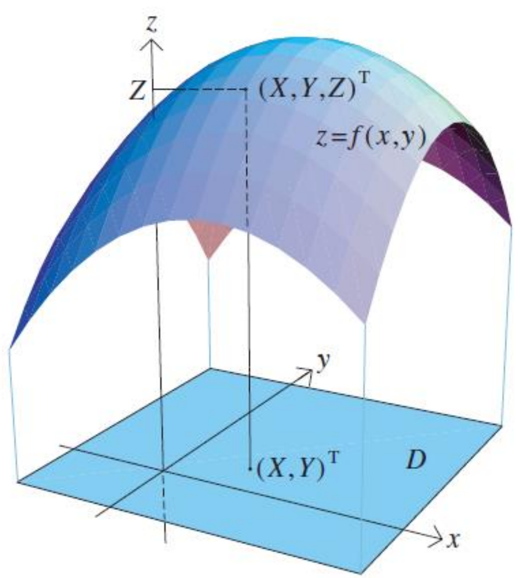
Definizione

DEFINIZIONE

Funzione reale di due variabili reali

Indichiamo con R^2 l'insieme di tutti i vettori bidimensionali. Dato un sottoinsieme $D \subseteq R^2$, una funzione $f\colon D \rightarrow R$ è una legge che assegna a ogni punto (x, y) dell'insieme D un unico valore z ∈ R indicato con $z = f(x,y)$

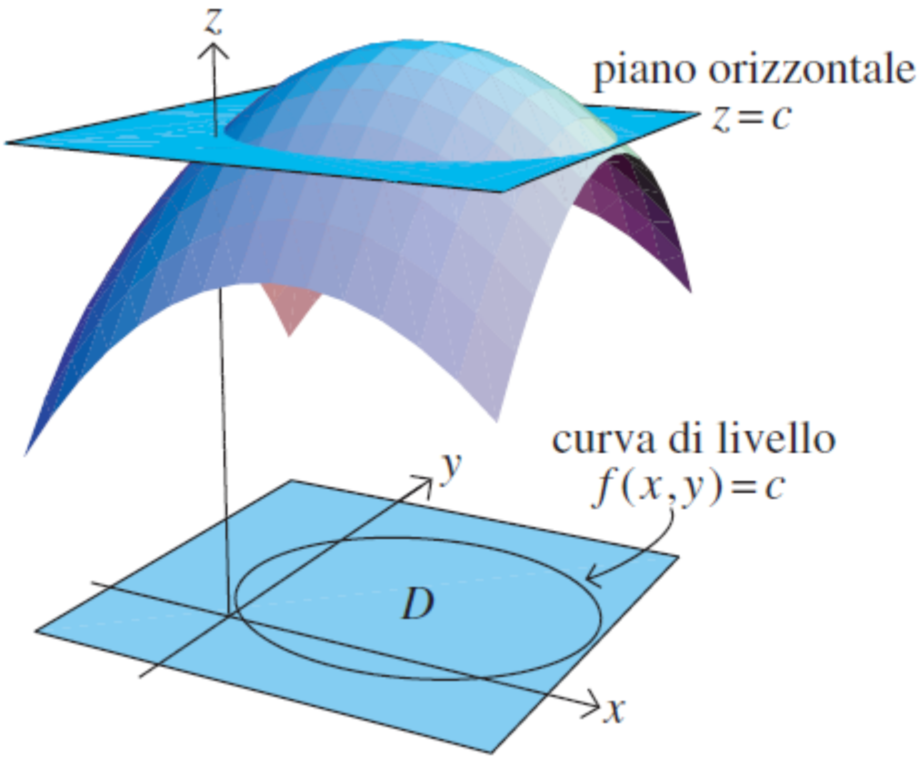


In questo caso, x e y sono le variabili indipendenti e z e la variabile dipendente. Il dominio D è una regione del piano (x, y) e il grafico è una superficie dello spazio tridimensionale. A ciascun punto (X,Y) di D con f(X,Y) = Z corrisponde un unico punto (X,Y, Z) sulla superficie.

