contraste este método con el método de integral triple de Simpson.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.9

1. Utilice la regla compuesta de Simpson y los valores dados de  $n$  para aproximar las siguientes integrales impropias.

a.  $\int_0^1 x^{-1/4} \sin x \, dx, \quad n = 4$

b.  $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}} \, dx, \quad n = 6$

c.  $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x-1)^{1/5}} \, dx, \quad n = 8$

d.  $\int_0^1 \frac{\cos 2x}{x^{1/3}} \, dx, \quad n = 6$

2. Utilice la regla compuesta de Simpson y los valores dados de  $n$  para aproximar las siguientes integrales impropias.

a.  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx, \quad n = 6$

b.  $\int_0^2 \frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \, dx, \quad n = 8$

3. Utilice la transformación  $t = x^{-1}$  y, a continuación, la regla compuesta de Simpson y los valores dados de  $n$  para aproximar las siguientes integrales impropias.

a.  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 9} \, dx, \quad n = 4$

b.  $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx, \quad n = 4$

c.  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3} \, dx, \quad n = 6$

d.  $\int_1^\infty x^{-4} \sin x \, dx, \quad n = 6$

4. La integral impropia  $\int_0^\infty f(x) \, dx$  no se puede convertir en una integral con límites finitos mediante la sustitución  $t = 1/x$  porque el límite en cero se vuelve infinito. El problema se resuelve al escribir primero  $\int_0^\infty f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^\infty f(x) \, dx$ . Aplique esta técnica para aproximar las siguientes integrales impropias con una precisión de  $10^{-6}$ .

a.  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx$

b.  $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx$

## EJERCICIOS APLICADOS

5. Suponga que un cuerpo de masa  $m$  viaja verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra. Si se omite toda la resistencia excepto la gravedad, la velocidad de escape  $v$  está determinada por

$$v^2 = 2gR \int_1^\infty z^{-2} \, dz, \quad \text{donde } z = \frac{x}{R},$$

$R = 3960$  millas es el radio de la Tierra y  $g = 0.00609 \text{ mi/s}^2$  es la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra. Aproxime la velocidad de escape  $v$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

6. Los polinomios de Laguerre  $\{L_0(x), L_1(x), \dots\}$  forman un conjunto ortogonal en  $[0, \infty)$  y satisfacen  $\int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x) \, dx = 0$ , para  $i \neq j$ . (Consulte la sección 8.2.) El polinomio  $L_n(x)$  tiene  $n$  ceros diferentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $[0, \infty)$ . Si

$$c_{n,i} = \int_0^\infty e^{-x} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx.$$

Muestre que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n c_{n,i} f(x_i)$$

tiene un grado de precisión  $2n - 1$ . [Sugerencia: Siga los pasos en la demostración del teorema 4.7.]

7. Los polinomios de Laguerre  $L_0(x) = 1$ ,  $L_1(x) = 1 - x$ ,  $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ , y  $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$  se deducen en el ejercicio 11 de la sección 8.2. Como se muestra en el ejercicio 6, estos polinomios son útiles para aproximar las integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = 0.$$

- a. Deduzca la fórmula de cuadratura mediante  $n = 2$  y los ceros de  $L_2(x)$ .  
b. Deduzca la fórmula de cuadratura mediante  $n = 3$  y los ceros de  $L_3(x)$ .  
8. Utilice las fórmulas de cuadratura derivadas en el ejercicio 7 para aproximar la integral

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

9. Utilice las fórmulas de cuadratura derivadas en el ejercicio 7 para aproximar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa la forma en la que se manejan las singularidades al aproximar las integrales impropias.
2. La eficiencia de la cuadratura adaptable disminuye considerablemente si la función tiene singularidades integrables en los extremos del intervalo. Esta situación puede requerir miles de iteraciones para disminuir el error de integración a un nivel aceptable. Analice la forma en la que la subrutina AutoGK-Singular resuelve este problema.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Proporcione una descripción general de la subrutina AutoGKSmooth encontrada en el paquete de software numérico ALGLIB.
2. Proporcione una descripción general de la subrutina AutoGKSmoothW encontrada en el paquete de software numérico ALGLIB.
3. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en MAPLE. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar MAPLE?
4. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en MATLAB. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar MATLAB?
5. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en Mathematica. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar Mathematica?

## CONCEPTOS CLAVE

Cuadratura gaussiana	Fórmulas de diferencia	Polinomios de Legendre
Cuadratura numérica	Grado de precisión	Regla compuesta de Simpson
Diferenciación numérica	Integración de Romberg	Regla de Simpson
Error de redondeo	Integración numérica	Regla trapezoidal
Extrapolación de Richardson	Integrales impropias	Regla trapezoidal compuesta
Fórmulas abiertas de Newton-Cotes	Medición de precisión	Singularidad
Fórmulas cerradas de Newton-Cotes	Métodos de cuadratura adaptable	
	Métodos de integral múltiple	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos integrales de aproximación de funciones de una, dos o tres variables y la aproximación de las derivadas de una función de una sola variable real.

Se estudió la regla de punto medio, la regla trapezoidal y la regla de Simpson para introducir las técnicas y el análisis de error de los métodos de cuadratura. Descubrimos que la regla compuesta de Simpson era fácil de utilizar y que produce aproximaciones precisas a menos que la función oscile en un subintervalo del intervalo de integración. Descubrimos que es posible usar la cuadratura adaptable si se sospecha que la función tiene una conducta oscilatoria. También observamos que mediante la cuadratura gaussiana podemos obtener la capacidad de minimizar el número de nodos mientras mantenemos la precisión. La integración de Romberg se introdujo para aprovechar la aplicación fácil de la regla compuesta trapezoidal y la extrapolación.

Para leer más sobre integración numérica, recomendamos los libros de Engels [E] y de Davis y Rabinowitz [DR]. Para más información sobre cuadratura gaussiana, consulte Stroud y Secrest [StS]. Los libros sobre integrales múltiples incluyen los de Stroud [Stro] y de Sloan y Joe [SJ].



# Capítulo 5

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

1. Use el teorema 5.4 para mostrar que cada uno de los siguientes problemas tiene una sola solución y encuéntrela.
  - a.  $y' = y \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ .
  - b.  $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ .
  - c.  $y' = -\frac{2}{t}y + t^2 e^t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = \sqrt{2}e$ .
  - d.  $y' = \frac{4t^3 y}{1+t^4}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Muestre que cada uno de los siguientes problemas de valor inicial tiene una única solución y encuéntrela. ¿El teorema 5.4 se puede aplicar en cada caso?
  - a.  $y' = e^{t-y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ .
  - b.  $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ .
  - c.  $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 2$ .
  - d.  $y' = \frac{ty+y}{ty+t}$ ,  $2 \leq t \leq 4$ ,  $dy(2) = 4$ .
3. Para cada selección de  $f(t, y)$  proporcionada en las partes a)–d):
  - i. ¿ $f$  satisface la condición de Lipschitz en  $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ ?
  - ii. ¿El teorema 5.6 se puede usar para mostrar que el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

- a.  $f(t, y) = t^2 y + 1$    b.  $f(t, y) = ty$    c.  $f(t, y) = 1 - y$    d.  $f(t, y) = -ty + \frac{4t}{y}$

4. Para cada selección de  $f(t, y)$  proporcionada en las partes a)–d):
  - i. ¿ $f$  satisface la condición de Lipschitz en  $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ ?
  - ii. ¿El teorema 5.6 se puede utilizar para mostrar que el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

- a.  $f(t, y) = e^{t-y}$    c.  $f(t, y) = \cos(yt)$   
b.  $f(t, y) = \frac{1+y}{1+t}$    d.  $f(t, y) = \frac{y^2}{1+t}$

5. Para los siguientes problemas de valor inicial, muestre que la ecuación dada define una solución de manera implícita. Aproxime  $y(2)$  con el método de Newton.
  - a.  $y' = -\frac{y^3 + y}{(3y^2 + 1)t}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ ;  $y^3 t + yt = 2$
  - b.  $y' = -\frac{y \cos t + 2te^y}{\sin t + t^2 e^y + 2}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ;  $y \sin t + t^2 e^y + 2y = 1$
6. Suponga que la perturbación  $\delta(t)$  es proporcional para  $t$ , es decir,  $\delta(t) = \delta t$  para alguna constante  $\delta$ . Muestre directamente que los siguientes problemas de valor inicial están bien planteados.
  - a.  $y' = 1 - y$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0$    b.  $y' = t + y$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = -1$
  - c.  $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 0$    d.  $y' = -\frac{2}{t}y + t^2 e^t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = \sqrt{2}e$

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que cualquier punto en la recta que pasa por  $(t_1, y_1)$  y  $(t_2, y_2)$  corresponde a  $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$  para alguna elección de  $\lambda$ .
8. Pruebe el teorema 5.3 al aplicar el teorema de valor medio 1.8 para  $f(t, y)$ , al mantener  $t$  fija.
9. Muestre que, para cualquier constante  $a$  y  $b$ , el conjunto  $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  es convexo.
10. El método de Picard para resolver el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

se describe como sigue: Sea  $y_0(t) = \alpha$  para cada  $t$  en  $[a, b]$ . Defina una sucesión  $\{y_k(t)\}$  de funciones mediante

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

- a. Integre  $y' = f(t, y(t))$  y utilice la condición inicial para deducir el método de Picard.
- b. Genere  $y_0(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , y  $y_3(t)$  para el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

- c. Compare el resultado en la parte b) para las series de Maclaurin de la solución real  $y(t) = t + e^{-t}$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Los métodos numéricos siempre se preocupan por resolver problemas perturbados ya que el error de redondeo introducido en la representación perturba el problema original. ¿Cómo puede decidir si su aproximación para un problema perturbado aproxima con precisión la solución al problema original?
2. El siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

en donde  $f$  es la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen}(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

es continua, pero no es Lipschitz alrededor de  $(0,0)$ . ¿Por qué la solución es única?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

1. Use el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.
  - a.  $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.5$
  - b.  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ , con  $h = 0.5$
  - c.  $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$
  - d.  $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.25$
2. Utilice el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.
  - a.  $y' = e^{t-y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.5$
  - b.  $y' = \frac{1+t}{1+y}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.5$
  - c.  $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 2$ , con  $h = 0.25$
  - d.  $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$

3. Las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 1 se proporcionan aquí. Compare el error real en cada paso con la cota de error.

a.  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

b.  $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

c.  $y(t) = t \ln t + 2t$

d.  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$

4. Las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 2 se proporcionan aquí. Compare el error real en cada paso para con la cota de error si se puede aplicar el teorema 5.9.

a.  $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$

b.  $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

c.  $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2})^2$

d.  $y(t) = \frac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. Utilice el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$

b.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ , con  $h = 0.2$

c.  $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = -2$ , con  $h = 0.2$

d.  $y' = -5y + 5t^2 + 2t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ , con  $h = 0.1$

6. Use el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a.  $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$

b.  $y' = \frac{y^2}{1+t}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ , con  $h = 0.1$

c.  $y' = t^{-1}(y^2 + y)$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $h = 0.2$

d.  $y' = -ty + 4ty^{-1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$

7. Aquí se dan las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 5. Calcule el error real en las aproximaciones del ejercicio 5.

a.  $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$

b.  $y(t) = t \tan(\ln t)$

c.  $y(t) = -3 + \frac{2}{1 + e^{-2t}}$

d.  $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$

8. Aquí se dan las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 6. Calcule el error real en las aproximaciones del ejercicio 6.

a.  $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$

b.  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$

c.  $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$

d.  $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t^2}}$

9. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta  $y(t) = t^2(e^t - e)$ :

- a. Use el método de Euler con  $h = 0.1$  para aproximar la solución y compárelos con los valores reales de  $y$ .

- b. Utilice las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de  $y$ , y compárelos con los valores reales.

i.  $y(1.04)$

ii.  $y(1.55)$

iii.  $y(1.97)$

- c. Calcule el valor de  $h$  necesario para  $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$ , por medio de la ecuación (5.10).

10. Dado el problema del valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1,$$

con solución exacta  $y(t) = -1/t$ :

- a. Use el método de Euler con  $h = 0.05$  para aproximar la solución y compárelos con los valores reales de  $y$ .
- b. Utilice las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de  $y$ , y compárelos con los valores reales.
  - i.  $y(1.052)$
  - ii.  $y(1.555)$
  - iii.  $y(1.978)$
- c. Calcule el valor de  $h$  necesario para  $|y(t_i) - w_i| \leq 0.05$ , por medio de la ecuación (5.10).

11. Dado el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad y(0) = 1,$$

con solución exacta  $y(t) = e^{-t} + t$ :

- a. Aproxime  $y(5)$  usando el método de Euler con  $h = 0.2$ ,  $h = 0.1$ , y  $h = 0.05$ .
  - b. Determine el valor óptimo de  $h$  para usarlo en el cálculo de  $y(5)$ , al suponer que  $\delta = 10^{-6}$  y que la ecuación (5.14) es válida.
12. Considere el problema de valor inicial

$$y' = -10y, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

que tiene solución  $y(t) = e^{-10t}$ . ¿Qué pasa cuando se aplica el método de Euler a este problema con  $h = 0.1$ ? ¿Esta conducta viola el teorema 5.9?

13. Utilice los resultados del ejercicio 5 y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de  $y(t)$ . Compare las aproximaciones asignadas para los valores reales obtenidos mediante las funciones determinadas en el ejercicio 7.

- a.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
- b.  $y(2.1)$  y  $y(2.75)$
- c.  $y(1.4)$  y  $y(1.93)$
- d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$

14. Utilice los resultados del ejercicio 6 y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de  $y(t)$ . Compare las aproximaciones logradas para los valores reales obtenidos mediante las funciones determinadas en el ejercicio 8.

- a.  $y(0.25)$  y  $y(0.93)$
- b.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
- c.  $y(2.10)$  y  $y(2.75)$
- d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$

15. Sea  $E(h) = \frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}$ .

- a. Para el problema de valor inicial

$$y' = -y + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$$

calcule el valor de  $h$  para minimizar  $E(h)$ . Suponga  $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$  si usará aritmética de  $n$  dígitos en la parte c).

- b. Para la  $h$  óptima calculada en la parte a), use la ecuación (5.13) para calcular el error mínimo obtenible.
- c. Compare el error real obtenido con  $h = 0.1$  y  $h = 0.01$  para el error mínimo en la parte b). ¿Puede explicar los resultados?

## EJERCICIOS APLICADOS

16. En un circuito con voltaje impreso  $\mathcal{E}$  que tiene una resistencia  $R$ , inductancia  $L$  y capacitancia  $C$  en paralelo, la corriente  $i$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{L} \mathcal{E}.$$

Suponga que  $C = 0.3$  faradios,  $R = 1.4$  ohms y  $L = 1.7$  henrios, y que el voltaje está determinado por

$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t} \sin(2t - \pi).$$

Si  $i(0) = 0$ , encuentre la corriente  $i$  para los valores  $t = 0.1j$ , donde  $j = 0, 1, \dots, 100$ .

17. En un libro titulado *Looking at History Through Mathematics (Observando la historia a través de las matemáticas)*, Rashevsky [Ra], pp. 103–110, propone un modelo para un problema relacionado con la producción de inconformistas en la sociedad. Suponga que una sociedad tiene una población de  $x(t)$  individuos en el tiempo  $t$ , en años, y que todos los inconformistas que se unen a otros inconformistas tienen descendencia que también es inconformista, mientras una proporción fija  $r$  de todos los otros descendientes también son inconformistas. Si se supone que los índices de natalidad y mortalidad son las constantes  $b$  y  $d$ , respectivamente, y si los conformistas y los inconformistas se unen de manera aleatoria, el problema se puede expresar con las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b - d)x(t) \quad \text{y} \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b - d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)),$$

donde  $x_n(t)$  denota el número de inconformistas en la población en el tiempo  $t$ .

- a. Suponga que se introduce la variable  $p(t) = x_n(t)/x(t)$  para representar la proporción de inconformistas en la sociedad en el tiempo  $t$ . Muestre que las ecuaciones pueden combinarse y simplificarse en la ecuación diferencial individual

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t)).$$

- b. Al suponer que  $p(0) = 0.01$ ,  $b = 0.02$ ,  $d = 0.015$ , y  $r = 0.1$ , aproximan la solución  $p(t)$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 50$ , cuando el tamaño de paso es  $h = 1$  año.
- c. Resuelva la ecuación diferencial  $p(t)$  de manera exacta y compare su resultado en la parte b) cuando  $t = 50$  con el valor exacto en ese tiempo.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Proporcione una descripción general del método de Euler mediante el sitio web <http://www.mathscoop.com/calculus/differential-equations/euler-method.php> como su punto de inicio. Observe cuidadosamente la medida del error. ¿Por qué este método no es práctico?
- Describa la manera en la que se puede implementar el método de Euler en una hoja de cálculo, como Excel.
- Use el método de Euler para aproximar una solución para el problema de valor inicial  $dy/dt = e^t \cos t$  para  $t$  entre 0 y 5. Inicie con un tamaño de paso de 0.25, a continuación pruebe el tamaño de paso de 0.1 o incluso 0.05 o menor. Utilice una hoja de cálculo o un sistema de álgebra para computadora para los cálculos. ¿La solución es la que esperaba? ¿Qué está pasando y por qué?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.3

- Use el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.
  - $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.5$
  - $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ , con  $h = 0.5$
  - $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$
  - $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.25$
- Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.
  - $y' = e^{t-y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.5$
  - $y' = \frac{1+t}{1+y}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.5$
  - $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 2$ , con  $h = 0.25$
  - $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$

3. Repita el ejercicio 1 con el método de Taylor de orden 4.
4. Repita el ejercicio 2 con el método de Taylor de orden 4.
5. Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a.  $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \leq t \leq 1.2, \quad y(1) = 1, \quad \text{con } h = 0.1$

b.  $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad \text{con } h = 0.5$

c.  $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = -2, \quad \text{con } h = 0.5$

d.  $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad \text{con } h = 0.25$

6. Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a.  $y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad \text{con } h = 0.1$

b.  $y' = \frac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1}, \quad \text{con } h = 0.1$

c.  $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = -2, \quad \text{con } h = 0.2$

d.  $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad \text{con } h = 0.1$

7. Repita el ejercicio 5 con el método de Taylor de orden 4.
8. Repita el ejercicio 6 con el método de Taylor de orden 4.
9. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta  $y(t) = t^2(e^t - e)$ :

- a. Utilice el método de Taylor de orden 2 con  $h = 0.1$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- b. Use las respuestas generadas en la parte a) e interpolación lineal para aproximar  $y$  en los siguientes valores y compárelos con los valores reales de  $y$ .

i.  $y(1.04)$

ii.  $y(1.55)$

iii.  $y(1.97)$

- c. Utilice el método de Taylor de orden 4 con  $h = 0.1$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- d. Use las respuestas generadas en la parte c) y la interpolación cúbica por tramos de Hermite para aproximar  $y$  en los siguientes valores y compárelos con los valores reales de  $y$ .

i.  $y(1.04)$

ii.  $y(1.55)$

iii.  $y(1.97)$

10. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1,$$

con solución exacta  $y(t) = -1/t$ :

- a. Use el método de Taylor de orden 2 con  $h = 0.05$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- b. Use las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar  $y$  en los siguientes valores, y compárelos con los valores reales de  $y$ .

i.  $y(1.052)$

ii.  $y(1.555)$

iii.  $y(1.978)$

- c. Utilice el método de Taylor de orden 4 con  $h = 0.05$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- d. Use las respuestas generadas en la parte c) y la interpolación cúbica por tramos de Hermite para aproximar  $y$  en los siguientes valores, y compárelos con los valores reales de  $y$ .

i.  $y(1.052)$

ii.  $y(1.555)$

iii.  $y(1.978)$

11. Utilice el método de Taylor de orden 2 con  $h = 0.1$  para aproximar la solución de

$$y' = 1 + t \sin(ty), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.$$

## EJERCICIOS APLICADOS

12. Un proyectil de masa  $m = 0.11$  kg disparado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial  $v(0) = 8$  m/s desacelera debido a la fuerza de gravedad  $F_g = -mg$ , y debido a la resistencia del aire,  $F_r = -kv|v|$ , donde  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> y  $k = 0.002$  kg/m. La ecuación diferencial para la velocidad  $v$  está determinada por

$$mv' = -mg - kv|v|.$$

- Encuentre la velocidad después de 0.1, 0.2, ..., 1.0 s.
  - Para la décima de segundo más cercana, determine cuándo alcanza el proyectil su máxima altura y comienza a caer.
13. Un tanque grande almacena 1000 galones de agua que contienen 50 libras de sal disuelta. Suponga que una solución de agua salada con una concentración de 0.02 libras de sal por galón de agua fluye hacia el tanque a una velocidad de 5 galones por minuto. La solución en el tanque está bien agitada y fluye fuera de un orificio en el fondo del tanque a una velocidad constante de 3 galones por minuto.

Sea  $x(t)$  la cantidad de sal en libras en el tanque en el tiempo  $t$ , donde  $x(0) = 50$  libras. La ecuación diferencial que proporciona la razón de cambio  $x'(t)$  de sal medida en libras por minuto en el tanque es

$$x'(t) = 0.1 - \frac{3x(t)}{1000 + 2t}.$$

- Encuentre el momento en el que tanque almacenará 1 010 galones de agua salada.
- Con el método de Taylor de orden 4 con  $h = 0.5$ , encuentre la concentración de sal cuando el tanque almacena 1 010 galones de agua.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Analice las similitudes y diferencias entre el método de Euler y el método de Taylor. ¿Un método es mejor que el otro?
- Use el método de Taylor de orden cuatro para aproximar la solución al problema de valor inicial  $dy/dt = e^t \sin(t)$ , para  $t$  entre 0 y 5. Inicie con un tamaño de paso de 0.25, a continuación pruebe un tamaño de paso de 0.1 y 0.025. Use una hoja de cálculo o un sistema de álgebra para computadora para los cálculos. ¿La solución hace lo que usted esperaba? ¿Qué está pasando y por qué?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

- Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$ .
  - $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
- Use el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = e^{t-y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$ .
  - $y' = \frac{1+t}{1+y}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$ .
  - $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 2$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2})^2$ .
  - $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = \frac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$ .

3. Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
  - b.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - c.  $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = -2$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
  - d.  $y' = -5y + 5t^2 + 2t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$ .
4. Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$ .
  - b.  $y' = \frac{y^2}{1+t}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$ .
  - c.  $y' = \frac{(y^2+y)}{t}$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$ .
  - d.  $y' = -ty + 4t/y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t^2}}$ .
5. Repita el ejercicio 1 usando el método de punto medio.
6. Repita el ejercicio 2 usando el método de punto medio.
7. Repita el ejercicio 3 usando el método de punto medio.
8. Repita el ejercicio 4 usando el método de punto medio.
9. Repita el ejercicio 1 usando el método de Heun.
10. Repita el ejercicio 2 usando el método de Heun.
11. Repita el ejercicio 3 usando el método de Heun.
12. Repita el ejercicio 4 usando el método de Heun.
13. Repita el ejercicio 1 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
14. Repita el ejercicio 2 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
15. Repita el ejercicio 3 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
16. Repita el ejercicio 4 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
17. Use los resultados del ejercicio 3 y la interpolación lineal para aproximar valores de  $y(t)$  y compare los resultados para los valores reales.
  - a.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
  - b.  $y(2.1)$  y  $y(2.75)$
  - c.  $y(1.3)$  y  $y(1.93)$
  - d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$
18. Utilice los resultados del ejercicio 4 y la interpolación lineal para aproximar valores de  $y(t)$  y compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$
  - b.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
  - c.  $y(1.3)$  y  $y(2.93)$
  - d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$
19. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 7.
20. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 8.
21. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 11.
22. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 12.
23. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 15.
24. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 16.
25. Use los resultados del ejercicio 15 y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los valores de  $y(t)$ , y compare las aproximaciones para los valores reales.
  - a.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
  - b.  $y(2.1)$  y  $y(2.75)$
  - c.  $y(1.3)$  y  $y(1.93)$
  - d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$



26. Utilice los resultados del ejercicio 16 y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los valores de  $y(t)$  y compare las aproximaciones para los valores reales.
- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a. $y(0.54)$ y $y(0.94)$ | b. $y(1.25)$ y $y(1.93)$ |
| c. $y(1.3)$ y $y(2.93)$  | d. $y(0.54)$ y $y(0.94)$ |

## EJERCICIOS APLICADOS

27. La reacción química irreversible en la que dos moléculas de dicromato de potasio sólido ( $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ), dos moléculas de agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ), y tres átomos de sulfuro sólido ( $\text{S}$ ) se combinan para producir tres moléculas del gas de dióxido de sulfuro ( $\text{SO}_2$ ), cuatro moléculas de hidróxido de potasio sólido ( $\text{KOH}$ ), y dos moléculas de óxido crómico sólido ( $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ) se puede representar de manera simbólica mediante la ecuación estequiométrica:



Si  $n_1$  moléculas de  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ,  $n_2$  moléculas de  $\text{H}_2\text{O}$ , y  $n_3$  moléculas de  $\text{S}$  están originalmente disponibles, la siguiente ecuación diferencial describe la cantidad  $x(t)$  de  $\text{KOH}$  después del tiempo  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = k \left( n_1 - \frac{x}{2} \right)^2 \left( n_2 - \frac{x}{2} \right)^2 \left( n_3 - \frac{3x}{4} \right)^3,$$

donde  $k$  es la velocidad constante de la reacción. Si  $k = 6.22 \times 10^{-19}$ ,  $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$ , y  $n_3 = 3 \times 10^3$ , use el método Runge-Kutta de orden 4 para determinar la forma en la que muchas unidades de hidróxido de potasio se habrán formado después de 0.2 s.

28. El agua fluye desde un tanque cónico invertido con un orificio circular a una velocidad de

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{x}}{A(x)},$$

donde  $r$  es el radio del orificio,  $x$  es la altura del nivel de líquido desde el vértice del cono y  $A(x)$  es el área de la sección transversal del tanque  $x$  unidades por encima del orificio. Suponga que  $r = 0.1$  pies,  $g = 32.1$  pies/s<sup>2</sup>, y el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8 pies y un volumen inicial de  $512(\pi/3)$  pies<sup>3</sup>. Utilice el método Runge-Kutta de orden 4 para encontrar lo siguiente:

- El nivel de agua después de 10 min con  $h = 20$  s.
- Cuándo se vaciará el tanque, con una exactitud de 1 min.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

29. Muestre que el método de punto medio y el método modificado de Euler dan las mismas aproximaciones para el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

para cualquier selección de  $h$ . ¿Por qué esto es verdad?

30. Muestre que el método de diferencia

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_1 + \delta_2 f(t_i, w_i)),$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , no puede tener error de truncamiento local  $O(h^3)$  para ninguna elección de constantes  $a_1, a_2, \alpha_2$ , y  $\delta_2$ .

31. Muestre que el método de Heun se puede expresar en forma de diferencia, similar al método Runge-Kutta de orden cuatro, ya que

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{3}, w_i + \frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2}{3}k_2\right),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3),$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, N-1$ .

32. El método Runge-Kutta de orden 4 se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i)) \\ &\quad + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i))) \\ &\quad + \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i))))). \end{aligned}$$

Encuentre los valores de las constantes

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \text{ y } \gamma_7.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa el método de punto medio y el método modificado de Euler. ¿Cuál es la relación entre ellos?
2. En muchos de los métodos analizados hasta ahora, conforme  $h$  disminuye, los cálculos aumentan, pero son más precisos. Sin embargo, disminuir demasiado  $h$  podría causar errores significativos. ¿Por qué sucede esto?
3. Analice la manera en la que una hoja de cálculo se puede utilizar para implementar el método Runge-Kutta.
4. Analice las diferencias entre el método Runge-Kutta y el método de Euler.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

1. Use el método Runge-Kutta-Fehlberg con tolerancia  $TOL = 10^{-4}$ ,  $h_{\max} = 0.25$ , y  $h_{\min} = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - b.  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ; solución real  $y(t) = t + 1/(1 - t)$ .
  - c.  $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - d.  $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
2. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.
  - a.  $y' = (y/t)^2 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 1.2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h_{\max} = 0.05$  y  $h_{\min} = 0.02$ .
  - b.  $y' = \sin t + e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h_{\max} = 0.25$  y  $h_{\min} = 0.02$ .
  - c.  $y' = (y^2 + y)/t$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $h_{\max} = 0.5$  y  $h_{\min} = 0.02$ .
  - d.  $y' = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h_{\max} = 0.5$  y  $h_{\min} = 0.02$ .
3. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg con tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ ,  $h_{\max} = 0.5$ , y  $h_{\min} = 0.05$  para aproximar las soluciones a los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = 1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
  - b.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - c.  $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = -2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
  - d.  $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ ; solución real  $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$ .

4. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg con  $TOL = 10^{-6}$ ,  $h_{máx} = 0.5$ , y  $h_{mín} = 0.05$  para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
- $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = (2t+1)/(t^2+1)$ .
  - $y' = \frac{y^2}{1+t}$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ ; solución real  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$ .
  - $y' = -ty + 4t/y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t^2}}$ .
  - $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 4$ ,  $y(2) = 2$ ; solución real  $y(t) = (t-2 + \sqrt{2}e^{-t/2})^2$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

5. En la teoría de la propagación de enfermedad contagiosa (consulte [Ba1] o [Ba2]), una ecuación diferencial relativamente fundamental se puede utilizar para predecir el número de individuos de la población infectados en cualquier tiempo, siempre que se hagan las suposiciones de simplificación adecuadas. En particular, suponga que todos los individuos en una población fija tienen la misma probabilidad de resultar infectados y, una vez que lo son, permanecen en ese estado. Suponga que  $x(t)$  denota el número de individuos susceptibles en el tiempo  $t$  y  $y(t)$  denota el número de individuos infectados. Es razonable suponer que la velocidad con que cambia el número de individuos infectados es proporcional al producto de  $x(t)$  y  $y(t)$  porque la velocidad depende tanto del número de individuos infectados como del número de individuos susceptibles presentes en ese tiempo. Si la población es suficientemente grande como para suponer que  $x(t)$  y  $y(t)$  son variables continuas, el problema se puede expresar como

$$y'(t) = kx(t)y(t),$$

donde  $k$  es una constante y  $x(t) + y(t) = m$ , la población total. Esta ecuación se puede reescribir para que contenga solamente  $y(t)$  como

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t).$$

- Suponiendo que  $m = 100\,000$ ,  $y(0) = 1000$ , que  $k = 2 \times 10^{-6}$ , y que el tiempo se mide en días, encuentre una aproximación para el número de individuos infectados al cabo de 30 días.
  - La ecuación diferencial en la parte a) recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* y se puede transformar en una ecuación diferencial lineal en  $u(t) = (y(t))^{-1}$ . Utilice esta técnica para encontrar la solución exacta para la ecuación, bajo las mismas suposiciones de la parte a) y compare el valor verdadero de  $y(t)$  con la aproximación aquí dada. ¿Qué es  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ? ¿Esto concuerda con su intuición?
6. En el ejercicio previo, todos los individuos infectados permanecieron en la población para propagar la enfermedad. Una propuesta más realista es introducir una tercera variable  $z(t)$  para representar el número de individuos retirados de la población afectada en un tiempo  $t$  determinado mediante aislamiento, recuperación e inmunidad consiguiente o muerte. Naturalmente, esto complica bastante el problema, pero se puede mostrar (consulte [Ba2]) que es posible proporcionar una solución aproximada de la forma

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{y} \quad y(t) = m - x(t) - z(t),$$

donde  $k_1$  es la rapidez de infección,  $k_2$  es la rapidez de aislamiento y  $z(t)$  se determina a partir de la ecuación diferencial

$$z'(t) = k_2 (m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)}).$$

Los autores no están conscientes de ninguna técnica para resolver este problema directamente, por lo que se debe aplicar un procedimiento numérico. Encuentre una aproximación para  $z(30)$ ,  $y(30)$ , y  $x(30)$ , al suponer que  $m = 100\,000$ ,  $x(0) = 99\,000$ ,  $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ , y  $k_2 = 10^{-4}$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. El método Runge-Kutta-Verner (consulte [Ve]) está basado en las fórmulas

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6 \quad \text{y}$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8.$$

donde

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right),$$

$$k_7 = hf\left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right),$$

y

$$k_8 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right).$$

El método de sexto orden  $\tilde{w}_{i+1}$  se usa para calcular el error en el método de quinto orden  $w_{i+1}$ . Construya un algoritmo similar al algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg y repita el ejercicio 3 con este nuevo método.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método Runge-Kutta-Fehlberg es adaptable, ¿Qué significa esto?
2. ¿Qué es el método RK56 y cómo difiere del método RKF45?
3. ¿Qué es el método Runge-Kutta-Marson y cómo difiere del método Runge-Kutta-Fehlberg?
4. ¿Qué es el cuadro de Butcher y cómo se relaciona con los métodos de Runge-Kutta?
5. El método Runge-Kutta-Fehlberg tiene dos métodos: uno de orden 4 y el otro de orden 5. Analice el cuadro ampliado de Butcher para cada uno.
6. Cuando se ha controlado el error, uno tiene una aproximación a partir de un método de orden 4 y otra a partir del método de orden 5. El procedimiento acepta la aproximación a partir del método de orden 4. ¿Por qué no aceptar la aproximación a partir del método de orden 5 en su lugar?
7. Un método Runge-Kutta se identifica de manera única mediante su cuadro de Butcher. Describa el cuadro de Butcher para el método Runge-Kutta-Verner descrito en el ejercicio 7.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.6

1. Use todos los métodos de Adams-Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - b.  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$ .
  - c.  $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - d.  $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .

2. Use todos los métodos de Adams–Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 1.5$ ,  $y(1) = 0$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - b.  $y' = \sin t + e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = 2 - \cos t - e^{-t}$ .
  - c.  $y' = \frac{y+1}{t}$ ,  $1 \leq t \leq 1.5$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = 2t - 1$ .
  - d.  $y' = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{3}t^3$ .
3. Use cada uno de los métodos de Adams–Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales obtenidos a partir del método Runge–Kutta de orden cuatro. Compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$ .
  - b.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - c.  $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = -2$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$ .
  - d.  $y' = -5y + 5t^2 + 2t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1/3$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$ .
4. Use cada uno de los métodos de Adams–Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales obtenidos a partir del método Runge–Kutta de orden cuatro. Compare los resultados con los valores reales.
  - a.  $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$  solución real  $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$ .
  - b.  $y' = \frac{y^2}{1+t}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$ , con  $h = 0.1$  solución real  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$ .
  - c.  $y' = (y^2 + y)/t$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $h = 0.2$  solución real  $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$ .
  - d.  $y' = -ty + 4t/y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.1$  solución real  $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$ .
5. Use todos los métodos de Adams–Moulton para aproximar las soluciones para los ejercicios 1a), 1c) y 1d). En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y resuelva de manera explícita para  $w_{i+1}$ . Compare los resultados con los valores reales.
6. Use todos los métodos de Adams–Moulton para aproximar las soluciones para los ejercicios 2b), 2c) y 2d). En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y resuelva de manera explícita para  $w_{i+1}$ . Compare los resultados con los valores reales.
7. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones para los problemas en el ejercicio 1.
8. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 2.
9. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 3.
10. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 4.
11. Use el método indicador corrector de Milne–Simpson para aproximar las soluciones a los problemas de valor inicial en el ejercicio 3.
12. Use el método indicador–corrector de Milne–Simpson para aproximar las soluciones a los problemas de valor inicial en el ejercicio 4.
13. El problema de valor inicial

$$y' = e^y, \quad 0 \leq t \leq 0.20, \quad y(0) = 1,$$

tiene la solución

$$y(t) = 1 - \ln(1 - et).$$

La aplicación del método Adams–Moulton de tres pasos en este problema es equivalente a encontrar el punto fijo  $w_{i+1}$  de

$$g(w) = w_i + \frac{h}{24} (9e^w + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}).$$

- a. Con  $h = 0.01$ , obtenga  $w_{i+1}$  por medio de iteración funcional para  $i = 2, \dots, 19$  usando los valores iniciales exactos  $w_0, w_1$ , y  $w_2$ . En cada paso, utilice  $w_i$  para aproximar inicialmente  $w_{i+1}$ .
- b. ¿El método de Newton acelera la convergencia sobre iteración funcional?

## EJERCICIOS APLICADOS

14. La ecuación diferencial de Gompertz

$$N'(t) = \alpha \ln \frac{K}{N(t)} N(t)$$

sirve como modelo para el crecimiento de tumores, donde  $N(t)$  es el número de células en un tumor en el tiempo  $t$ . El número máximo de células que puede estar respaldado es  $K$  y  $\alpha$  es la constante relacionada con la habilidad proliferativa de células.

