Valori di massimo e di minimo

L'ottimizzazione, cioè la ricerca del valore massimo (o minimo) di una funzione di più variabili, è un problema centrale delle applicazioni del calcolo differenziale in diversi ambiti: dai campi più teorici, la geometria e la fisica, a quelli più strettamente applicativi come l'economia, la finanza, i sistemi industriali, e così via.

Definizione.
Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ è un *punto di massimo locale* per *f* se il suo valore $f(P_0)$ è massimo fra tutti quelli assunti in un disco aperto centrato in P_0.
P_0 è invece un *punto di minimo locale* per *f* se il suo valore $f(P_0)$ è minimo fra tutti quelli assunti in un disco aperto centrato in (P_0). Il corrispondente valore $f(P_0)$ è detto rispettivamente *massimo* o *minimo* (locale).

Ovvero se esiste un raggio $\delta > 0$ per cui $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D \cap B_\delta(x_0, y_0)$. Se invece vale $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, il punto è un minimo locale

Massimi e minimi locali

I punti di massimo e minimo locale si dicono *punti di estremo locale*, o estremali, e analogamente le loro immagini si dicono valori estremi. Il termine *locale* (a volte sostituito da *relativo*) è contrapposto a *globale* (o *assoluto*), che si riferisce ad estremi che sono tali su tutto il dominio.

Teorema di Fermat (condizione necessaria del I ordine)
Sia $f: A \subset R^2$ con A aperto. Se $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ è di massimo o di minimo locale per f e se f è derivabile in (x_0, y_0), allora:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad ovvero \qquad \nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$$

Dimostrazione
Sia $g_1(x) = f(x, y_0)$. Poiché $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e A è aperto esiste un disco centrato in P_0 e di raggio δ > 0 completamente contenuto in *D*: la funzione g_1 risulta così definita nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ed è derivabile in x_0. Poiché *f* ha un punto di massimo in P_0 anche g_1 ha un massimo in x_0, dunque in base al Teorema di Fermat $g'(x_0) = 0$. Ma, per definizione, $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ e dunque $f_x(x_0, y_0) = 0$. Analogamente, definendo $g_2(y) = f(x_0, y)$ si mostra che $g_2'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Funzioni con gradiente nullo

Se una funzione f ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso $A \subseteq R^2$, allora f è costante su A

Dimostrazione

Essendo per ipotesi entrambe le derivate parziali di f nulle in A, però continue, f è differenziabile in A. Fissato $(x_1, y_1) \in A$, definiamo l'insieme $A_1 = \{(x, y) \in A: f(x, y) = f(x_1, y_1)\}$
Evidentemente $A = A_1 \cup A_2$, dove

$$A_2 = \{(x, y) \in A: f(x, y) \neq f(x_1, y_1)\}$$

Essendo differenziabile, f è anche continua in A; pertanto l'insieme A_2 è aperto. Dimostriamo che anche A_1 è aperto.
Sia I_δ un intorno circolare di centro (x_1, y_1) e raggio δ contenuto in A; mostriamo che $I_\delta \subseteq A_1$, cioè $f(x, y) = f(x_1, y_1), \forall (x, y) \in I_\delta$.
Se $f(x, y) \neq f(x_1, y_1)$, si consideri la funzione ausiliaria $\varphi: [0,1] \to R$ definita da

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(x - x_1), y_1 + t(y - y_1))$$

La derivata di φ, calcolata per mezzo della formula di derivazione delle funzioni composte, vale

$$\varphi'(t) = f_x(x - x_1) + f_y(y - y_1) = 0$$

La funzione $\varphi: [0,1] \to R$ ha derivata nulla in [0,1] ed è pertanto costante in tale intervallo.
Risulta in particolare $\varphi(0) = \varphi(1);$ cioè $f(x,y) = f(x_1, y_1)$
Perciò anche A_1 è un insieme aperto.
Risulta quindi

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

con A_1, A_2 aperti di R^2 con $A_1 \neq 0$
Dato che, per ipotesi, A è un aperto connesso di R^2 ne segue che $A_2 = \emptyset$ e quindi $A_1 = A$, cioè

$$f(x,y) = f(x_1, y_1)$$

I punti critici di una funzione

Definizione. Un punto in cui entrambe le derivate parziali di f si annullano si dice *punto critico* (o *punto stazionario*) di f .

Per la definizione data, i punti critici sono punti in cui la funzione è derivabile. Nel caso in cui sia anche differenziabile (come nella gran parte dei casi che studieremo) in tali punti il piano tangente è orizzontale.
Osserviamo inoltre che gli estremi di una funzione possono trovarsi in punti in cui la funzione non è derivabile: tali punti vanno analizzati separatamente.

Dato un punto critico, ci poniamo il problema di stabilirne la natura locale, cioè se sia un massimo, un minimo, oppure un punto di sella. Sappiamo che, per le funzioni di una variabile, è il segno della derivata seconda a determinare la natura locale del punto critico: se essa è positiva siamo in presenza di un minimo locale mentre se è negativa si tratta di un massimo locale. Ci aspettiamo che valga un criterio analogo anche per le funzioni di due variabili.

La matrice hessiana

Definiamo la matrice hessiana di una funzione $f: A \subset R^2 \to R$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ la seguente matrice simmetrica:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Essendo $f \in C^2(A)$, per il teorema di Schwarz, $\forall (x, y) \in A$, si ha:

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Chiamiamo hessiano il determinante della matrice hessiana. Tale determinante è utile per la determinazione dei punti estremi.

Test dell’hessiana

Teorema (condizione necessaria del secondo ordine)

Sia $f\colon A \subset R^2 \to R$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ e $P_0(x_0, y_0) \in A$ in cui si ha

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

allora, si possono verificare le seguenti eventualità

$\boldsymbol{H(x_0, y_0) > 0}$	$\boldsymbol{f_x(x_0, y_0) > 0}$	Si ha un minimo relativo
	$f_x(x_0, y_0) < 0$	Si ha un massimo relativo
$\boldsymbol{H(x_0, y_0) < 0}$	Si ha un punto di sella	
$\boldsymbol{H(x_0, y_0) = 0}$	Nulla è possibile dire con questo metodo	