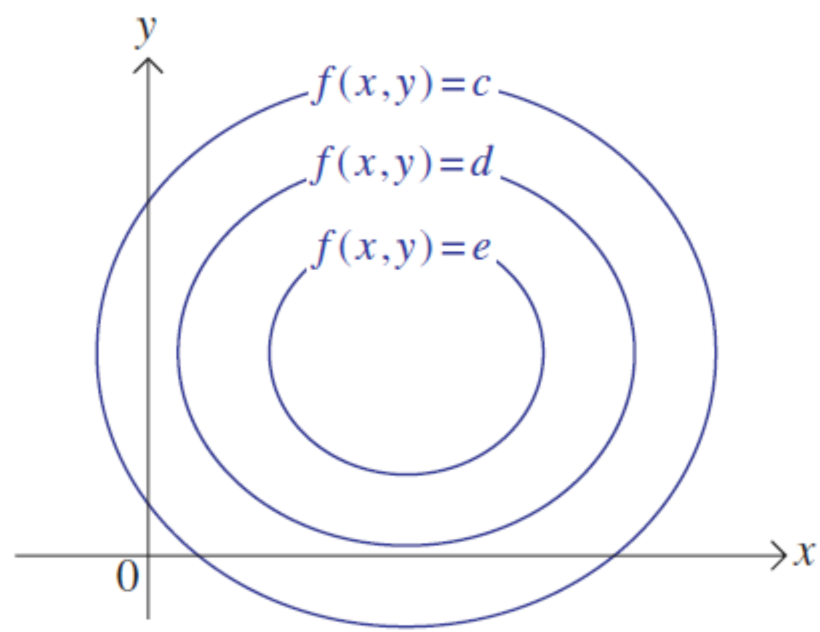
Curve di livello

Di solito la superficie non è facile da disegnare per cui talvolta si preferisce considerarla come se fosse la superficie di un terreno. È allora naturale rappresentare l'andamento del terreno disegnando una mappa di curve orizzontali a una quota fissata, chiamate **curve di livello** o **contorni**, lungo le quali il valore della funzione è costante.
Ciascuna di queste linee corrisponde a una sezione orizzontale che taglia la superficie. Anche le sezioni verticali aiutano a descrivere la superficie, mostrandone delle viste laterali. Il reticolo che compare nel grafico di una funzione generato da un calcolatore corrisponde a sezioni verticali che tagliano la superficie secondo due direzioni ortogonali.

Rappresentazione delle linee di livello



Disegno della superficie



Curve di livello

Insieme di definizione

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$z = f(x;y) = \frac{3x+2y-5}{x^2+4} .$$

Qual è il suo dominio?

Denominatore non nullo: $x^2+4 \neq 0$, condizione vera per ogni x e per ogni y

→ Dominio di f: $S = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

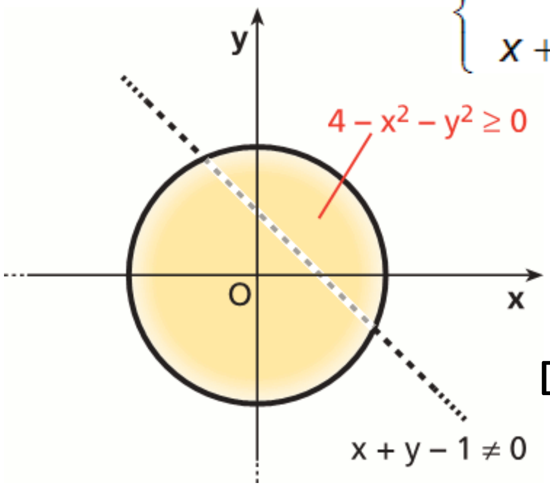
ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$z = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x+y-1} .$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} 4-x^2-y^2 \geq 0 \\ x+y-1 \neq 0 \end{cases} .$$