En un tipo particular de cáncer,  $\alpha = 0.0439$ ,  $k = 12000$ , y  $t$  se mide en meses. En el tiempo ( $t = 0$ ) el tumor se detecta,  $N(0) = 4000$ . Con el método indicador-corrector de Adams con  $h = 0.5$ , encuentre el número de meses para que  $N(t) = 11000$  células, el cual es el número letal para este cáncer.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Cambie el algoritmo 5.4 de tal forma que el corrector se puede iterar para un número determinado  $p$  de iteraciones. Repita el ejercicio 9 con  $p = 2, 3$  y 4 iteraciones. ¿Qué elección de  $p$  da la mejor respuesta para cada problema de valor inicial?
16. a. Derive el método de dos pasos de Adams-Bashforth mediante la forma de Lagrange del polinomio de interpolación.  
b. Derive el método de dos pasos de Adams-Bashforth mediante la forma de diferencia regresiva de Newton del polinomio de interpolación.
17. Derive el método de tres pasos de Adams-Bashforth con el siguiente método. Establezca

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + ahf(t_i, y(t_i)) + bhf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + chf(t_{i-2}, y(t_{i-2})).$$

Amplíe  $y(t_{i+1})$ ,  $f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$  y  $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$  en la serie de Taylor sobre  $(t_i, y(t_i))$  y equipare los coeficientes de  $h$ ,  $h^2$  y  $h^3$  para obtener  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

18. Derive el método de dos pasos de Adams–Moulton y su error de truncamiento local por medio de una forma adecuada de un polinomio de interpolación.
19. Derive el método de Simpson al aplicar la regla de Simpson a la integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

20. Derive el método de Milne al aplicar la fórmula abierta de Newton-Cotes (4.29) a la integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

21. Verifique las entradas en la tabla 5.12 en la página 305.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método indicador-corrector de Adams-Bashforth/Adams-Moulton requiere cuatro valores iniciales, uno de los cuales se da mediante la condición inicial. Normalmente, los otros valores iniciales se obtienen a partir del método Runge-Kutta de orden 4. ¿El método mejoraría con el uso de valores iniciales de orden superior?
2. Considere la posibilidad de cambiar el orden de un método Adams-Bashforth con base en su representación de diferencia regresiva. ¿Eso se puede hacer de manera eficiente?
3. Considere el método indicador-corrector con base en el uso de un método de un paso para proporcionar el predictor para el método corrector implícito multipasos. ¿Esta es una combinación factible?
4. En un método indicador corrector, normalmente, existe solo una corrección por medio de un método implícito. Analice corregir más de una vez mediante la corrección anterior como una predicción nueva.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.7

- Use el algoritmo indicador-corrector del tamaño de paso variable de Adams con tolerancia  $TOL = 10^{-4}$ ,  $hmáx = 0.25$ , y  $hmín = 0.025$  para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados.
  - $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ; solución real  $y(t) = t + 1/(1 - t)$ .
  - $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
- Use el algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con tolerancia  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial:
  - $y' = (y/t)^2 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 1.2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $hmáx = 0.05$  y  $hmín = 0.01$ .
  - $y' = \sin t + e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.2$  y  $hmín = 0.01$ .
  - $y' = (1/t)(y^2 + y)$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $hmáx = 0.4$  y  $hmín = 0.01$ .
  - $y' = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.02$ .
- Use el algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ ,  $hmáx = 0.5$ , y  $hmín = 0.02$  para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados. Compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = 1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
  - $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = -2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
  - $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ ; solución real  $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$ .
- Use el algoritmo indicador-corrector del tamaño de paso variable de Adams con tolerancia  $TOL = 10^{-5}$ ,  $hmáx = 0.2$  y  $hmín = 0.02$  para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados. Compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1}$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = (2t + 1)/(t^2 + 1)$ .
  - $y' = \frac{y^2}{1 + t}$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ ; solución real  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t + 1)}$ .
  - $y' = -ty + \frac{4t}{y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$ .
  - $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 4$ ,  $y(2) = 2$ ; solución real  $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2} e^{-t/2})^2$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

- Un circuito eléctrico consiste en un capacitor de capacitancia constante de  $C = 1.1$  faradios que está en serie con un resistor de resistencia constante  $R_0 = 2.1$  ohms. Un voltaje  $\mathcal{E}(t) = 110 \sin t$  se aplica en el tiempo  $t = 0$ . Cuando el resistor se calienta, la resistencia se vuelve una función de la corriente  $i$ ,

$$R(t) = R_0 + ki, \quad \text{donde } k = 0.9,$$

y la ecuación diferencial para  $i(t)$  se convierte en

$$\left(1 + \frac{2k}{R_0}i\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{R_0 C}i = \frac{1}{R_0 C} \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Encuentre  $i(2)$ , al suponer que  $i(2) = 0$ .

- La temperatura dentro de una camioneta es  $T(0) = 100^\circ\text{F}$ , mientras la temperatura afuera es una constante  $M(t) = M_0 = 80^\circ$ . El propietario la aborda y configura el aire acondicionado en  $T_1 = 66^\circ$ . Con base en la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura  $T(t)$  en el tiempo  $t$  satisface la ecuación diferencial

$$T'(t) = K_1[M(t) - T(t)] + K_2[T_1 - T(t)],$$

donde las constantes  $K_1$  y  $K_2$  están basadas en las propiedades de la camioneta y del aire acondicionado. Suponga que  $K_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{hr}$  y  $K_2 = \frac{7}{2} \frac{1}{hr}$ . Encuentre cuánto tiempo tarda la temperatura en el interior de la camioneta en enfriarse a 70 °F. Utilice  $TOL = 0.1$ ,  $hmín = 0.01$ , y  $hmáx = 0.2$  en el método indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams.

7. Sea  $P(t)$  el número de individuos en una población en el tiempo  $t$ , medido en años. Si el índice de natalidad  $b$  es constante y el índice de mortalidad  $d$  es proporcional al tamaño de la población (debido a la superpoblación), entonces el índice de crecimiento de la población está dado por la **ecuación logística**

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k[P(t)]^2,$$

donde  $d = kP(t)$ . Suponga  $P(0) = 50,976$ ,  $b = 2.9 \times 10^{-2}$ , y  $k = 1.4 \times 10^{-7}$ . Encuentre la población después de cinco años.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

8. Construya un algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con base en el método Adams-Bashforth de cinco pasos y el método Adams-Moulton de cuatro pasos. Repita el ejercicio 3 con este método nuevo.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Analice la variación del orden además de la variación del tamaño de paso en un método indicador corrector con base en la representación de diferencia regresiva.
- Analice la posibilidad de un método indicador-corrector de tamaño de paso variable que sólo permite reducir a la mitad o duplicar el tamaño de paso. ¿Esto es más fácil de implementar que el algoritmo 5.5?
- Analice el error implicado en un método indicador-corrector de Milne-Simpson con valores iniciales Runge-Kutta en comparación con el error relacionado con el método indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams por medio de valores iniciales Runge-Kutta.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.8

- Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia  $TOL = 10^{-4}$ ,  $hmáx = 0.25$ , y  $hmín = 0.05$  para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ; solución real  $y(t) = t + 1/(1 - t)$ .
  - $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - $y' = \cos 2t + \sin 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
- Utilice el algoritmo de extrapolación con tolerancia  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial.
  - $y' = (y/t)^2 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 1.2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $hmáx = 0.05$  y  $hmín = 0.02$ .
  - $y' = \sin t + e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.25$  y  $hmín = 0.02$ .
  - $y' = (y^2 + y)/t$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = -2$ , con  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.02$ .
  - $y' = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.02$ .
- Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ ,  $hmáx = 0.5$ , y  $hmín = 0.05$  para aproximar soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
  - $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = 1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
  - $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - $y' = -(y+1)(y+3)$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = -2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
  - $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ ; solución real  $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$ .



4. Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ ,  $hmáx = 0.5$ , y  $hmín = 0.05$  para aproximar soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.
- a.  $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y = \frac{(2t+1)}{(t^2+1)}$ .
- b.  $y' = \frac{y^2}{1+t}$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ ; solución real  $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$ .
- c.  $y' = -ty + \frac{4t}{y}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t^2}}$ .
- d.  $y' = -y + ty^{1/2}$ ,  $2 \leq t \leq 4$ ,  $y(2) = 2$ ; solución real  $y(t) = (t-2 + \sqrt{2} e^{-t/2})^2$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

5. Suponga que un lobo persigue a un conejo. La trayectoria del lobo hacia el conejo recibe el nombre de curva de persecución. Suponga que el lobo corre a una velocidad constante  $\alpha$  y el conejo a una velocidad constante  $\beta$ . Si el lobo comienza en el tiempo  $t = 0$  en el origen y el conejo en el punto  $(0, 1)$ . Suponga que el conejo sube por la línea  $x = 1$ . Si  $(x(t), y(t))$  denota la posición del lobo en el tiempo  $t$ . La ecuación diferencial que describe la curva de persecución es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} [(1-x)^{-\beta/\alpha} - (1-x)^{\beta/\alpha}]$$

Suponga que el lobo corre a una velocidad de 35 millas por hora y el conejo a 25 millas por hora. Encuentre la ubicación  $(x(t), y(t))$  en la que el lobo atrapa al conejo con el método de extrapolación con  $TOL = 10^{-10}$ ,  $hmín = 10^{-12}$ , y  $hmáx = 0.1$ .

6. El modelo de población de Gompertz se describió en el ejercicio 26 de la sección 2.3. La población está provista por

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}}$$

donde  $P_L$ ,  $c$  y  $k > 0$  son constante y  $P(t)$  es la población en el tiempo  $t$ .  $P(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$P'(t) = k [\ln P_L - \ln P(t)] P(t).$$

- a. Por medio de  $t = 0$  y los datos provistos en la tabla en la página 103, aproxime  $P_L$ ,  $c$  y  $k$ .
- b. Aplique el método de extrapolación con  $TOL = 1$  a la ecuación diferencial para aproximar  $P(1990)$ ,  $P(2000)$ , y  $P(2010)$ .
- c. Compare las aproximaciones para los valores de la función de Gompertz y la población real.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Compare la precisión del método de extrapolación en el algoritmo 5.6 para el método Runge-Kutta de cuarto orden para un número determinado de evaluaciones de función.
2. Analice las similitudes y diferencias entre el método en el algoritmo 5.6 y el método Bulirsch-Stoer.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.9

1. Use el método Runge-Kutta en los sistemas para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y compare los resultados con las soluciones reales.
- a.  $u_1' = 3u_1 + 2u_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}$ ,  $u_1(0) = 1$ ;  
 $u_2' = 4u_1 + u_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}$ ,  $u_2(0) = 1$ ;  $0 \leq t \leq 1$ ;  $h = 0.2$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$  y  $u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$ .
- b.  $u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4 \sin t$ ,  $u_1(0) = 0$ ;  
 $u_2' = 3u_1 + u_2 - 3 \sin t$ ,  $u_2(0) = -1$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;  $h = 0.1$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t$  y  $u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$ .

- c.  $u'_1 = u_2$ ,  $u_1(0) = 1$ ;  
 $u'_2 = -u_1 - 2e^t + 1$ ,  $u_2(0) = 0$ ;  
 $u'_3 = -u_1 - e^t + 1$ ,  $u_3(0) = 1$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;  $h = 0.5$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = \cos t + \sin t - e^t + 1$ ,  $u_2(t) = -\sin t + \cos t - e^t$ , y  
 $u_3(t) = -\sin t + \cos t$ .
- d.  $u'_1 = u_2 - u_3 + t$ ,  $u_1(0) = 1$ ;  
 $u'_2 = 3t^2$ ,  $u_2(0) = 1$ ;  
 $u'_3 = u_2 + e^{-t}$ ,  $u_3(0) = -1$ ;  $0 \leq t \leq 1$ ;  $h = 0.1$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}$ ,  $u_2(t) = t^3 + 1$ , y  $u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$ .
2. Use el método Runge-Kutta para sistemas para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y compare los resultados con las soluciones reales.
- a.  $u'_1 = u_1 - u_2 + 2$ ,  $u_1(0) = -1$ ;  
 $u'_2 = -u_1 + u_2 + 4t$ ,  $u_2(0) = 0$ ;  $0 \leq t \leq 1$ ;  $h = 0.1$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + t^2 + 2t - \frac{1}{2}$  y  $u_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$ .
- b.  $u'_1 = \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}$ ,  $u_1(0) = -3$ ;  
 $u'_2 = u_2 + 3t - 4$ ,  $u_2(0) = 5$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;  $h = 0.2$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = -3e^t + t^2$  y  $u_2(t) = 4e^t - 3t + 1$ .
- c.  $u'_1 = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}$ ,  $u_1(0) = 3$ ;  
 $u'_2 = u_2 + u_3 - 2e^{-t}$ ,  $u_2(0) = -1$ ;  
 $u'_3 = u_1 + 2u_2 + e^{-t}$ ,  $u_3(0) = 1$ ;  $0 \leq t \leq 1$ ;  $h = 0.1$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = -3e^{-t} - 3\sin t + 6\cos t$ ,  $u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}\sin t - \frac{21}{10}\cos t - \frac{2}{5}e^{2t}$ ,  
 y  $u_3(t) = -e^{-t} + \frac{12}{5}\cos t + \frac{9}{5}\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}$ .
- d.  $u'_1 = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 3t - 2\sin t$ ,  $u_1(0) = 5$ ;  
 $u'_2 = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2\sin t + \cos t$ ,  $u_2(0) = -9$ ;  
 $u'_3 = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t$ ,  $u_3(0) = -5$ ;  $0 \leq t \leq 2$ ;  $h = 0.2$ ;  
 soluciones reales  $u_1(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t} + t$ ,  $u_2(t) = -8e^{-2t} + e^{4t} - 2e^{3t} + \sin t$ , y  
 $u_3(t) = 2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-2t} - 2$ .
3. Use el algoritmo del método Runge-Kutta destinado a sistemas para aproximar las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior y compare los resultados con las soluciones reales.
- a.  $y'' - 2y' + y = te^t - t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  
 $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$ .
- b.  $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$ , con  $h = 0.1$ ; solución  
 real  $y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3 \ln t - \frac{3}{4}t^3$ .
- c.  $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 0$ , con  $h = 0.2$ ;  
 solución real  $y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$ .
- d.  $t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3 \ln t + 9t^3$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 1$ ,  $y''(1) = 3$ ,  
 con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = -t^2 + t \cos(\ln t) + t \sin(\ln t) + t^3 \ln t$ .
4. Use el algoritmo del método Runge-Kutta para un sistemas para aproximar las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior y compare los resultados con las soluciones reales.
- a.  $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = y'(0) = 2$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  
 $y(t) = 2e^{2t} - e^t + e^{-t}$ .
- b.  $t^2y'' + ty' - 4y = -3t$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 4$ ,  $y'(1) = 3$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  
 $y(t) = 2t^2 + t + t^{-2}$ .
- c.  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 9$ , con  $h = 0.2$ ;  
 solución real  $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$ .
- d.  $t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 8$ ,  $y''(1) = 6$ , con  
 $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

5. El estudio de modelos matemáticos para predecir la dinámica de una población de especies competentes tiene su origen en los trabajos independientes publicados en la primera época del siglo xx por A. J. Lotka y V. Volterra (consulte, por ejemplo, [Lo1], [Lo2] y [Vo]).

Considere el problema de predecir la población de dos especies, una de las cuales es un depredador, cuya población en el tiempo  $t$  es  $x_2(t)$ , que se alimenta de la otra, que es la presa, cuya población es  $x_1(t)$ . Supondremos que la presa siempre tiene un suministro de comida adecuado y que su índice de natalidad en cualquier tiempo es proporcional al número de presas vivas en ese momento; es decir, el índice de natalidad (presa) es  $k_1 x_1(t)$ . El índice de mortalidad de la presa depende tanto del número de presas como de depredadores vivos en ese momento. Para simplicidad, suponemos un índice de mortalidad (presa) =  $k_2 x_1(t) x_2(t)$ . El índice de natalidad del depredador, por otro lado, depende de su suministro de comida,  $x_1(t)$ , así como del número de depredadores disponible para propósitos de reproducción. Por esta razón, suponemos que el índice de natalidad (depredador) es  $k_3 x_1(t) x_2(t)$ . El índice de mortalidad del depredador será tomado como simplemente proporcional al número de depredadores vivos en ese momento; es decir, el índice de mortalidad (depredador) =  $k_4 x_2(t)$ .

Puesto que  $x_1'(t)$  y  $x_2'(t)$  representan el cambio en las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente, en relación con el tiempo, el problema se expresa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$x_1'(t) = k_1 x_1(t) - k_2 x_1(t) x_2(t) \quad \text{y} \quad x_2'(t) = k_3 x_1(t) x_2(t) - k_4 x_2(t).$$

Resuelva este sistema para  $0 \leq t \leq 4$ , al suponer que la población inicial de la presa es 1000 y que la del depredador es 500 y que las constantes son  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 0.002$ ,  $k_3 = 0.0006$ , y  $k_4 = 0.5$ . Bosqueje una gráfica de las soluciones para este problema, al graficar ambas poblaciones con el tiempo y describa el fenómeno físico representado. ¿Existe una solución estable para este modelo de población? En caso afirmativo, ¿Para qué valores de  $x_1$  y  $x_2$  la solución es estable?

6. En el ejercicio 5 consideramos el problema de predecir la población con un modelo depredador-presa. Otro problema de este tipo se preocupa por dos especies que compiten por el mismo suministro de comida. Si los números de especies vivas en el tiempo  $t$  se denotan a través de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , con frecuencia se supone que, a pesar de que el índice de natalidad de cada una de las especies es simplemente proporcional al número de especies vivas en ese momento, el índice de mortalidad de cada especie depende de la población de ambas especies. Estableceremos que la población de un par particular de especies se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t)[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)] \quad \text{y} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_2(t)[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)]. \end{aligned}$$

Si se sabe que la población inicial de cada especie es 10000, encuentre la solución de este sistema para  $0 \leq t \leq 4$ . ¿Existe una solución estable para este modelo de población? En caso afirmativo, ¿para qué valores de  $x_1$  y  $x_2$  la solución es estable?

7. Suponga que el péndulo que oscila descrito en el ejemplo principal de este capítulo es de 2 pies de largo y que  $g = 32.17$  pies/s<sup>2</sup>. Con  $h = 0.1$  s, compare el ángulo  $\theta$  obtenido para los siguientes problemas de valor inicial en  $t = 0$ , 1, y 2 s.

- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0,$
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0,$

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Cambie el algoritmo indicador-corrector de cuarto orden de Adams para obtener soluciones aproximadas para los sistemas de ecuaciones de primer orden.
- Repita el ejercicio 1 con el algoritmo desarrollado en el ejercicio 5.
- Repita el ejercicio 2 con el algoritmo desarrollado en el ejercicio 5.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El siguiente sistema describe la reacción química de Robertson. Esto se considera un sistema “rígido” de EDO. ¿El algoritmo 5.7 se puede aplicar al sistema en  $0 \leq x \leq 40$  con buenos resultados?

¿Por qué sí o por qué no?

$$y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3$$

$$y_2' = -0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 * 10^7 y_2^2$$

$$y_3' = 3 * 10^7 y_2^2$$

2. ¿Cuáles son los métodos de Rosenbrock y por qué se utilizan?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.10

### EJERCICIOS TEÓRICOS

1. Para probar el teorema 5.20, parte i), muestra que la hipótesis implica que existe una constante  $K > 0$  tal que

$$|u_i - v_i| \leq K |u_0 - v_0|, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq N,$$

siempre que  $\{u_i\}_{i=1}^N$  y  $\{v_i\}_{i=1}^N$  satisfagan la ecuación de diferencia  $w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$ .

2. Para los métodos Adams-Bashforth y Adams-Moulton de orden 4,

a. Muestre que si  $f = 0$ , entonces

$$F(t_i, h, w_{i+1}, \dots, w_{i+1-m}) = 0.$$

b. Muestre que si  $f$  satisface la condición de Lipschitz con la constante  $L$ , entonces existe una constante  $C$  con

$$|F(t_i, h, w_{i+1}, \dots, w_{i+1-m}) - F(t_i, h, v_{i+1}, \dots, v_{i+1-m})| \leq C \sum_{j=0}^m |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|.$$

3. Use los resultados del ejercicio 32 en la sección 5.4 para mostrar que el método Runge-Kutta de orden 4 es consistente.
4. Considere la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

a. Muestre que

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2}))}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''(\xi_1),$$

para alguna  $\xi$ , donde  $t_i < \xi < t_{i+2}$ .

b. La parte a) sugiere el método de diferencia

$$w_{i+2} = 4w_{i+1} - 3w_i - 2hf(t_i, w_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N-2.$$

Use este método para resolver

$$y' = 1 - y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$$

con  $h = 0.1$ . Utilice los valores iniciales  $w_0 = 0$  y  $w_1 = y(t_1) = 1 - e^{-0.1}$ .

- c. Repita la parte b) con  $h = 0.01$  y  $w_1 = 1 - e^{-0.01}$ .
- d. Analice este método para consistencia, estabilidad y convergencia.
5. Dado el método multipasos

$$w_{i+1} = -\frac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \frac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i), \quad \text{para } i = 2, \dots, N-1,$$

con valores iniciales  $w_0, w_1, w_2$ :

- a. Encuentre el error de truncamiento local.
  - b. Comente sobre consistencia, estabilidad y convergencia.
6. Obtenga una solución aproximada para la ecuación diferencial

$$y' = -y, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad y(0) = 1$$

usando el método de Milne con  $h = 0.1$  y  $h = 0.01$ , con valores iniciales  $w_0 = 1$  y  $w_1 = e^{-h}$  en ambos casos. ¿Cómo afecta la disminución de  $h$  desde  $h = 0.1$  hasta  $h = 0.01$  al número de dígitos correctos en las soluciones aproximadas en  $t = 1$  y  $t = 10$ ?

7. Investigue la estabilidad del método de diferencia

$$w_{i+1} = -4w_i + 5w_{i-1} + 2h[f(t_i, w_i) + 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})],$$

para  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , con valores iniciales  $w_0, w_1$ .

8. Considere el problema  $y' = 0, 0 \leq t \leq 10, y(0) = 0$ , que tiene la solución  $y \equiv 0$ . Si el método de diferencia del ejercicio 4 se aplica al problema, entonces

$$w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$w_0 = 0, \quad \text{y} \quad w_1 = \alpha_1.$$

Suponga que  $w_1 = \alpha_1 = \varepsilon$  donde  $\varepsilon$  es un error de redondeo pequeño. Calcule  $w_i$  exactamente para  $i = 2, 3, \dots, 6$  para encontrar cómo se propaga el error  $\varepsilon$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la diferencia entre error de truncamiento local, error local, error de truncamiento global y error global.
2. Describa las regiones de estabilidad para el método de Euler, el método Runge de segundo orden y la regla de Kutta-Simpson de cuarto orden.
3. Para casi todos los problemas de valor inicial bien condicionados, por lo común, un método firmemente inestable (en aritmética de punto flotante) produce soluciones que se vuelven inútiles rápidamente. Analice la razón por la que esto pasa.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.11

1. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial rígido con el método de Euler y compare los resultados con la solución real.
  - a.  $y' = -9y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = e^{1-9t}$ .
  - b.  $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-20t}$ .
  - c.  $y' = -20y + 20 \sin t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = \sin t + e^{-20t}$ .
  - d.  $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \sqrt{2}$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$ .
2. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial rígido con el método de Euler y compare los resultados con la solución real.
  - a.  $y' = -5y + 6e^t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 2$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = e^{-5t} + e^t$ .
  - b.  $y' = -10y + 10t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = e^{-10t+1} + t$ .
  - c.  $y' = -15(y - t^{-3}) - 3/t^4, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = 0$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = -e^{-15t} + t^{-3}$ .
  - d.  $y' = -20y + 20 \cos t - \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = -e^{-20t} + \cos t$ .

3. Repita el ejercicio 1 con el método Runge-Kutta de cuarto orden.
4. Repita el ejercicio 2 con el método Runge-Kutta de cuarto orden.
5. Repita el ejercicio 1 con el método Adams indicador-corrector de cuarto orden.
6. Repita el ejercicio 2 con el método Adams indicador-corrector de cuarto orden.
7. Repita el ejercicio 1 con el algoritmo trapezoidal con  $TOL = 10^{-5}$ .
8. Repita el ejercicio 2 con el algoritmo trapezoidal con  $TOL = 10^{-5}$ .
9. Resuelva el siguiente problema de valor inicial rígido con el método Runge-Kutta de cuarto orden con a)  $h = 0.1$  y b)  $h = 0.025$ .

$$u'_1 = 32u_1 + 66u_2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}, \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad u_1(0) = \frac{1}{3};$$

$$u'_2 = -66u_1 - 133u_2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad u_2(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare los resultados con la solución real,

$$u_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t} \quad \text{y} \quad u_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t}.$$

## EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que el método Runge-Kutta de cuarto orden

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2, w_i + k_1/2),$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2, w_i + k_2/2),$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

al aplicarlo a la ecuación diferencial  $y' = \lambda y$ , se puede reescribir de la forma

$$w_{i+1} = \left( 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4 \right) w_i.$$

11. El método regresivo de Euler de un paso está definido por

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}), \quad \text{para } i = 0, \dots, N-1.$$

Muestre que  $Q(h\lambda) = 1/(1 - h\lambda)$  para el método regresivo de Euler.

12. Aplique el método regresivo de Euler a las ecuaciones diferenciales dadas en el ejercicio 1. Use el método de Newton para resolver para  $w_{i+1}$ .
13. Aplique el método regresivo de Euler a las ecuaciones diferenciales dadas en el ejercicio 2. Use el método de Newton para resolver para  $w_{i+1}$ .
14. a. Muestre que el método trapezoidal implícito es A-estable.  
b. Muestre que el método regresivo de Euler descrito en el ejercicio 12 es A-estable.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la consistencia, estabilidad y convergencia del método trapezoidal implícito

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} (f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N-1,$$

con  $w_0 = \alpha$  aplicado a la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

2. El siguiente sistema describe la reacción química de Robertson. Ésta se considera un sistema “rígido” de EDO. ¿El algoritmo 5.8 puede aplicarse a este sistema en  $0 \leq x \leq 40$ ? ¿Por qué sí o por qué no?

$$y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3$$

$$y_2' = -0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \times 10^7 y_2^2$$

$$y_3' = 3 \times 10^7 y_2^2$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Seleccione dos de los métodos analizados en este capítulo y compare y contraste su utilidad y estabilidad.
2. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría usar una hoja de cálculo de Excel para implementarlo.
3. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar MAPLE para implementarlo.
4. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar MATLAB para implementarlo.
5. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar Mathematica para implementarlo.

## CONCEPTOS CLAVE

A-estable	Error de truncamiento local	Métodos multipasos
Adams-Bashforth	Estabilidad	Métodos multipasos de
Adams-Moulton	Método de Euler	tamaño de paso variable
Condición de Lipschitz	Método de Euler de orden	Polinomio característico
Control de error en método	superior	Problema bien planteado
RKF	Método indicador-corrector	Problema de valor inicial
Cotas de error para el	Método RK para sistemas	Problema perturbado
método de Euler	Método Runge-Kutta-	Región de estabilidad
Ecuación diferencial rígida	Fehlberg (RKF)	Sistemas de ecuaciones
Ecuaciones de orden	Métodos de extrapolación	diferenciales
superior	Métodos de Runge-Kutta	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos considerado métodos para aproximar las soluciones de los problemas de valor inicial para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Comenzamos con un análisis sobre la técnica numérica fundamental, el método de Euler. Este procedimiento no es suficientemente preciso para utilizarse en aplicaciones, pero ilustra la conducta general de las técnicas más poderosas sin las dificultades algebraicas que las acompañan. A continuación, consideramos los métodos de Taylor como generalizaciones del método de Euler. Encontramos que éstos son precisos, pero engorrosos debido a la necesidad de determinar derivadas parciales extensas de la función de definición de la ecuación diferencial. Las fórmulas Runge-Kutta simplificaban los métodos de Taylor sin aumentar el orden del error. Hasta este punto sólo consideramos métodos de un paso, técnicas que solamente utilizan datos en el punto calculado más reciente.

Los métodos multipasos se analizaron en la sección 5.6, donde consideramos los métodos explícitos de tipo Adams-Bashforth y los métodos implícitos tipo Adams-Moulton. Esto culminó en los métodos indicador-corrector, que usan un método explícito, como Adams-Bashforth, para predecir la solución y, después, aplicar uno implícito correspondiente, como Adams-Moulton, para corregir la aproximación.

La sección 5.9 ilustra cómo se pueden usar estas técnicas para resolver los problemas de valor inicial de orden superior y los sistemas de problemas de valor inicial.

Los métodos adaptables más precisos están basados en las técnicas, relativamente poco complicadas, multipasos y de un paso. En particular, en la sección 5.5 observamos que el método Runge-Kutta-Fehlberg es un procedimiento de un paso que busca seleccionar espaciado de malla para mantener bajo control el error local de la aproximación. El método indicador-corrector de tamaño de paso variable en la sección 5.7 está basado en el método Adams-Bashforth de cuatro pasos y en el método Adams-Moulton de tres pasos. También cambia el tamaño de paso para mantener el error local dentro de una tolerancia determinada. El método de extrapolación, analizado en la sección 5.8, se basa en una modificación del método de punto medio e incluye la extrapolación para mantener la precisión deseada de la aproximación.

El tema final en el capítulo abordaba la dificultad inherente en la aproximación de la solución de una ecuación rígida, una ecuación diferencial cuya solución exacta contiene una parte de la forma  $e^{-\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es una constante positiva. Se debe tener extrema precaución con este tipo de problemas o los resultados pueden ser abrumadores debido al error de redondeo.

En general, los métodos tipo Runge-Kutta-Fehlberg son suficientes para los problemas no rígidos cuando se requiere precisión moderada. Los procedimientos de extrapolación se recomiendan para los problemas no rígidos cuando se requiere alta precisión. Las extensiones del método trapezoidal implícito para los métodos tipo Adams implícito de orden y tamaño de orden variable se usan en los problemas de valor inicial rígido.

Muchos libros se especializan en la solución numérica de los problemas de valor inicial. Dos clásicos son Henrici [He1] y Gear [Ge1]. Otros libros que estudian el campo son Botha y Pinder [BP], Ortega y Poole [OP], Golub y Ortega [GO], Shampine [Sh] y Dormand [Do].

Dos libros de Hairer, Nørsett y Warner proveen análisis amplios sobre problemas no rígidos [HNW1] y rígidos [HNW2]. El libro de Burrage [Bur] describe métodos paralelos y secuenciales.



# Capítulo 12

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.1

1. Use el algoritmo 12.1 para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x - 2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y - 1)^2, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Utilice  $h = k = \frac{1}{2}$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = (x - y)^2$ .

2. Use el algoritmo 12.1 para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$$

$$u(x, 0) = 2 \ln x, \quad u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), \quad 1 \leq x \leq 2;$$

$$u(1, y) = \ln(y^2 + 1), \quad u(2, y) = \ln(y^2 + 4), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Use  $h = k = \frac{1}{3}$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

3. Aproxime las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, por medio del algoritmo 12.1:

a.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Use  $h = k = 0.2$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = xy$ .

b.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x + y) + \cos(x - y)), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Use  $h = \pi/5$  y  $k = \pi/10$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = \cos x \cos y$ .

c.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$

$$u(0, y) = 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Use  $h = 0.2$  y  $k = 0.1$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = e^{xy}$ .

d.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2;$

$$u(x, 1) = x \ln x, \quad u(x, 2) = x \ln(4x^2), \quad 1 \leq x \leq 2;$$

$$u(1, y) = y \ln y, \quad u(2, y) = 2y \ln(2y), \quad 1 \leq y \leq 2.$$

Use  $h = k = 0.1$  y compare los resultados con la solución real  $u(x, y) = xy \ln xy$ .

4. Repita el ejercicio 3a) mediante extrapolación con  $h_0 = 0.2$ ,  $h_1 = h_0/2$ , y  $h_2 = h_0/4$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

5. Un cable coaxial está hecho de un conductor interno cuadrado de 0.1-pulgada y un conductor externo cuadrado de 0.5 pulgada. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe mediante la ecuación de Laplace. Suponga que el conductor interno se mantiene a 0 volts y el conductor externo se mantiene a 110 volts. Encuentre el potencial entre los dos conductores al colocar una cuadrícula con espaciado de malla horizontal  $h = 0.1$  pulgada. y espaciado de malla vertical  $k = 0.1$  pulgada. en la región

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 0.5\}.$$

Aproxime la solución de la ecuación de Laplace en cada punto de malla y use dos conjuntos de condiciones en la frontera para derivar un sistema lineal que se resolverá a través del método de Gauss-Seidel.

6. Una placa de plata rectangular de  $6 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  tiene calor generado de manera uniforme en cada punto a una velocidad  $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3\text{-sec}$ . Si  $x$  representa la distancia a lo largo del borde de la placa de longitud 6 cm y  $y$  es la distancia a lo largo del borde de la placa de longitud 5 cm. Suponga que la temperatura  $u$  a lo largo de los bordes se mantiene en las siguientes temperaturas:

$$u(x, 0) = x(6 - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6,$$

$$u(0, y) = y(5 - y), \quad u(6, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 5,$$

donde el origen se encuentra en una esquina de la placa con coordenadas  $(0, 0)$  y los bordes se encuentran a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  positivos. La temperatura en estado estable  $u = u(x, y)$  satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < y < 5,$$

donde  $k$ , la conductividad térmica, es  $1.04 \text{ cal/cm-deg-sec}$ . Aproxime la temperatura  $u(x, y)$  mediante el algoritmo 12.1 con  $h = 0.4$  y  $k = \frac{1}{3}$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Construya un algoritmo similar al algoritmo 12.1, sólo que utilice el método SOR con  $\omega$  óptima en lugar del método Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal.
8. Repita el ejercicio 3 por medio del algoritmo construido en el ejercicio 7.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El texto describe la formación de líneas de cuadrícula verticales igualmente espaciadas y líneas de cuadrícula horizontales igualmente espaciadas. ¿Un tamaño de cuadrícula variable se puede usar en el método de diferencias finitas? En este caso, ¿cómo implementaría esta modificación?
2. ¿Cómo espaciaría las líneas de la cuadrícula en caso de un dominio de forma irregular?
3. Analice métodos de múltiples cuadrículas para resolver problemas elípticos.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.2

1. Aproxime la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial con el método de diferencias regresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Use  $m = 4$ ,  $T = 0.1$ , y  $N = 2$  y compare sus resultados con la solución real  $u(x, t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin \frac{\pi}{2} x$ .

2. Aproxime la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial con el método de diferencias regresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Use  $m = 3$ ,  $T = 0.1$ , y  $N = 2$  y compare sus resultados con la solución real  $u(x, t) = 2e^{-(\pi^2/4)t} \sin 2\pi x$ .

3. Repita el ejercicio 1 con el algoritmo Crank-Nicolson.  
 4. Repita el ejercicio 2 con el algoritmo Crank-Nicolson.  
 5. Use el método de diferencias progresivas para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.

a.  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t;$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Use  $h = 0.4$  y  $k = 0.1$  y compare sus resultados en  $t = 0.5$  con la solución real  $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$ . A continuación, use  $h = 0.4$  y  $k = 0.05$  y compare las respuestas.

b.  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t;$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Use  $h = \pi/10$  y  $k = 0.05$  y compare sus resultados en  $t = 0.5$  con la solución real  $u(x, t) = e^{-t} \sin x$ .

6. Use el método de diferencias progresivas para aproximar la solución con las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.

a.  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t;$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4} x \left( 1 + 2 \cos \frac{\pi}{4} x \right), \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Use  $h = 2$  y  $k = 0.04$  y compare sus resultados en  $t = 0.4$  con la solución real  $u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{\pi}{2} x + e^{-t/4} \sin \frac{\pi}{4} x$ .

b.  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t;$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \cos \pi \left( x - \frac{1}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Use  $h = 0.1$  y  $k = 0.04$  y compare sus resultados en  $t = 0.4$  con la solución real  $u(x, t) = e^{-t} \cos \pi \left( x - \frac{1}{2} \right)$ .

7. Repita el ejercicio 5 con el algoritmo de diferencias regresivas.  
 8. Repita el ejercicio 6 con el algoritmo de diferencias regresivas.  
 9. Repita el ejercicio 5 con el algoritmo Crank-Nicolson.  
 10. Repita el ejercicio 6 con el algoritmo Crank-Nicolson.  
 11. Repita el ejercicio 5 con el método de Richardson.  
 12. Repita el ejercicio 6 con el método de Richardson.

## EJERCICIOS APLICADOS

13. La temperatura  $u(x, t)$  de una varilla larga y delgada de sección transversal constante y material de conducción homogéneo está regida por la ecuación de calor unidimensional. Si se genera calor en el

material, por ejemplo, mediante resistencia a la corriente o reacción nuclear, la ecuación de calor se vuelve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Kr}{\rho C} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

donde  $l$  es la longitud,  $\rho$  es la densidad,  $C$  es el calor específico y  $K$  es la capacidad de difusión de la varilla. La función  $r = r(x, t, u)$  representa el calor generado por unidad de volumen. Suponga que

$$l = 1.5 \text{ cm}, \quad K = 1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}, \quad \rho = 10.6 \text{ g/cm}^3, \quad C = 0.056 \text{ cal/g} \cdot \text{deg},$$

y

$$r(x, t, u) = 5.0 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}.$$

Si los extremos de la varilla se mantienen a  $0^\circ\text{C}$ , entonces

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

Suponga que la distribución de temperatura inicial está dada por

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Use los resultados del ejercicio 17 para aproximar la distribución de temperatura con  $h = 0.15$  y  $k = 0.0225$ .

- 14.** Sagar y Payne [SP] analizaron las relaciones estrés-tensión y las propiedades del material de un cilindro sujeto alternativamente a calentamiento y enfriamiento y consideraron la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 < T,$$

donde  $T = T(r, t)$  es la temperatura,  $r$  es la distancia radial desde el centro del cilindro,  $t$  es el tiempo y  $K$  es un coeficiente de capacidad de difusión.