Dominio

Insieme di definizione

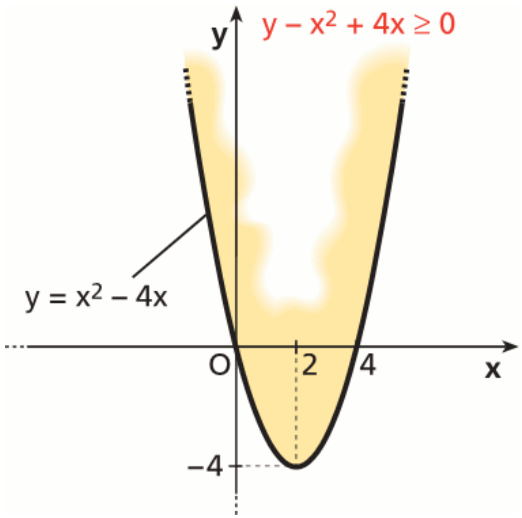
ESEMPIO

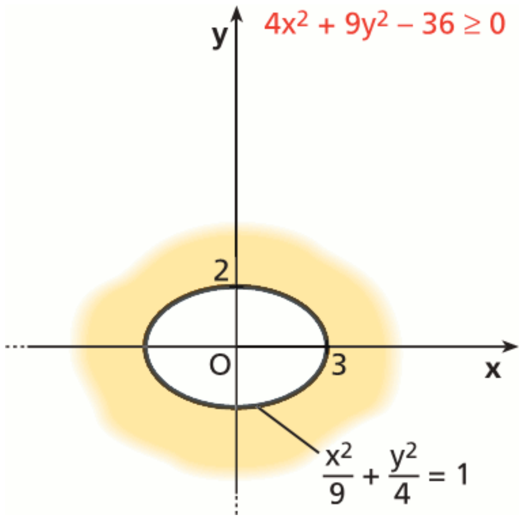
Determiniamo il dominio della funzione:

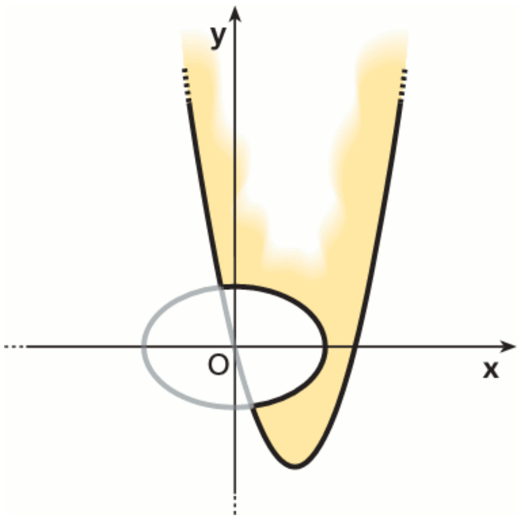
$$z = \frac{\sqrt{y - x^2 + 4x}}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + 7}.$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} \boxed{y - x^2 + 4x \geq 0} \\ \boxed{4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0} \end{cases}.$$





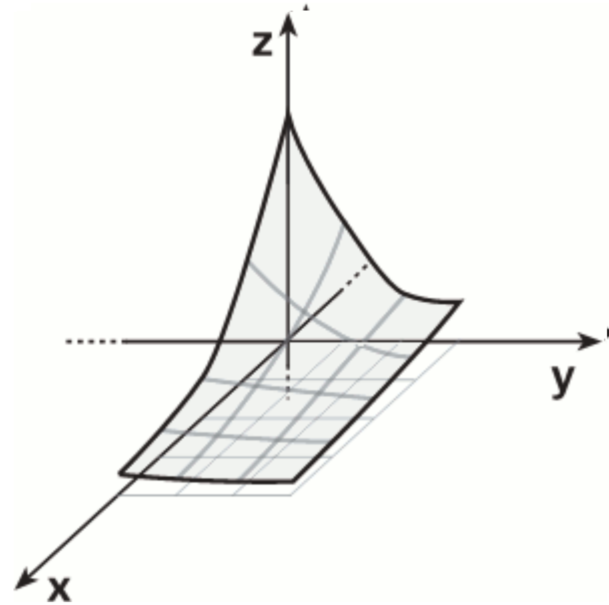


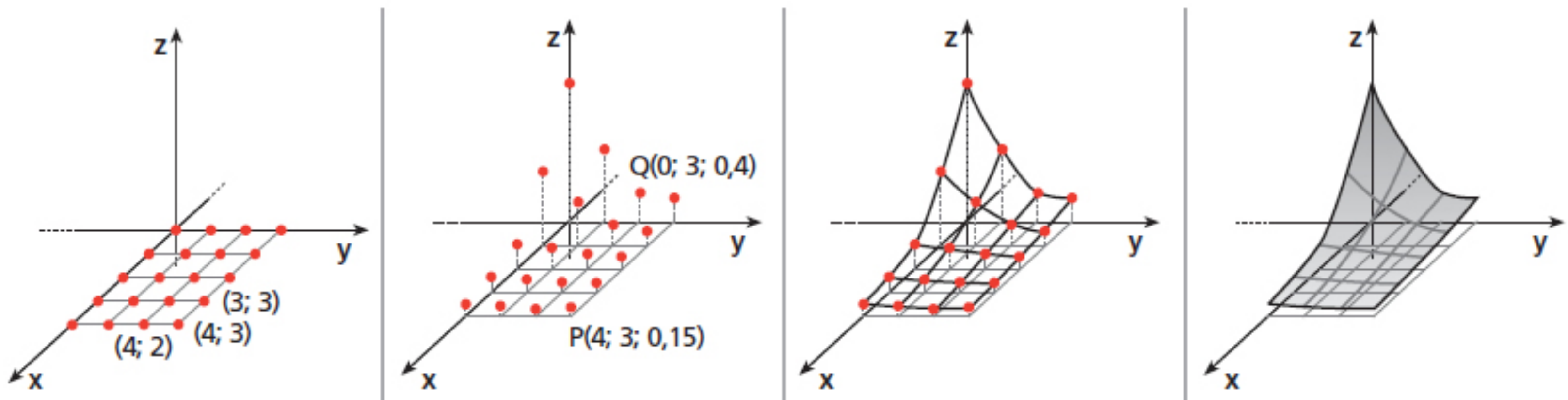
Prima disequazione | Seconda disequazione | Intersezione

Grafico delle funzioni in due variabili

I grafici per punti

Grafico di $z = f(x; y)$: si individua un reticolo all'interno della porzione di dominio che si vuole rappresentare;
si innalzano le quote di ciascun nodo;
si congiungono con delle linee i punti ottenuti;
i quadrilateri ottenuti forniscono una rappresentazione approssimativa della superficie curva $z = f(x; y)$.





a. Tracciamo i lati di un reticolo.

b. Innalziamo le quote da ciascun nodo.

c. Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

d. Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.

Grafico delle funzioni in due variabili

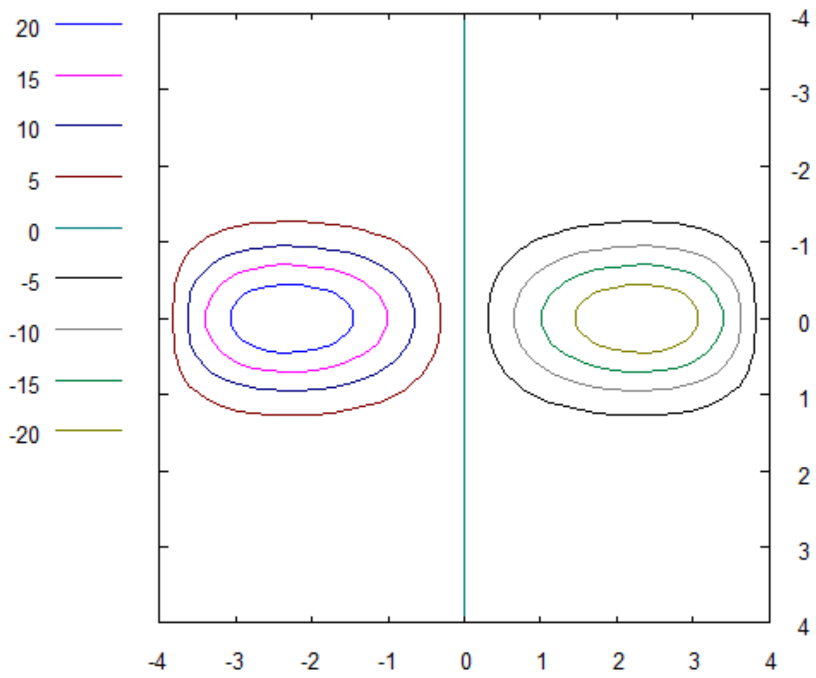
Le linee di livello

Grafico di $z = f(x; y)$:

• si interseca la superficie curva $z = f(x; y)$ con piani $z = k$;

• si riportano su un piano le **linee di livello** cioè le curve d'intersezione tra il piano $z = k$ e la superficie da rappresentare;

• si riportano sul grafico le quote k corrispondenti alle linee disegnate.