- a.** Encuentre las aproximaciones para  $T(r, 10)$  para un cilindro con radio exterior 1, dadas las condiciones de frontera e iniciales:

$$T(1, t) = 100 + 40t, \quad T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad 0 \leq t \leq 10;$$

$$T(r, 0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \leq r \leq 1.$$

Use una modificación del método de diferencias regresivas con  $K = 0.1$ ,  $k = 0.5$ , y  $h = \Delta r = 0.1$ .

- b.** Use la distribución de temperatura de la parte a) para calcular la tensión  $I$  al aproximar la integral

$$I = \int_{0.5}^1 \alpha T(r, t) r \, dr,$$

donde  $\alpha = 10.7$  y  $t = 10$ . Use el método trapezoidal compuesto con  $n = 5$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- 15.** Muestre que los eigenvalores para la matriz tridiagonal  $(m - 1)$  por  $(m - 1)$   $A$  dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i - 1 \text{ o } j = i + 1, \\ 1 - 2\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

son

$$\mu_i = 1 - 4\lambda \left( \sin \frac{i\pi}{2m} \right)^2, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m - 1,$$

con eigenvectores correspondientes  $\mathbf{v}^{(i)}$ , donde  $v_j^{(i)} = \sin \frac{ij\pi}{m}$ .

16. Muestre que la matriz de método tridiagonal  $(m-1)$  por  $(m-1)$   $A$  dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i-1 \text{ o } j = i+1, \\ 1-2\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ , es definida positiva y diagonalmente dominante y tiene eigenvalores

$$\mu_i = 1 + 4\lambda \left( \sin \frac{i\pi}{2m} \right)^2, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m-1,$$

con eigenvectores correspondientes  $\mathbf{v}^{(i)}$ , donde  $v_j^{(i)} = \sin \frac{ij\pi}{m}$ .

17. Modifique los algoritmos 12.2 y 12.3 para incluir la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t; \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad 0 < t; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

18. Use los resultados del ejercicio 17 para aproximar la solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t; \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 < t; \\ u(x, 0) &= \sin \pi x + x(1-x), \end{aligned}$$

con  $h = 0.1$  y  $k = 0.01$ . Compare su respuesta en  $t = 0.25$  con la solución real  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1-x)$ .

19. Cambie los algoritmos 12.2 y 12.3 para acomodar la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t; \\ u(0, t) &= \phi(t), \quad u(l, t) = \Psi(t), \quad 0 < t; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

donde  $f(0) = \phi(0)$  y  $f(l) = \Psi(0)$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa el método implícito de dirección alternativa (ADI).
2. ¿Se puede usar un elemento finito en problemas parabólicos?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.3

1. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t; \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

por medio del algoritmo de diferencias finitas 12.4 con  $m = 4$ ,  $N = 4$ , y  $T = 1.0$ . Compare sus resultados en  $t = 1.0$  con la solución real  $u(x, t) = \cos \pi t \sin \pi x$ .

2. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(0.5, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 0.5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 4\pi x, \quad 0 \leq x \leq 0.5,$$

usando el algoritmo de diferencias finitas 12.4 con  $m = 4$ ,  $N = 4$ , y  $T = 0.5$ . Compare sus resultados en  $t = 0.5$  con la solución real  $u(x, t) = \sin t \sin 4\pi x$ .

3. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

usando el algoritmo de diferencias finitas con  $h = \pi/10$  y  $k = 0.05$ , con y, después con  $h = \pi/20$  y  $k = 0.05$ . Compare sus resultados en  $t = 0.5$  con la solución real  $u(x, t) = \cos t \sin x$ .

4. Repita el ejercicio 3, usando en el paso 4 del algoritmo 12.4 la aproximación

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m-1.$$

5. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\pi \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

usando el algoritmo 12.4 con  $h = 0.1$  y  $k = 0.1$ . Compare sus resultados en  $t = 0.3$  con la solución real  $u(x, t) = \sin 2\pi x (\cos 2\pi t + \sin 2\pi t)$ .

6. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

usando el algoritmo 12.4 con  $h = 0.1$  y  $k = 0.1$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

7. La presión del aire  $p(x, t)$  en un tubo de órgano está regida por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

donde  $l$  es la longitud del tubo y  $c$  es una constante física. Si el tubo está abierto, las condiciones en la frontera están determinadas por

$$p(0, t) = p_0 \quad \text{y} \quad p(l, t) = p_0.$$

Si el tubo está cerrado en el extremo donde  $x = l$ , las condiciones en la frontera son

$$p(0, t) = p_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Suponga que  $c = 1$ ,  $l = 1$  y que las condiciones iniciales son

$$p(x, 0) = p_0 \cos 2\pi x, \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- a. Aproxime la presión para un tubo abierto con  $p_0 = 0.9$  en  $x = \frac{1}{2}$  para  $t = 0.5$  y  $t = 1$ , usando el algoritmo 12.4 con  $h = k = 0.1$ .
  - b. Modifique el algoritmo 12.4 para el problema de tubo cerrado con  $p_0 = 0.9$  y aproxime  $p(0.5, 0.5)$  y  $p(0.5, 1)$  mediante  $h = k = 0.1$ .
8. Una línea de transmisión eléctrica de longitud  $l$  que conduce corriente alterna de alta frecuencia (llamada línea “sin pérdida”), el voltaje  $V$  y la corriente  $i$  se describe mediante

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t; \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t; \end{aligned}$$

donde  $L$  es la inductancia por unidad de longitud y  $C$  es la capacitancia por unidad de longitud. Suponga que la línea es 200 pies de largo y las constantes  $C$  y  $L$  están dadas por

$$C = 0.1 \text{ farads/pies} \quad \text{y} \quad L = 0.3 \text{ henries/pies}.$$

Suponga que el voltaje y la corriente también satisfacen

$$\begin{aligned} V(0, t) &= V(200, t) = 0, \quad 0 < t; \\ V(x, 0) &= 110 \sin \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200; \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 200; \\ i(0, t) &= i(200, t) = 0, \quad 0 < t; \\ i(x, 0) &= 5.5 \cos \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200; \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200.$$

Aproxime el voltaje y la corriente en  $t = 0.2$  y  $t = 0.5$  usando el algoritmo 12.4 con  $h = 10$  y  $k = 0.1$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice el método de características para problemas hiperbólicos.
2. ¿Existe algún método de diferencias finitas implícita para problemas hiperbólicos y por qué se usaría?

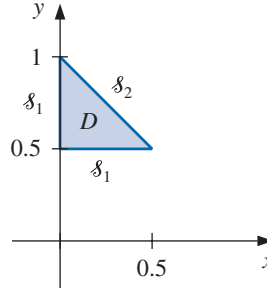
## CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.4

1. Use el algoritmo 12.5 para aproximar la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial (consulte la figura):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) - yu(x, y) = -x, \quad (x, y) \in D,$$

$$u(x, 0.5) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad u(0, y) = 0, \quad 0.5 \leq y \leq 1,$$

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \quad \text{para } (x, y) \in S_2.$$



Sea que  $M = 2$ ;  $T_1$  tiene vértices  $(0, 0.5)$ ,  $(0.25, 0.75)$ ,  $(0, 1)$ ; y  $T_2$  tiene vértices  $(0, 0.5)$ ,  $(0.5, 0.5)$ , y  $(0.25, 0.75)$ .

2. Repita el ejercicio 1, por medio de los triángulos

$$T_1 : (0, 0.75), (0, 1), (0.25, 0.75);$$

$$T_2 : (0.25, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 0.5);$$

$$T_3 : (0, 0.5), (0, 0.75), (0.25, 0.75);$$

$$T_4 : (0, 0.5), (0.25, 0.5), (0.25, 0.75).$$

3. Aproxime la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - 12.5\pi^2 u(x, y) = -25\pi^2 \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y, \quad 0 < x, y < 0.4,$$

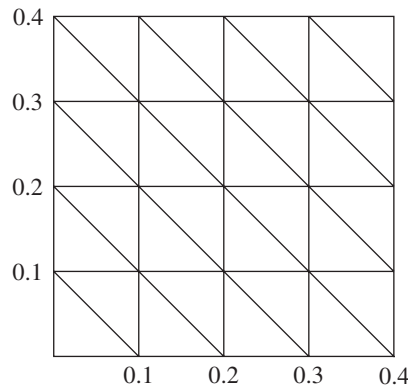
sujeta a la condición de frontera de Dirichlet

$$u(x, y) = 0,$$

usando el algoritmo de elementos finitos 12.5 con los elementos determinados en la figura adjunta. Compare la solución aproximada con la solución real

$$u(x, y) = \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y,$$

en los vértices interior y en los puntos  $(0.125, 0.125)$ ,  $(0.125, 0.25)$ ,  $(0.25, 0.125)$ , y  $(0.25, 0.25)$ .





4. Repita el ejercicio 3, con  $f(x, y) = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2}x \cos \frac{5\pi}{2}y$ , por medio de la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0.$$

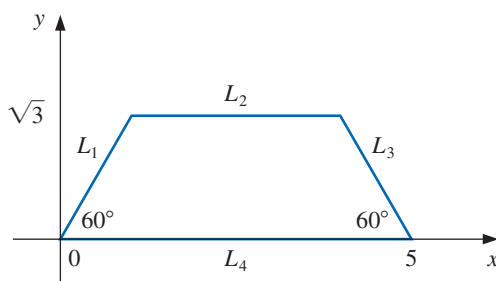
La solución real de este problema es

$$u(x, y) = \cos \frac{5\pi}{2}x \cos \frac{5\pi}{2}y.$$

## EJERCICIOS APLICADOS

5. Una placa de plata de forma trapezoidal (consulte la figura adjunta) tiene calor generado de manera uniforme en cada punto a una velocidad de  $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$ . La temperatura en estado estable  $u(x, y)$  de la placa satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-q}{k},$$



donde  $k$ , la conductividad térmica, es  $1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}$ . Suponga que la temperatura se mantiene en  $15^\circ\text{C}$  en  $L_2$ , que el calor se pierde en los bordes inclinados  $L_1$  y  $L_3$  de acuerdo con la condición de frontera  $\partial u / \partial n = 4$ , y que no se pierde calor en  $L_4$ ; es decir,  $\partial u / \partial n = 0$ . Aproxime la temperatura de la placa en  $(1, 0)$ ,  $(4, 0)$  y  $(\frac{5}{2}, \sqrt{3}/2)$  mediante el algoritmo 12.5.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Investigue el uso de rectángulos en lugar de triángulos en el método de elementos finitos.
2. Analice el enfoque de ingeniería para utilizar tensiones y cargas para desarrollar el método de elementos finitos.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Proporcione una descripción general del paquete de software MUDPACK.
2. Proporcione una descripción general del paquete de software Chombo.
3. Proporcione una descripción general del paquete de software ReacTran.

## CONCEPTOS CLAVE

Condiciones de frontera de Dirichlet	Ecuación de Poisson	Método de diferencias finitas de Poisson
Diferencias finitas de ecuación de onda	Ecuaciones elípticas	Método de diferencias progresivas
Diferencias regresivas de la ecuación de calor	EDP elípticas	Método de diferencias regresivas
Ecuación de calor	EDP hiperbólicas	Método de elementos finitos
Ecuación de difusión	EDP parabólicas	Nodos
Ecuación de Laplace	Estabilidad	Triangulación
Ecuación de onda	Método de Crank-Nicolson	
	Método de diferencias finitas	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo, se consideraron los métodos para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales. Restringimos nuestra atención a la ecuación de Poisson como ejemplo de una ecuación diferencial parcial elíptica, la ecuación de calor o difusión como ejemplo de la ecuación diferencial parcial parabólica y la ecuación de onda como ejemplo de una ecuación diferencial parcial hiperbólica. Se analizaron las aproximaciones de diferencias finitas para estos tres ejemplos.

La ecuación de Poisson en un rectángulo requería la solución de un sistema lineal grande y disperso, para el que se recomiendan técnicas iterativas, como el método SOR. Los métodos de diferencias progresivas y de Richardson tenían problemas de estabilidad, por lo que se introdujeron los métodos de diferencias regresivas y de Crank-Nicolson. A pesar de que se debe resolver un sistema lineal tridiagonal en cada paso con estos métodos implícitos, son mucho más estables que los métodos explícitos de Richardson y de diferencia progresiva. El método de diferencias finitas para la ecuación de onda es explícito y también puede tener problemas de estabilidad para ciertas selecciones de discretización de tiempo y espacio.

En la última sección del capítulo, presentamos una introducción al método de elemento finito para ecuación diferencial parcial elíptica autoadjunta en un dominio polinomial. A pesar de que nuestros métodos funcionarán adecuadamente para los problemas y ejemplos del libro de texto, se requieren generalizaciones y modificaciones más poderosas de estas técnicas para aplicaciones comerciales.

Sólo hemos presentado una pequeña muestra de las muchas técnicas utilizadas para aproximar las soluciones de problemas que implican ecuaciones diferenciales parciales. Más información sobre el tema general se puede encontrar en Lapidus y Pinder [LP], Twizell [Tw], y el libro reciente de Morton y Mayers [MM]. Información sobre el software se puede encontrar en Rice y Boisvert [RB] y en Bank [Ban].

Los libros enfocados en los métodos de diferencias finitas incluyen Strikwerda [Stri], Thomas [Th] y Shashkov y Steinberg [ShS]. Strange y Fix [SF] y Zienkiewicz y Morgan [ZM] son buenas fuentes para información sobre el método de elementos finitos. Las ecuaciones dependientes del tiempo son abordadas en Schiesser [Schi] y en Gustafsson, Kreiss y Olinger [GKO]. Birkhoff y Lynch [BL] y Roache [Ro] analizan la solución de problemas elípticos.

Los métodos de múltiples cuadrículas utilizan aproximaciones de cuadrícula gruesa y técnicas iterativas para proporcionar aproximaciones para cuadrículas más finas. Las referencias sobre estas técnicas incluyen Briggs [Brigg], Mc Cormick [Mc] y Bramble [Bram].

# Capítulo 6

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.
  - a.  $x_1 + 2x_2 = 3,$   
 $x_1 - x_2 = 0.$
  - b.  $x_1 + 2x_2 = 3,$   
 $2x_1 + 4x_2 = 6.$
  - c.  $x_1 + 2x_2 = 0,$   
 $2x_1 + 4x_2 = 0.$
  - d.  $2x_1 + x_2 = -1,$   
 $4x_1 + 2x_2 = -2,$   
 $x_1 - 3x_2 = 5.$
2. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.
  - a.  $x_1 + 2x_2 = 0,$   
 $x_1 - x_2 = 0.$
  - b.  $x_1 + 2x_2 = 3,$   
 $-2x_1 - 4x_2 = 6.$
  - c.  $2x_1 + x_2 = -1,$   
 $x_1 + x_2 = 2,$   
 $x_1 - 3x_2 = 5.$
  - d.  $2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$   
 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1.$
3. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$ .)
  - a.  $4x_1 - x_2 + x_3 = 8,$   
 $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3,$   
 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11.$
  - b.  $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9,$   
 $2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5,$   
 $x_1 + x_2 - 3x_3 = -9.$
4. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$ .)
  - a.  $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 8,$   
 $\frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1,$   
 $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11.$
  - b.  $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5,$   
 $\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1,$   
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9.$
5. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:
  - a.  $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2,$   
 $3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1,$   
 $x_1 + x_2 = 3.$
  - b.  $2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1,$   
 $-x_1 + 2x_3 = 3,$   
 $4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1.$
  - c.  $2x_1 = 3,$   
 $x_1 + 1.5x_2 = 4.5,$   
 $-3x_2 + 0.5x_3 = -6.6,$   
 $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8.$
  - d.  $x_1 + x_2 + x_4 = 2,$   
 $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$   
 $4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0,$   
 $3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3.$
6. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:
  - a.  $x_2 - 2x_3 = 4,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 = 6,$   
 $x_1 - x_3 = 2.$
  - b.  $x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 4,$   
 $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5,$   
 $x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2,$   
 $x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 5.$

$$\begin{aligned} \text{c. } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ x_4 &= 5, \\ x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

7. Use el algoritmo 6.1 y la aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 &= 9, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= 8, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913, \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544, \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= \frac{1}{7}, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 &= \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned}$$

8. Use el algoritmo 6.1 y aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_3 &= 0, \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{9}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12, \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49, \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16, \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32. \end{aligned}$$

9. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3, \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

- Encuentre el valor(es) de  $\alpha$  para los que el sistema no tiene soluciones.
- Encuentre el valor(es) de  $\alpha$  para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
- Suponga que existe una única solución para una  $\alpha$  determinada, encuentre la solución.

10. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

- Encuentre el valor(es) de  $\alpha$  para los que el sistema no tiene soluciones.
- Encuentre el valor(es) de  $\alpha$  para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
- Suponga que existe una única solución para una  $\alpha$  determinada, encuentre la solución.

## EJERCICIOS APLICADOS

11. Suponga que en un sistema biológico existen  $n$  especies de animales y  $m$  fuentes de alimento. Si  $x_j$  representa la población de las  $j$ -ésimas especies, para cada  $j = 1, \dots, n$ ;  $b_i$  representa el suministro

diario disponible del  $i$ -ésimo alimento y  $a_{ij}$  representa la cantidad del  $i$ -ésimo alimento consumido en promedio por un miembro de las  $j$ -ésima especie. El sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

representa un equilibrio donde existe un suministro diario de alimento para cumplir con precisión con el promedio diario de consumo de cada especie.

a. Si

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$ , y  $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]$ . ¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

- ¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?
- Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?
- Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

12. La ecuación integral de Fredholm de segunda clase es una ecuación de la forma

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t) dt,$$

donde  $a$  y  $b$  y las funciones  $f$  y  $K$  están dadas. Para aproximar la función  $u$  en el intervalo  $[a, b]$ , se selecciona una partición  $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$  y las ecuaciones

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i, t)u(t) dt, \quad \text{para cada } i = 0, \dots, m,$$

se resuelven para  $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_m)$ . Las integrales se aproximan mediante fórmulas de cuadratura con base en los nodos  $x_0, \dots, x_m$ . En nuestro problema,  $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$ , y  $K(x, t) = e^{|x-t|}$ .

a. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} u(0) &= f(0) + \frac{1}{2}[K(0, 0)u(0) + K(0, 1)u(1)], \\ u(1) &= f(1) + \frac{1}{2}[K(1, 0)u(0) + K(1, 1)u(1)] \end{aligned}$$

se resuelve cuando se utiliza la regla de trapecio.

- Formule y resuelva el sistema lineal que resulta cuando se utiliza la regla de trapecio con  $n = 4$ .
- Repita la parte (b) mediante la regla compuesta Simpson.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Muestre que las operaciones

- $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$
- $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow (E_i)$
- $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

no cambian la solución establecida de un sistema lineal.

- 14. Método Gauss-Jordan:** Este método se describe de acuerdo con lo siguiente. Utilice la  $i$ -ésima ecuación para eliminar  $x_i$  no sólo a partir de las ecuaciones  $E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_n$ , como con el método de eliminación gaussiana, sino también a partir de  $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}$ . Al reducir  $[A, b]$  a

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array} \right],$$

la solución se obtiene al establecer

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}},$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Este procedimiento elude la sustitución hacia atrás en la eliminación gaussiana. Construya un algoritmo para el procedimiento Gauss-Jordan a partir del algoritmo 6.1.

- 15.** Use el método Gauss-Jordan y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.
- 16.** Repita el ejercicio 7 con el método Gauss-Jordan.
- 17. a.** Muestre que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \text{ multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \text{ sumas/restas.}$$

- b.** Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan y de eliminación gaussiana para  $n = 3, 10, 50, 100$ . ¿Qué método requiere menos cálculos?
- 18.** Considere el siguiente método híbrido Gauss-Jordan-eliminación-gaussiana para resolver el sistema (6.4). Primero, aplique la técnica de eliminación gaussiana para reducir el sistema a una forma triangular. A continuación, utilice la  $n$ -ésima ecuación para eliminar los coeficientes de  $x_n$  en cada una de las primeras  $n - 1$  filas. Después de completar esto utilice la  $(n - 1)$ -ésima ecuación para eliminar los coeficientes  $x_{n-1}$  en las primeras  $n - 2$  columnas y así sucesivamente. Al final, el sistema aparecerá como el sistema reducido en el ejercicio 12.
- a.** Muestre que este método requiere

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \text{ multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \text{ sumas/restas.}$$

- b.** Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan, de eliminación gaussiana e híbrido para  $n = 3, 10, 50, 100$ .
- 19.** Use el método híbrido descrito en el ejercicio 16 y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.
- 20.** Repita el ejercicio 7 con el método descrito en el ejercicio 16.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- 1.** Una técnica similar a la eliminación gaussiana apareció por primera vez en “Nine Chapters on the Mathematical Art” (“Nueve capítulos sobre el arte matemático”). Lea el artículo corto “Jiu Zhang Suan Shu and the Gauss Algorithm for Linear Equations” (Jiu Zhang Suan Shu y el algoritmo Gauss para ecuaciones lineales) de Ya-xiang Yuan que puede encontrar en <http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10 yuan-yaxiang.pdf>. Compare la técnica con la que se presenta en este capítulo.

2. A principios de 1700, Newton desarrolló un método similar a la eliminación gaussiana. Compare ese método con el que se presenta en este capítulo.
3. Los pasos 5 y 6 del algoritmo de eliminación gaussiana requiere  $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$  multiplicaciones y divisiones y  $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$  sumas y restas para reducir un sistema completo en el punto en el que se puede utilizar sustitución hacia atrás. Considere el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 4, \\2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5, \\3x_3 + x_4 &= -1.\end{aligned}$$

- ¿Cuántas operaciones se requieren para reducir el sistema unido por debajo de ese mismo punto?
4. El texto describe las tres operaciones utilizadas para crear una secuencia de sistemas lineales equivalentes con la misma solución que el sistema original y cada uno resuelto con mayor facilidad que el último. ¿Cómo afecta esta sucesión de sistemas el costo de encontrar la solución? ¿Se forma error generado con cada sucesión?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

1. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.
 

<b>a.</b> $x_1 - 5x_2 + x_3 = 7,$ $10x_1 + 20x_3 = 6,$ $5x_1 - x_3 = 4.$	<b>b.</b> $x_1 + x_2 - x_3 = 1,$ $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2,$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3.$
<b>c.</b> $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5,$ $-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14,$ $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8.$	<b>d.</b> $x_2 + x_3 = 6,$ $x_1 - 2x_2 - x_3 = 4,$ $x_1 - x_2 + x_3 = 5.$
2. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.
 

<b>a.</b> $13x_1 + 17x_2 + x_3 = 5,$ $x_2 + 19x_3 = 1,$ $12x_2 - x_3 = 0.$	<b>b.</b> $x_1 + x_2 - x_3 = 0,$ $12x_2 - x_3 = 4,$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 5.$
<b>c.</b> $5x_1 + x_2 - 6x_3 = 7,$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 8,$ $6x_1 + 12x_2 + x_3 = 9.$	<b>d.</b> $x_1 - x_2 + x_3 = 5,$ $7x_1 + 5x_2 - x_3 = 8,$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 7.$
3. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.2.
4. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.2.
5. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.3.
6. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.3.
7. Repita el ejercicio 1 usando pivoteo completo.
8. Repita el ejercicio 2 usando pivoteo completo.
9. Utilice eliminación gaussiana y aritmética de corte de tres dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales y compare las aproximaciones con la solución real.
 

<b>a.</b> $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$ $5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0.$ Solución real $[10, 1].$	<b>b.</b> $3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 = -119,$ $-3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 = 120,$ $6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 = -139.$ Solución real $[0, 10, \frac{1}{7}].$
--	---

c.  $1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12,$   
 $14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44,$   
 $100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15,$   
 $15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16.$   
 Solución real  $[0.176, 0.0126, -0.0206, -1.18].$

d.  $\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11},$   
 $\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0,$   
 $\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi,$   
 $\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \frac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}.$   
 Solución real  $[0.788, -3.12, 0.167, 4.55].$

10. Utilice eliminación gaussiana y aritmética de corte de tres dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales y compare las aproximaciones con la solución real.

a.  $58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2,$   
 $-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0.$   
 Solución real  $[1, 10].$

b.  $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953,$   
 $2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965,$   
 $-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714.$   
 Solución real  $[1, 0.5, -1].$

c.  $2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 = \pi,$   
 $0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 = \sqrt{2},$   
 $6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 = 0,$   
 $-5.73x_1 + 6.12x_2 + x_3 - x_4 = -1.$   
 Solución real  $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465].$

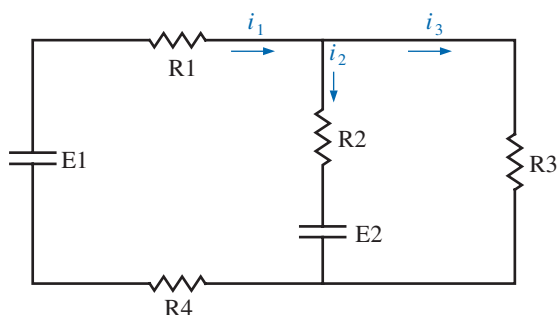
d.  $\pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 = 0,$   
 $ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1,$   
 $x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 = 2,$   
 $-x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 = 3.$   
 Solución real  $[1.35, -4.68, -4.03, -1.66].$

11. Repita el ejercicio 9 usando aritmética de redondeo de tres dígitos.
12. Repita el ejercicio 10 usando aritmética de redondeo de tres dígitos.
13. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial.
14. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial.
15. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de redondeo de tres dígitos.
16. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de redondeo de tres dígitos.
17. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado.
18. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado.
19. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado y aritmética de redondeo de tres dígitos.
20. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado y aritmética de redondeo de tres dígitos.
21. Repita el ejercicio 9 usando eliminación con pivoteo completo.
22. Repita el ejercicio 10 usando eliminación con pivoteo completo.
23. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo completo y aritmética de redondeo de tres dígitos.
24. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo completo y aritmética de redondeo de tres dígitos.

## EJERCICIOS APLICADOS

25. El siguiente circuito tiene cuatro resistores y dos fuentes de voltaje. Los resistores son  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  ohms; las fuentes de voltaje son  $E_1$  y  $E_2$  volts; y las corrientes son  $i_1, i_2$  y  $i_3$  amperes.





- a. Mediante las leyes de Kirchhoff, derive el sistema lineal

$$(R_1 + R_4)i_1 + R_2i_2 = E_1 + E_2$$

$$(R_1 + R_4)i_1 + R_3i_3 = E_1$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

- b. Por medio de eliminación gaussiana sin pivoteo, encuentre  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  cuando  $E_1 = 12$  volts,  $E_2 = 10$  volts,  $R_1 = 2$  ohms,  $R_2 = 2$  ohms,  $R_3 = 4$  ohms, y  $R_4 = 1$  ohm.
- c. Si las resistencias se cambian por  $R_1 = 0.001$  ohms,  $R_2 = 3.333$  ohms,  $R_3 = 4.002$  ohms, y  $R_4 = 0.012$  ohms, encuentre las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , mediante eliminación gaussiana y aritmética de corte de 3 dígitos.
- d. ¿El pivoteo parcial mejora la respuesta de la parte c)?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

26. Suponga que

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 5,$$

$$6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 = 5,$$

con  $|\alpha| < 10$ . ¿Para cuáles de los siguientes valores de  $\alpha$  no habrá intercambio requerido al resolver este sistema mediante pivoteo parcial escalado?

- a.  $\alpha = 6$                       b.  $\alpha = 9$                       c.  $\alpha = -3$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Construya un algoritmo para el procedimiento de pivoteo completo analizado en el texto.
2. Una estrategia nueva de pivoteo para eliminación gaussiana se presentó en el artículo “A New Pivoting Strategy for Gaussian Elimination” (“Una nueva estrategia de pivoteo para eliminación gaussiana”) de Markus Olschowka. Analice la forma en la que esta estrategia se compara con las estrategias analizadas en este capítulo.
3. La estrategia de pivoteo de Rook fue introducida por Neal y Poole en “A Geometric Analysis of Gaussian Elimination” (“Un análisis geométrico de la eliminación gaussiana”). Analice la forma en la que esta estrategia se compara con las estrategias analizadas en este capítulo.
4. Compare y contraste las diferentes estrategias de pivoteo analizadas en la sección 6.2 de su texto.
5. Puesto que la computadora utiliza aritmética de precisión fija, es posible que este pequeño error se introduzca cada vez que se realiza una operación aritmética. Por lo tanto, el uso de una estrategia de pivoteo trivial en eliminación gaussiana puede llevar a un error significativo en la solución de un sistema de ecuaciones lineales. ¿Este error se puede controlar?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

1. Realice las siguientes multiplicaciones de matriz-vector:

a.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-vector:

a.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a.  $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

5. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

7. Dados los sistemas lineales  $4 \times 4$  que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 & - & x_3 + x_4 = 4, & x_1 & - & x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 5; & -x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{array}$$

- a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array} \right].$$

- b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

- c. ¿Qué método requiere más operaciones?

8. Considere los cuatro sistemas lineales  $3 \times 3$  que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, & x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 5; \\ \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, & x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -3; & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{array}$$

- a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array} \right].$$

- b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \right].$$

- c. ¿Qué método requiere más operaciones?

9. A menudo es útil dividir las matrices en una colección de submatrices. Por ejemplo, las matrices

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{array} \right] \quad \text{y} \quad B = \left[ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

se pueden dividir en

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hline 6 & 5 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & \\ \hline A_{21} & A_{22} & \end{array} \right] \quad \text{y} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & \\ \hline B_{21} & B_{22} & \end{array} \right]$$

- a. Muestre que el producto de  $A$  y  $B$  en este caso es

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array} \right]$$

- b. Si  $B$  se dividiera en

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|c|c} 2 & -1 & 7 & \vdots & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & \vdots & 5 \\ -2 & 1 & -3 & \vdots & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array} \right],$$

¿el resultado en la parte a) se mantendría?

- c. Realice una conjetura respecto a las condiciones necesarias para el resultado en la parte a) para mantener el caso general.

## EJERCICIOS APLICADOS

10. El estudio de cadenas alimenticias es un tema importante para determinar la distribución y acumulación de contaminantes ambientales en la materia viva. Suponga que una cadena de alimentos tiene tres vínculos. El primero consiste en vegetación de tipo  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , que provee requisitos alimenticios para los herbívoros de las especies  $h_1, h_2, \dots, h_m$  en el segundo vínculo. El tercer vínculo consiste en los animales carnívoros  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , que dependen enteramente de los herbívoros en el segundo vínculo para su suministro de comida. La entrada  $a_{ij}$  de la matriz

$$A = \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right]$$

representa el número total de plantas tipo  $v_i$  consumidas por los herbívoros en las especies  $h_j$ , mientras  $b_{ij}$  en

$$B = \left[ \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{array} \right]$$

describe el número de herbívoros en las especies  $h_i$  que son devorados por los animales de tipo  $c_j$ .

- a. Muestre que el número de plantas tipo  $v_i$  que al final terminaron en los animales de especies  $c_j$  está determinado por la entrada en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de la matriz  $AB$ .
- b. ¿Qué importancia física está relacionada con las matrices  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ , y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ?
11. En un artículo titulado "Population Waves" ("Ondas de población") Bernadelli [Ber] (también consulte [Se]) realiza la hipótesis de que un tipo de escarabajo simplificado tiene un periodo de vida natural de tres años. Las hembras de esta especie tienen una tasa de supervivencia de  $\frac{1}{2}$  en el primer año de vida, una de  $\frac{1}{3}$  del segundo al tercer año y procrea un promedio de seis hembras nuevas antes de expirar al final del tercer año. Se puede utilizar una matriz para mostrar la contribución de una sola hembra, en un sentido probabilístico, a la población de hembras de la especie al permitir que  $a_{ij}$  en la matriz  $A = [a_{ij}]$  denote la contribución que un solo escarabajo de edad  $j$  realizaría a la población de hembras de edad  $i$  el año siguiente; es decir,

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right].$$

- a. Por lo tanto, la contribución de un escarabajo femenino para la población de dos años se determina a partir de las entradas de  $A^2$ , de tres años a partir de  $A^3$ , y así sucesivamente. Construya  $A^2$  y  $A^3$ , e intente realizar una declaración general sobre la contribución de un escarabajo hembra para la población en  $n$  años tiempo para cualquier valor entero positivo de  $n$ .
- b. Utilice sus conclusiones a partir de a) para describir lo que pasará en los años futuros a una población de estos escarabajos que consiste inicialmente en 6000 escarabajos hembra en cada uno de los tres grupos de edad.
- c. Construya  $A^{-1}$  y describa su importancia respecto a la población de estas especies.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Pruebe las siguientes declaraciones o proporcione contraejemplos para mostrar que no son verdaderas.
  - a. El producto de dos matrices simétricas es simétrico.
  - b. La inversa de una matriz simétrica no singular es una matriz simétrica no singular.
  - c. Si  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$ , entonces  $(AB)^t = A^t B^t$ .
13. Las siguientes declaraciones son necesarias para probar el teorema 6.12.
  - a. Muestre que si  $A^{-1}$  existe, es única.
  - b. Muestre que si  $A$  es no singular, entonces  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
  - c. Muestre que si  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  no singulares, entonces  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .
14.
  - a. Muestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores  $n \times n$  es triangular inferior.
  - b. Muestre que el producto de dos matrices triangulares superiores  $n \times n$  es triangular superior.
  - c. Muestre que la inversa de una matriz triangular inferior no singular  $n \times n$  es triangular inferior.
15. En la sección 3.6 encontramos que la forma paramétrica  $(x(t), y(t))$  de los polinomios cúbicos de Hermite  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  y  $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$  con puntos indicadores  $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$  y  $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$ , respectivamente, están dados por

$$x(t) = (2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1))t^3 + (3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0)t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

y

$$y(t) = (2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1))t^3 + (3(y_1 - y_0) - \beta_1 - 2\beta_0)t^2 + \beta_0 t + y_0.$$

Los polinomios cúbicos de Bézier tienen la forma

$$\hat{x}(t) = (2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1))t^3 + (3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0))t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

y

$$\hat{y}(t) = (2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1))t^3 + (3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0))t^2 + 3\beta_0 t + y_0.$$

- a. Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transforma los coeficientes del polinomio de Hermite en los coeficientes del polinomio de Bézier.

- b. Determine una matriz  $B$  que transforme los coeficientes del polinomio de Bézier en coeficientes del polinomio de Hermite.
16. Suponga que  $m$  sistemas lineales

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

se resuelven, cada uno con la matriz de coeficientes  $n \times n$   $A$ .

- a. Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás aplicada a la matriz aumentada

$$\left[ A : \mathbf{b}^{(1)} \mathbf{b}^{(2)} \dots \mathbf{b}^{(m)} \right]$$

requiere

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas.}$$

- b. Muestre que el método Gauss-Jordan (consulte el ejercicio 14, sección 6.1) aplicado a la matriz aumentada

$$\left[ A : \mathbf{b}^{(1)} \mathbf{b}^{(2)} \dots \mathbf{b}^{(m)} \right]$$

requiere

$$\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)n \quad \text{sumas/restas.}$$

c. Para el caso especial

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow p\text{-ésima fila,}$$

para cada  $p = 1, \dots, m$ , con  $m = n$ , la solución  $\mathbf{x}^{(p)}$  es la  $p$ -ésima columna de  $A^{-1}$ . Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás requiere

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas}$$

para esta aplicación y que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{sumas/restas.}$$

- d. Construya un algoritmo usando la eliminación gaussiana para encontrar  $A^{-1}$ , pero no haga multiplicaciones cuando se sepa que uno de los multiplicadores es 1 y no realice sumas/restas cuando uno de los elementos implicados sea 0. Muestre que los cálculos requeridos se reducen a  $n^3$  multiplicaciones/divisiones y  $n^3 - 2n^2 + n$  sumas/restas.
  - e. Muestre que resolver el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , cuando se conoce  $A^{-1}$  sigue requiriendo  $n^2$  multiplicaciones/divisiones y  $n^2 - n$  sumas/restas.
  - f. Muestre que resolver  $m$  sistemas lineales  $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$ , para  $p = 1, 2, \dots, m$ , por el método  $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$  requiere  $mn^2$  multiplicaciones y  $m(n^2 - n)$  sumas si se conoce  $A^{-1}$ .
  - g. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Compare el número de operaciones requeridas para resolver  $n$  sistemas lineales relacionados con  $A$  mediante eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y al invertir primero  $A$  y después, multiplicar  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  por  $A^{-1}$ , para  $n = 3, 10, 50$  y  $100$ . ¿En algún punto es ventajoso calcular  $A^{-1}$  para resolver sistemas lineales?
17. Utilice el algoritmo desarrollado en el ejercicio 16d) para encontrar las inversas de las matrices no singulares en el ejercicio 5.
  18. Considere el sistema lineal  $2 \times 2$   $(A + iB)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathbf{c} + i\mathbf{d}$  con entradas complejas en forma de componente:

$$(a_{11} + ib_{11})(x_1 + iy_1) + (a_{12} + ib_{12})(x_2 + iy_2) = c_1 + id_1,$$

$$(a_{21} + ib_{21})(x_1 + iy_1) + (a_{22} + ib_{22})(x_2 + iy_2) = c_2 + id_2.$$

- a. Utilice las propiedades de los números complejos para convertir este sistema al sistema lineal real equivalente  $4 \times 4$

$$A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{c},$$

$$B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

b. Resuelva el sistema lineal

$$(1 - 2i)(x_1 + iy_1) + (3 + 2i)(x_2 + iy_2) = 5 + 2i,$$

$$(2 + i)(x_1 + iy_1) + (4 + 3i)(x_2 + iy_2) = 4 - i.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La declaración “todas las matrices diagonales son cuadradas” es verdadera o falsa? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Todas las matrices cuadradas tienen una inversa? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Una alteración muy pequeña en una matriz cuadrada singular puede crear una matriz no singular? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

1. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método del ejemplo 2.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método del ejemplo 2.
5. Encuentre los valores de  $\alpha$  que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Encuentre los valores de  $\alpha$  que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Encuentre los valores de  $\alpha$  de tal forma que el siguiente sistema lineal no tenga soluciones.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6,$$

$$-2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 4.$$

8. Encuentre los valores de  $\alpha$  de tal forma que el siguiente sistema lineal tenga un número infinito de soluciones.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6,$$

$$-2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 1.$$

## EJERCICIOS APLICADOS

9. La matriz de rotación

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

aplicada al vector  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

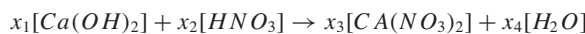
tiene el efecto geométrico de rotar  $\mathbf{x}$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo de  $\theta$  radianes.