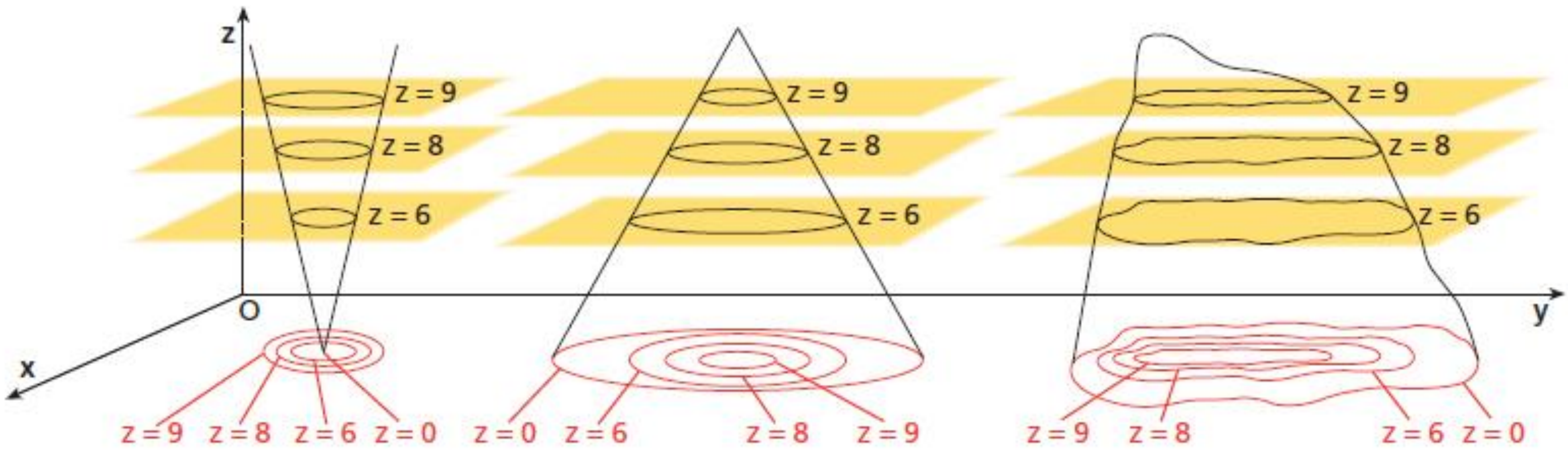
Come nell'esempio, una famiglia di linee di livello concentriche può rappresentare sia un **picco** della superficie (a sinistra) sia un **avvallamento** (a destra).

Linee di livello

DEFINIZIONE

Linea di livello

Una linea di livello è l'insieme delle proiezioni ortogonali sul piano Oxy dei punti di una superficie che hanno tutti la stessa quota $z = k$.



Nozioni di Topologia in R^2

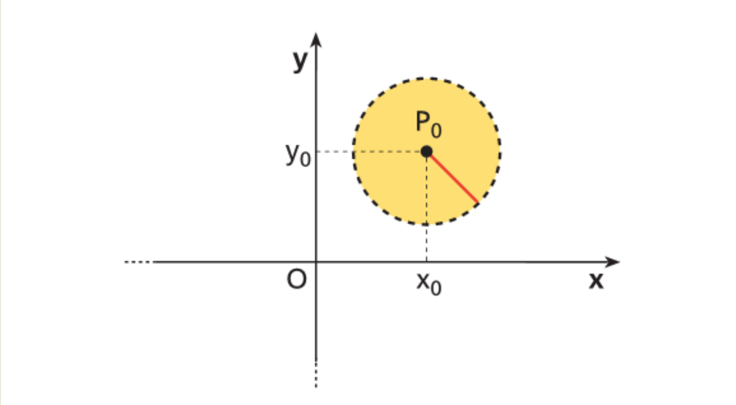
DEFINIZIONE

Intorno circolare

Si chiama intorno circolare di un punto $P_0(x_0; y_0)$ del piano l'insieme dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano la disequazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

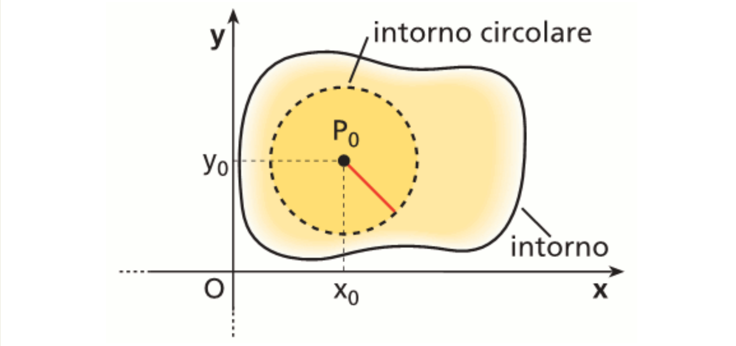
con r numero reale positivo.



DEFINIZIONE

Intorno

Si chiama intorno di un punto P_0 del piano ogni sottoinsieme di **R** x **R** che contiene un intorno circolare di centro P_0.



Nozioni di Topologia in R^2

ESEMPIO

Consideriamo l'insieme

$$I = \{ (x;y) \mid (x;y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge$$
$$\wedge\, x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 < 0 \}.$$

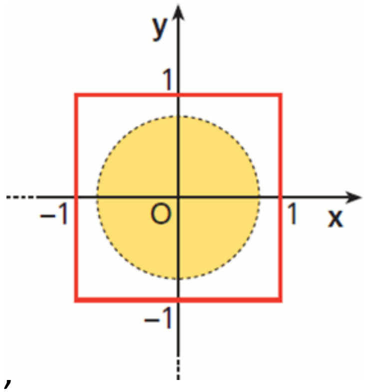
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$$

è l'equazione di una circonferenza centrata in P_0 (3;2) con raggio r = 1.

→ I è un intorno circolare di raggio 1 del punto P_0 (3;2).

ESEMPIO

Consideriamo l'insieme I rappresentato nella figura.



$$-1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1\,,$$

I contiene in intorno circolare di O (0;0) di raggio 0,75.

→ I è un intorno di O (0;0).
O è un **punto di accumulazione** per I.

DEFINIZIONE

Punto di accumulazione

Dato un insieme I di punti di un piano, un punto P_0 si dice di accumulazione per I se, comunque fissato un intorno circolare di P_0, tale intorno contiene infiniti punti di I.

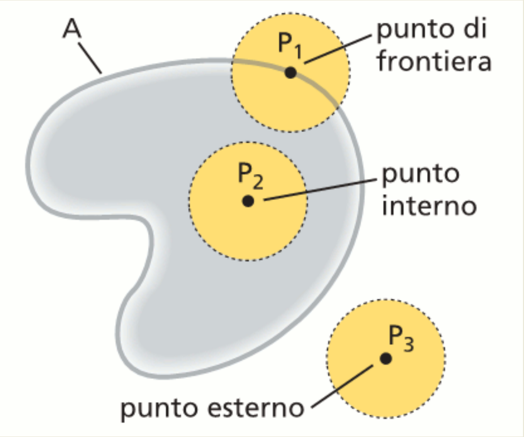
Nozioni di Topologia in R^2

DEFINIZIONE

Punti interni, esterni, di frontiera

Dato un insieme *A* di punti del piano, un punto *P* è:

- **di frontiera** per *A,* se ogni intorno di *P* ha punti di *A* e punti che non appartengono ad *A*;
- **interno** ad *A*, se *P* appartiene ad *A* e se esiste un intorno di *P* i cui punti sono soltanto punti di *A*;
- **esterno** ad *A,* se esiste un intorno di *P* che non ha punti appartenenti ad *A*.



ESEMPIO

Dato un cerchio:
sono **esterni** i punti che non appartengono al cerchio;
sono **interni** i punti del cerchio che non appartengono alla circonferenza;
la circonferenza è la **frontiera**.

DEFINIZIONE

Insieme aperto, insieme chiuso

Un insieme di punti del piano si dice:

- **aperto**, se ogni suo punto è *interno;*
- **chiuso**, se il suo complementare è aperto.

ESEMPIO

Un poligono è un insieme **chiuso**.
Un poligono privato dei lati è un insieme **aperto**.

Il limite per una funzione in due variabili

DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a P_0

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D,

si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x;y)$ tendente a $P_0(x_0;y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x;y) = l$$

oppure

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = l$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo e, si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio d dipendente da e, per ogni punto del quale, escluso P_0, sia $|f(x;y) - l| < \varepsilon$.