- Sea  $\mathbf{y} = R_\theta \mathbf{x}$ . Verifique que  $\mathbf{y}$  es  $\mathbf{x}$  rotado por  $\theta$ . [Sugerencia: Utilice la relación  $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$ , donde  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  y  $\alpha = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$ . Muestre que  $\mathbf{y} = y_1 + iy_2 = re^{i(\theta+\alpha)}$ .]
  - Encuentre  $R_\theta^{-1}$  de dos formas diferentes [Sugerencia: Considere una rotación en la dirección de las manecillas del reloj.]
  - Sean  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  y  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Encuentre la rotación de  $\mathbf{x}$  dada por un ángulo  $\theta$  tanto en el sentido de las manecillas del reloj como en sentido contrario al utilizar  $R_\theta$  y  $R_\theta^{-1}$ .
  - Encuentre el determinante tanto de  $R_\theta$  como de  $R_\theta^{-1}$ .
10. La matriz de rotación para una rotación en 3 dimensiones, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por un ángulo  $\theta$  sobre el vector  $\mathbf{u}$  está determinada por

$$R_{\mathbf{u},\theta} = \begin{bmatrix} u_1^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_1 u_2(1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta & u_1 u_3(1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta \\ u_1 u_2(1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta & u_2^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_2 u_3(1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta \\ u_1 u_3(1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta & u_2 u_3(1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta & u_3^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ ,  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$ .

- Rote el vector  $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^t$  alrededor del vector  $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$  con un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
  - Encuentre la matriz para “deshacer” la rotación en la parte a).
  - Calcule los determinantes de las matrices en las partes a) y b).
  - ¿Las partes b) y c) se pueden generalizar?
11. La fórmula química



indica que  $x_1$  moléculas de hidróxido de calcio  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  se combinan con  $x_2$  moléculas de ácido nítrico  $\text{HNO}_3$  para producir  $x_3$  moléculas de nitrato de calcio  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$  y  $x_4$  moléculas de agua  $\text{H}_2\text{O}$ . Para determinar  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , establecemos ecuaciones para átomos de calcio  $\text{Ca}$ , oxígeno  $\text{O}$ , hidrógeno  $\text{H}$  y nitrógeno  $\text{N}$ .

Puesto que los átomos no se destruyen en esta reacción química, una reacción equilibrada requiere que para calcio  $x_1 = x_3$ , para oxígeno  $2x_1 + 3x_2 = 6x_3 + x_4$ , para hidrógeno  $2x_1 + x_2 = 2x_4$ , y para nitrógeno  $x_2 = 2x_3$ . El sistema lineal resultante  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Calcule el determinante de  $A$ .
- ¿Por qué la parte a) da este resultado?
- Encuentre  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , para equilibrar la ecuación química.
- ¿La respuesta en la parte c) es única?



## EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Use inducción matemática para mostrar que cuando  $n > 1$ , la evaluación del determinante de una matriz  $n \times n$  usando la definición requiere

$$n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \text{ multiplicaciones/divisiones } y \quad n! - 1 \text{ sumas/restas.}$$

13. Si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$ . Muestre que si  $\tilde{A}$  es la matriz obtenida a partir de  $A$  mediante cualquiera de las operaciones

$$(E_1) \leftrightarrow (E_2), \quad (E_1) \leftrightarrow (E_3), \quad \text{o} \quad (E_2) \leftrightarrow (E_3),$$

entonces  $\det \tilde{A} = -\det A$ .

14. Pruebe que  $AB$  es no singular si y sólo si tanto  $A$  como  $B$  son no singulares.  
15. La solución mediante la **regla de Cramer** para el sistema lineal es

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,$$

es

$$x_1 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D},$$

y

$$x_3 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \quad \text{donde} \quad D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

- a. Encuentre la solución para el sistema lineal

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 10,$$

mediante la regla de Cramer.

- b. Muestre que el sistema lineal

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$-x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 9,$$

no tiene solución. Calcule  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ .

- c. Muestre que el sistema lineal

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$-x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 10,$$

tiene un número infinito de soluciones. Calcule  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ .

- d. Pruebe que si un sistema lineal  $3 \times 3$  con  $D = 0$  tiene soluciones, entonces  $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ .  
e. Determine el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requeridas para la regla de Cramer en un sistema  $3 \times 3$ .  
16. a. Generalice la regla de Cramer para un sistema lineal  $n \times n$ .  
b. Utilice el resultado en el ejercicio 12 para determinar el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requerido para la regla de Cramer en un sistema  $n \times n$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. De acuerdo con el texto, existen  $2n$  definiciones diferentes del  $\det A$ , dependiendo de la fila o columna seleccionada. Analice la razón por la que todas las definiciones dan el mismo resultado numérico.
2. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar el determinante de una matriz.
3. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar la inversa de una matriz, si existe.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

1. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación  $P$  tal que  $PA$  se puede factorizar en el producto  $LU$ , donde  $L$  es triangular inferior con 1 en su diagonal y  $U$  es triangular superior para estas matrices.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación  $P$  de tal forma que  $PA$  se puede factorizar en el producto  $LU$ , donde  $L$  es triangular inferior con 1 en su diagonal y  $U$  es triangular superior para estas matrices.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Factorice las siguientes matrices en la descomposición  $LU$  mediante el algoritmo de factorización  $LU$  con  $l_{ii} = 1$  para todas las  $i$ .

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

6. Factorice las siguientes matrices en la descomposición  $LU$  mediante el algoritmo de factorización  $LU$  con  $l_{ii} = 1$  para todas las  $i$ .

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$$

7. Modifique el algoritmo de factorización  $LU$  de tal forma que se pueda utilizar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales.

$$\begin{aligned} \text{a. } 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984, \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 &= -5.049, \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5, \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102, \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 + 1.1973x_4 &= -6.1593, \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 &= 3.0004, \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 - 4.1561x_4 &= 0.0000. \end{aligned}$$

8. Modifique el algoritmo de factorización  $LU$  de tal forma que se pueda usar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales

$$\begin{aligned} \text{a. } x_1 - x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{8}x_3 &= 2, \\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{8}x_3 &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 2x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 2.121x_1 - 3.460x_2 + 5.217x_4 &= 1.909, \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0, \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 &= -2.101, \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824. \end{aligned}$$

9. Obtenga factorizaciones de la forma  $A = P'LU$  para las siguientes matrices.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

10. Obtenga factorizaciones de la forma  $A = P'LU$  para las siguientes matrices.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

## EJERCICIOS APLICADOS

11. El ejercicio 11 de la sección 6.3 se puede generalizar de acuerdo con lo siguiente. Suponga que el escarabajo tiene un periodo de vida de cuatro años. La hembra de la especie tiene una tasa de supervivencia de  $p_1$  en el primer año de vida, tiene una tasa de supervivencia de  $p_2$  desde el segundo hasta su tercer año, y tiene una tasa de supervivencia de  $p_3$  desde el año 3 hasta el año 4 antes de expirar al final del cuarto año. El escarabajo hembra procrea un promedio de  $b_1$  escarabajos hembras en el primer año,  $b_2$  escarabajos hembras en el segundo año,  $b_3$  escarabajos hembras en su tercer año y  $b_4$  escarabajos hembras en su cuarto año.

Se puede usar una matriz  $A = [a_{ij}]$  para modelar las contribuciones que realiza un escarabajo hembra, en un sentido probabilístico, a la población femenina de la especie al hacer que  $a_{ij}$  denote la contribución que una sola hembra de edad  $j$  realizará a la población de hembras del siguiente año de edad  $i$ . Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Por medio de la descomposición  $LU$  o descomposición  $P^T LU$  con  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1/8$ ,  $b_3 = 1/4$ ,  $b_4 = 1/2$ ,  $p_1 = 1/2$ ,  $p_2 = 1/4$  y  $p_3 = 1/8$ , encuentre el número de hembras de cada edad necesario para que la población después de un año sea  $\vec{b} = (175, 100, 50, 25)^T$ .
- Repita la parte a) mediante  $\vec{b} = (100, 100, 100, 100)^T$ . ¿Qué significa su respuesta?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

12. a. Muestre que el algoritmo de factorización  $LU$  requiere

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \text{ multiplicaciones/divisiones y } \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ sumas/restas.}$$

- b. Muestre que resolver  $Ly = b$ , donde  $L$  es una matriz triangular inferior con  $l_{ii} = 1$  para  $i$ , requiere

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ multiplicaciones/divisiones y } \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ sumas/restas.}$$

- Muestre que resolver  $Ax = b$  al factorizar primero  $A$  en  $A = LU$  y, después, resolver  $Ly = b$  y  $Ux = y$  requiere el mismo número de operaciones que el algoritmo de eliminación gaussiana 6.1.
  - Cuente el número de operaciones requeridas para resolver  $m$  sistemas lineales  $Ax^{(k)} = b^{(k)}$  para  $k = 1, \dots, m$ , al factorizar primero  $A$  y, después, utilizar el método de la parte c)  $m$  veces.
13. Suponga  $A = P^T LU$ , donde  $P$  es una matriz de permutación,  $L$  es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y  $U$  es una matriz triangular superior.
- Cuente el número de operaciones necesarias para calcular  $P^T LU$  para una matriz determinada  $A$ .
  - Muestre que si  $P$  contiene  $k$  intercambios de fila, entonces

$$\det P = \det P^T = (-1)^k.$$

- Utilice  $\det A = \det P^T \det L \det U = (-1)^k \det U$  para contar el número de operaciones para determinar  $\det A$  mediante factorización.
- Calcule  $\det A$  y cuente el número de operaciones cuando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La descomposición  $LU$  es única? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Cuántas operaciones se necesitarían para descomponer una matriz  $m \times m$  tridiagonal  $A$  en su factorización  $LU$ ?
3. ¿Cómo se pueden manejar los intercambios de filas en la descomposición  $LU$ ?
4. ¿Por qué la descomposición  $LU$  de una matriz  $A$  es tan útil? ¿La descomposición es computacionalmente práctica?
5. Si una matriz  $A$  requiere intercambios de fila, ¿cómo afecta la descomposición de  $A$  su factorización  $LU$ ?
6. Analice los diferentes tipos de matrices de banda y los efectos de resolver mínimos cuadrados con matrices de banda mediante descomposiciones.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

1. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

a.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

a.  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. Utilice el algoritmo de factorización  $LDL^T$  para encontrar una factorización de la forma  $A = LDL^T$  para las siguientes matrices:

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Utilice el algoritmo de factorización  $LDL^T$  para encontrar una factorización de la forma  $A = LDL^T$  para las siguientes matrices:

a.  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Utilice el algoritmo de Cholesky para encontrar una factorización de la forma  $A = LL'$  para las matrices en el ejercicio 3.
6. Utilice el algoritmo de Cholesky para encontrar una factorización de la forma  $A = LL'$  para las matrices en el ejercicio 4.
7. Modifique el algoritmo de factorización  $LDL'$ , como se sugiere en el texto, de tal forma que se pueda utilizar para resolver los siguientes sistemas lineales.

<b>a.</b> $2x_1 - x_2 = 3,$ $-x_1 + 2x_2 - x_3 = -3,$ $-x_2 + 2x_3 = 1.$	<b>b.</b> $4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.65,$ $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0.05,$ $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$ $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0.5.$
<b>c.</b> $4x_1 + x_2 - x_3 = 7,$ $x_1 + 3x_2 - x_3 = 8,$ $-x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -4,$ $2x_3 + 4x_4 = 6.$	<b>d.</b> $6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7,$ $x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -1,$ $-x_1 - x_3 + 3x_4 = -2.$

8. Utilice el algoritmo modificado a partir del ejercicio 7 para resolver los siguientes sistemas lineales.

<b>a.</b> $4x_1 - x_2 + x_3 = -1,$ $-x_1 + 3x_2 = 4,$ $x_1 + 2x_3 = 5.$	<b>b.</b> $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$ $2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 1,$ $2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0.$
<b>c.</b> $4x_1 + 2x_3 + x_4 = -2,$ $3x_2 - x_3 + x_4 = 0,$ $2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 7,$ $x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -2.$	<b>d.</b> $4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$ $x_1 + 3x_2 - x_4 = 2,$ $x_1 + 2x_3 + x_4 = 1,$ $x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1.$

9. Modifique el algoritmo de Cholesky, como se sugiere en el texto, de tal forma que se pueda usar para resolver sistemas lineales y utilice el algoritmo modificado para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 7.
10. Use el algoritmo modificado desarrollado en el ejercicio 9 para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 8.
11. Utilice la factorización de Crout para sistemas tridiagonales para resolver los siguientes sistemas lineales.

<b>a.</b> $x_1 - x_2 = 0,$ $-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1,$ $-x_2 + 2x_3 = 1.5.$	<b>b.</b> $3x_1 + x_2 = -1,$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7,$ $2x_2 + 5x_3 = 9.$
<b>c.</b> $2x_1 - x_2 = 3,$ $-x_1 + 2x_2 - x_3 = -3,$ $-x_2 + 2x_3 = 1.$	<b>d.</b> $0.5x_1 + 0.25x_2 = 0.35,$ $0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 = 0.77,$ $0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 = -0.5,$ $x_3 - 2x_4 = -2.25.$

12. Utilice la factorización de Crout de sistemas tridiagonales para resolver los siguientes sistemas lineales.

<b>a.</b> $2x_1 + x_2 = 3,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = -2,$ $2x_2 + 3x_3 = 0.$	<b>b.</b> $2x_1 - x_2 = 5,$ $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$ $x_2 + 4x_3 = 0.$
<b>c.</b> $2x_1 - x_2 = 3,$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,$ $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$ $x_3 + 2x_4 = 6.$	<b>d.</b> $2x_1 - x_2 = 1,$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2,$ $2x_2 + 4x_3 - x_4 = -1,$ $2x_4 - x_5 = -2,$ $x_4 + 2x_5 = -1.$

- 13.** Sea  $A$  una matriz tridiagonal  $10 \times 10$  determinada por  $a_{ii} = 2$ ,  $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ , para cada  $i = 2, \dots, 9$ , y  $a_{11} = a_{10,10} = 2$ ,  $a_{12} = a_{10,9} = -1$ . Sea  $\mathbf{b}$  el vector columna 10-dimensional dado por  $b_1 = b_{10} = 1$  y  $b_i = 0$ , para cada  $i = 2, 3, \dots, 9$ . Resuelva  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mediante la factorización de Crout para sistemas tridiagonales.
- 14.** Modifique la factorización  $LDL^t$  para factorizar una matriz simétrica  $A$ . [Nota: La factorización no siempre puede ser posible.] Aplique el nuevo algoritmo a las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix} \\ \text{b.} & A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix} \\ \text{c.} & A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix} \\ \text{d.} & A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 15.** ¿Cuál de las matrices simétricas en el ejercicio 14 son definidas positivas?

**16.** Encuentre todas las  $\alpha$  de tal forma que  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  sea definida positiva.

**17.** Encuentre todas las  $\alpha$  de tal forma que  $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  sea definida positiva.

- 18.** Encuentre todas las  $\alpha$  y  $\beta > 0$  de tal forma que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

sea estrictamente diagonalmente dominante.

- 19.** Encuentre todas las  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  de tal forma que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

sea estrictamente diagonalmente dominante.

- 20.** Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Encuentre todos los valores de  $\alpha$  para los cuales:

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| <b>a.</b> $A$ es singular                              | <b>b.</b> $A$ es simétrica         |
| <b>c.</b> $A$ es estrictamente diagonalmente dominante | <b>d.</b> $A$ es definida positiva |

- 21.** Si

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre todos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para los cuales:

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| <b>a.</b> $A$ es singular                              | <b>b.</b> $A$ es simétrica         |
| <b>c.</b> $A$ es estrictamente diagonalmente dominante | <b>d.</b> $A$ es definida positiva |

## EJERCICIOS APLICADOS

22. En un artículo de Dorn y Burdick [DoB] se reporta que la longitud promedio del ala que resulta de aparear tres variedades mutantes de moscas de fruta (*Drosophila melanogaster*) se puede expresar en la forma de matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

donde  $a_{ij}$  denota la longitud promedio del ala de una descendencia que resulta de aparear un macho tipo  $i$  con una hembra tipo  $j$ .

- ¿Qué importancia física se relaciona con la simetría de esta matriz?
  - ¿Esta matriz es definida positiva? De ser así, pruébelo; de no ser así encuentre un vector  $\mathbf{x}$  diferente de cero para el que  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} \leq 0$ .
23. Suponga  $V = 5.5$  volts en el ejemplo principal de este capítulo. Al reordenar las ecuaciones, se puede formar un sistema lineal tridiagonal. Utilice el algoritmo de factorización de Crout para encontrar la solución del sistema modificado.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

24. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  estrictamente diagonalmente dominantes. ¿Cuál de las siguientes deben ser estrictamente diagonalmente dominantes?
- $-A$
  - $A^t$
  - $A + B$
  - $A^2$
  - $A - B$
25. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  definidas positivas. ¿Cuál de las siguientes deben ser definidas positivas?
- $-A$
  - $A^t$
  - $A + B$
  - $A^2$
  - $A - B$
26. Suponga que  $A$  y  $B$  conmutan; es decir,  $AB = BA$ . ¿ $A^t$  y  $B^t$  también deben conmutar?
27. Construya una matriz  $A$  que no sea simétrica, pero para la que  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$  para toda  $\mathbf{x} \neq 0$ .
28. Muestre que la eliminación gaussiana se puede realizar en  $A$  sin intercambio de columnas si y sólo si todas las primeras submatrices principales de  $A$  no son singulares. [Sugerencia: Particione cada matriz en la ecuación

$$A^{(k)} = M^{(k-1)} M^{(k-2)} \dots M^{(1)} A$$

verticalmente entre la  $k$ -ésima y la  $(k + 1)$ -ésima columnas y horizontalmente entre la  $k$ -ésima y la  $(k + 1)$ -ésima filas (consulte el ejercicio 9 de la sección 6.3). Muestre que la no singularidad de la primera submatriz principal de  $A$  es equivalente a  $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ .]

29. Normalmente, las submatrices tridiagonales se etiquetan mediante la notación

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

para enfatizar que no es necesario considerar todas las entradas de la matriz. Reescriba el algoritmo de factorización de Crout mediante esta notación y modifique la notación de  $l_{ij}$  y  $u_{ij}$  de manera similar.

30. Pruebe el teorema 6.31 [Sugerencia: Muestre que  $|u_{i,i+1}| < 1$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , y que  $|l_{ii}| > 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Deduzca que  $\det A = \det L \cdot \det U \neq 0$ .]
31. Construya el conteo de operaciones para resolver un sistema lineal  $n \times n$  mediante el algoritmo de factorización de Crout.
32. Suponga que la matriz definida positiva  $A$  tiene factorización de Cholesky  $A = LL^t$  y también factorización  $A = \hat{L}D\hat{L}^t$ , donde  $D$  es la matriz diagonal con entradas diagonales positivas  $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$ . Sea  $D^{1/2}$  la matriz diagonal con entradas diagonales  $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \dots, \sqrt{d_{nn}}$ .
- Muestre que  $D = D^{1/2} D^{1/2}$ .
  - Muestre que  $L = \hat{L} D^{1/2}$ .



## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Distinga entre las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky. ¿En qué condiciones es más apropiado utilizarlas?
2. Muchos problemas en robótica se pueden formular como problemas de optimización de mínimos cuadrados no lineales. Analice la forma en la que se puede usar el método de Cholesky para encontrar la configuración óptima de las variables que satisfacen al máximo el conjunto de restricciones no lineales.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. SuperLU es un paquete de código abierto para la factorización  $LU$ . Proporcione una descripción general de este paquete.
2. KLU es un algoritmo de código abierto para la factorización  $LU$ . Proporcione una descripción general de este algoritmo.
3. ALGLIB es una biblioteca de procesamiento de datos y análisis numérico multiplataforma y de código abierto que maneja la factorización  $LDL^T$ . Proporcione una descripción general del paquete ALGLIB y, en especial, la subrutina de factorización  $LDL^T$ .
3. LIBMF es una biblioteca de factorización de matriz de código abierto que maneja la factorización  $LL^T$ . Proporcione una descripción general del paquete LIBMF y, en especial, la subrutina de factorización  $LL^T$ .

## CONCEPTOS CLAVE

Conteo de operaciones	Matriz	Pivoteo parcial
Determinante de la matriz	Matriz cuadrada	Pivoteo parcial escalado
Eliminación gaussiana	Matriz de banda	Producto matriz-matriz
Factorización Crout	Matriz de permutación	Producto matriz-vector
Factorización de Cholesky	Matriz diagonal	Punto pivotal
Factorización de matriz	Matriz identidad	Sistemas lineales
Factorización $LDL^T$	Matriz inversa	Sustitución hacia atrás
Factorización LU	Matriz triangular inferior	Transpuesta de la matriz
Factorización $P^T LU$	Matriz triangular superior	Vector
Inversión de matriz	Matriz tridiagonal	
Matrices especiales	Pivoteo completo	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos visto métodos directos para resolver sistemas lineales. Un sistema lineal consiste en  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas expresadas en notación de matriz como  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Estas técnicas utilizan una secuencia finita de operaciones aritméticas para determinar la solución exacta del sistema sujeto solamente a error de redondeo. Encontramos que el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , tiene una sola solución si y sólo si existe  $A^{-1}$ , que es equivalente a  $\det A \neq 0$ . Cuando se conoce  $A^{-1}$ , la solución del sistema lineal es el vector  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

Las técnicas de pivoteo se introdujeron para minimizar los efectos del error de redondeo, que puede dominar la solución cuando se usan métodos directos. Estudiamos el pivoteo parcial y el pivoteo parcial escalado, y analizamos brevemente el pivoteo completo. Recomendamos los métodos de pivoteo parcial y pivoteo parcial escalado para la mayor parte de los problemas porque esto disminuye los efectos del error de redondeo sin añadir demasiados cálculos adicionales. Debería usarse el pivoteo completo si se sospecha que el error de redondeo es grande. En la sección 5 del capítulo 7 observaremos algunos procedimientos para calcular este error de redondeo.

Se mostró la eliminación gaussiana con modificaciones menores para producir una factorización de la matriz  $A$  en  $LU$ , donde  $L$  es triangular inferior con números 1 en la diagonal y  $U$  es triangular superior. Este proceso recibe el nombre de factorización de Doolittle. No

todas las matrices no singulares se pueden factorizar de esta forma, pero una permutación de las filas siempre proporcionará una factorización de la forma  $PA = LU$ , donde  $P$  es la matriz de permutación utilizada para reordenar las filas de  $A$ . La ventaja de la factorización es que el trabajo disminuye significativamente al resolver los sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con la misma matriz de coeficientes  $A$  y diferentes vectores  $\mathbf{b}$ .

Las factorizaciones toman una forma más simple cuando la matriz  $A$  es definida positiva. Por ejemplo, la factorización de Choleski tiene la forma  $A = LL^T$ , donde  $L$  es triangular inferior. Una matriz simétrica que tiene una factorización  $LU$  también se puede factorizar de la forma  $A = LDL^T$ , donde  $D$  es diagonal y  $L$  es triangular inferior con números 1 en la diagonal. Con estas factorizaciones, las manipulaciones relacionadas con  $A$  se pueden simplificar. Si  $A$  es tridiagonal, la factorización  $LU$  toma una forma especialmente simple, donde  $U$  tiene números 1 en la diagonal principal y ceros en las demás, excepto en la diagonal inmediatamente sobre la diagonal principal. Además,  $L$  tiene sus entradas diferentes a cero en la diagonal principal y una diagonal debajo. Otro método importante de factorización de matriz se considera en la sección 6 del capítulo 9.

Los métodos directos son los seleccionados para la mayoría de los sistemas lineales. Para las matrices tridiagonales, en banda y definidas positivas, se recomiendan los métodos especiales. Para el caso general se recomiendan los métodos de eliminación gaussiana o de factorización  $LU$ , que permiten el pivoteo. En estos casos, deberían supervisarse los efectos del error de redondeo. En la sección 7.5 analizamos el cálculo de errores en métodos directos.

Los grandes sistemas lineales con entradas principalmente 0 que se presentan en patrones regulares se pueden resolver de manera eficiente por medio de un procedimiento iterativo, como el que se analiza en el capítulo 7. Los sistemas de este tipo surgen de manera natural, por ejemplo, cuando se usan técnicas de diferencia finita para resolver problemas de valor en la frontera, una aplicación común en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Puede ser muy difícil resolver sistemas lineales grandes que tienen entradas principalmente diferentes de 0 o 1, donde las entradas 0 no están en patrón predecible. La matriz relacionada con el sistema se puede colocar en almacenamiento secundario y forma dividida, y leer las partes en la memoria principal sólo conforme sea necesario para el cálculo. Los métodos que requieren almacenamiento secundario pueden ser tanto iterativos como directos, pero en general requieren técnicas provenientes de los campos de la estructura de datos y la teoría gráfica. Se dirige al lector a [BuR] y [RW] para un análisis de las técnicas actuales.

Para obtener más información sobre la solución numérica de sistemas y matrices lineales consulte Golub y Van Loan [GV], Forsythe y Moler [FM] y Stewart [Stew1]. El uso de técnicas directas para resolver grandes sistemas dispersos se analiza detalladamente en George y Liu [GL] y en Pissanetzky [Pi]. Coleman y Van Loan [CV] consideran el uso de BLAS, LINPACK y MATLAB.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

- a. Aproxime  $u(3)$  usando el algoritmo de disparo lineal.
- b. Compare los resultados de la parte a) con el potencial real  $u(3)$ , donde

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left( \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right).$$

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Escriba los problemas de valor inicial de segundo orden (11.3) y (11.4) como sistemas de primer orden y deduzca las ecuaciones necesarias para resolver los sistemas usando el método Runge-Kutta de cuarto orden para los sistemas.
8. Muestre que, de acuerdo con la hipótesis del corolario 11.2, si  $y_2$  es la solución para  $y'' = p(x)y' + q(x)y$  y  $y_2(a) = y_2(b) = 0$ , entonces  $y_2 \equiv 0$ .
9. Considere el problema de valor en la frontera

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

Encuentre valores para  $b$  y  $B$ , de tal forma que el problema de valor en la frontera

- a. No tenga solución
  - b. Tenga una solución exacta
  - c. Tenga infinitas soluciones
10. Intente aplicar el ejercicio 9 al problema del valor en la frontera
- $$y'' - y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

¿Qué sucede? ¿Cómo se relacionan ambos problemas con el corolario 11.2?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Por qué un solucionador de valor en la frontera con base en el método de disparo usando un método Runge-Kutta continuo con control de defecto para resolver el problema de valor inicial relacionado podría tener un mejor desempeño que el método de disparo lineal?
2. El disparo múltiple es una de las técnicas numéricas que más se usan para resolver los problemas BVODE. Los algoritmos paralelos son algoritmos que se pueden ejecutar de manera simultánea uno a la vez en diferentes dispositivos de procesamiento y, a continuación, combinarse de nuevo al final para obtener un resultado. ¿Tiene sentido usar un algoritmo numérico paralelo para BVODE con base en disparo múltiple?
3. ¿Por qué deberían verificarse las condiciones del teorema 11.1 que garantiza la existencia de una solución para un BVP antes de aplicar cualquier esquema numérico?
4. ¿Los métodos de disparo lineal son estables? ¿Por qué sí o por qué no?

---

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

1. Use el algoritmo de disparo no lineal con  $h = 0.5$  para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Compare sus resultados con la solución real  $y = \ln x$ .

2. Use el algoritmo de disparo no lineal con  $h = 0.25$  para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare sus resultados con la solución real  $y(x) = 1/(x + 3)$ .

Compare sus resultados con la solución real  $y(x) = 1/(x + 3)$ .

3. Use el método de disparo no lineal con  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor en la frontera. Se proporciona la solución real para comparar sus resultados.
  - a.  $y'' = -e^{-2y}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 2$ ; use  $N = 10$ ; solución real  $y(x) = \ln x$ .
  - b.  $y'' = y' \cos x - y \ln y$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = e$ ; use  $N = 10$ ; solución real  $y(x) = e^{\sin x}$ .
  - c.  $y'' = -(2(y')^3 + y^2 y') \sec x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2^{-1/4}$ ,  $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$ ; use  $N = 5$ ; solución real  $y(x) = \sqrt{\sin x}$ .
  - d.  $y'' = \frac{1}{2}(1 - (y')^2 - y \sin x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi) = 2$ ; use  $N = 20$ ; solución real  $y(x) = 2 + \sin x$ .
4. Use el método de disparo no lineal con  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor en la frontera. Se proporciona la solución real para comparar sus resultados.
  - a.  $y'' = y^3 - yy'$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y(2) = \frac{1}{3}$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = (x+1)^{-1}$ .
  - b.  $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(2) = \frac{5}{2}$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = x + x^{-1}$ .
  - c.  $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ ,  $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = x^{-1} + \ln x$ .
  - d.  $y'' = 2(y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 256$ ; use  $h = 0.05$ ; solución real  $y(x) = x^3 \ln x$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

5. La ecuación Van der Pol,

$$y'' - \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0,$$

rige el flujo de corriente en un tubo de vacío con tres elementos internos. Si  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(2) = 1$ . Aproxime la solución  $y(t)$  para  $t = 0.2i$ , donde  $1 \leq i \leq 9$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

6. a. Modifique el algoritmo 11.2 para incluir el método de secante en lugar del método de Newton. Use  $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$  y  $t_1 = t_0 + (\beta - y(b, t_0))/(b - a)$ .
- b. Repita el ejercicio 4a) y 4c) usando el algoritmo de secante derivado en la parte (a) y compare el número de iteraciones requeridas para los dos métodos.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Tiene sentido combinar el método explícito de Euler con el método de Newton para resolver los problemas no lineales de valor en la frontera en dos puntos?
2. Se desarrolló un método de disparo modificado que combinaba el método de disparo simple con el de un método de disparo múltiple. ¿Cuáles son las ventajas (desventajas) de ese tipo de enfoque?
3. ¿Los métodos de disparo no lineal son estables? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.3

1. El problema de valor en la frontera

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

tiene la solución  $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$ . Use el método de diferencia finita lineal para aproximar la solución y compare los resultados con la solución real.



- c. La ley de estado requiere que  $\max_{0 < x < l} w(x) < 1/300$ . ¿Esta viga cumple con el código de estado?
8. La deflexión de una placa rectangular larga cargada de manera uniforme bajo una fuerza de tensión axial está regida por una ecuación diferencial de segundo orden.  $S$  representa la fuerza axial y  $q$  la intensidad de la carga uniforme. La deflexión  $W$  a lo largo de la longitud elemental está dada por

$$W''(x) - \frac{S}{D} W(x) = \frac{-ql}{2D} x + \frac{q}{2D} x^2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad W(0) = W(l) = 0,$$

donde  $l$  es la longitud de la placa y  $D$  es la rigidez de flexión de la placa. Si  $q = 200$  libras/pulgada<sup>2</sup>,  $S = 100$  libra/pulgada,  $D = 8.8 \times 10^7$  libra/pulgada y  $l = 50$  pulgadas. Aproxime la flexión en los intervalos de 1 pulgada.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

9. Pruebe que el teorema 11.3. [*Sugerencia:* Para usar el teorema 6.31, primero muestre que  $|\frac{h}{2} p(x_i)| < 1$  implica que  $|-1 - \frac{h}{2} p(x_i)| + |-1 + \frac{h}{2} p(x_i)| = 2$ .]
10. Muestre que si  $y \in C^6[a, b]$  y si  $w_0, w_1, \dots, w_{N+1}$  satisface la ecuación (11.18), entonces

$$w_i - y(x_i) = Ah^2 + O(h^4),$$

donde  $A$  es independiente de  $h$ , siempre que  $q(x) \geq w > 0$  en  $[a, b]$  para algunas  $w$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- ¿Cuál sería el efecto de usar la fórmula de diferencias hacia atrás o hacia adelante para  $y$  en lugar de la fórmula de diferencia centrada?
- ¿Se podrían usar cocientes de diferencia de orden superior para las derivadas en el método de diferencia finita para mejorar la exactitud? ¿Cuál sería el efecto?
- ¿Qué es cancelación sustractiva?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.4

1. Use el método de diferencias finitas no lineal con  $h = 0.5$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Compare sus resultados con la solución real  $y = \ln x$ .

2. Use el método de diferencia finita no lineal con  $h = 0.25$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare sus resultados con la solución real  $y(x) = 1/(x + 3)$ .

3. Use el algoritmo de diferencia finita no lineal con  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

a.  $y'' = -e^{-2y}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 2$ ; use  $N = 9$ ; solución real  $y(x) = \ln x$ .

b.  $y'' = y' \cos x - y \ln y$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = e$ ; use  $N = 9$ ; solución real  $y(x) = e^{\sin x}$ .

c.  $y'' = -(2(y')^3 + y^2 y')$  sec  $x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $y(\frac{\pi}{4}) = 2^{-1/4}$ ,  $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$ ; use  $N = 4$ ; solución real  $y(x) = \sqrt{\sin x}$ .

d.  $y'' = \frac{1}{2}(1 - (y')^2 - y \sin x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(\pi) = 2$ ; use  $N = 19$ ; solución real  $y(x) = 2 + \sin x$ .

4. Use el algoritmo de diferencia finita no lineal con  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera
  - a.  $y'' = y^3 - yy'$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y(2) = \frac{1}{3}$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = (x+1)^{-1}$ .
  - b.  $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(2) = \frac{5}{2}$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = x + x^{-1}$ .
  - c.  $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ,  $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ ,  $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = x^{-1} + \ln x$ .
  - d.  $y'' = (y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = \ln 256$ ; use  $h = 0.05$ ; solución real  $y(x) = x^3 \ln x$ .
5. Repita el ejercicio 4(a) y 4(b) usando extrapolación.

## EJERCICIOS APLICADOS

6. En el ejercicio 7 de la sección 11.3 se aproximó la deflexión de una viga con extremos soportados para carga uniforme. Al usar una representación de la curvatura más adecuada obtenemos la ecuación diferencial

$$[1 + (w'(x))^2]^{-3/2} w''(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI} (x - l), \quad \text{para } 0 < x < l.$$

Aproxime la deflexión  $w(x)$  de la viga cada 6 pulgadas y compare los resultados con los del ejercicio 7 de la sección 11.3.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que la hipótesis enunciada al principio de esta sección garantiza la no singularidad de la matriz jacobiana  $J$  para  $h < 2/L$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Cuál sería el efecto de usar la fórmula de diferencias hacia atrás o hacia adelante para  $y$  en lugar de la fórmula de diferencia centrada?
2. ¿Sería posible usar cocientes de diferencia de orden superior para las derivadas en el método de diferencia finita para mejorar la exactitud? ¿Cuál sería el efecto?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.5

1. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar la solución para el problema de valor en la frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.3$ ,  $x_2 = 0.7$ ,  $x_3 = 1$ . Compare sus resultados con la solución real  $y(x) = -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} x$ .

2. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.4$ ,  $x_2 = 0.8$ ,  $x_3 = 1$ . Compare sus resultados con la solución real  $y(x) = x^2 - x$ .

3. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar las soluciones de los problemas de valor en la frontera y compare los resultados con la solución real:

- a.  $-x^2 y'' - 2xy' + 2y = -4x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ; use  $h = 0.1$ ; solución real  $y(x) = x^2 - x$ .



- b.  $-\frac{d}{dx}(e^x y') + e^x y = x + (2-x)e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \text{ use } h = 0.1; \text{ solución real } y(x) = (x-1)(e^{-x} - 1).$
- c.  $-\frac{d}{dx}(e^{-x} y') + e^{-x} y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \text{ use } h = 0.05; \text{ solución real } y(x) = x(e^x - e).$
- d.  $-(x+1)y'' - y' + (x+2)y = [2 - (x+1)^2]e \ln 2 - 2e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \text{ use } h = 0.05; \text{ solución real } y(x) = e^x \ln(x+1) - (e \ln 2)x.$
4. Use el algoritmo de spline cúbico con  $n = 3$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

y compare el resultado con la solución real proporcionada en el ejercicio 1.

5. Use el algoritmo de spline cúbico con  $n = 3$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

y compare el resultado con la solución real proporcionada en el ejercicio 2.

6. Repita el ejercicio 3 usando el algoritmo de spline cúbico.

## EJERCICIOS APLICADOS

7. El ejemplo principal de este capítulo abordaba el problema de valor en la frontera

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x-l), \quad 0 < x < l, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Se resolvió un ejemplo especial usando diferencias finitas en el ejercicio 7 de la sección 11.3. El cambio en la variable  $z = lz$  da el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{Sl^2}{EI}w = -\frac{ql^4}{2EI}z(z-1), \quad 0 < z < 1, \quad z(0) = z(1) = 0.$$

Repita el ejercicio 7 de la sección 11.3 usando el algoritmo lineal por tramos.

8. En el ejercicio 8 de la sección 11.3, la deflexión de una placa rectangular larga cargada de manera uniforme bajo una fuerza de tensión axial está dirigida por un problema de valor en la frontera de segundo orden. Sea  $S$  la fuerza axial y  $q$  la intensidad de la carga uniforme. La deflexión  $W$  a lo largo de la longitud elemental está provista por

$$W''(x) - \frac{S}{D}W(x) = -\frac{ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2, \quad 0 < x < l, \quad W(0) = W(l) = 0.$$

El cambio en la variable  $x = lz$  transforma el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{Sl^2}{DI}W = \frac{ql^4}{2D}z - \frac{ql^4}{2D}z^2, \quad 0 < z < 1, \quad W(0) = W(1) = 0.$$

Repita el ejercicio 8 de la sección 11.3 usando el algoritmo de Rayleigh-Ritz de spline cúbico.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

9. Muestre que el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

se puede transformar por medio del cambio de variable

$$z = y - \beta x - (1-x)\alpha$$

en la forma

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

10. Use el ejercicio 10 y el algoritmo lineal por tramos con  $n = 9$  para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

11. Repita el ejercicio 9 usando el algoritmo de spline cúbico.

12. Muestre que el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

se puede transformar en la forma

$$-\frac{d}{dw}(p(w)z') + q(w)z = F(w), \quad 0 \leq w \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0,$$

mediante un método similar al que se dio en el ejercicio 9.

13. Muestre que las funciones base lineales por tramos  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  son linealmente independientes.  
 14. Muestre que las funciones base de spline cúbico  $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$  son linealmente independientes.  
 15. Muestre que la matriz dada por las funciones base lineales por tramos es definida positiva.  
 16. Muestre que la matriz dada por las funciones base de spline cúbico es definida positiva.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Explique el significado de colocación. ¿Cómo difiere el método de colocación del método de Rayleigh-Ritz?  
 2. ¿Existe alguna diferencia entre los métodos de colocación y de Galerkin?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. El conjunto de herramientas ACADO es un solucionador de disparo único directo con base en Runge-Kutta. Describa algunos aspectos de este conjunto de herramientas.  
 2. Describa el modelo del método de disparo Ejs.

## CONCEPTOS CLAVE

Aproximación discreta	Método de disparo lineal	Problema de valor lineal en
Base lineal por tramos	Método de disparo no lineal	la frontera
Diferencia finita	Método Rayleigh-Ritz	Problemas de variación
Extrapolación de Richards	Métodos de diferencias	Rayleigh-Ritz
Iteración de Newton	finitas	Spline cúbico de Rayleigh-
Lineal por tramos		Ritz

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos los métodos para aproximar soluciones de problemas de valor en la frontera. Para el problema de valor lineal en la frontera

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

consideramos tanto un método de disparo lineal como un método de diferencia finita para aproximar la solución. El método de disparo usa una técnica de valor inicial para resolver problemas

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = 0,$$

y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = 1.$$

Un promedio ponderado de estas soluciones produce una solución del problema de valor lineal en la frontera, a pesar de que en ciertas situaciones existen problemas con error de redondeo.

En el método de diferencias finitas, colocamos  $y''$  e  $y'$  con aproximaciones de diferencia y resolvemos un sistema lineal. A pesar de que las aproximaciones quizá no sean tan exactas como el método de disparo, existe menos sensibilidad al error de redondeo. Existen métodos de diferencia de orden superior o extrapolación para mejorar la exactitud.

Para el problema no lineal en la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

también consideramos dos métodos. El método de disparo no lineal requiere la solución del problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = t,$$

para una selección inicial de  $t$ . Mejoramos la selección de  $t$  al usar el método de Newton para aproximar la solución de  $y(b, t) = \beta$ . Este método requiere resolver dos problemas de valor inicial en cada iteración. La exactitud depende de la selección del método para resolver los problemas de valor inicial.

El método de diferencia finita para ecuación no lineal requiere reemplazar  $y''$  e  $y'$  mediante cocientes de diferencia, lo cual resulta en un sistema no lineal. Este sistema se resuelve con el método de Newton. Es posible usar diferencias de orden superior o extrapolación para mejorar la exactitud. Los métodos de diferencia finita tienden a ser menos sensibles al error de redondeo que los métodos de disparo.

Se ilustró el método Rayleigh-Ritz-Galerkin para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Se puede obtener una aproximación lineal por tramos o una aproximación por spline cúbico.

La mayor parte del material que aborda los problemas de valor en la frontera de segundo orden se puede esperar para problemas con condiciones en la frontera de la forma

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha \quad \text{y} \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta,$$

donde  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$  y  $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ , pero algunas de las técnicas se vuelven bastante complicadas. Se aconseja al lector interesado en problemas de este tipo considerar un libro especializado en problemas de valor en la frontera, como [Keller, H].

Más información sobre los problemas generales relacionados con la solución numérica de los problemas de valor en la frontera de dos puntos se puede encontrar en Keller [Keller, H] y Bailey, Shampine y Waltman [BSW]. Roberts y Shipman [RS] se enfocan en los métodos de disparo para el problema de valor en la frontera en dos puntos y Pryce [Pr] restringe su atención a los problemas Sturm-Liouville. El libro de Ascher, Mattheij y Russell [AMR] incluye una presentación amplia de múltiples métodos de disparo y de disparo paralelo.

# Capítulo 10

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.1

1. El sistema no lineal

$$-x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18, \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

tiene dos soluciones.

- Aproxime las soluciones gráficamente.
- Use las aproximaciones a partir de la parte a) como aproximaciones iniciales para una iteración de punto fijo adecuada y determine las soluciones dentro de  $10^{-5}$  en la norma  $l_\infty$ .

2. El sistema no lineal

$$x_2^2 - x_1^2 + 4x_1 - 2 = 0, \quad x_1^2 + 3x_2^2 - 4 = 0$$

tiene dos soluciones.

- Aproxime las soluciones gráficamente.
- Use las aproximaciones a partir de la parte a) como aproximaciones iniciales para una iteración de punto fijo adecuada y determine las soluciones dentro de  $10^{-5}$  en la norma  $l_\infty$ .

3. El sistema no lineal

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0, \quad x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

se puede transformar en el problema de punto fijo

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}, \quad x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}.$$

- Use el teorema 10.6 para mostrar que  $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^t$  mapea  $D \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  tiene un punto fijo único en

$$D = \{ (x_1, x_2)^t \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5 \}.$$

- Aplique la iteración de punto fijo para aproximar la solución dentro de  $10^{-5}$  en la norma  $l_\infty$ .
- ¿El método Gauss-Siedel acelera la convergencia?

4. El sistema no lineal

$$5x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

tiene una solución cerca de  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$ .

- Encuentre una función  $\mathbf{G}$  y un conjunto  $D$  en  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que  $\mathbf{G} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{G}$  tiene un punto fijo único en  $D$ .
  - Aplique la iteración del punto fijo para aproximar la solución dentro de  $10^{-5}$  en la norma  $l_\infty$ .
  - ¿El método de Gauss-Siedel acelera la convergencia?
5. Use el teorema 10.6 para mostrar que  $\mathbf{G} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene un punto fijo único en  $D$ . Aplique la iteración de punto fijo para aproximar la solución dentro de  $10^{-5}$  en la norma  $l_\infty$ .

$$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{\cos(x_2x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25} \sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, \right. \\ \left. - \frac{1}{20} e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)^t;$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \}$$

$$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{13 - x_2^2 + 4x_3}{15}, \frac{11 + x_3 - x_1^2}{10}, \frac{22 + x_2^3}{25} \right);$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid 0 \leq x_i \leq 1.5, i = 1, 2, 3 \}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) &= (1 - \cos(x_1 x_2 x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3, x_1^2 \\ &\quad + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1)^t; \\ D &= \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -0.1 \leq x_1 \leq 0.1, -0.1 \leq x_2 \leq 0.3, 0.5 \leq x_3 \leq 1.1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) &= \left( \frac{1}{3} \cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1, \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)^t; \\ D &= \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \} \end{aligned}$$

6. Use la iteración de punto fijo para encontrar soluciones para los siguientes sistemas no lineales, precisos dentro de  $10^{-5}$  por medio de la norma  $l_\infty$ .

$$\begin{aligned} \text{a. } x_2^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 3x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 &= 0, \\ \frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

7. Use el método Gauss-Siedel para aproximar los puntos fijos en el ejercicio 5 dentro de  $10^{-5}$ , por medio de la norma  $l_\infty$ .
8. Repita el ejercicio 6 con el método Gauss-Siedel.

## EJERCICIOS APLICADOS

9. En el ejercicio 6 de la sección 5.9 consideramos el problema de predecir la población de dos especies que compiten por el mismo suministro de comida. En el problema suponemos que las poblaciones podrían predecirse al resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t))$$

y

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)).$$

En este ejercicio nos gustaría considerar el problema de determinar las poblaciones de equilibrio de las dos especies. Los criterios matemáticos que deben satisfacerse para lograr que la población esté en equilibrio son que, simultáneamente,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 0.$$

Esto ocurre cuando la primera especie está extinta y la segunda especie tiene una población de 20000 o cuando la segunda especie está extinta y la primera especie tiene una población de 13333. ¿El equilibrio se puede presentar en otra situación?

10. La dinámica de poblaciones de las tres especies competidoras se pueden describir mediante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t) \left[ 1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j(t) \right]$$

para cada  $i = 1, 2, 3$  donde la población de la  $i$ -ésima especie en el tiempo  $t$  es  $x_i(t)$ . El índice de crecimiento de la  $i$ -ésima especie es  $r_i$  y  $\alpha_{ij}$  mide el grado al que las especies  $j$  afectan el índice de crecimiento de la especie  $i$ . Suponga que los tres índices de crecimiento es igual a  $r$ . Al escalar el tiempo mediante el factor  $r$ , podemos realizar efectivamente  $r = 1$ . Además, suponemos que la especie 2 afecta a la 1 de la misma forma en que la 3 afecta a la 2 y que la 1 afecta a la 3. Por lo tanto,  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$ ,

que permitimos que sea igual a  $\alpha$ , y, de igual forma,  $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$ . Las poblaciones se pueden escalar de modo que todas las  $\alpha_{ii} = 1$ . Esto resulta en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= x_1(t) [1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)], \\x'_2(t) &= x_2(t) [1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)], \text{ y} \\x'_3(t) &= x_3(t) [1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)].\end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0.3$  y  $\beta = 0.6$ , encuentre una solución estable ( $x'_1(t) = x'_2(t) = x'_3(t) = 0$ ) de las poblaciones escaladas  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  en  $0.5 \leq x_1(t) \leq 1$ ,  $0 \leq x_2(t) \leq 1$  y  $0.5 \leq x_3(t) \leq 1$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Muestre que la función  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 \cos x_2, x_2^2 + x_3)'$$

es continua en cada punto de  $\mathbb{R}^3$ .

12. Proporcione un ejemplo de una función  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que es continua en cada punto de  $\mathbb{R}^2$ , excepto en  $(1, 0)$ .
13. Muestre que las primeras derivadas parciales en el ejemplo 2 son continuas en  $D$ .
14. Muestre que una función  $\mathbf{F}$  que mapea  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  es continua en  $\mathbf{x}_0 \in D$  precisamente cuando, dado cualquier número  $\varepsilon > 0$ , un número  $\delta > 0$  se puede encontrar con la propiedad de que para cualquier norma vectorial  $\|\cdot\|$ ,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

siempre que  $\mathbf{x} \in D$  y  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ .

15. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  y  $\mathbf{F}$  la función de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^n$  definida mediante  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Use el resultado en el ejercicio 14 para mostrar que  $\mathbf{F}$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. En el capítulo 2 se desarrolló un proceso iterativo para resolver una ecuación  $f(x) = 0$ , al transformar primero la ecuación en la forma de punto fijo  $x \equiv g(x)$ . En este capítulo se desarrolla un procedimiento similar. ¿El método de Müller se puede transformar de esta manera?
2. En el capítulo 2 se desarrolló un proceso iterativo para resolver una ecuación  $f(x) = 0$ , al transformar primero la ecuación en la forma de punto fijo  $x \equiv g(x)$ . En este capítulo se desarrolla un procedimiento similar. ¿El método de secante se puede transformar de esta manera?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.2

1. Use el método con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  para calcular  $\mathbf{x}^{(2)}$  para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a.  $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$

$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

c.  $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$   
 $(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$

b.  $\sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$

$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

d.  $5x_1^2 - x_2^2 = 0,$   
 $x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0.$

2. Use el método de Newton con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  para calcular  $\mathbf{x}^{(2)}$  para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a. 
$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0, \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 &= 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0. \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

c. 
$$\begin{aligned} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13, \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11, \\ x_2^3 - 25x_3 &= -22. \end{aligned}$$

d. 
$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0, \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0, \\ 8x_2x_3 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

3. Use las facilidades de graficación de su CAS o calculadora para aproximar soluciones para los siguientes sistemas no lineales.

a. 
$$\begin{aligned} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 &= 0, \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 &= 0, \\ \left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 &= 0. \end{aligned}$$

c. 
$$\begin{aligned} x_1(1 - x_1) + 4x_2 &= 12, \\ (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

d. 
$$\begin{aligned} 5x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) &= 0. \end{aligned}$$

4. Use las facilidades de graficación de su CAS o calculadora para aproximar las soluciones para los sistemas no lineales dentro de los límites dados.

a. 
$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0, \\ 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 &= 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0. \\ -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, -1 \leq x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \\ -4 \leq x_1 \leq 8, -2 \leq x_2 \leq 2, -6 \leq x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

c. 
$$\begin{aligned} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13, \\ x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11, \\ x_2^3 - 25x_3 &= -22. \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 2 \\ \text{y } 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, -2 \leq x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

d. 
$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0, \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0, \\ 8x_2x_3 + 4 &= 0. \\ 0 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 0, 0 \leq x_3 \leq 2 \end{aligned}$$

5. Use las respuestas obtenidas en el ejercicio 3 como aproximaciones iniciales para el método de Newton. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$ .
6. Use las respuestas obtenidas en el ejercicio 4 como aproximaciones iniciales para el método de Newton. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$ .
7. Use el método de Newton para encontrar una solución para los siguientes sistemas no lineales en el dominio determinado. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$ .

a. 
$$\begin{aligned} 3x_1^2 - x_2^2 &= 0, \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 &= 0. \\ \text{Use } \mathbf{x}^{(0)} &= (1, 1)^t. \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) &= \ln 2 + \ln \pi, \\ e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) &= 0. \\ \text{Use } \mathbf{x}^{(0)} &= (2, 2)^t. \end{aligned}$$

c. 
$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 &= 0, \\ e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 &= 0, \\ x_2^2 - 2x_1x_3 &= 4. \\ \text{Use } \mathbf{x}^{(0)} &= (-1, -2, 1)^t. \end{aligned}$$

d. 
$$\begin{aligned} 6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 &= 0, \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 &= 0, \\ 60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 &= 0. \\ \text{Use } \mathbf{x}^{(0)} &= (0, 0, 0)^t. \end{aligned}$$

8. El sistema no lineal

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= x_1x_4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= x_3x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= x_2x_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

tiene seis soluciones.

- a. Muestre que si  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$  es una solución, entonces  $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$  es una solución.
- b. Use el método de Newton tres veces para aproximar todas las soluciones. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$ .
9. El sistema no lineal

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0, \\ x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} &= 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0, \end{aligned}$$

tiene una matriz jacobiana singular en la solución. Aplique el método de Newton con  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ . Note que la convergencia puede ser lenta o podría no presentarse después de un número razonable de iteraciones.

## EJERCICIOS APLICADOS

10. La cantidad de presión requerida para hundir un objeto grande y pesado en tierra homogénea y suave que se encuentra sobre tierra de base dura se puede predecir mediante la cantidad de presión requerida para hundir objetos más pequeños en la misma tierra. Específicamente, la cantidad de presión  $p$  requerida para hundir una placa circular de radio  $r$  a una distancia  $d$  en tierra suave, donde la tierra de base dura se encuentra a una distancia  $D > d$  debajo de la superficie, se puede aproximar con una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son constantes, con  $k_2 > 0$ , dependiendo de  $d$  y la consistencia de la tierra, pero no del radio de la placa. (Consulte [Bek], p. 89–94.)

- a. Encuentre los valores de  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  si suponemos que una placa de radio de 1 pulgada requiere una presión de 10 lb/pulgada<sup>2</sup> para hundir 1 pie en un campo turbio, una placa con radio de 2 pulgadas requiere una presión de 12 lb/pulgada<sup>2</sup> para hundir 1 pie y una placa con radio de 3 pulgadas requiere una presión de 15 lb/pulgada<sup>2</sup> para hundir esta distancia (al suponer que el barro es de más de 1 pie de profundidad).
- b. Use sus cálculos de la parte a) para predecir el tamaño mínimo de una placa circular que se requeriría para sostener una carga de 500 libras en este campo con hundimiento menor a 1 pie.
11. Al calcular la forma de un vertedero de flujo por gravedad que minimizará el tiempo de tránsito de partículas granuladas descargadas, C. Chiarella, W. Charlton y A. W. Roberts [CCR] resolvieron las siguientes ecuaciones con el método de Newton:

$$\text{i) } f_n(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{\sin \theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin \theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0, \text{ para cada } n = 1, 2, \dots, N-1.$$

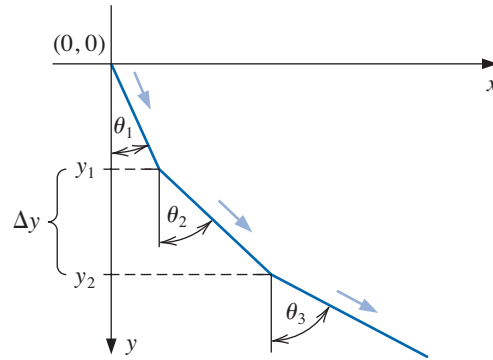
$$\text{ii) } f_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^N \tan \theta_i - X = 0, \text{ donde}$$

$$\text{a. } v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \theta_j}, \text{ para cada } n = 1, 2, \dots, N, \text{ y}$$

$$\text{b. } w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i^3 \cos \theta_i}, \text{ para cada } n = 1, 2, \dots, N.$$

La constante  $v_0$  es la velocidad inicial del material granulado,  $X$  es la coordenada  $x$  del fin del vertedero,  $\mu$  es la fuerza de fricción,  $N$  es el número de segmentos del vertedero y  $g = 32.17 \text{ ft/s}^2$  es la constante gravitacional. La variable  $\theta_i$  es un ángulo en el  $i$ -ésimo segmento del vertedero a partir de la vertical, como se muestra en la siguiente figura y  $v_i$  es la velocidad de la partícula en el  $i$ -ésimo segmento del vertedero. Resuelva i) y ii) para  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^t$  con  $\mu = 0$ ,  $X = 2$ ,  $\Delta y = 0.2$ ,  $N = 20$ , y  $v_0 = 0$ , donde los valores para  $v_n$  y  $w_n$  se pueden obtener directamente a partir de a) y b). Itere hasta  $\|\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$ .





12. Un experimento biológico interesante (consulte [Schr2]) se preocupa por la determinación de la temperatura máxima del agua,  $X_M$ , en la que diferentes especies de hidra pueden sobrevivir sin acortar su expectativa de vida. Un enfoque para la solución de este problema usa un ajuste por mínimos cuadrados de la forma  $f(x) = y = a/(x - b)^c$  para un conjunto de datos experimentales. Los valores  $x$  de los datos se refieren a la temperatura del agua. La constante  $b$  es la asíntota de la gráfica de  $f$  y, como tal, es una aproximación para  $X_M$ .

- a. Muestre que seleccionar  $a$ ,  $b$  y  $c$  para minimizar  $\sum_{i=1}^n \left[ w_i y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c} \right]^2$  reduce la solución del sistema no lineal

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}},$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^{c+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}},$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - b)}{(x_i - b)^{2c}} - \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i \ln(x_i - b)}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}.$$

- b. Resuelva el sistema no lineal para las especies con los siguientes datos. Use los pesos  $w_i = \ln y_i$ .

$i$	1	2	3	4
$y_i$	2.40	3.80	4.75	21.60
$x_i$	31.8	31.5	31.2	30.2

## EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Muestre que cuando  $n = 1$ , el método de Newton dado por la ecuación (10.9) se reduce al método familiar de Newton dado en la sección 2.3.
14. ¿Qué reduce el método de Newton para el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

donde  $A$  es una matriz no singular?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. A menudo, en el análisis del método de Newton para sistemas no lineales, se podría encontrar la frase “término forzado”. ¿Qué significa eso y por qué es importante?

2. El método inexacto de Newton se usa ampliamente para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se sabe que los términos forzados se deberían seleccionar relativamente grandes al inicio y volverse pequeños durante el proceso de iteración. Analice la forma de realizarlo.
3. ¿El método de Newton para los sistemas no lineales converge para cualquier valor inicial? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.3

1. Use el método de Broyden para calcular  $\mathbf{x}^{(2)}$  para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.
  - a.  $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$   
 $\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t.$
  - b.  $\text{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$   
 $\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t.$
  - c.  $3x_1^2 - x_2^2 = 0,$   
 $3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t.$
  - d.  $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \text{sen}(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$   
 $e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t.$
2. Use el método de Broyden para calcular  $\mathbf{x}^{(2)}$  para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.
  - a.  $3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$   
 $4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$   
 $e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t.$
  - b.  $x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$   
 $x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t.$
  - c.  $x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0,$   
 $e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$   
 $x_2^2 - 2x_1x_3 = 4.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t.$
  - d.  $6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0,$   
 $9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \text{sen } x_3 + 1.06} + 0.9 = 0,$   
 $60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0.$   
 Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t.$
3. Use el método de Broyden para aproximar soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 1 mediante las siguientes aproximaciones iniciales  $\mathbf{x}^{(0)}$ .
  - a.  $(0, 0)^t$
  - b.  $(0, 0)^t$
  - c.  $(1, 1)^t$
  - d.  $(2, 2)^t$
4. Use el método de Broyden para aproximar soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 2 mediante las siguientes aproximaciones iniciales  $\mathbf{x}^{(0)}$ .
  - a.  $(1, 1, 1)^t$
  - b.  $(2, 1, -1)^t$
  - c.  $(-1, -2, 1)^t$
  - d.  $(0, 0, 0)^t$
5. Use el método de Broyden para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}.$ 
  - a.  $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$   
 $(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$
  - b.  $5x_1^2 - x_2^2 = 0,$   
 $x_2 - 0.25(\text{sen } x_1 + \cos x_2) = 0.$
  - c.  $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$   
 $x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$   
 $x_2^3 - 25x_3 = -22.$
  - d.  $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$   
 $8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$   
 $8x_2x_3 + 4 = 0.$
6. El sistema no lineal
 
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= x_1x_4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= x_2x_4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= x_3x_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \end{aligned}$$
 tiene seis soluciones.

- a. Muestre que si  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$  es una solución, entonces  $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$  es una solución.
  - b. Use el método de Broyden tres veces para aproximar cada solución. Itere hasta  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$ .
7. El sistema no lineal

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0, \quad x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

tiene una matriz Jacobiana singular en la solución. Aplique el método de Broyden con  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$ . Observe que la convergencia puede ser lenta y podría no presentarse dentro de un número razonable de iteraciones.

## EJERCICIOS APLICADOS

8. La dinámica de población de tres especies rivales se pueden describir por medio de

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t) \left[ 1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j(t) \right]$$

para cada  $i = 1, 2, 3$ , donde la población de la  $i$ -ésima especie en el tiempo  $t$  es  $x_i(t)$ . El índice de crecimiento de la  $i$ -ésima especie es  $r_i$ , y  $\alpha_{ij}$  mide el grado en el que la especie  $j$  afecta el índice de crecimiento de la especie  $i$ . Suponga que los tres índices de crecimiento son iguales a  $r$ . Al escalar el tiempo mediante el factor  $r$  podemos volver  $r = 1$  efectivo. Además, suponemos que la especie 2 afecta a la 1, al igual que la 3 afecta a la 2 y la 1 afecta a la 3. Por lo tanto,  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$ , que establecimos igual a  $\alpha$  y, de igual forma,  $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$ . Es posible escalar las poblaciones de tal forma que  $\alpha_{ii} = 1$ . Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) [1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)], \\ x_2'(t) &= x_2(t) [1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)], \text{ y} \\ x_3'(t) &= x_3(t) [1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)]. \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ , encuentre una solución estable ( $x_1'(t) = x_2'(t) = x_3'(t) = 0$ ) en el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1(t) \leq 1, 0.25 \leq x_2(t) \leq 1, 0.25 \leq x_3(t) \leq 1\}$  mediante el método de Broyden.

9. El ejercicio 13 de la sección 8.1 abordaba la determinación de una relación de mínimos cuadrados exponenciales de la forma  $R = bw^a$  para aproximar un conjunto de datos relacionados con el peso y la regla de respiración de las polillas *esfinge modestas*. En ese ejercicio, el problema se convirtió en una relación log-log y en la parte c) se introdujo un término cuadrático en un intento por mejorar la aproximación. En lugar de convertir el problema, determine las constantes  $a$  y  $b$  que minimizan  $\sum_{i=1}^n (R_i - bw_i^a)^2$  para los datos enumerados en el ejercicio 13 de la sección 8.1. Calcule el error relacionado con esta aproximación y compárelo con el error de las aproximaciones previas para este problema.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que si  $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ , donde  $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{y}^t \mathbf{z} / \|\mathbf{y}\|_2^2) \mathbf{y}$  es paralela a  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}_2$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$ .
11. Muestre que si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t) = 1 + \mathbf{v}^t \mathbf{u}$ .
12. a. Use los resultados en el ejercicio 11 para mostrar que si existe  $A^{-1}$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , entonces existe  $(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1}$  si y sólo si  $\mathbf{y}^t A^{-1} \mathbf{x} \neq -1$ .  
b. Al multiplicar a la derecha por  $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$ , muestre que cuando  $\mathbf{y}^t A^{-1} \mathbf{x} \neq -1$ , tenemos

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1} \mathbf{x}}.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Las implementaciones modernas de propósito general mejor conocidas de los métodos cuasi-Newton para resolver grandes sistemas no lineales están basadas en las fórmulas de corrección de rango 1 como BGM, BBM, COLUM e ICUM. ¿Cómo se implementan estas fórmulas de corrección?
2. La fórmula Sherman-Morrison describe la solución de  $A+uv^T$ , cuando ya existe una factorización para  $A$ . ¿Qué es la fórmula Sherman-Morrison-Woodbury y cómo se diferencia?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.4

1. Use el método del descenso más rápido con  $TOL = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.
  - a.  $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$   
 $\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$
  - b.  $3x_1^2 - x_2^2 = 0,$   
 $3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$
  - c.  $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$   
 $e^{x_1-x_2} + \cos(x_1x_2) = 0.$
  - d.  $\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$   
 $\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$
2. Use el método del descenso más rápido con  $TOL = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.
  - a.  $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$   
 $x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$   
 $x_2^3 - 25x_3 = -22.$
  - b.  $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$   
 $8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$   
 $8x_2x_3 + 4 = 0.$
  - c.  $x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0,$   
 $e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$   
 $x_2^2 - 2x_1x_3 = 4.$
  - d.  $x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 = 0,$   
 $(1 - x_1)^{1/4} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 = 0,$   
 $-x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 = 0.$
3. Use los resultados en el ejercicio 1 y el método de Newton para aproximar las soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 1 dentro de  $10^{-6}$ .
4. Use los resultados en el ejercicio 2 y el método de Newton para aproximar las soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 2 dentro de  $10^{-6}$ .
5. Use el método del descenso más rápido para aproximar los mínimos dentro de 0.005 para las siguientes funciones.
  - a.  $g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) + \sin x_1 + \cos x_2$
  - b.  $g(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$
  - c.  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2.5x_2 - x_3 + 2$
  - d.  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 + 1.01$

## EJERCICIOS APLICADOS

6. El ejercicio 12 en la sección 10.2 se preocupa por un experimento biológico para determinar la temperatura máxima del agua a la que varias especies de hidra pueden sobrevivir sin acortar su expectativa de vida. En ese ejercicio, el método de Newton se usó para encontrar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para minimizar

$$\sum_{i=1}^4 \left[ y_i \ln y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c} \right]^2.$$

Los datos provistos se dan en la tabla

$i$	1	2	3	4
$y_i$	2.40	3.80	4.75	21.60
$x_i$	31.8	31.5	31.2	30.2

Use el método de descenso más rápido para aproximar  $a$ ,  $b$  y  $c$  dentro de 0.05.

7. Conforme las personas envejecen, tienden a preguntarse si vivirán más de lo que durará su dinero. La siguiente tabla representa las posibilidades de que su dinero alcance hasta cierta edad.

$x_i$	75	80	85	90	95
$y_i$	100%	99%	83.3%	61.2%	41.2%

Los datos están basados en una cuota inversión anual promedio de 1.9%, retiro a los 65 años, devoluciones de 6%, inflación de 2.5% y retiros iniciales de 4% de la cartera, que incrementa de manera anual con la inflación. Suponga que los datos se pueden aproximar mediante una función  $y = bx^a$ .

- Use el método de descenso más rápido para encontrar  $a$  y  $b$  que minimiza  $g(a, b) = \sum_{i=1}^5 [y_i - bx_i^a]^2$ .
- Use el método dado en la sección 1.8 en el que la ecuación  $y = \ln b + a \ln x$  adapta los datos a un ajuste lineal.
- ¿Cuál de las opciones a) o b) da el error más pequeño  $E = \sum_{i=1}^5 [y_i - bx_i^a]^2$ ?
- ¿Qué predicen las aproximaciones para los 100 años?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

8. a. Muestre que el polinomio cuadrático

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$$

interpola la función  $h$  definida en (10.18),

$$h(\alpha) = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(0)})),$$

en  $\alpha = 0, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ .

- b. Muestre que se presenta un punto crítico  $P$  en

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \left( \alpha_2 - \frac{h_1}{h_3} \right).$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Las modificaciones en el método de descenso más rápido han sugerido que la longitud de paso original conduce a la conducta de convergencia lenta del método. Barzilai y Borwein fueron los primeros en sugerir una longitud de paso nueva. Analice sus resultados.
- El método de descenso más rápido puede sucumbir a un gran error residual si el problema es vulnerable al ruido, lo cual podría llevar a una solución aproximada incorrecta para el sistema. El método de descenso más rápido modificado no es sensible a los problemas mal planteados. Analice por qué éste es el caso.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.5

1. El sistema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

tiene dos soluciones,  $(0.625204094, 2.179355825)^t$  y  $(2.109511920, -1.334532188)^t$ . Use el método de continuación y el método de Euler con  $N = 2$  para aproximar las soluciones donde

- $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^t$
- $\mathbf{x}(0) = (1, 1)^t$
- $\mathbf{x}(0) = (3, -2)^t$

2. Repita el ejercicio 1 usando el método de Runge-Kutta de orden 4 con  $N = 1$ .
3. Use el método de continuación y el método de Euler con  $N = 2$  en los siguientes sistemas no lineales.
 

<p>a. <math>4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,</math>  <math>\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.</math></p> <p>c. <math>3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,</math>  <math>4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,</math>  <math>e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.</math></p>	<p>b. <math>\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,</math>  <math>\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.</math></p> <p>d. <math>x_1^2 + x_2 - 37 = 0,</math>  <math>x_1 - x_2^2 - 5 = 0,</math>  <math>x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.</math></p>
---	---
4. Use el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con  $N = 1$  en los siguientes sistemas no lineales usando  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ . ¿Las respuestas aquí son comparables con el método de Newton o son aproximaciones iniciales adecuadas para el método de Newton?
 

<p>a. <math>x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,</math>  <math>(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.</math>                      Compare con 10.2(5c).</p> <p>c. <math>15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,</math>  <math>x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11.</math>  <math>x_2^3 - 25x_3 = -22</math>                      Compare con 10.2(6c).</p>	<p>b. <math>5x_1^2 - x_2^2 = 0,</math>  <math>x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0.</math>                      Compare con 10.2(5d).</p> <p>d. <math>10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,</math>  <math>8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0.</math>  <math>8x_2x_3 + 4 = 0</math>                      Compare con 10.2(6d).</p>
---	--
5. Repita el ejercicio 4 usando las aproximaciones iniciales obtenidas de acuerdo con lo siguiente.
 

<p>a. A partir de 10.2(3c)</p> <p>c. A partir de 10.2(4c)</p>	<p>b. A partir de 10.2(3d)</p> <p>d. A partir de 10.2(4d)</p>
---	---
6. Use el método de continuación y el método Runge-Kutta de orden 4 con  $N = 1$  en el ejercicio 7 de la sección 10.2. ¿Los resultados son tan buenos como los obtenidos ahí?
7. Repita el ejercicio 5 usando  $N = 2$ .
8. Repita el ejercicio 8 de la sección 10.2 usando el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con  $N = 1$ .
9. Repita el ejercicio 9 de la sección 10.2 usando el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con  $N = 2$ .

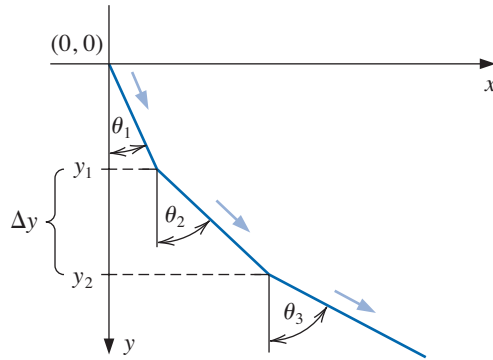
## EJERCICIOS APLICADOS

10. Al calcular la forma de una descarga de un vertedero de flujo por gravedad que minimizará el tiempo de tránsito de las partículas granulares descargadas, C. Chiarella, W. Charlton y A.W. Roberts [CCR] resolvieron las siguientes ecuaciones mediante el método de Newton:

- i)  $f_n(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{\sin \theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin \theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0$ , para cada  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ .
- ii)  $f_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^N \tan \theta_i - X = 0$ , donde
 

<p>a. <math>v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \theta_j},</math> para cada <math>n = 1, 2, \dots, N</math>, y</p>	<p>b. <math>w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i^3 \cos \theta_i},</math> para cada <math>n = 1, 2, \dots, N</math>.</p>
--	---

La constante  $v_0$  es la velocidad inicial del material granular,  $X$  es la coordenada  $x$  del final del vertedero,  $\mu$  es la fuerza de fricción,  $N$  es el número de segmentos del vertedero y  $g = 32.17$  pies/segundo<sup>2</sup> es la constante gravitacional. La variable  $\theta_i$  es el ángulo del  $i$ -ésimo segmento del vertedero a partir de la vertical, como se muestra en la siguiente figura, y  $v_i$  es la velocidad de partícula en el  $i$ -ésimo segmento del vertedero. Resuelva i) y ii) para  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  con  $\mu = 0$ ,  $X = 2$ ,  $\Delta y = 0.2$ ,  $N = 20$ , y  $v_0 = 0$ , donde los valores para  $v_n$  y  $w_n$  se pueden obtener directamente a partir de a) y b). Itere hasta  $\|\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$ .



11. La dinámica de población de las tres especies rivales se puede describir mediante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t) \left[ 1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j(t) \right]$$

para cada  $i = 1, 2, 3$ , donde la población de la  $i$ -ésima especie en el tiempo  $t$  es  $x_i(t)$ . La velocidad de crecimiento de la  $i$ -ésima especie es  $r_i$ , y  $\alpha_{ij}$  mide el grado en el que la especie  $j$  afecta la velocidad de crecimiento de la especie  $i$ . Suponga que las tres velocidades de crecimiento son iguales a  $r$ . Al escalar el tiempo mediante el factor  $r$  podemos realizar efectivamente  $r = 1$ . También, asumimos que la especie 2 afecta a la 1 de la misma manera en que la 3 afecta a la 2 y la 1 afecta a la 3. Por lo tanto,  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$  que establecimos igual a  $\alpha$  y, de igual forma,  $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$ . Las poblaciones se pueden escalar de tal forma que todas las  $\alpha_{ii} = 1$ . Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'_1(t) = x_1(t) [1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)]$$

$$x'_2(t) = x_2(t) [1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)]$$

$$x'_3(t) = x_3(t) [1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)].$$

Si  $\alpha = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ , encuentre una solución estable ( $x'_1(t) = x'_2(t) = x'_3(t) = 0$ ) en el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1(t) \leq 1, 0.25 \leq x_2(t) \leq 1, 0.25 \leq x_3(t) \leq 1\}$  usando el método de Broyden.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Muestre que el método de continuación y el método de Euler con  $N = 1$  dan el mismo resultado que el método de Newton para la primera iteración; es decir, con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$ , también obtenemos  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$ .
13. Muestre que la homotopía

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - e^{-\lambda} F(\mathbf{x}(0))$$

usada en el método de continuación con el método de Euler y  $h = 1$  también duplica el método de Newton para cualquier  $\mathbf{x}^{(0)}$ ; es decir, con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$ , tenemos  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$ .