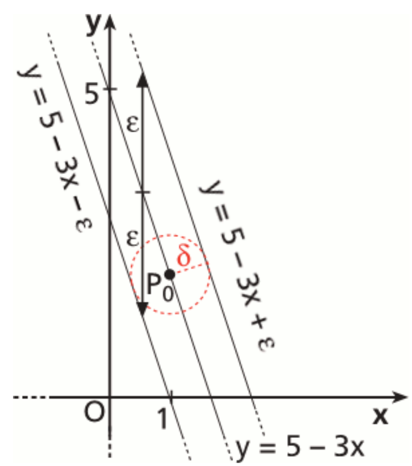
ESEMPIO

Verifichiamo che: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x + y) = 5$.

Cerchiamo, per ogni e, un intorno circolare di (1;2) in cui $|\ 3x + y\ | < e$.

Ossia: $5 - e < 3x + y < 5 + e$,

$5 - 3x - e < y < 5 - 3x + e$.



La disequazione rappresenta lo spazio compreso tra le due rette esterne, che comprende un intorno circolare di (1;2).

Il limite per una funzione in due variabili

DEFINIZIONE

Limite infinito per P tendente a P_0
Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D,
si dice che la funzione ammette limite infinito per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x;y) = \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = \infty$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo M, si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio d dipendente da M, per ogni punto del quale, escluso P_0, sia $|f(x; y)| > M$.

DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a *infinito*
Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D illimitato,
si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x; y)$ tendente a e si scrive

oppure

$$\lim_{P \to \infty} f(x;y) = l \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x;y) = l$$

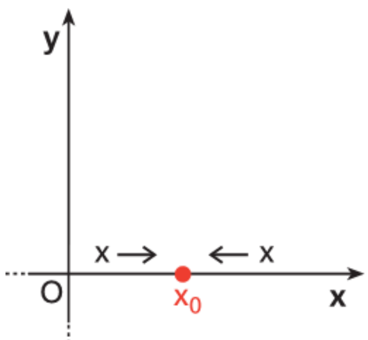
se, fissato arbitrariamente un numero positivo e , si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio d dipendente da e, tale che per tutti i punti di *D esterni* ad esso risulti

$$|f(x;y) - l| < \varepsilon .$$

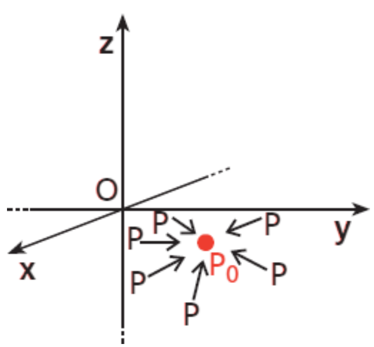
Il limite per una funzione in due variabili

Limite destro e limite sinistro?

Nell'asse reale, un punto x_0 divide i propri intorni in due parti.
Si possono definire i limiti destro e sinistro di una funzione intorno a x_0.



Nel piano, il punto $P_0(x_0; y_0)$ non divide l'intorno.
I limiti destro e sinistro non hanno senso.



DEFINIZIONE

Funzione continua

Una funzione $z = f(x; y)$ definita in un insieme D si dice continua in un punto $P_0(x_0; y_0)$, appartenente a D e di accumulazione per D stesso,
se esiste finito il $\lim_{P \to P_0} f(x; y)$ e se tale

limite è uguale al valore assunto dalla funzione in P_0.
Scriviamo: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

ESEMPIO

$z = \frac{x+y}{x-y}$ è continua per $x \neq y$.

Ricerca del dominio

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il dominio della funzione:

$$z = \frac{\sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 15)} + 7x^2 - 6x}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}.$$

Dobbiamo imporre che siano contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:

- il denominatore diverso da 0;
- il radicando al numeratore maggiore o uguale a 0;
- l'argomento del logaritmo maggiore di 0;
- il radicando al denominatore maggiore oppure uguale a 0.