14. Sea que el método de continuación con el método Runge-Kutta de orden 4 se abrevien como CMRK4. Después de completar los ejercicios 4, 5, 6, 7, 8 y 9, responda las siguientes preguntas.
- ¿CMRK4 es comparable con  $N = 1$  para el método de Newton? Respalde su pregunta con los resultados de ejercicios anteriores.
  - ¿CMRK4 con  $N = 1$  se debería usar como un medio para obtener una aproximación inicial para el método de Newton? Respalde su respuesta con los resultados de ejercicios anteriores.
  - Repita la parte a) para CMRK4 con  $N = 2$ .
  - Repita la parte b) para CMRK4 con  $N = 2$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Proporcione una descripción general del método GMRES. ¿Cómo difiere de los métodos iterativos descritos en este capítulo?

2. El texto menciona que el método de continuación se puede usar como método independiente y no requiere un punto inicial particularmente bueno. ¿Cómo se puede usar este método junto con el método de Newton para obtener una mejor aproximación para el conjunto de solución?
3. El texto menciona que el método de continuación se puede usar como método independiente y no requiere un punto inicial particularmente bueno. ¿Cómo se puede usar este método junto con el método de Broyden para obtener una mejor aproximación para el conjunto de solución?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. El paquete Hompack en netlib resuelve un sistema de ecuaciones no lineales al usar varios métodos de homotopía. Analice uno de estos métodos.
2. El método Levenberg-Marquardt es un promedio ponderado del método de Newton y el método de descenso más rápido. Analice con más detalle cómo es posible obtener el peso ponderado y comente la velocidad de convergencia.

## CONCEPTOS CLAVE

Continuidad	Funciones coordenadas	Métodos de continuación
Derivada direccional	Matriz jacobiana	Métodos de homotopía
Descenso más rápido	Método de Broyden	Punto fijo
Fórmula Sherman-Morrison	Método de Newton	
Función gradiente	Métodos cuasi-Newton	

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos las soluciones aproximadas para los sistemas no lineales

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

el método de Newton para sistemas requiere una buena aproximación inicial  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$  y genera una sucesión

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}),$$

la cual converge rápidamente a una solución  $\mathbf{x}$  si  $\mathbf{p}^{(0)}$  es suficientemente cercana a  $\mathbf{p}$ . Sin embargo, el método de Newton requiere evaluar, o aproximar,  $n^2$  derivadas parciales y resolver un sistema lineal  $n \times n$  en cada paso. Resolver el sistema lineal requiere  $O(n^3)$  cálculos.

El método de Broyden reduce la cantidad de cálculos en cada paso sin degradar significativamente la velocidad de convergencia. Esta técnica reemplaza la matriz jacobiana  $J$  con una matriz  $A_{k-1}$  cuya inversa está directamente determinada en cada paso. Esto reduce los cálculos aritméticos de  $O(n^3)$  a  $O(n^2)$ . Además, las únicas evaluaciones de función escalar requeridas son la evaluación de  $f_i$ , lo cual ahorra  $n^2$  funciones escalares por paso. El método de Broyden también requiere una buena aproximación inicial.

El método de descenso más rápido se presentó como una manera de obtener buenas aproximaciones iniciales para los métodos de Newton y Broyden. Aunque el descenso más rápido no provee una sucesión que converja rápidamente, no requiere una buena aproximación inicial. El método de descenso más rápido aproxima un mínimo de una función multivariable  $g$ . Para nuestra aplicación seleccionamos

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2.$$



El valor mínimo de  $g$  es 0, que se presenta cuando las funciones  $f_i$  son simultáneamente 0.

Los métodos de homotopía y continuación también se usan para los sistemas no lineales y son el tema de la investigación actual (consulte [AG]). En estos métodos, un problema dado

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

está inserto en una familia de problemas de un parámetro que usan un parámetro  $\lambda$  que asume los valores en  $[0, 1]$ . El problema original corresponde a  $\lambda = 1$ , y un problema con una solución conocida corresponde a  $\lambda = 0$ . Por ejemplo, el conjunto de problemas

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}, \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

con  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  fija forma una homotopía. Cuando  $\lambda = 0$ , la solución es  $\mathbf{x}(\lambda = 0) = \mathbf{x}_0$ . La solución para el problema original corresponde a  $\mathbf{x}(\lambda = 1)$ .

Un método de continuación intenta determinar  $\mathbf{x}(\lambda = 1)$  al resolver la sucesión de problemas correspondientes a  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m = 1$ . La aproximación inicial a la solución de

$$\lambda_i \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_i)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}$$

sería la solución,  $\mathbf{x}(\lambda = \lambda_{i-1})$ , para el problema

$$\lambda_{i-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_{i-1})(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}.$$

Un tratamiento exhaustivo de los métodos para resolver sistemas no lineales de ecuaciones se puede encontrar en Ortega y Rheinbolt [OR] y en Dennis y Schnabel [DenS]. Desarrollos recientes sobre métodos iterativos se pueden encontrar en Argyros y Szidarovszky [AS] e información sobre el uso de los métodos de continuación está disponible en Allgower y Georg [AG].

# Capítulo 9

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.1

1. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices  $3 \times 3$ . ¿Existe un conjunto de eigenvectores linealmente independientes?

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores asociados de las siguientes matrices  $3 \times 3$ . ¿Existe un conjunto de eigenvectores linealmente independientes?

a.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar las cotas para **a)** los eigenvalores y **b)** el radio espectral de las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

4. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar las cotas para **a)** los eigenvalores y **b)** el radio espectral de las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

5. Muestre que  $\mathbf{v}_1 = (2, -1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1)^t$ , y  $\mathbf{v}_3 = (1, 3)^t$  son linealmente dependientes.
6. Considere los siguientes conjuntos de vectores. **i)** Muestre que el conjunto es linealmente independiente; **ii)** use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de vectores ortogonales; **iii)** determine un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores en **ii)**.
- a.  $\mathbf{v}_1 = (2, -1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 3)^t$
- b.  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)^t$
- c.  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)^t$
- d.  $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 2, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0, -1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1, 0)^t$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0, 0, 1, 1)^t$
7. Considere los siguientes conjuntos de vectores. **i)** Muestre que el conjunto es linealmente independiente; **ii)** utilice el proceso de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de vectores ortogonales; **iii)** determine un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores en **ii)**.
- a.  $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)^t$
- b.  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)^t$

- c.  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 2, 2)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 1)^t$   
d.  $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 3, 2, 3)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0, -1, 0)^t$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0, -1)^t$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 2, -1, 0, -1)^t$ ,  
 $\mathbf{v}_5 = (0, 1, 0, -1, 0)^t$

## EJERCICIOS APLICADOS

8. En un artículo, J. Keener [KE] describe un método para clasificar equipos. Considere  $N$  equipos que deseamos clasificar. Asignamos una puntuación a cada equipo con base en su desempeño contra el otro y la fortaleza de sus oponentes. Suponga que existe un vector de clasificación  $\mathbf{r}$  en  $\mathbb{R}^N$  con entradas positivas  $r_i$  que indican la fuerza del equipo  $i$ . La puntuación para  $i$  está determinada por

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} r_j,$$

donde  $a_{ij} \geq 0$  depende del registro que tiene el equipo  $i$  contra el equipo  $j$  y  $n_i$  es el número de juegos que ha jugado el equipo  $i$ . En este problema, hacemos que la matriz  $A$  tenga entradas

$$(A)_{ij} = \frac{a_{ij}}{n_i},$$

donde  $a_{ij}$  es el número de veces que el equipo  $i$  vence al equipo  $j$ . Es razonable suponer que la clasificación debería ser proporcional a la puntuación; es decir,  $A\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$  donde  $\lambda$  es la constante de proporcionalidad. Puesto que  $a_{ij} \geq 0$  para todas las  $i$  y  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , el teorema de Perron-Frobenius que se analizó en el artículo de Keener garantiza la existencia de un eigenvalor mayor  $\lambda_1 > 0$  con un eigenvector  $\mathbf{r}$  con entradas positivas que determinan la clasificación de los equipos.

A principios de la temporada de béisbol 2014, los equipos en la División Central de la Liga Americana tenían registros de acuerdo con lo siguiente:

	CHI	CLE	DET	KC	MIN
CHI	X	7-3	4-5	3-6	2-3
CLE	3-7	X	4-2	3-3	4-3
DET	5-4	2-4	X	6-3	4-4
KC	6-3	3-3	3-6	X	2-4
MIN	3-2	3-4	4-4	4-2	X

La entrada 7-3 indica que en 10 juegos efectuados entre CHI y CLE, CHI ganó 7 y perdió 3.

- a. Encuentre la matriz de preferencia  $A$ .  
b. Encuentre el polinomio característico de  $A$ .  
c. Encuentre el eigenvalor positivo más grande de  $A$ .  
d. Resuelva el sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{r} = \mathbf{0}$  para el vector de clasificación  $\mathbf{r}$ .  
e. Proporcione la clasificación de los equipos.
9. Una **matriz persimétrica** es una matriz que es simétrica alrededor de ambas diagonales; es decir, una matriz  $N \times N$   $A = (a_{ij})$  es persimétrica si  $a_{ij} = a_{ji} = a_{N+1-i, N+1-j}$ , para todas las  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ . Diversos problemas de la teoría de comunicación tienen soluciones que implican los eigenvalores y eigenvectores de las matrices cuya forma es persimétrica. Por ejemplo, el eigenvector correspondiente al eigenvalor mínimo de la matriz persimétrica  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

da una respuesta de impulso de energía-canal unitario para una sucesión de error dada de longitud 2 y, por consiguiente, el peso mínimo para cualquier sucesión de error posible.

- a. Use el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que si  $A$  es la matriz determinada anteriormente y  $\lambda$  es su eigenvalor mínimo, entonces  $|\lambda - 4| = \rho(A - 4I)$ , donde  $\rho$  denota el radio espectral.

- b. Encuentre el eigenvalor mínimo de la matriz  $A$  por medio de hallar todos los eigenvalores  $A - 4I$  y calcular su radio espectral. A continuación, encuentre el eigenvector correspondiente.
- c. Utilice el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que si  $\lambda$  es el eigenvalor mínimo de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces  $|\lambda - 6| = \rho(B - 6I)$ .

- d. Repita la parte b) usando la matriz  $B$  y el resultado en la parte c).

## EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que los tres eigenvectores en el ejemplo 3 son linealmente independientes.
11. Muestre que un conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  de  $k$  vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.
12. Muestre que si  $A$  es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son eigenvalores distintos con eigenvectores asociados  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ , entonces  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  es un conjunto linealmente independiente.
13. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un conjunto de vectores ortonormales diferentes de cero en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Determine los valores de  $c_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , si

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k.$$

14. Suponga que  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$  y  $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  son todos linealmente independientes. ¿ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  debe ser linealmente independiente?
15. Use el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que una matriz estrictamente diagonalmente dominante debe ser no singular.
16. Pruebe que el conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  descrito en el teorema Gram-Schmidt es ortogonal.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa cómo se pueden multiplicar los círculos de Geršgorin en una hoja de cálculo como MS Excel. Reproduzca la figura 9.1 para respaldar su análisis.
2. ¿Todos los vectores ortogonales son ortonormales? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Todos los vectores ortonormales son ortogonales? ¿Por qué sí o por qué no?
4. ¿Los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  en  $\mathbb{R}^2$  pueden ser linealmente independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.2

1. Muestre que el siguiente par de matrices no son similares.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Muestre que los siguientes pares de matrices no son similares.

a.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Defina  $A = PDP^{-1}$  para las siguientes matrices  $D$  y  $P$ . Determine  $A^3$ .

a.  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d.  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Determine  $A^4$  para las siguientes matrices en el ejercicio 3.

5. Para cada una de las siguientes matrices, determine si es diagonalizable y, en tal caso, encuentre  $P$  y  $D$  con  $A = PDP^{-1}$ .

a.  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Para cada una de las siguientes matrices, determine si es diagonalizable, y en tal caso, encuentre  $P$  y  $D$  con  $A = PDP^{-1}$ .

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Para las matrices en el ejercicio 1 de la sección 9.1 que tienen tres eigenvectores linealmente independientes, forme la factorización  $A = PDP^{-1}$ .

8. Para las matrices en el ejercicio 2 de la sección 9.1 que tienen tres eigenvectores linealmente independientes, forme la factorización  $A = PDP^{-1}$ .

9. i) Determine si las siguientes matrices son definidas positivas y, en tal caso, ii) construya una matriz ortogonal  $Q$  para cada  $Q^t A Q = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal.

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. i) Determine si las siguientes matrices son definidas positivas y, en tal caso, ii) construya una matriz ortogonal  $Q$  para cada  $Q^T A Q = D$ , en donde  $D$  es una matriz diagonal.

a.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

11. Muestre que cada una de las siguientes matrices son no singulares, pero no diagonalizables.

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12. Muestre que las siguientes matrices son singulares, pero diagonalizables.

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

13. Muestre que la matriz dada en el ejemplo 3 de la sección 9.1,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

es similar a las matrices diagonales

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

14. Muestre que no hay matriz diagonal para la matriz determinada en el ejemplo 4 de la sección 9.1,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

## EJERCICIOS APLICADOS

15. En el ejercicio 22 de la sección 6.6 se usó una matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

para describir la longitud promedio de las alas de las moscas de fruta descendientes del apareamiento de tres mutantes de las moscas. La entrada  $a_{ij}$  representa la longitud promedio de las alas de una mosca descendiente de una mosca macho de tipo  $i$  y una mosca hembra de tipo  $j$ .

- Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores asociados de esta matriz.
- ¿Esta matriz es definida positiva?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

16. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  no singulares. Pruebe que  $AB$  es similar a  $BA$ .
17. Muestre que  $A$  es similar a  $B$ , y que  $B$  es similar a  $C$ , entonces  $A$  es similar a  $C$ .
18. Muestre que si  $A$  es similar a  $B$ , entonces
  - a.  $\det(A) = \det(B)$ .
  - b. El polinomio característico de  $A$  es el mismo que el polinomio característico de  $B$ .
  - c.  $A$  es no singular si y sólo si  $B$  es no singular.
  - d. Si  $A$  es no singular, muestre que  $A^{-1}$  es similar a  $B^{-1}$ .
  - e.  $A^t$  es similar a  $B^t$ .
19. Pruebe el teorema 9.10.
20. Pruebe el teorema 9.13.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Lea el texto al margen del inicio de esta sección. Analice con detenimiento porqué sería mejor llamar ortogonales a las matrices ortonormales.
2. ¿Las matrices ortogonales (ortonormales) preservan el ángulo y la longitud? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Qué es la factorización de Takagi y cómo difiere de la descomposición de Shur?
4. ¿Qué es la descomposición polar y cómo difiere de la descomposición de Shur?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

1. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia aplicado a las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$ .

c.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 2, 1)^t$ .

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$ .

d.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 0, 3)^t$ .

2. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia aplicado a las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 1)^t$ .

c.  $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$ .

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, 1)^t$ .

d.  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix};$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)^t$ .

3. Repita el ejercicio 1 usando el método de potencia inversa.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método de potencia inversa.

5. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia simétrica aplicado a las siguientes matrices.

a. 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$ .

c. 
$$\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^t$ .

b. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$ .

d. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^t$ .

6. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia simétrica aplicado a las siguientes matrices.

a. 
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$ .

c. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^t$ .

b. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$ .

d. 
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix};$$

Use  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$ .

7. Use el método de potencia para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
8. Use el método de potencia para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
9. Use el método de potencia inversa para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
10. Use el método de potencia inversa para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
11. Use el método de potencia simétrica para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 5. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
12. Use el método de potencia simétrica para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 6. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
13. Use la deflación de Wielandt y los resultados del ejercicio 7 para aproximar el segundo eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
14. Use la deflación de Wielandt y los resultados del ejercicio 8 para aproximar el segundo eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de  $10^{-4}$  o hasta que el número de iteraciones exceda 25.
15. Repita el ejercicio 7 con la técnica  $\Delta^2$  de Aitkens y el método de potencia para el eigenvalor dominante.
16. Repita el ejercicio 8 con la técnica  $\Delta^2$  de Aitkens y el método de potencia para el eigenvalor dominante.

## EJERCICIOS APLICADOS

17. Siguiendo la línea del ejercicio 11 en la sección 6.3 y el ejercicio 13 en la sección 7.2 suponga que una especie de escarabajo tiene un periodo de vida de 4 años y que una hembra en el primer año tiene una tasa de supervivencia de  $\frac{1}{2}$ , en el segundo año, de  $\frac{1}{4}$ , y en el tercer año, de  $\frac{1}{8}$ . Además, suponga que una hembra pare, en promedio, dos hembras nuevas en el tercer año y cuatro en el cuarto año. La matriz que describe una sola contribución de las hembras en un año a la población femenina en el año siguiente es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix},$$



donde, de nuevo, la entrada en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna denota la contribución probabilística que hace una hembra de edad  $j$  a la población de hembras del siguiente año de edad  $i$ .

- a. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar una región en el plano complejo que contiene todos los eigenvalores de  $A$ .
  - b. Use el método de potencia para determinar el eigenvalor dominante de la matriz y su eigenvector asociado.
  - c. Use el algoritmo 9.4 para determinar cualquier eigenvalor y eigenvector restantes de  $A$ .
  - d. Encuentre los eigenvalores de  $A$  mediante el polinomio característico de  $A$  y el método de Newton.
  - e. ¿Cuál es su predicción de largo plazo para la población de estos escarabajos?
18. Un sistema dinámico lineal se puede representar por las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t),$$

donde  $A$  es una matriz variable  $n \times n$ ,  $B$  es una matriz variable  $n \times r$ ,  $C$  es una matriz variable  $m \times n$ ,  $D$  es una matriz variable  $m \times r$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector variable  $n$ -dimensional,  $\mathbf{y}$  es un vector variable  $m$ -dimensional y  $\mathbf{u}$  es un vector variable  $r$  dimensional. Para que el sistema sea estable, la matriz  $A$  debe tener todos sus eigenvalores con parte real positiva para todas las  $t$ . ¿El sistema es estable si

$$\text{a. } A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} ? \quad \text{b. } A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} ?$$

19. La matriz tridiagonal  $(m-1) \times (m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \ddots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

participa en el método de diferencia regresiva para resolver la ecuación de calor. (Consulte la sección 12.2.) Para la estabilidad del método, necesitamos  $\rho(A^{-1}) < 1$ . Con  $m = 11$ , aproxime  $\rho(A^{-1})$  para cada uno de los siguientes.

$$\text{a. } \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{b. } \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{c. } \alpha = \frac{3}{4}$$

¿Cuándo es estable el método?

20. Los eigenvalores de la matriz  $A$  en el ejercicio 19 son

$$\lambda_i = 1 + 4\alpha \left( \sin \frac{\pi i}{2m} \right)^2, \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1.$$

Compare la aproximación en el ejercicio 21 con el valor real de  $\rho(A^{-1})$ . De nuevo, ¿cuándo es estable el método?

21. Las matrices  $A$  y  $B$   $(m-1) \times (m-1)$  determinadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \ddots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \ddots & 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

participan en el método Crank-Nicolson para resolver la ecuación de calor. (Consulte la sección 12.2.) Con  $m = 11$ , aproxime  $\rho(A^{-1}B)$  para cada uno de los siguientes.

- a.  $\alpha = \frac{1}{4}$                       b.  $\alpha = \frac{1}{2}$                       c.  $\alpha = \frac{3}{4}$

22. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 5x_1(t) + 2x_2(t) \\x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) - x_3(t) \\x_3'(t) &= -x_2(t) + 4x_3(t) + 2x_4(t) \\x_4'(t) &= x_3(t) + 5x_4(t)\end{aligned}$$

se puede escribir en forma de matriz-vector  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ , donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si la matriz  $A$  tiene eigenvalores reales y diferentes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  con eigenvalores correspondientes  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_4$ , la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t} \mathbf{v}_4,$$

donde  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  son constantes arbitrarias.

- Use el método de potencia, la deflación de Wielandt y el método de potencia inversa para aproximar los eigenvalores y eigenvectores de  $A$ .
- De ser posible, forme una solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales.
- De ser posible, encuentre las soluciones únicas del sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (2, 1, 0, -1)^t$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

23. **Deflación de Hotelling.** Suponga que se ha obtenido el eigenvalor más grande  $\lambda_1$  en magnitud y un eigenvector relacionado  $\mathbf{v}^{(1)}$  para la matriz simétrica  $A$   $n \times n$ . Muestre que la matriz

$$B = A - \frac{\lambda_1}{(\mathbf{v}^{(1)})^t \mathbf{v}^{(1)}} \mathbf{v}^{(1)} (\mathbf{v}^{(1)})^t$$

tiene los mismos eigenvalores  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  que  $A$ , excepto que  $B$  tiene eigenvalor 0 con eigenvector  $\mathbf{v}^{(1)}$  en lugar de eigenvalor  $\lambda_1$ . Use este método de deflación para encontrar  $\lambda_2$  para cada matriz en el ejercicio 5. Desde el punto de vista teórico, este método puede continuar para encontrar más eigenvalores, pero pronto el error de redondeo hace que el esfuerzo sea inútil.

24. **Técnica de aniquilación** Suponga que la matriz  $A$   $n \times n$  tiene eigenvalores  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  ordenados por

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

con eigenvectores linealmente independientes  $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ .

- Muestre que si se aplica el método de potencia con un vector inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  determinado por

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)} + \dots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)},$$

entonces la sucesión  $\{\mu^{(m)}\}$  descrita en el algoritmo 9.1 convergerá en  $\lambda_2$ .

- Muestre que para cualquier vector  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$ , el vector  $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$  satisface la propiedad determinada en la parte a).
  - Obtenga una aproximación para  $\lambda_2$  para las matrices en el ejercicio 1.
  - Muestre que este método puede continuar para encontrar  $\lambda_3$  mediante  $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$ .
25. Muestre que la  $i$ -ésima fila de  $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{x}^t$  es cero, donde  $\lambda_1$  es el mayor valor de  $A$  en valor absoluto,  $\mathbf{v}^{(1)}$  es el eigenvector asociado de  $A$  para  $\lambda_1$  y  $\mathbf{x}$  es el vector definido en la ecuación (9.7).

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método de potencia se puede usar para encontrar el eigenvalor dominante de una matriz simétrica. El método requiere una aproximación inicial. ¿Cómo se puede seleccionar esta aproximación inicial en la práctica?
2. ¿El método de potencia funciona si el eigenvalor dominante tiene multiplicidad  $r$ ? En este caso, ¿cuál sería el eigenvector calculado?
3. Describa el método de cociente de Rayleigh. ¿Cómo se compara el error con el método de potencia?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

1. Use el método de Householder para transformar las siguientes matrices en forma tridiagonal.

a. 
$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$$

2. Use el método de Householder para transformar las siguientes matrices en forma tridiagonal.

a. 
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Modifique el algoritmo 9.5 del método de Householder para calcular las matrices similares de Hessenberg superior para las siguientes matrices no simétricas.

a. 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

## EJERCICIOS APLICADOS

4. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + x_4(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) + 2x_4(t) \\ x_3'(t) &= 2x_1(t) + 4x_3(t) + x_4(t) \\ x_4'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + 5x_4(t) \end{aligned}$$

se puede escribir en forma de matriz-vector  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ , donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

La construcción de la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t} \mathbf{v}_4$$

requiere los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  de  $A$ . Para encontrar los eigenvalores de  $A$  con el método QR se requiere una matriz tridiagonal simétrica similar a  $A$ . Use el método de Householder para encontrar esa matriz.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Al calcular los eigenvalores de matrices simétricas, las transformaciones de Householder colocarán la matriz en forma tridiagonal. ¿Por qué la matriz no se puede diagonalizar por completo con este método?
2. ¿La transformación de Householder preserva el ángulo y la longitud? ¿Por qué sí o por qué no?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.5

1. Aplique dos iteraciones del método QR sin cambio a las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

e.  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

f.  $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Aplique dos iteraciones del método QR sin cambio a las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Use el algoritmo QR para determinar, dentro de  $10^{-5}$ , todos los eigenvalores para las matrices dadas en el ejercicio 1.

4. Use el algoritmo QR para determinar, dentro de  $10^{-5}$ , todos los eigenvalores de las siguientes matrices

a. 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c. 
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

d. 
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Use el método de potencia inversa para determinar, dentro de  $10^{-5}$ , todos los eigenvectores para las matrices dadas en el ejercicio 1.
6. Use el método de potencia inversa para determinar, dentro de  $10^{-5}$ , todos los eigenvectores para las matrices dadas en el ejercicio 4.

## EJERCICIOS APLICADOS

7. En el ejemplo principal de este capítulo, el sistema lineal  $A\mathbf{w} = -0.04(\rho/p)\lambda\mathbf{w}$  se debe resolver para  $\mathbf{w}$  y  $\lambda$ , con el fin de aproximar los eigenvalores  $\lambda_k$  del sistema Strum-Liouville.

- a. Encuentre los cuatro eigenvalores  $\mu_1, \dots, \mu_4$  de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dentro de  $10^{-5}$ .

- b. Aproxime los eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  del sistema en términos de  $\rho$  y  $p$ .

8. La matriz tridiagonal  $(m-1) \times (m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1-2\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

interviene en el método de diferencia regresiva para resolver la ecuación de calor (consulte la sección 12.2). Para la estabilidad del método, necesitamos  $\rho(A) < 1$ . Con  $m = 11$ , aproxime los eigenvalores de  $A$  para cada uno de los siguientes.

a.  $\alpha = \frac{1}{4}$

b.  $\alpha = \frac{1}{2}$

c.  $\alpha = \frac{3}{4}$

¿Cuándo es estable el método?

9. Los eigenvalores de la matriz  $A$  en el ejercicio 8 son

$$\lambda_i = 1 - 4\alpha \left( \sin \frac{\pi i}{2m} \right)^2, \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1.$$

Compare las aproximaciones en el ejercicio 14 con los eigenvalores reales. De nuevo, ¿cuándo es estable el método?

10. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) \\ x'_2(t) &= -x_1(t) - 4x_2(t) + 2x_3 \\ x'_3(t) &= 2x_2(t) - 4x_3(t) - x_4(t) \\ x'_4(t) &= -x_3(t) + 4x_4(t) \end{aligned}$$

puede escribirse en forma de matriz-vector  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ , donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

para construir la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t} \mathbf{v}_4,$$

donde  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  son constantes arbitrarias y  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  son eigenvalores con los eigenvectores correspondientes  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  y  $\mathbf{x}_4$ .

- Use el método QR para encontrar  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ .
- Use el método de potencia inversa para encontrar  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$ .
- Forme la solución general de  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ .
- Encuentre la única solución que satisface  $\mathbf{x}(0) = (2, 1, -1, 3)^t$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Muestre que la matriz de rotación  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  aplicada al vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$  tiene el efecto geométrico de rotar  $\mathbf{x}$  un ángulo  $\theta$  sin cambiar su magnitud respecto a la norma  $l_2$ .
  - Muestre que la magnitud de  $\mathbf{x}$  respecto a la norma  $l_\infty$  se puede cambiar mediante una matriz de rotación.
- Si  $P$  es la matriz de rotación con  $p_{ii} = p_{jj} = \cos \theta$  y  $p_{ij} = -p_{ji} = \sin \theta$ , para  $j < i$ . Muestre que para cualquier matriz  $A$   $n \times n$ ,

$$(AP)_{pq} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{si } q \neq i, j, \\ (\cos \theta)a_{pj} + (\sin \theta)a_{pi}, & \text{si } q = j, \\ (\cos \theta)a_{pi} - (\sin \theta)a_{pj}, & \text{si } q = i. \end{cases}$$

$$(PA)_{pq} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{si } p \neq i, j, \\ (\cos \theta)a_{jq} - (\sin \theta)a_{iq}, & \text{si } p = j, \\ (\sin \theta)a_{jq} + (\cos \theta)a_{iq}, & \text{si } p = i. \end{cases}$$

- Muestre que el producto de una matriz triangular superior (a la izquierda) y una matriz Hessenberg superior produce una matriz Hessenberg superior.
- Si  $P_k$  denota una matriz de rotación de la forma determinada en la ecuación (9.17).
  - Muestre que  $P_2^t P_3^t$  difiere de una matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones  $(2, 1)$  y  $(3, 2)$ .
  - Suponga que  $P_2^t P_3^t \dots P_k^t$  difiere de una matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones  $(2, 1), (3, 2), \dots, (k, k-1)$ . Muestre que  $P_2^t P_3^t \dots P_k^t P_{k+1}^t$  difiere de la matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones  $(2, 1), (3, 2), \dots, (k, k-1), (k+1, k)$ .
  - Muestre que la matriz  $P_2^t P_3^t \dots P_n^t$  es Hessenberg superior.
- El **método de Jacobi** para una matriz simétrica  $A$  se describe por medio de

$$A_1 = A,$$

$$A_2 = P_1 A_1 P_1^t$$

y, en general,

$$A_{i+1} = P_i A_i P_i^t.$$

La matriz  $A_{i+1}$  tiende a una matriz diagonal, donde  $P_i$  es una matriz de rotación seleccionada para eliminar un elemento grande fuera de la diagonal en  $A_i$ . Suponga que  $a_{j,k}$  y  $a_{k,j}$  se establecerán en 0, donde  $j \neq k$ . Si  $a_{jj} \neq a_{kk}$ , entonces

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}} \right)},$$

$$(P_i)_{kj} = \frac{c}{2(P_i)_{jj}\sqrt{c^2 + b^2}} = -(P_i)_{jk},$$

donde

$$c = 2a_{jk}\text{sgn}(a_{jj} - a_{kk}) \quad \text{y} \quad b = |a_{jj} - a_{kk}|$$

o, si  $a_{jj} = a_{kk}$ ,

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$(P_i)_{kj} = -(P_i)_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desarrolle un algoritmo para implementar el método de Jacobi al obtener  $a_{21} = 0$ . Entonces, establezca  $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$  alrededor de cero. Esto se repite hasta que se calcula una matriz  $A_k$  con

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(k)}|$$

suficientemente pequeña. Entonces, los eigenvalores de  $A$  se pueden aproximar mediante las entradas diagonales de  $A_k$ .

16. Repita el ejercicio 3 usando el método de Jacobi.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La descomposición RQ transforma una matriz  $A$  en el producto de una matriz triangular superior  $R$  (también conocida como triangular derecha) y una matriz ortogonal  $Q$ . ¿Cómo difiere esta descomposición de la descomposición QR?
2. La transformación de Householder se puede usar para calcular la transformación QR de una matriz  $A$   $m \times n$  con  $m \geq n$ . ¿La transformación de Householder se puede usar para calcular la transformación RQ?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.6

1. Determine los valores singulares de las siguientes matrices.

a.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Determine los valores singulares de las siguientes matrices.

a.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determine una descomposición en valores singulares para las matrices en el ejercicio 1.  
 4. Determine una descomposición en valores singulares para las matrices en el ejercicio 2.  
 5. Sea  $A$  la matriz dada en el ejemplo 2. Muestre que  $(1, 2, 1)^t$ ,  $(1, -1, 1)^t$ , y  $(-1, 0, 1)^t$  son eigenvectores de  $A^t A$  asociados a los eigenvalores  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$ , y  $\lambda_3 = 1$ , respectivamente.

## EJERCICIOS APLICADOS

6. Dados los datos

$x_i$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$y_i$	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0

- a. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 1.  
 b. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 2.  
 7. Dados los datos

$x_i$	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
$y_i$	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

- a. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 2.  
 b. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 3.  
 8. Determine una relación entre el número de peces y el número de especies de peces en las muestras tomadas para una parte de la Gran Barrera de Coral, P. Sale y R. Dybdahl [SD] se ajustan a un polinomio lineal de mínimos cuadrados para el siguiente conjunto de datos, recopilados en muestras durante un periodo de dos años. Sea  $x$  el número de peces en la muestra y  $y$  el número de especies en la muestra.

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

Determine el polinomio lineal de mínimos cuadrados para estos datos.

9. El siguiente conjunto de datos, presentado en el Subcomité Antimonopolio del Senado, muestra las características de supervivencia a choques de automóviles en varias clases. Encuentre el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados que aproxima estos datos. (La tabla muestra el porcentaje de vehículos relacionados con accidentes en los que la lesión más grave fue fatal o grave.)



Tipo	Peso promedio	Porcentaje de presencia
1. Doméstico lujoso regular	4800 lb	3.1
2. Doméstico intermedio regular	3700 lb	4.0
3. Doméstico económico regular	3400 lb	5.2
4. Doméstico compacto	2800 lb	6.4
5. Extranjero compacto	900 lb	9.6

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Suponga que  $A$  es una matriz  $m \times n$ . Muestre que  $\text{rango}(A)$  es igual a  $\text{rango}(A^t)$ .
- Muestre que  $\text{nulidad}(A) = \text{nulidad}(A^t)$  si y sólo si  $A$  es una matriz cuadrada.
- Suponga que  $A$  tiene la descomposición en valores singulares  $A = U S V^t$ . Determine, con justificación, una descomposición en valores singulares de  $A^t$ .
- Suponga que  $A$  tiene la descomposición en valores singulares  $A = U S V^t$ . Muestre que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(S)$ .
- Suponga que la matriz  $A m \times n$  tiene la descomposición en valores singulares  $A = U S V^t$ . Exprese la  $\text{nulidad}(A)$  en términos de  $\text{rango}(S)$ .
- Suponga que la matriz  $A n \times n$  tiene la descomposición en valores singulares  $A = U S V^t$ . Muestre que existe  $A^{-1}$  existe si y sólo si  $S^{-1}$  y encuentre la descomposición en valores singulares para  $A^{-1}$  cuando existe.
- La parte ii) del teorema 9.26 establece que  $\text{nulidad}(A) = \text{nulidad}(A^t A)$ . ¿También es cierto que  $\text{nulidad}(A) = \text{nulidad}(A A^t)$ ?
- La parte iii) del teorema 9.26 establece que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t A)$ . ¿También es cierto que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A A^t)$ ?
- Muestre que si  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $P$  es una matriz ortogonal  $n \times n$ , entonces  $PA$  tiene los mismos valores singulares que  $A$ .
- Muestre que si  $A$  es una matriz no singular  $n \times n$  con valores singulares  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , entonces el número de condición  $l_2$  de  $A$  es  $K_2(A) = (s_1/s_n)^2$ .
- Use el resultado en el ejercicio 19 para determinar los números de condición de las matrices cuadradas no singulares en los ejercicios 1 y 2.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Un sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con más ecuaciones que incógnitas recibe el nombre de sistema lineal sobredeterminado. ¿Cómo se puede usar la técnica de valor singular para resolver un sistema lineal sobredeterminado cuando existe una solución?
- La importancia de la descomposición en valores singulares en muchas aplicaciones es que podemos deducir las características más importantes de una matriz  $m \times n$  usando una matriz que, a menudo, es significativamente más pequeña. Encuentre algunos ejemplos adicionales en los que esta técnica podría ser útil.
- Proporcione algunos ejemplos sobre cómo se puede utilizar la aproximación por mínimos cuadrados en diferentes disciplinas. Por ejemplo, podemos seleccionar algunas como la ingeniería eléctrica y computacional, la estadística, los negocios o la economía, por nombrar algunas.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

- Proporcione una descripción general de la implementación SVD en la biblioteca GSL.
- Proporcione una descripción general del proyecto Apache Mahout y las implicaciones para implementación SVD.

## CONCEPTOS CLAVE

Algoritmo QR	Método de Householder	Transformación de similitud
Círculo Geršgorin	Método de potencia	Valor singular
Deflación Wielandt	Método de potencia inversa	Valores singulares
Descomposición en valores singulares	Método de potencia simétrica	Vector ortogonal
Matriz de rotación	Métodos de deflación	Vector ortonormal
Matriz ortogonal	Transformación de Householder	
Matriz simétrica		

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

El tema general del capítulo es la aproximación de eigenvalores y eigenvectores. Termina con una técnica para factorizar una matriz arbitraria que requiere estos métodos de aproximación.

Los círculos de Geršgorin proporcionan una aproximación cruda para colocar los eigenvalores de una matriz. El método de potencia se puede usar para encontrar el eigenvalor dominante y un eigenvector asociado para una matriz arbitraria  $A$ . Si  $A$  es simétrica, el método de potencia simétrica provee una convergencia más rápida para el eigenvalor dominante y un eigenvector relacionado. El método de potencia inversa encontrará el eigenvalor más cercano a un valor determinado y un eigenvector asociado. Este método, a menudo, se usa para refinar un eigenvalor y para calcular un eigenvector una vez que se ha encontrado un eigenvalor por alguna otra técnica.

Los métodos de deflación, como la deflación de Wielandt, obtienen otros eigenvalores una vez que se conoce el eigenvalor. Estos métodos se usan si sólo se requieren algunos eigenvalores ya que son susceptibles al error de redondeo. El método de potencia inversa debería usarse para mejorar la precisión de los eigenvalores aproximados obtenidos a partir de una técnica de deflación.