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \neq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - y^2 - 1 \neq 0 \\ \ln(x^2 + y^2 - 15) \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \\ x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

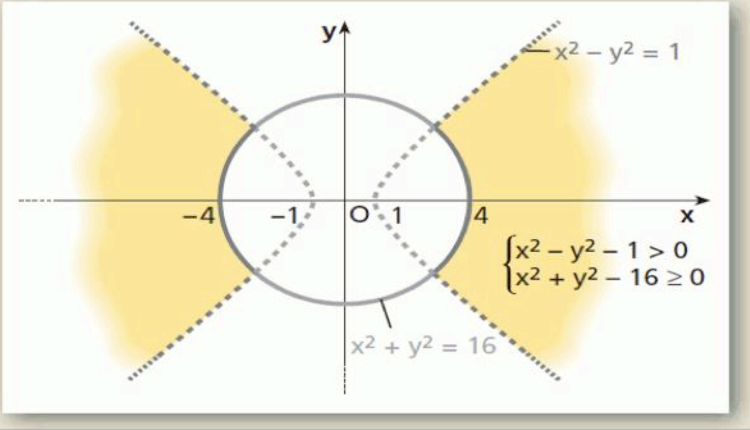
Considerando la prima e l'ultima condizione contemporaneamente e ricordando che $\ln a \geq 0$ per $a \geq 1$, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \\ x^2 + y^2 - 15 > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda e la terza disequazione sono entrambe vere soltanto se il primo membro è maggiore o uguale a 1:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 15 \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è rappresentato da tutti i punti del piano della parte colorata della figura.



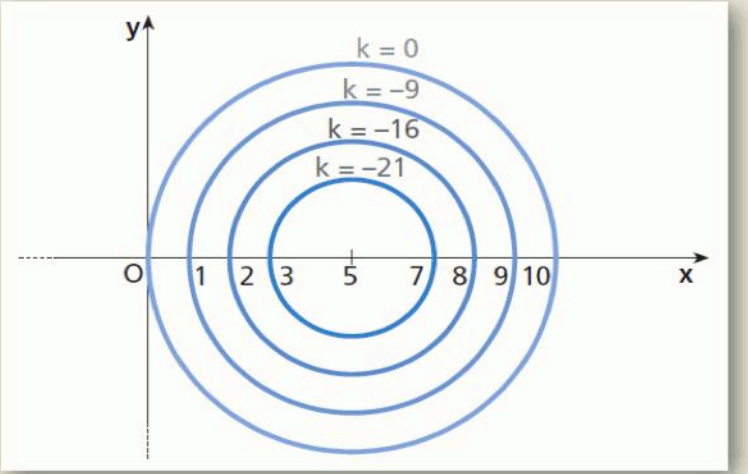
Rappresentazione delle linee di livello

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo l'andamento delle linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 10x$ e rappresentiamone alcune.

Sezioniamo la superficie con piani paralleli al piano Oxy, cioè con piani di equazione $z = k$, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 10x \\ z = k \end{cases}$$



Le sezioni ottenute hanno equazioni $k = x^2 + y^2 - 10x$, una per ogni valore di k. Le linee di livello, al variare di k, sono le circonferenze $x^2 + y^2 - 10x - k = 0$ di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 + k}$. Se, per esempio, sezioniamo con il piano $z = -16$, otteniamo la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, che è di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 - 16} = 3$. In figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello e i corrispondenti valori di k.

Dalla relazione $r = \sqrt{25 + k}$ si ricava $25 + k \geq 0$, quindi $k \geq -25$. Per $k = -25$ si ha il punto $(5; 0)$. Le linee di livello non esistono se $k < -25$.

Verifica di un limite

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo, applicando la definizione:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \frac{x^3 + xy^2}{x} = 2.$$

Raccogliamo x a fattor comune e dividiamo per $x \neq 0$:

$$\frac{x^3 + xy^2}{x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + y^2)}{\cancel{x}} = x^2 + y^2.$$

Dobbiamo mostrare che esiste un intorno circolare di $P_0(1; 1)$ tale che:

$$\left| x^2 + y^2 - 2 \right| < \varepsilon.$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$\left| x^2 + y^2 - 2 \right| < \varepsilon \to -\varepsilon < x^2 + y^2 - 2 < \varepsilon \to$$
$$\to 2 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 2 + \varepsilon.$$

La doppia disuguaglianza è verificata in tutta la parte di piano compresa nella corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 2 - \varepsilon$ e $x^2 + y^2 = 2 + \varepsilon$, e quindi in qualsiasi intorno circolare di P_0 di raggio minore o uguale alla distanza di P_0 da ciascuna circonferenza (figura b).