Los métodos con base en transformaciones de similitud, como el método de Householder, se usan para convertir una matriz simétrica en una matriz similar que es tridiagonal (o Hessenberg superior si la matriz no es simétrica). Posteriormente, técnicas como el método QR se pueden aplicar a la matriz (o Hessenberg superior) para obtener aproximaciones para todos los eigenvalores. Los eigenvectores asociados se pueden encontrar con un método iterativo, como el de potencia inversa, o modificar el método QR para incluir la aproximación de eigenvectores. Nosotros restringimos nuestro estudio a las matrices simétricas y sólo presentamos el método QR para calcular los eigenvalores para el caso simétrico.

La descomposición en valores singulares se analiza en la sección 9.6. Se usa para factorizar una matriz  $m \times n$  en la forma  $U S V^t$ , donde  $U$  es una matriz ortogonal  $m \times m$ ,  $V$  es una matriz ortogonal  $n \times n$  y  $S$  es una matriz  $m \times n$ , cuyas únicas entradas diferentes de cero se encuentran a lo largo de la diagonal principal. Esta factorización tiene aplicaciones importantes que incluyen procesamiento de imágenes, compresión de datos y resolución de sistemas lineales sobredeterminados que surgen en las aproximaciones de mínimos cuadrados. La descomposición en valores singulares requiere el cálculo de eigenvalores y eigenvectores, por lo que es adecuado concluir el capítulo con esta técnica.

Los libros de Wilkinson [Wil2] y Wilkinson y Reinsch [WR] son clásicos en el estudio de los problemas de eigenvalores. Stewart [Stew2] también es una buena fuente de información sobre el problema general y Parlett [Par] considera el problema simétrico. Un estudio del problema no simétrico se puede encontrar en Saad [Sa1].

# Capítulo 7

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

1. Encuentre las normas  $l_\infty$  y  $l_2$  de los vectores.
  - a.  $\mathbf{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$
  - b.  $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 4)^t$
  - c.  $\mathbf{x} = (\sin k, \cos k, 2^k)^t$  para un entero positivo fijo  $k$
  - d.  $\mathbf{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2 e^{-k})^t$  para un entero positivo fijo  $k$
2. Encuentre las normas  $l_\infty$  y  $l_2$  de los vectores.
  - a.  $\mathbf{x} = (2, -2, 1)^t$
  - b.  $\mathbf{x} = (-4/5, -2/5, 1/5, 2/5)^t$
  - c.  $\mathbf{x} = ((2+k)/k, 1/\sqrt{k}, -3)^t$  para un entero positivo fijo  $k$
  - d.  $\mathbf{x} = ((3k+1)/(2k), 2, 0, 1/k)^t$  para un entero positivo fijo  $k$
3. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.
  - a.  $\mathbf{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$
  - b.  $\mathbf{x}^{(k)} = (e^{-k} \cos k, k \sin(1/k), 3 + k^{-2})^t$
  - c.  $\mathbf{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2 + k} - k)^t$
  - d.  $\mathbf{x}^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2 + 1)/(1 - k^2), (1/k^2)(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)))^t$
4. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.
  - a.  $\mathbf{x}^{(k)} = (2 + 1/k, -2 + 1/k, 1 + 1/k^2)^t$
  - b.  $\mathbf{x}^{(k)} = ((2+k)/k, k/(2+k), (2k+1)/k)^t$
  - c.  $\mathbf{x}^{(k)} = ((3k+1)/k^2, (1/k) \ln k, k^2 e^{-k}, 2k/(1+2k))^t$
  - d.  $\mathbf{x}^{(k)} = \left( \frac{\cos k}{k}, \frac{\sin k}{k}, \frac{1-k}{k^2+1}, \frac{3k-2}{4k+1} \right)^t$
5. Encuentre la norma  $l_\infty$  de las matrices.
  - a.  $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - b.  $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$
  - c.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
  - d.  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
6. Encuentre la norma  $l_\infty$  de las matrices.
  - a.  $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$
  - b.  $\begin{bmatrix} 11 & -11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - c.  $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \pi & -1 & 2 \end{bmatrix}$
  - d.  $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

7. Los siguientes sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tienen  $\mathbf{x}$  como la solución real y  $\tilde{\mathbf{x}}$  como una solución aproximada. Calcule  $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$  y  $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$ .

a.  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63},$

$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168},$

$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$

c.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$   
 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$

$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$

$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t.$

b.  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$

$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$

$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t.$

d.  $0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06,$

$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3,$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11,$

$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t.$

8. Los siguientes sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tienen  $\mathbf{x}$  como la solución real y  $\tilde{\mathbf{x}}$  como una solución aproximada. Calcule  $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$  y  $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$ .

a.  $3.9x_1 + 1.5x_2 = 5.4,$

$6.8x_1 - 2.9x_2 = 3.9,$

$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.02)^t.$

c.  $x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi,$

$-x_1 + x_2 - x_3 = 0,$

$x_1 + x_3 = \pi,$

$\mathbf{x} = (0, \pi, \pi)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (0.1, 3.18, 3.10)^t.$

b.  $x_1 + 2x_2 = 3,$

$1.001x_1 - x_2 = 0.001,$

$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 0.98)^t.$

d.  $0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.0478,$

$0.4x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 = 0.413,$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.14,$

$\mathbf{x} = (1.81, -1.81, 0.65)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (2, -2, 1)^t.$

## EJERCICIOS TEÓRICOS

9. a. Verifique que la función  $\|\cdot\|_1$ , definida en  $\mathbb{R}^n$  mediante

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .

- b. Encuentre  $\|\mathbf{x}\|_1$  para los vectores determinados en el ejercicio 1.

- c. Pruebe eso para todas las  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2$ .

10. La norma matricial  $\|\cdot\|_1$ , definida por  $\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$ , se puede calcular con la fórmula

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

donde la norma vectorial  $\|\cdot\|_1$ , se define en el ejercicio 9. Encuentre  $\|\cdot\|_1$ , para las matrices en el ejercicio 5.

11. Muestre con un ejemplo que  $\|\cdot\|_\infty$ , definida por  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ , no define una norma matricial.

12. Muestre que  $\|\cdot\|_\oplus$ , definida por

$$\|A\|_\oplus = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

es una norma matricial. Encuentre  $\|\cdot\|_\oplus$ , para las matrices en el ejercicio 5.

13. a. La norma de Frobenius (que no es una norma natural) se define para una matriz  $A$   $n \times n$  mediante

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Muestre que  $\|\cdot\|_F$  es una norma matricial.

- b. Encuentre  $\|\cdot\|_F$  para las matrices en el ejercicio 5.  
 c. Para cualquier matriz  $A$ , muestre que  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq n^{1/2} \|A\|_2$ .  
 14. En el ejercicio 13 se definió la norma de Frobenius de una matriz. Muestre que para cualquier matriz  $A$   $n \times n$  y vector  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$ .  
 15. Si  $S$  es una matriz definida positiva  $n \times n$ . Para cualquier  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^n$  defina  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2}$ . Muestre que esto define una norma en  $\mathbb{R}^n$ . [Sugerencia: Utilice la factorización Cholesky para  $S$  y muestre que  $\mathbf{x}^t S \mathbf{y} = \mathbf{y}^t S \mathbf{x} \leq (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{y}^t S \mathbf{y})^{1/2}$ .]  
 16. Si  $S$  es una matriz real y no singular y si  $\|\cdot\|$  es cualquier norma en  $\mathbb{R}^n$ . Defina  $\|\cdot\|'$  por  $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$ . Muestre que  $\|\cdot\|'$  también es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .  
 17. Pruebe que si  $\|\cdot\|$  es una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$  es una norma matricial.  
 18. El siguiente extracto de *Mathematics Magazine* [Sz] proporciona una forma alternativa de probar la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky-Schwarz.  
 a. Muestre que cuando  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2}} \right)^2.$$

- b. Utilice el resultado en la parte a) para mostrar que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

19. Muestre que la desigualdad Cauchy-Buniakowsky-Schwarz se puede extender a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- El análisis del error para problemas relacionados con vectores y matrices implica medir el tamaño de los errores en un vector o matriz. Existen dos tipos comunes de análisis de error que se usan para este propósito. ¿Qué son y cómo se utilizan las normas vectoriales y matriciales?
- ¿Cuál es la norma espectral y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
- ¿Qué es una norma  $p$  y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
- ¿Qué es una norma de Frobenius y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

1. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

f.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} & \text{b.} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} & \text{c.} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d.} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{e.} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} & \text{f.} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

$$\text{a.} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b.} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

$$\text{a.} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b.} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 1.  
 6. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 2.  
 7. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 1 son convergentes?  
 8. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 2 son convergentes?  
 9. Encuentre la norma  $l_2$  para las matrices en el ejercicio 1.  
 10. Encuentre la norma  $l_2$  para las matrices en el ejercicio 2.  
 11. Si  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  y  $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Muestre que  $A_1$  no es convergente, pero que  $A_2$  es convergente.  
 12. Una matriz  $A$   $n \times n$  recibe el nombre de *nilpotente* si existe un entero  $m$  con  $A^m = O$ . Muestre que si  $\lambda$  es un eigenvalor de una matriz nilpotente, entonces  $\lambda = 0$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

13. En el ejercicio 11 de la sección 6.3, supusimos que la contribución de un escarabajo hembra de cierto tipo para la población de escarabajos de los años futuros se podía expresar en términos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

donde la entrada en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna representa la contribución probabilística de un escarabajo de edad  $j$  en la población hembra del siguiente año de edad  $i$ .

- a. ¿La matriz  $A$  tiene algún eigenvalor real? En este caso, determínelo, así como cualquier eigenvector asociado.  
 b. Si se necesita una muestra de esta especie para propósitos de pruebas de laboratorio que tendría una proporción constante en cada grupo de edad año con año, ¿qué criterios se impondrían en la población inicial para garantizar la satisfacción de este requisito?  
 14. En el ejercicio 11 de la sección 6.5 se consideró una población de escarabajos hembra, lo cual condujo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix},$$

donde las entradas  $a_{ij}$  denotan la contribución que un solo escarabajo hembra de edad  $j$  realizaría a la siguiente población de escarabajos hembra del siguiente año de edad  $i$ .

- a. Encuentre el polinomio característico de  $A$ .  
 b. Encuentre el radio espectral  $\rho(A)$ .  
 c. Dada cualquier población inicial  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ , de escarabajos hembra, ¿qué sucederá al final?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Muestre que el polinomio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  para la matriz  $A$   $n \times n$  es de enésimo grado. [Sugerencia: Expanda  $\det(A - \lambda I)$  a lo largo de la primera fila y utilice inducción matemática en  $n$ .]
16. a. Muestre que si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , entonces

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los eigenvalores de  $A$ . [Sugerencia: Considere  $p(0)$ .]

- b. Muestre que  $A$  es singular si y sólo si  $\lambda = 0$  es un eigenvalor de  $A$ .
17. Sea  $\lambda$  un eigenvalor de la matriz  $A$   $n \times n$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  un eigenvector asociado.
- a. Muestre que  $\lambda$  también es un eigenvalor de  $A^t$ .
- b. Muestre que para cualquier entero  $k \geq 1$ ,  $\lambda^k$  es un eigenvalor de  $A^k$  con eigenvector  $\mathbf{x}$ .
- c. Muestre que si existe  $A^{-1}$ , entonces  $1/\lambda$  es un eigenvalor de  $(A^{-1})^k$  con eigenvector  $\mathbf{x}$ .
- d. Generalice las partes b) y c) para  $(A^{-1})^k$  para enteros  $k \geq 2$ .
- e. Dado el polinomio  $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_kx^k$ , defina  $q(A)$  para la matriz  $q(A) = q_0I + q_1A + \dots + q_kA^k$ . Muestre que  $q(\lambda)$  es un eigenvalor de  $q(A)$  con eigenvector  $\mathbf{x}$ .
- f. Sea  $\alpha \neq \lambda$  dado. Muestre que si  $A - \alpha I$  no es singular, entonces  $1/(\lambda - \alpha)$  es un eigenvalor de  $(A - \alpha I)^{-1}$  con eigenvector  $\mathbf{x}$ .
18. Muestre que si  $A$  es simétrica, entonces  $\|A\|_2 = \rho(A)$ .
19. Encuentre las matrices  $A$  y  $B$  para las que  $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$ . (Esto muestra que  $\rho(A)$  no puede ser una norma matricial.)
20. Muestre que si  $\|\cdot\|$  es una norma natural, entonces  $(\|A^{-1}\|)^{-1} \leq |\lambda| \leq \|A\|$  para cualquier eigenvalor  $\lambda$  de la matriz no singular  $A$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Encuentre una aplicación en la que el eigenvalor de 1 tenga un significado importante.
2. Analice la importancia geométrica del radio espectral relativo para los eigenvalores de una matriz  $A$ .
3. ¿En qué circunstancias el radio espectral de una matriz también es un eigenvalor de la matriz?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

1. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ :
- a.  $3x_1 - x_2 + x_3 = 1,$   
 $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0,$   
 $3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4.$
- b.  $10x_1 - x_2 = 9,$   
 $-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7,$   
 $-2x_2 + 10x_3 = 6.$
- c.  $10x_1 + 5x_2 = 6,$   
 $5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25,$   
 $-4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11,$   
 $-x_3 + 5x_4 = -11.$
- d.  $4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6,$   
 $-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6,$   
 $2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6,$   
 $-x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6,$   
 $2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6.$
2. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ :
- a.  $4x_1 + x_2 - x_3 = 5,$   
 $-x_1 + 3x_2 + x_3 = -4,$   
 $2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1.$
- b.  $-2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4,$   
 $x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -4,$   
 $x_2 + 2x_3 = 0.$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c.} & \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{array} \\
 \text{d.} & \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ -x_2 + 4x_3 = 0, \\ +4x_4 - x_5 = 6, \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 = -2, \\ -x_5 + 4x_6 = 6. \end{array}
 \end{array}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método de Gauss-Siedel.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método de Gauss-Siedel.
5. Utilice el método de Jacobi para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
6. Utilice el método de Jacobi para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 2, con  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
7. Utilice el método de Gauss-Siedel para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
8. Utilice el método de Gauss-Siedel para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 2, con  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
9. El sistema lineal

$$\begin{array}{l}
 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\
 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\
 -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5,
 \end{array}$$

tiene la solución  $(1, 2, -1)^t$ .

- a. Muestre que  $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ .
  - b. Muestre que el método de Jacobi con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  falla al proporcionar una buena aproximación después de 25 iteraciones.
  - c. Muestre que  $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$ .
  - d. Utilice el método de Gauss-Siedel con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  para aproximar la solución para el sistema lineal dentro de  $10^{-5}$  con la norma  $l_\infty$ .
10. El sistema lineal

$$\begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\
 x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5
 \end{array}$$

tiene la solución  $(1, 2, -1)^t$ .

- a. Muestre que  $\rho(T_j) = 0$ .
  - b. Utilice el método de Jacobi con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  para aproximar la solución para el sistema lineal dentro de  $10^{-5}$  con la norma  $l_\infty$ .
  - c. Muestre que  $\rho(T_g) = 2$ .
  - d. Muestre que el método de Gauss-Siedel aplicado como en la parte b) no proporciona una buena aproximación después de 25 iteraciones.
11. El sistema lineal

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & - & x_3 = 0.2, \\
 -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 - \frac{1}{4}x_3 = -1.425, \\
 x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2,
 \end{array}$$

tiene la solución  $(0.9, -0.8, 0.7)^t$ .

- a. ¿La matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

es estrictamente diagonalmente dominante?



- b. Calcule el radio espectral de la matriz de Gauss-Siedel  $T_g$ .
- c. Utilice el método iterativo de Gauss-Siedel para aproximar la solución para el sistema lineal con una tolerancia de  $10^{-2}$  y un máximo de 300 iteraciones.
- d. ¿Qué pasa en la parte c) cuando el sistema cambia por el siguiente?

$$\begin{aligned} x_1 & - 2x_3 = 0.2, \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 & = -1.425, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 2. \end{aligned}$$

12. Repita el ejercicio 11 usando el método de Jacobi.
13. Utilice a) el método de Jacobi y b) el método de Gauss-Siedel para resolver el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dentro de  $10^{-5}$  con la norma  $l_\infty$ , donde las entradas de  $A$  son

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \dots, 80, \\ 0.5i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 2 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 78, \\ j = i - 2 \text{ y } i = 3, 4, \dots, 80, \end{cases} \\ 0.25i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 4 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 76, \\ j = i - 4 \text{ y } i = 5, 6, \dots, 80, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y los de  $\mathbf{b}$  son  $b_i = \pi$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, 80$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

14. Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de los  $n + 1$  puntos igualmente espaciados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Cuando un objeto se encuentra en la ubicación  $x_i$ , es igualmente probable que se mueva ya sea hacia  $x_{i-1}$  o hacia  $x_{i+1}$  y no se puede mover directamente hacia cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades  $\{P_i\}_{i=0}^n$  de que un objeto que inicia en la ubicación  $x_i$  llegará al extremo izquierdo  $x_0$  antes de llegar al extremo derecho  $x_n$ . Claramente,  $P_0 = 1$  y  $P_n = 0$ . Puesto que el objeto se puede mover hacia  $x_i$  sólo desde  $x_{i-1}$  o  $x_{i+1}$  y lo hace con una probabilidad  $\frac{1}{2}$  para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

- a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b. Resuelva este sistema usando  $n = 10, 50$  y  $100$ .
- c. Cambie las probabilidades de  $\alpha$  y  $1 - \alpha$  para movimiento hacia la izquierda y derecha, respectivamente y derive el sistema lineal similar al de la parte a).
- d. Repita la parte b) con  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

15. Las fuerzas en un puente peatonal descritas en la apertura de este capítulo satisfacen las ecuaciones en la siguiente tabla:

Unión	Componente horizontal	Componente vertical
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

Este sistema lineal se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a. Explique porqué se reordenó el sistema de ecuaciones.
- b. Aproxime la solución del sistema lineal resultante dentro de  $10^{-2}$  con la norma  $l_\infty$  al utilizar como aproximación inicial el vector cuyas entradas sean 1 con i) el método de Jacobi y ii) el método de Gauss-Siedel.
16. Un cable coaxial está formado por un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y un conductor externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe mediante la ecuación de Laplace.

Suponga que el conductor interno se mantiene en 0 volts y el conductor externo se mantiene en 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 5 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

- a. ¿La matriz es estrictamente diagonalmente dominante?
- b. Resuelva el sistema lineal usando el método de Jacobi con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  y  $TOL = 10^{-2}$ .
- c. Repita la parte c) mediante el método de Gauss-Siedel.

## EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Muestre que si  $A$  es estrictamente diagonalmente dominante, entonces  $\|T_j\|_\infty < 1$ .

18. a. Pruebe que

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

donde  $T$  es una matriz  $n \times n$  con  $\|T\| < 1$  y

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

con  $\mathbf{x}^{(0)}$  arbitrario,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ .

b. Aplique las cotas del ejercicio 1, cuando sea posible, mediante la norma  $l_\infty$ .

19. Suponga que  $A$  es definida positiva.

a. Muestre que podemos escribir  $A = D - L - L^t$ , donde  $D$  es diagonal con  $d_{ii} > 0$  para cada  $1 \leq i \leq n$  y  $L$  es triangular inferior. Además, muestre que  $D - L$  es no singular.

b. Si  $T_g = (D - L)^{-1}L^t$  y  $P = A - T_g^t A T_g$ . Muestre que  $P$  es simétrica.

c. Muestre que  $T_g$  también se puede escribir como  $T_g = I - (D - L)^{-1}A$ .

d. Si  $Q = (D - L)^{-1}A$ . Muestre que  $T_g = I - Q$  y  $P = Q^t[AQ^{-1} - A + (Q^t)^{-1}A]Q$ .

e. Muestre que  $P = Q^t D Q$  y  $P$  es definida positiva.

f. Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $T_g$  con eigenvector  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Utilice la parte b) para mostrar que  $\mathbf{x}^t P \mathbf{x} > 0$  implica que  $|\lambda| < 1$ .

g. Muestre que  $T_g$  es convergente y pruebe que el método de Gauss-Siedel converge.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- El GMRES es un método iterativo que se usa para la resolución de grandes sistemas lineales no simétricos dispersos. Compare ese método con los métodos iterativos analizados en esta sección.
- ¿Los métodos directos, como la eliminación gaussiana o la factorización  $LU$ , son más eficientes que los métodos directos, como Jacobi o Gauss-Siedel, cuando el tamaño del sistema aumenta significativamente?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.4

1. Encuentre las primeras dos iteraciones del método SOR con  $\omega = 1.1$  para los siguientes sistemas lineales, usando  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.} \quad & 10x_1 - x_2 = 9, \\ & -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7, \\ & -2x_2 + 10x_3 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.} \quad & 10x_1 + 5x_2 = 6, \\ & 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25, \\ & -4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11, \\ & -x_3 + 5x_4 = -11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ & -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6, \\ & -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6, \\ & 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6. \end{aligned}$$

2. Encuentre las primeras dos iteraciones del método SOR con  $\omega = 1.1$  para los siguientes sistemas lineales, usando  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & 4x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ & -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.} \quad & -2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4, \\ & x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -4, \\ & x_2 + 2x_3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c.} & \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{array} \\
 \text{d.} & \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ -x_2 + 4x_3 = 0, \\ +4x_4 - x_5 = 6, \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 = -2, \\ -x_5 + 4x_6 = 6. \end{array}
 \end{array}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando  $\omega = 1.3$ .
4. Repita el ejercicio 2 usando  $\omega = 1.3$ .
5. Utilice el método SOR con  $\omega = 1.2$  para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1 con una tolerancia  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
6. Utilice el método SOR con  $\omega = 1.2$  para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1 con una tolerancia  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ .
7. Determine cuáles matrices en el ejercicio 1 son tridiagonales y definidas positivas. Repita el ejercicio 1 para estas matrices a través de la selección óptima de  $\omega$ .
8. Determine cuáles matrices en el ejercicio 2 son tridiagonales y definidas positivas. Repita el ejercicio 1 para estas matrices a través de la selección óptima de  $\omega$ .
9. Utilice el método SOR para resolver el sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dentro de  $10^{-5}$  con la norma  $l_\infty$ , donde las entradas de  $\mathbf{A}$  son

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \dots, 80, \\ 0.5i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 2 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 78, \\ j = i - 2 \text{ y } i = 3, 4, \dots, 80, \end{cases} \\ 0.25i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 4 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 76, \\ j = i - 4 \text{ y } i = 5, 6, \dots, 80, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y las de  $\mathbf{b}$  son  $b_i = \pi$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, 80$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

10. Las fuerzas en los puentes peatonales descritas en la apertura de este capítulo satisfacen las ecuaciones en la siguiente tabla:

Unión	Componente horizontal	Componente vertical
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

Este sistema lineal se puede escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a. Explique por qué se reordenó el sistema de ecuaciones.
  - b. Aproxime la solución del sistema lineal resultante dentro de  $10^{-2}$  con la norma  $l_\infty$  usando como aproximación inicial el vector cuyas entradas son números 1 y el método SOR con  $\omega = 1.25$ .
11. Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de los  $n + 1$  puntos igualmente espaciados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Cuando un objeto se encuentra en la ubicación  $x_i$ , es igualmente probable que se mueva ya sea hacia  $x_{i-1}$  o hacia  $x_{i+1}$  y no se pueda mover directamente hacia cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades  $\{P_i\}_{i=0}^n$  de que un objeto que inicia en la ubicación  $x_i$  llegue al extremo izquierdo  $x_0$  antes de llegar al derecho  $x_n$ . Claramente,  $P_0 = 1$  y  $P_n = 0$ . Puesto que el objeto se puede mover hacia  $x_i$  sólo desde  $x_{i-1}$  o  $x_{i+1}$  y lo hace con una probabilidad  $\frac{1}{2}$  para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

- a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b. Resuelva este sistema usando  $n = 10, 50$  y  $100$ .
  - c. Cambie las probabilidades de  $\alpha$  y  $1 - \alpha$  para movimiento hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente y derive el sistema lineal similar al de la parte a).
  - d. Repita la parte b) con  $\alpha = \frac{1}{3}$ .
12. Un cable coaxial está formado por un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y uno externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe con la ecuación de Laplace.

Suponga que el conductor interno se mantiene en 0 volts y que el externo se mantiene en 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 7 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

- a. ¿La matriz es definida positiva?
- b. A pesar de que la matriz no es tridiagonal, sea

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}.$$

- Aproxime la solución para el sistema lineal usando el método SOR con  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  y  $TOL = 10^{-2}$ .
- c. ¿El método SOR supera a los métodos de Jacobi y Gauss-Siedel?

## EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Pruebe el teorema 7.24 de Kahan. [Sugerencia: Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son eigenvalores de  $T_\omega$ , entonces  $\det T_\omega = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ . Puesto que  $D^{-1} = \det(D - \omega L)^{-1}$  y el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de los factores, el resultado sigue la ecuación (7.18).]
14. En el ejercicio 19 de la sección 7.3 se describió una técnica para probar que el método de Gauss-Siedel converge cuando  $A$  es una matriz definida positiva. Extienda este método de prueba para mostrar que en este caso también existe convergencia para el método SOR con  $0 < \omega < 2$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿El método de análisis en esta sección se puede aplicar a desigualdades lineales? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Por qué seleccionar  $x_{i+1}^{(k)}$  para que una coordenada del vector residual sea cero no es necesariamente el método más eficiente para reducir la norma del vector  $r_{i+1}^{(k)}$ ?
3. A menudo, es deseable acelerar (sobre-relajación) o frenar (sub-relajación) los cambios en los valores de la variable dependiente de iteración a iteración. El proceso de sobre-relajación se utiliza con frecuencia junto con el método de Gauss-Siedel. ¿Cuándo se usa el proceso de sub-relajación?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.5

1. Calcule números de condición de las siguientes matrices relativas a  $\|\cdot\|_\infty$ .
- a.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$       b.  $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$
- c.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix}$       d.  $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$
2. Calcule números de condición de las siguientes matrices relativas a  $\|\cdot\|_\infty$ .
- a.  $\begin{bmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.10 \end{bmatrix}$       b.  $\begin{bmatrix} 58.9 & 0.03 \\ -6.10 & 5.31 \end{bmatrix}$
- c.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$       d.  $\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & -0.01 \\ 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
3. Los siguientes sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tienen  $\mathbf{x}$  como la solución real y  $\tilde{\mathbf{x}}$  como una solución aproximada. Por medio de los resultados del ejercicio 1, calcule

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{y} \quad K_\infty(A) \frac{\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

- a.  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63},$   
 $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168},$   
 $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$
- b.  $3.9x_1 + 1.6x_2 = 5.5,$   
 $6.8x_1 + 2.9x_2 = 9.7,$   
 $\mathbf{x} = (1, 1)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.1)^t.$
- c.  $x_1 + 2x_2 = 3,$   
 $1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001,$   
 $\mathbf{x} = (1, 1)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (0.96, 1.02)^t.$
- d.  $1.003x_1 + 58.09x_2 = 68.12,$   
 $5.550x_1 + 321.8x_2 = 377.3,$   
 $\mathbf{x} = (10, 1)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (-10, 1)^t.$

4. Los siguientes sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tienen  $\mathbf{x}$  como la solución real y a  $\tilde{\mathbf{x}}$  como una solución aproximada. Por medio de los resultados del ejercicio 2, calcule

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\infty} \quad \text{y} \quad K_{\infty}(A) \frac{\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}.$$

- a.  $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$   
 $5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0,$   
 $\mathbf{x} = (10, 1)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (30.0, 0.990)^t.$
- b.  $58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2,$   
 $-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0,$   
 $\mathbf{x} = (1, 10)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 9.98)^t.$
- c.  $x_1 - x_2 - x_3 = 2\pi,$   
 $x_2 - x_3 = 0,$   
 $-x_3 = \pi.$   
 $\mathbf{x} = (0, -\pi, -\pi)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (-0.1, -3.15, -3.14)^t.$
- d.  $0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06,$   
 $0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3,$   
 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11,$   
 $\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t,$   
 $\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t.$
5. i) Utilice eliminación gaussiana y aritmética de tres dígitos para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas lineales. ii) A continuación utilice una iteración de refinamiento iterativo para mejorar la aproximación y compare las aproximaciones con las soluciones reales.

- a.  $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$   
 $5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0.$   
Solución real  $(10, 1)^t.$
- b.  $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953,$   
 $2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965,$   
 $-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714.$   
Solución real  $(1, 0.5, -1)^t.$
- c.  $1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12,$   
 $14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44,$   
 $100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15,$   
 $15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16.$   
Solución real  $(0.17682530, 0.01269269, -0.02065405, -1.18260870)^t.$
- d.  $\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11},$   
 $\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0,$   
 $\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi,$   
 $\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \frac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}.$   
Solución real  $(0.78839378, -3.12541367, 0.16759660, 4.55700252)^t.$
6. Repita el ejercicio 5 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.
7. El sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

tiene solución  $(1, 1)^t$ . Cambie  $A$  ligeramente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

y considere el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}.$$

Calcule la nueva solución mediante aritmética de redondeo de cinco dígitos y compare el error real con el cálculo (7.25). ¿ $A$  está mal condicionada?

8. El sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.00001 \end{bmatrix}$$

tiene solución  $(1, 1)^t$ . Utilice aritmética de redondeo de siete dígitos para encontrar la solución del sistema perturbado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

y compare el error real con el estimado (7.25). ¿ $A$  está mal condicionada?

9. La matriz de Hilbert  $H^{(n)}$   $n = n$  (consulte la página 380) definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

es una matriz mal condicionada que surge al resolver las ecuaciones normales de los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados (consulte el ejemplo 1 de la sección 8.2).

- a. Muestre que

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

y calcule  $K_{\infty}(H^{(4)})$ .

- b. Muestre que

$$[H^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$

y calcule  $K_{\infty}(H^{(5)})$ .

- c. Resuelva el sistema lineal

$$H^{(4)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mediante aritmética de redondeo de cinco dígitos y compare el error real con el estimado en (7.25).

10. A través de aritmética de redondeo de cuatro dígitos calcule la inversa  $H^{-1}$  de la matriz de Hilbert  $H$  de tamaño  $3 \times 3$  y, a continuación, calcule  $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$ . Determine  $\|H - \hat{H}\|_{\infty}$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Muestre que si  $B$  es singular, entonces

$$\frac{1}{K(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

[Sugerencia: Existe un vector con  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , como  $B\mathbf{x} = 0$ . Derive la estimación mediante  $\|A\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}\| / \|A^{-1}\|$ .]

12. Usando el ejercicio 11, calcule los números de condición para las siguientes matrices:

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b. } \begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$$



## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Se puede juzgar la precisión de una aproximación  $\mathbf{x}$  para  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  al calcular la magnitud del vector residual  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$  mediante cualquier norma. Sin embargo, un residuo pequeño no necesariamente implica que el error en la solución es pequeño. ¿Por qué? ¿Qué se puede hacer para superar este problema?
2. ¿Cuál es el valor real del número de condición de una matriz  $A$  dependiente de la norma matricial que se usa para calcularlo? En ese caso, proporcione ejemplos para respaldar su respuesta.
3. ¿Por qué es difícil y/o poco práctico calcular con precisión el número de condición?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.6

1. El sistema lineal

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{5}{21}, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{11}{84},\end{aligned}$$

tiene la solución  $(x_1, x_2)^t = (1/6, 1/7)^t$ .

- a. Resuelva el sistema lineal mediante eliminación gaussiana con aritmética de redondeo de dos dígitos.
  - b. Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado ( $C = C^{-1} = I$ ) con aritmética de redondeo de dos dígitos.
  - c. ¿Qué método da la mejor respuesta?
  - d. Seleccione  $C^{-1} = D^{-1/2}$ . ¿Esta elección mejora el método de gradiente conjugado?
2. El sistema lineal

$$\begin{aligned}0.1x_1 + 0.2x_2 &= 0.3, \\ 0.2x_1 + 113x_2 &= 113.2,\end{aligned}$$

tiene solución  $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$ . Repita las instrucciones del ejercicio 1 en este sistema lineal.

3. El sistema lineal

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= \frac{17}{60},\end{aligned}$$

tiene solución  $(1, -1, 1)^t$ .

- a. Resuelva el sistema lineal mediante eliminación gaussiana con aritmética de redondeo de tres dígitos.
  - b. Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado con aritmética de redondeo de tres dígitos.
  - c. ¿El pivoteo mejora la respuesta en a)?
  - d. Repita la parte b) mediante  $C^{-1} = D^{-1/2}$ . ¿Esto mejora la respuesta en b)?
4. Repita el ejercicio 3 por medio de aritmética de precisión única en una computadora.
  5. Realice sólo dos pasos del método de gradiente conjugado con ( $C = C^{-1} = I$ ) en cada uno de los siguientes sistemas lineales. Compare los resultados en las partes b) y c) para los resultados obtenidos en pares b) y c) del ejercicio 1 de la sección 7.3 y el ejercicio 1 de la sección 7.4.
    - a.  $3x_1 - x_2 + x_3 = 1,$   
 $-x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0,$   
 $x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 4.$
    - b.  $10x_1 - x_2 = 9,$   
 $-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7,$   
 $-2x_2 + 10x_3 = 6.$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c.} & \begin{array}{l} 10x_1 + 5x_2 = 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11, \\ -x_3 + 5x_4 = -11. \end{array} \\
 \text{d.} & \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{array} \\
 \text{e.} & \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6. \end{array} \\
 \text{f.} & \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ -x_2 + 4x_3 = 0, \\ \phantom{-x_2 + 4x_3} + 4x_4 - x_5 = 6, \\ \phantom{-x_2 + 4x_3} - x_4 + 4x_5 - x_6 = -2, \\ \phantom{-x_2 + 4x_3} - x_5 + 4x_6 = 6. \end{array}
 \end{array}$$

6. Repita el ejercicio 5 mediante  $C^{-1} = D^{-1/2}$ .
7. Repita el ejercicio 5 con  $TOL = 10^{-3}$  con la norma  $l_\infty$ . Compare los resultados en las partes b) y c) con los obtenidos en los ejercicios 5 y 7 de la sección 7.3 y el ejercicio 5 de la sección 7.4.
8. Repita el ejercicio 7 mediante  $C^{-1} = D^{-1/2}$ .
9. Aproxime las soluciones para los siguientes sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dentro de  $10^{-5}$  con la norma  $l_\infty$ .

i)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \dots, 16, \\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ y } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, \\ j = i - 1 \text{ y } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, \\ j = i + 4 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 12, \\ j = i - 4 \text{ y } i = 5, 6, \dots, 16, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{b} = (1.902207, 1.051143, 1.175689, 3.480083, 0.819600, -0.264419, -0.412789, 1.175689, 0.913337, -0.150209, -0.264419, 1.051143, 1.966694, 0.913337, 0.819600, 1.902207)^t$$

ii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \dots, 25, \\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ y } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, \\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases} \\ j = i - 1 \text{ y } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, \end{cases} \\ j = i + 5 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 20, \\ j = i - 5 \text{ y } i = 6, 7, \dots, 25, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{b} = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^t$$

iii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \dots, 40, \\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 1 \text{ y } i = 1, 2, \dots, 39, \\ j = i - 1 \text{ y } i = 2, 3, \dots, 40, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y  $b_i = 1.5i - 6$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, 40$

- Utilice el método de Jacobi.
  - Utilice el método Gauss-Siedel.
  - Utilice el método SOR con  $\omega = 1.3$  en i),  $\omega = 1.2$  en ii), y  $\omega = 1.1$  en iii).
  - Utilice el método de gradiente conjugado y preconditionamiento con  $C^{-1} = D^{-1/2}$ .
10. Resuelva el sistema lineal en el ejercicio 14b) del conjunto de ejercicios 7.3 con el método de gradiente conjugado con  $C^{-1} = I$ .
11. Si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad y$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz  $A$  de  $16 \times 16$  en forma particionada

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^t$ .

- Resuelva  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  usando el método de gradiente conjugado con tolerancia 0.05.
- Resuelva  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  usando el método de gradiente conjugado preconditionado con tolerancia  $C^{-1} = D^{-1/2}$  y tolerancia 0.05.
- ¿Hay alguna tolerancia para la que los métodos de la parte a) y b) requieran un número diferente de iteraciones?

## EJERCICIOS APLICADOS

12. Un cable coaxial está fabricado con un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y un conductor externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable está descrito por la ecuación de Laplace.

Suponga que un conductor interno se mantiene a 0 volts y el conductor externo se mantiene a 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 5 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado con  $TOL = 10^{-2}$  y  $C^{-1} = D^{-1}$ .

13. Suponga que un objeto puede estar en alguno de los  $n + 1$  puntos igualmente espaciados  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Cuando un objeto se encuentra en la ubicación  $x_i$ , es igualmente probable que se mueva ya sea hacia  $x_{i-1}$  o  $x_{i+1}$  y no se mueva directamente a cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades  $\{P_i\}_{i=0}^n$  de que un objeto que comienza en la ubicación  $x_i$  llegará al extremo izquierdo  $x_0$  antes de llegar al extremo derecho  $x_n$ . Claramente,  $P_0 = 1$  y  $P_n = 0$ . Puesto que el objeto se puede mover hacia  $x_i$  sólo desde  $x_{i-1}$  o  $x_{i+1}$  y lo hace con una probabilidad de  $\frac{1}{2}$  para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2} P_{i-1} + \frac{1}{2} P_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

- a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b. Resuelva este sistema usando  $n = 10, 50$  y  $100$ .  
 c. Cambie las probabilidades de  $\alpha$  y  $1 - \alpha$  para movimiento hacia la izquierda y derecha, respectivamente y derive el sistema lineal de manera similar al de la parte a).  
 d. Repita la parte b) con  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

14. Utilice las propiedades de transposición dadas en el teorema 6.14 en la página 295 para probar el teorema 7.30.
15. a. Muestre que un conjunto de vectores diferentes de cero ortogonal a  $A$  relacionados con una matriz definida positiva es linealmente independiente.  
 b. Muestre que si  $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$  es un conjunto de vectores diferentes de cero ortogonal a  $A$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{z}'\mathbf{v}^{(i)} = 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , cuando  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .
16. Pruebe el teorema 7.33 mediante inducción matemática de acuerdo con lo siguiente:  
 a. Muestre que  $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$ .  
 b. Suponga que  $\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ , para cada  $k \leq l$  y  $j = 1, 2, \dots, k$ , y muestre que esto implica que  $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, l$ .  
 c. Muestre que  $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)} \rangle = 0$ .
17. En el ejemplo 3, se encontraron los eigenvalores para la matriz  $A$  y la matriz condicionada  $\tilde{A}$ . Utilícelos para determinar los números de condición de  $A$  y  $\tilde{A}$  con la norma  $l_2$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método de gradiente conjugado se puede usar para resolver el sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde  $A$  es una matriz semidefinida positiva simétrica y singular. Sin embargo, el método diverge en ciertas condiciones. ¿Cuáles son? ¿La divergencia se puede evitar?
2. El método de gradiente conjugado se puede usar como método directo o iterativo. Analice cómo se puede utilizar en cada instancia.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. PARALUTION es una biblioteca de código abierto para métodos iterativos dispersos con enfoque especial en tecnología multinúcleo y aceleradora como GPU. Proporcione una descripción general de este método.
2. Proporcione una descripción general del kit de herramientas BPKIT.
3. Proporcione una descripción general de la biblioteca SuperLU.
4. Proporcione una descripción general del proyecto CERFACS.

## CONCEPTOS CLAVE

Bien condicionada	Matriz convergente	Número de condición
Condición de ortogonalidad de $A$	Método de Gauss-Siedel	Polinomio característico
Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz	Método de gradiente conjugado	Precondicionamiento
Distancia	Método de Jacobi	Radio espectral
Distancia entre matrices	Norma del vector entre vectores	Refinamiento iterativo
Eigenvalor	Norma euclidiana	Sobre-relajación
Eigenvector	Norma infinita	Stein-Rosenberg
Mal condicionada	Norma matricial	Sub-relajación
		Técnica iterativa SOR
		Vector residual

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo estudiamos técnicas iterativas para aproximar la solución de los sistemas lineales. Comenzamos con los métodos de Jacobi y Gauss-Siedel para introducir los métodos iterativos. Ambos requieren una aproximación inicial arbitraria  $\mathbf{x}^{(0)}$  y generan una sucesión de vectores  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  mediante una ecuación de la forma

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}.$$

Se observó que el método converge si y sólo si el radio espectral de la matriz de iteración  $\rho(T) < 1$ , y mientras el radio espectral sea más pequeño, más rápida será la convergencia. El análisis de vectores residuales de la técnica de Gauss-Siedel condujo al método iterativo SOR, que implica un parámetro  $\omega$  para acelerar la convergencia.

Estos métodos iterativos y modificaciones se utilizan ampliamente en la solución de sistemas lineales que surgen en la solución numérica de los problemas de valores en la frontera y ecuaciones diferenciales parciales (consulte los capítulos 11 y 12). A menudo, estos sistemas son muy grandes, en el orden de 10000 ecuaciones en 10000 incógnitas y están dispersos con sus entradas diferentes a cero en posiciones predecibles. Los métodos iterativos también son útiles para otros grandes sistemas dispersos y se adaptan fácilmente para uso eficiente en computadoras paralelas.

Más información sobre el uso de métodos iterativos para resolver sistemas lineales se pueden encontrar en Varga [Var1], Young [Y], Hageman y Young [HY] y Axelsson [Ax]. Los métodos iterativos para grandes sistemas se analizan en Barrett *et al.* [Barr], Hackbusch [Hac], Kelley [Kelley] y Saad [Sa2].

# Capítulo 8

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.1

1. Calcule el polinomio lineal por mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 2.
2. Calcule el polinomio por mínimos cuadrados de grado 2 para los datos del ejemplo 1 y compare el error  $E$  para los dos polinomios.
3. Encuentre los polinomios por mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los datos en la siguiente tabla. Calcule el error  $E$  en cada caso. Grafique los datos y los polinomios.

$x_i$	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
$y_i$	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

4. Encuentre los polinomios por mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los datos en la siguiente tabla. Calcule el error  $E$  en cada caso. Grafique los datos y los polinomios.

$x_i$	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
$y_i$	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

5. Dados los datos:

$x_i$	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$y_i$	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

- a. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 1 y calcule el error.
  - b. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 2 y calcule el error.
  - c. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 3 y calcule el error.
  - d. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de la forma  $be^{ax}$  y calcule el error.
  - e. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de la forma  $bx^a$  y calcule el error.
6. Repita el ejercicio 5 para los siguientes datos.

$x_i$	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
$y_i$	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

## EJERCICIOS APLICADOS

7. En el ejemplo principal de este capítulo se describió un experimento para determinar la constante  $k$  del resorte en la ley de Hooke:

$$F(l) = k(l - E).$$

La función  $F$  es la fuerza requerida para estirar el resorte  $l$  unidades, donde la constante  $E = 5.3$  pulgadas, es la longitud del resorte sin estirar.

- a. Suponga que se realizan las medidas de la longitud  $l$ , en pulgadas, para pesos aplicados  $F(l)$ , en libras, de acuerdo con la siguiente tabla.

$F(l)$	$l$
2	7.0
4	9.4
6	12.3

Encuentre la aproximación por mínimos cuadrados para  $k$ .

- b. Se realizan mediciones adicionales, que proporcionan más datos:

$F(l)$	$l$
3	8.3
5	11.3
8	14.4
10	15.9

Calcule la nueva aproximación por mínimos cuadrados de  $k$ . ¿a) o b) se ajusta mejor a los datos experimentales totales?

8. La siguiente lista contiene calificaciones de tareas escolares y las calificaciones del examen final de 30 estudiantes de análisis numérico. Encuentre la ecuación de la recta por mínimos cuadrados para estos datos y úsela para determinar la calificación de tareas escolares que se requiere en la predicción de las calificaciones mínimas A (90%) y D (60%) en el examen final.

Tarea	Final	Tarea	Final
302	45	323	83
325	72	337	99
285	54	337	70
339	54	304	62
334	79	319	66
322	65	234	51
331	99	337	53
279	63	351	100
316	65	339	67
347	99	343	83
343	83	314	42
290	74	344	79
326	76	185	59
233	57	340	75
254	45	316	45

9. La siguiente tabla muestra los promedios de puntos del colegio de 20 especialistas en matemáticas y ciencias computacionales, junto con las calificaciones que recibieron estos estudiantes en la parte de matemáticas de la prueba ACT (Programa de Pruebas de Colegios Americanos) mientras estaban en secundaria. Grafique estos datos y encuentre la ecuación de la recta por mínimos cuadrados para estos datos.

Puntuación ACT	Promedio de puntos	Puntuación ACT	Promedio de puntos
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

10. El siguiente conjunto de datos, presentado al Subcomité Antimonopolio del Senado, muestra las características comparativas de supervivencia durante un choque de automóviles de diferentes clases. Encuentre la recta por mínimos cuadrados que aproxima estos datos (la tabla muestra el porcentaje de vehículos que participaron en un accidente en los que la lesión más grave fue fatal o seria).

Tipo	Peso promedio	Porcentaje de presentación
1. Regular lujoso doméstico	4800 lb	3.1
2. Regular intermediario doméstico	3700 lb	4.0
3. Regular económico doméstico	3400 lb	5.2
4. Compacto doméstico	2800 lb	6.4
5. Compacto extranjero	1900 lb	9.6

11. Para determinar una relación entre el número de peces y el número de especies de peces en muestras tomadas para una parte de la Gran Barrera de Coral, P. Sale y R. Dybdahl [SD] ajustaron polinomios lineales por mínimos cuadrados al siguiente conjunto de datos, los cuales se recopilaron en muestras durante un periodo de 2 años. Sea  $x$  el número de peces en la muestra y  $y$  el número de especies en la muestra.

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

Determine el polinomio lineal por mínimos cuadrados para estos datos.

12. Para determinar una relación funcional entre el coeficiente de atenuación y el espesor de una muestra de taconita, V. P. Singh [Si] ajustó un conjunto de datos al utilizar un polinomio lineal por mínimos cuadrados. El siguiente conjunto de datos se toma a partir de una gráfica en ese artículo. Encuentre el polinomio lineal por mínimos cuadrados que se ajusta a estos datos

Espesor (cm)	Coeficiente de atenuación (dB/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.071	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

13. En un artículo que trata de la eficiencia de la utilización de energía de una larva de polilla esfinge modesta (*Pachysphinx modesta*), L. Schroeder [Schr1] utilizó los siguientes datos para determinar una relación entre  $W$ , el peso vivo de la larva en gramos y  $R$ , el consumo de oxígeno de la larva en milímetros/hora. Por razones biológicas, se supone que existe una relación de la forma  $R = bW^a$  entre  $W$  y  $R$ .



- a. Encuentre el polinomio lineal por mínimos cuadrados mediante

$$\ln R = \ln b + a \ln W.$$

- b. Calcule el error relacionado con la aproximación en la parte a):

$$E = \sum_{i=1}^{37} (R_i - bW_i^a)^2.$$

- c. Modifique la ecuación logarítmica de mínimos cuadrados en la parte a) al sumar el término cuadrático  $c(\ln W_i)^2$  y determine el polinomio logarítmico por mínimos cuadrados.
- d. Determine la fórmula y calcule el error relacionado con la aproximación en la parte c).

$W$	$R$	$W$	$R$	$W$	$R$	$W$	$R$	$W$	$R$
0.017	0.154	0.025	0.23	0.020	0.181	0.020	0.180	0.025	0.234
0.087	0.296	0.111	0.357	0.085	0.260	0.119	0.299	0.233	0.537
0.174	0.363	0.211	0.366	0.171	0.334	0.210	0.428	0.783	1.47
1.11	0.531	0.999	0.771	1.29	0.87	1.32	1.15	1.35	2.48
1.74	2.23	3.02	2.01	3.04	3.59	3.34	2.83	1.69	1.44
4.09	3.58	4.28	3.28	4.29	3.40	5.48	4.15	2.75	1.84
5.45	3.52	4.58	2.96	5.30	3.88			4.83	4.66
5.96	2.40	4.68	5.10					5.53	6.94

## EJERCICIOS TEÓRICOS

14. Muestre que las ecuaciones normales (8.3) que resultan de la aproximación discreta por mínimos cuadrados producen una matriz simétrica y no singular y, por tanto, tienen una solución única. [Sugerencia: Si  $A = (a_{ij})$ , donde

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^m x_k^{i+j-2}$$

y  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son distintos con  $n < m - 1$ . Suponga que  $A$  es singular y que  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  es tal que  $\mathbf{c}^t A \mathbf{c} = 0$ . Muestre que el polinomio de enésimo grado cuyos coeficientes son las coordenadas de  $\mathbf{c}$  tiene más de  $n$  raíces y utilícelas para establecer una contradicción.]

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Uno o dos valores atípicos pueden desviar en gran medida los resultados de un análisis de mínimos cuadrados. ¿Por qué sucede esto?
- ¿Cómo podemos manejar los valores atípicos para garantizar que los resultados del análisis de mínimos cuadrados son válidos?
- Existen dos tipos diferentes de error de redondeo (de corte y de redondeo) que existe al utilizar una computadora o calculadora. Analice cómo afecta cada uno la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

- Encuentre la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados para  $f(x)$  en el intervalo indicado si
  - $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ,  $[0, 1]$ ;
  - $f(x) = x^3$ ,  $[0, 2]$ ;
  - $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $[1, 3]$ ;
  - $f(x) = e^x$ ,  $[0, 2]$ ;
  - $f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{3} \sin 2x$ ,  $[0, 1]$ ;
  - $f(x) = x \ln x$ ,  $[1, 3]$ .

2. Encuentre la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados en el intervalo  $[-1, 1]$  para las siguientes funciones.
 

<b>a.</b> $f(x) = x^2 - 2x + 3$	<b>b.</b> $f(x) = x^3$
<b>c.</b> $f(x) = \frac{1}{x+2}$	<b>d.</b> $f(x) = e^x$
<b>e.</b> $f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{3} \sin 2x$	<b>f.</b> $f(x) = \ln(x+2)$
3. Encuentre la aproximación polinomial por mínimos cuadrados de grado 2 para las funciones y los intervalos en el ejercicio 1.
4. Encuentre la aproximación polinomial por mínimos cuadrados de grado 2 en el intervalo  $[-1, 1]$  para las funciones en el ejercicio 3.
5. Calcule el error  $E$  para las aproximaciones en el ejercicio 3.
6. Calcule el error  $E$  para las aproximaciones en el ejercicio 4.
7. Utilice el proceso Gram-Schmidt para construir  $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$  y  $\phi_3(x)$  para los siguientes intervalos.
 

<b>a.</b> $[0, 1]$	<b>b.</b> $[0, 2]$	<b>c.</b> $[1, 3]$
--------------------	--------------------	--------------------
8. Repita el ejercicio 1 con los resultados del ejercicio 7.
9. Obtenga el polinomio de aproximación por mínimos cuadrados de grado 3 para las funciones en el ejercicio 1 por medio de los resultados del ejercicio 7.
10. Repita el ejercicio 3 con los resultados del ejercicio 7.
11. Utilice el procedimiento Gram-Schmidt para calcular  $L_1, L_2$  y  $L_3$ , donde  $\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$  es un conjunto ortogonal de polinomios en  $(0, \infty)$  respecto a las funciones de peso  $w(x) = e^{-x}$  y  $L_0(x) \equiv 1$ . Los polinomios obtenidos a partir de este procedimiento reciben el nombre de **polinomios de Laguerre**.
12. Utilice los polinomios de Laguerre calculados en el ejercicio 11 para calcular los polinomios de mínimos cuadrados de grado 1, 2 y 3 en el intervalo  $(0, \infty)$  respecto a la función de peso  $w(x) = e^{-x}$  para las siguientes funciones:
 

<b>a.</b> $f(x) = x^2$	<b>b.</b> $f(x) = e^{-x}$	<b>c.</b> $f(x) = x^3$	<b>d.</b> $f(x) = e^{-2x}$
------------------------	---------------------------	------------------------	----------------------------

## EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Suponga que  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es cualquier conjunto linealmente independiente en  $\prod_n$ . Muestre que para cualquier elemento  $Q \in \prod_n$ , existen constantes únicas  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , tales que

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x).$$

14. Muestre que si  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en  $[a, b]$  respecto a la función de peso  $w$ , entonces  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto linealmente independiente.
15. Muestre que las ecuaciones normales (8.6) tienen una solución única. [*Sugerencia:* Muestre que la única solución para la función  $f(x) \equiv 0$  es  $a_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$ . Multiplique la ecuación (8.6) por  $a_j$  y sume sobre todas las  $j$ . Intercambie el signo de la integral y sumatoria para obtener  $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$ . Por lo tanto,  $P(x) \equiv 0$ , por lo que  $a_j = 0$ , para  $j = 0, \dots, n$ . Por lo tanto la matriz de coeficientes es no singular y existe una única solución para la ecuación (8.6).]

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Existen dos tipos diferentes de error (de corte y de redondeo) que existen al usar una computadora o calculadora. Analice cómo afecta cada uno la aproximación polinomial por mínimos cuadrados.
2. A través de ortogonalidad, ¿se resuelve el problema de error de redondeo?
3. Analice por lo menos una desventaja de utilizar la aproximación por mínimos cuadrados.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.3

- Utilice los ceros de  $\tilde{T}_3$  para construir un polinomio de interpolación de grado 2 para las siguientes funciones en el intervalo  $[-1, 1]$ .
  - $f(x) = e^x$
  - $f(x) = \sin x$
  - $f(x) = \ln(x+2)$
  - $f(x) = x^4$
- Utilice los ceros de  $\tilde{T}_4$  para construir un polinomio de interpolación de grado 3 para las funciones en el ejercicio 1.
- Encuentre una cota para el error máximo de la aproximación en el ejercicio 1 en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- Repita el ejercicio 3 para las aproximaciones calculadas en el ejercicio 3.
- Utilice los ceros de  $\tilde{T}_3$  y transformaciones del intervalo provisto para construir un polinomio de interpolación de grado 2 para las siguientes funciones.
  - $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1, 3]$
  - $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$
  - $f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{3} \sin 2x, \quad [0, 1]$
  - $f(x) = x \ln x, \quad [1, 3]$
- Encuentre el sexto polinomio de Maclaurin para  $xe^x$  y utilice economización de Chebyshev para obtener una aproximación polinomial de menor grado mientras se mantiene el error menor a 0.01 en  $[-1, 1]$ .
- Encuentre el sexto polinomio de Maclaurin para  $\sin x$  y utilice economización de Chebyshev para obtener una aproximación polinomial de menor grado mientras se mantiene el error menor a 0.01 en  $[-1, 1]$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

- Los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$  son soluciones para las ecuaciones diferenciales  $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Verifique este hecho para  $n = 0, 1, 2, 3$ .
- Un hecho interesante es que  $T_n(x)$  es igual al determinante de la matriz tridiagonal  $n$  por  $n$

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Verifique este hecho para  $n = 1, 2, 3$ .

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Muestre que para cualquier entero positivo  $i$  y  $j$  con  $i > j$ , se tiene  $T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{i-j}(x)]$ .
- Muestre que para cada polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$ , se tiene

$$\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

- Muestre que para cada  $n$ , el polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  tiene  $n$  ceros diferentes en  $(-1, 1)$ .
- Muestre que para cada  $n$ , la derivada del polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  tiene  $n-1$  ceros diferentes en  $(-1, 1)$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Al utilizar los ceros de los polinomios de Chebyshev como nodos para interpolación, ¿se introducen o se resuelven problemas de error de redondeo?
- ¿La economización de Chebyshev se puede utilizar para reducir el grado de un polinomio de aproximación por mínimos cuadrados? Analice los pros y los contras.

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.4

- Determine todas las aproximaciones de Padé de grado 2 para  $f(x) = e^{2x}$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , con los valores reales  $f(x_i)$ .
- Determine todas las aproximaciones de Padé de grado 3 para  $f(x) = x \ln(x+1)$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , con los valores reales  $f(x_i)$ .
- Determine la aproximación de grado 5 con  $n = 2$  y  $m = 3$  para  $f(x) = e^x$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , con los del quinto polinomio de Maclaurin.
- Repita el ejercicio 3 por medio de la aproximación de Padé de grado 5 con  $n = 3$  y  $m = 2$ . Compare los resultados en cada  $x_i$  con los calculados en el ejercicio 3.
- Determine las aproximaciones de Padé de grado 5 con  $n = m = 3$  para  $f(x) = \sin x$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.1i$ , para  $i = 0, 1, \dots, 5$ , con los resultados exactos y con los resultados del sexto polinomio de Maclaurin.
- Determine las aproximaciones de grado 4 con a)  $n = 2, m = 4$  y b)  $n = 4, m = 2$ , para  $f(x) = \sin x$ . Compare los resultados en cada  $x_i$  con los obtenidos en el ejercicio 5.
- La tabla 8.10 enumera los resultados de la aproximación de Padé de grado 5 con  $n = 3$  y  $m = 2$ , el quinto polinomio de Maclaurin y los valores exactos de  $f(x) = e^{-x}$  cuando  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Compare estos resultados con los producidos a partir de las aproximaciones de Padé de grado 5.
  - $n = 0, m = 5$
  - $n = 1, m = 4$
  - $n = 3, m = 2$
  - $n = 4, m = 1$
- Expresé las siguientes funciones racionales en forma de fracción continuada:
  - $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 1}$
  - $\frac{4x^2 + 3x - 7}{2x^3 + x^2 - x + 5}$
  - $\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 4}$
  - $\frac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$
- Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 2 para  $f(x) = e^{-x}$ . ¿Cuál da la mejor aproximación para  $f(x) = e^{-x}$  en  $x = 0.25, 0.5$  y  $1$ ?
- Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 3 para  $f(x) = \cos x$ . ¿Cuál da la mejor aproximación para  $f(x) = \cos x$  en  $x = \pi/4$  y  $\pi/3$ ?
- Encuentre la aproximación racional de Chebyshev de grado 4 con  $n = m = 2$  para  $f(x) = \sin x$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.1i$ , para  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , a partir de esta aproximación con los obtenidos en el ejercicio 5 a través de la aproximación de Padé de grado 6.
- Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 5 para  $f(x) = e^x$ . Compare los resultados en  $x_i = 0.2i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , con los obtenidos en los ejercicios 3 y 4.

## EJERCICIOS APLICADOS

- Para aproximar con exactitud  $f(x) = e^x$  para su inclusión en una biblioteca matemática, primero restringimos el dominio de  $f$ . Dado un número real  $x$ , divídalo entre  $\ln \sqrt{10}$  para obtener la relación

$$x = M \cdot \ln \sqrt{10} + s,$$

donde  $M$  es un entero y  $s$  es un número real que satisface  $|s| \leq \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$ .

- Muestre que  $e^x = e^s \cdot 10^{M/2}$ .
- Construya una aproximación de función racional para  $e^s$  mediante  $n = m = 3$ . Calcule el error cuando  $0 \leq |s| \leq \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$ .
- Diseñe una implementación de  $e^x$  por medio de los resultados de las partes a) y b) y las aproximaciones

$$\frac{1}{\ln \sqrt{10}} = 0.8685889638 \quad \text{y} \quad \sqrt{10} = 3.162277660.$$

14. Para aproximar con exactitud  $\sin x$  y  $\cos x$  para inclusión en una biblioteca matemática, primero restrinja sus dominios. Dado un número real  $x$ , divida entre  $\pi$  para obtener la relación

$$|x| = M\pi + s, \quad \text{donde } M \text{ es un entero y } |s| \leq \frac{\pi}{2}.$$

- Muestre que  $\sin x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (-1)^M \cdot \sin s$ .
- Construya una aproximación racional para  $\sin s$  por medio de  $n = m = 4$ . Calcule el error cuando  $0 \leq |s| \leq \pi/2$ .
- Diseñe una implementación de  $x$  por medio de los resultados de las partes a) y b).
- Repita la parte c) para  $\cos x$  mediante el hecho de que  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- En esta sección analizamos la técnica de aproximación de Padé. Compare esta técnica con la de aproximación de Chisholm.
- ¿Se puede aplicar una técnica de aproximación de Padé a una función armónica de valor complejo en el disco unidad?
- ¿Qué es la interpolación baricéntrica tipo Padé y cómo se usa en sentido de mínimos cuadrados?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

- Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_2(x)$  para  $f(x) = x^2$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_n(x)$  para  $f(x) = x$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_3(x)$  para  $f(x) = e^x$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_n(x)$  para  $f(x) = e^x$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_n(x)$  para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

- Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos  $S_n(x)$  para

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0. \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos  $S_n(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  para las siguientes funciones, por medio de los valores dados de  $m$  y  $n$ :
  - $f(x) = \cos 2x$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$
  - $f(x) = \cos 3x$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$
  - $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{3}$ ,  $m = 6$ ,  $n = 3$
  - $f(x) = x^2 \cos x$ ,  $m = 6$ ,  $n = 3$
- Calcule el error  $E(S_n)$  para cada una de las funciones del ejercicio 7.
- Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos  $S_3(x)$ , por medio de  $m = 4$  para  $f(x) = e^x \cos 2x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Calcule el error  $E(S_3)$ .
- Repita el ejercicio 9, con  $m = 8$ . Compare los valores de los polinomios de aproximación con los valores de  $f$  en los puntos  $\xi_j = -\pi + 0.2j\pi$ , para  $0 \leq j \leq 10$ . ¿Qué aproximación es mejor?
- Si  $f(x) = 2 \tan x - \sec 2x$ , para  $2 \leq x \leq 4$ . Determine los polinomios trigonométricos de mínimos cuadrados discretos  $S_n(x)$ , usando los valores de  $n$  y  $m$  como sigue y calcule el error en cada caso.
  - $n = 3$ ,  $m = 6$
  - $n = 4$ ,  $m = 6$

12. a. Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos  $S_4(x)$   $m = 16$ , para  $f(x) = x^2 \sin x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .  
 b. Calcule  $\int_0^1 S_4(x) dx$ .  
 c. Compare la integral en la parte b)  $\int_0^1 x^2 \sin x dx$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

13. La tabla lista los Promedios Industriales Dow Jones de cierre (DJIA) del primer día que abre el mercado para los meses de marzo de 2013 a junio de 2014.

Entrada	Mes	Año	DJIA
0	Marzo	2013	14090
1	Abril	2013	14573
2	Mayo	2013	14701
3	Junio	2013	15254
4	Julio	2013	14975
5	Agosto	2013	15628
6	Septiembre	2013	14834
7	Octubre	2013	15193
8	Noviembre	2013	15616
9	Diciembre	2013	16009
10	Enero	2014	16441
11	Febrero	2014	15373
12	Marzo	2014	16168
13	Abril	2014	16533
14	Mayo	2014	16559
15	Junio	2014	16744

- a. Construya el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos de grado 4 para los datos anteriores.  
 b. Aproxime los promedios de cierre el 8 de abril de 2013 y el 8 de abril de 2014 mediante el polinomio construido en la parte a).  
 c. El cierre en los días provistos en la parte b) fueron 14 613 y 16 256. En general, ¿Qué tan bien cree que este polinomio puede predecir los promedios de cierre?  
 d. Aproxime el cierre para 17 de junio de 2014. El cierre real fue 166 808. ¿Esta predicción fue útil?
14. La temperatura  $u(x, t)$  en una barra de plata de longitud  $L = 10$  cm, densidad  $\rho = 10.6 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$ , conductividad térmica  $K = 1.04 \frac{\text{cal}}{\text{cm} * \text{deg} * \text{s}}$ , y calor específico  $\sigma = 0.056 \frac{\text{cal}}{\text{gm} * \text{deg}}$  que está literalmente aislado y cuyos extremos se mantienen en  $0^\circ\text{C}$  está regida por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t$$

con condiciones de frontera  $u(0, t) = 0$  y  $u(L, t) = 0$  y condición inicial  $u(x, 0) = f(x) = 10x - x^2$ . La solución del problema está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\beta^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

donde  $\beta = \frac{K}{\rho\sigma}$  y los coeficientes provienen de la serie senoidal de Fourier  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  para  $f(x)$  donde  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$ .

- Encuentre los cuatro términos diferentes de cero de la serie senoidal de Fourier de  $f(x) = 10x - x^2$ .
- Compare  $f(x)$  con los primeros cuatro términos diferentes a cero de  $a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) + a_2 \sin\left(2\frac{\pi x}{10}\right) + a_3 \sin\left(3\frac{\pi x}{10}\right) + a_4 \sin\left(4\frac{\pi x}{10}\right) + \dots$  para  $x = 3, 6, 9$ .
- Encuentre los primeros cuatro términos diferentes de cero de  $u(x, t)$ .
- Aproxime  $u(9, 0.5)$ ,  $u(6, 0.75)$ ,  $u(3, 1)$  usando la parte c).

## EJERCICIOS TEÓRICOS

- Muestre que para cualquier función impar continua  $f$  definida en el intervalo  $[-a, a]$ , se tiene  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .
- Muestre que para cualquier función par continua  $f$  definida en el intervalo  $[-a, a]$ , se tiene  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .
- Muestre que las funciones  $\phi_0(x) = 1/2$ ,  $\phi_1(x) = \cos x$ ,  $\dots$ ,  $\phi_n(x) = \cos nx$ ,  $\phi_{n+1}(x) = \sin x$ ,  $\dots$ ,  $\phi_{2n-1}(x) = \sin(n-1)x$  son ortogonales en  $[-\pi, \pi]$  respecto a  $w(x) \equiv 1$ .
- En el ejemplo 1, se determinó la serie de Fourier para  $f(x) = |x|$ . Utilice esta serie y la suposición de que  $f$  está representada en cero para encontrar el valor de la serie infinita convergente  $\sum_{k=0}^{\infty} (1/(2k+1)^2)$ .
- Muestre que la forma de las constantes  $a_k$  para  $k = 0, \dots, n$  en el teorema 8.13 es correcta de acuerdo con lo establecido.

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

- Algunas veces, los problemas de procesamiento de señales implican la aproximación de una función conocida únicamente en algunos puntos medidos mediante un polinomio trigonométrico. Es posible usar una técnica llamada Fourier ventaneada en esta aproximación. Analice lo que significa.
- Analice el uso de la serie de Fourier en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.
- ¿En qué condiciones converge la serie de Fourier con la función que representa?

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.6

- Determine el polinomio de interpolación trigonométrico  $S_2(x)$  de grado 2 en  $[-\pi, \pi]$  para las siguientes funciones y grafique  $f(x) - S_2(x)$ :
  - $f(x) = \pi(x - \pi)$
  - $f(x) = x(\pi - x)$
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
- Determine el polinomio de interpolación trigonométrico de grado 4 para  $f(x) = x(\pi - x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  mediante:
  - Cálculo directo;
  - El algoritmo de la transformada rápida de Fourier
- Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 4 en  $[-\pi, \pi]$  para las siguientes funciones.
  - $f(x) = \pi(x - \pi)$
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = \cos \pi x - 2 \sin \pi x$
  - $f(x) = x \cos x^2 + e^x \cos e^x$
- Determine el polinomio de interpolación trigonométrica  $S_4(x)$  para  $f(x) = x^2 \sin x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
  - Calcule  $\int_0^1 S_4(x) dx$ .
  - Compare la integral en la parte b) con  $\int_0^1 x^2 \sin x dx$ .
- Utilice las aproximaciones obtenidas en el ejercicio 3 para las siguientes integrales y compare sus resultados con los valores reales.
  - $\int_{-\pi}^{\pi} \pi(x - \pi) dx$
  - $\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx$

c.  $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \pi x - 2 \sin \pi x) dx$

d.  $\int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x^2 + e^x \cos e^x) dx$

6. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para determinar el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 16 para  $f(x) = x^2 \cos x$  en  $[-\pi, \pi]$ .
7. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para determinar el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 64 para  $f(x) = x^2 \cos x$  en  $[-\pi, \pi]$ .

## EJERCICIOS APLICADOS

8. Los siguientes datos representan las temperaturas para dos días consecutivos en el Aeropuerto Regional Youngston-Warren.

Hora	6 am	7 am	8 am	9 am	10 am	11 am	12 pm	1 pm	2 pm	3 pm	4 pm	5 pm	6 pm	7 pm	8 pm	9 pm
17 de junio	71	71	72	75	78	81	82	83	85	85	85	85	84	83	83	80
18 de junio	68	69	70	72	74	77	78	79	81	81	84	81	79	78	77	75

- a. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para construir el polinomio de interpolación trigonométrica para los datos del 17 de junio.
- b. Grafique el polinomio y los datos para el 18 de junio en el mismo. ¿Parece que el polinomio se podría usar de cualquier forma para predecir las temperaturas del 18 de junio cuando la temperatura de las 6:00 am es 68?
9. La tabla lista los Promedios Industriales Dow Jones de cierre (DJIA) del primer día que abre el mercado para los meses de marzo de 2013 a junio de 2014.

Entrada	Mes	Año	DJIA
0	Marzo	2013	14090
1	Abril	2013	14573
2	Mayo	2013	14701
3	Junio	2013	15254
4	Julio	2013	14975
5	Agosto	2013	15628
6	Septiembre	2013	14834
7	Octubre	2013	15193
8	Noviembre	2013	15616
9	Diciembre	2013	16009
10	Enero	2014	16441
11	Febrero	2014	15373
12	Marzo	2014	16168
13	Abril	2014	16533
14	Mayo	2014	16559
15	Junio	2014	16744

- a. Construya el polinomio trigonométrico de interpolación mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para los datos anteriores.
- b. Aproxime los promedios de cierre el 8 de abril de 2013 y el 8 de abril de 2014 mediante el polinomio de interpolación construido en la parte a).
- c. El cierre en los días dados en la parte b) fueron 14 613 y 16 256. En general, ¿qué tan bien cree que este polinomio puede predecir los promedios de cierre?
- d. Aproxime el cierre para 17 de junio de 2014. El cierre real fue 166808. ¿Esta predicción fue útil?



## EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Utilice una identidad trigonométrica para mostrar que  $\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos mx_j)^2 = 2m$ .
11. Muestre que  $c_0, \dots, c_{2m-1}$  en el algoritmo 8.3 están determinados por

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{2m-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{4m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{2m-1} & \zeta^{4m-2} & \dots & \zeta^{(2m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix},$$

donde  $\zeta = e^{\pi i/m}$ .

12. En el análisis precedente al algoritmo 8.3, se explicó un ejemplo para  $m = 4$ . Defina los vectores  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{y}$  como

$$\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_7)^t, \mathbf{d} = (d_0, \dots, d_7)^t, \mathbf{e} = (e_0, \dots, e_7)^t, \mathbf{f} = (f_0, \dots, f_7)^t, \mathbf{y} = (y_0, \dots, y_7)^t.$$

Encuentre las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de tal forma que  $\mathbf{c} = A\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d} = B\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = C\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{f} = D\mathbf{y}$ .

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La transformada rápida de Fourier es un tema muy importante en el procesamiento de señales digitales. ¿Porqué lo es?
2. Funcionalmente, la transformada rápida de Fourier descompone conjuntos de datos en una serie de conjuntos más pequeños. Explique cómo se realiza esto.
3. ¿Las transformadas rápidas de Fourier están limitadas a tamaños de potencias de dos?

## PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. FFTSS es una biblioteca para la transformada rápida de Fourier. Analice esta biblioteca.
2. Describa la biblioteca para la transformada rápida de Fourier de código abierto FFTW. Analice esta biblioteca.
3. Describa cómo se puede implementar la transformada rápida de Fourier en Excel.

## CONCEPTOS CLAVE

Aproximación  
Aproximación de Padé  
Conjunto ortogonal de funciones  
Desviación absoluta  
Ecuaciones normales  
Error de aproximación  
Fracción continuada  
Función de peso

Función racional de Chebyshev  
Gram-Schmidt  
Linealmente dependiente  
Linealmente independiente  
Minimax  
Mínimos cuadrados lineales  
Mínimos cuadrados polinomiales

Ortonormal  
Polinomio de Legendre  
Polinomio mónico  
Polinomios de Chebyshev  
Polinomios trigonométricos  
Serie de Fourier  
Transformada de Fourier  
Transformada rápida de Fourier

## REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos datos y funciones de aproximación con funciones fundamentales. Las funciones fundamentales que se usaron fueron polinomios, funciones racionales y polinomios trigonométricos. Consideramos dos tipos de aproximaciones: discretas y continuas. Las discretas surgen cuando se aproxima un conjunto definido de datos con una función fundamental. Las continuas se utilizan cuando se conoce la función que se va a aproximar.

Las técnicas de mínimos cuadrados discretos se recomiendan cuando la función se especifica por medio de un conjunto determinado de datos que no representa exactamente la función. Los mínimos cuadrados ajustados a los datos pueden tomar la forma de una aproximación polinomial lineal u otra o, incluso, una exponencial. Estas aproximaciones se calculan al resolver conjuntos de ecuaciones normales, como se establece en la sección 8.1.

Si los datos son periódicos, puede ser adecuado un ajuste de mínimos cuadrados trigonométricos. Debido a la ortonormalidad de las funciones básicas trigonométricas, la aproximación de mínimos cuadrados trigonométricos no requiere la solución de un sistema lineal. Para grandes cantidades de datos periódicos también se recomienda la interpolación mediante polinomios trigonométricos. Un método eficiente del cálculo del polinomio de interpolación trigonométrica se da mediante la transformada rápida de Fourier.

Cuando la función que se va a aproximar se puede evaluar en cualquier argumento requerido, las aproximaciones buscan minimizar una integral en lugar de una suma. Las aproximaciones de polinomios de mínimos cuadrados continuos se consideraron en la sección 8.2. El cálculo eficiente de los polinomios de mínimos cuadrados conducen a conjuntos ortonormales de polinomios, como los de Legendre y Chebyshev. La aproximación por medio de funciones racionales se estudió en la sección 8.4, junto con la aproximación de Padé como una generalización del polinomio de Maclaurin y se presentó su extensión para la aproximación racional de Chebyshev. Ambas permiten un método de aproximación más uniforme que los polinomios. La aproximación de mínimos cuadrados continuos mediante funciones trigonométricas se analizó en la sección 8.5, en especial porque se relaciona con la serie de Fourier.

Para más información sobre la teoría general de aproximación, consulte Powell [Pow], Davis [Da] o Cheney [Ch]. Una buena referencia para métodos de mínimos cuadrados es Lawson y Hanson [LH] e información sobre las transformadas de Fourier puede encontrarse en Van Loan [Van] y en Briggs y Hanson [BH].