

# **PROBLEMAS DE ALTA COMPLEJIDAD**

Dr. Flabio Gutierrez

flabiogs@yahoo.es

<https://flabiogutierrez.wordpress.com/>

# a. Búsquedas por Internet



## b) Planificador de rutas

**Guía Campsa España 2000, INTERACTIVA**

**Población**

**Cagitan**

NUCLEO

**Población:** 32 habitantes

**Superficie:** 45097 m<sup>2</sup>

**Altitud:** 48 m

**Provincia:** MURCIA

**Itinerario**

● Cagitan

● CORUÑA, LA / A CORUÑA

**Más Rápida**

**Más Corta**

**Incidencias**

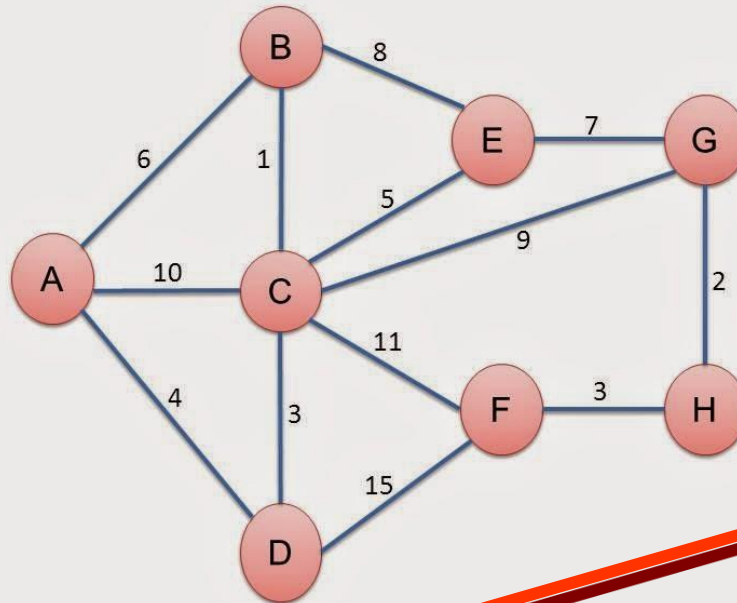
**RESUELTO**

## **Mito:**

La capacidad de computación es ilimitada,  
¿por qué preocuparse de la eficiencia si  
siempre podemos encontrar un sistema  
más potente?

Además está la Ley de Moore

# 1.- EL PROBLEMA DE AGENTE VIAJERO TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)



**PENDIENTE**

# 1.- EL PROBLEMA DE AGENTE VIAJERO

## TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)

Sea  $n$  = número de ciudades

Para  $n=7$ , hay  $7! = 5040$  posibles rutas (permutaciones) posibles.

Para  $n=10$ , hay  $10! = 3\,628\,800$  rutas posibles.

Para  $n=12$ , hay  $12! = 479\,001\,600$  rutas posibles.

Para  $n=20$  hay  $2432\,9020\,0817\,6640\,000$  rutas posibles.

Explorando 10000 permutaciones por segundo, una búsqueda exhaustiva demandaría un tiempo estimado de:

n	Rutas	Tiempo estimado
7	5040	0.504
10	3 628 800	362.88 aprox 6.048 minutos
12	479 001 600	47 900.2 = 798.333 minutos 13.3055 horas
20	2432 9020 0817 6640 000	243290200817664 segundos 4.05484xE10 minutos 7.82183xE6 años

# 1.- EL PROBLEMA DE AGENTE VIAJERO

## TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)

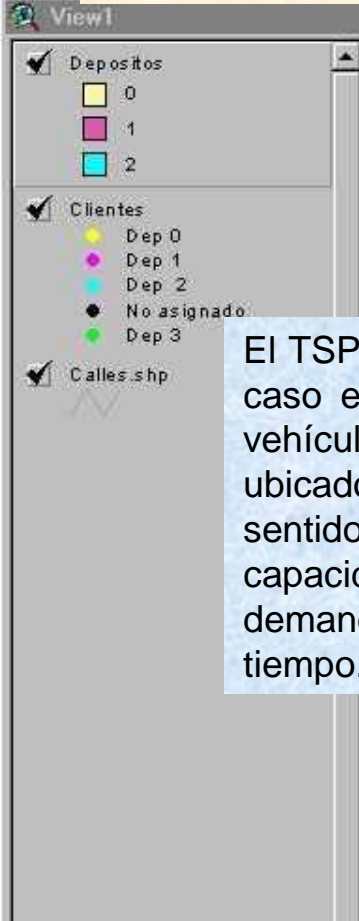
### Aplicaciones

El camino más corto entre varios puntos,

- Un plan de mínimo coste para repartir mercancías a clientes,
- Una asignación óptima de trabajadores a tareas a realizar,
- Una secuencia óptima de proceso de trabajos en una cadena de producción,
- Una distribución de tripulaciones de aviones con mínimo coste,
- El mejor enrutamiento de un paquete de datos en Internet



# TSP



El TSP (Traveling Salesman Problem) se refiere al caso en que tenemos un solo depósito, un solo vehículo,  $N$  clientes que requieren servicio ubicados en una red vial (que puede tener el sentido de las calles o no), sin restricciones de capacidad del vehículo, sin restricciones de demanda de los clientes y sin restricciones de tiempo.

Un claro ejemplo de aplicación de este problema es el recorrido que debe hacer un visitador médico relevando los pedidos.





# MTSP

El "Multi Traveling Salesman Problem" (MTSP) es una generalización del TSP (un solo vehículo). La diferencia con el TSP es que se tiene una flota de  $M$  vehículos y un depósito.  $M$  vehículos deben visitar  $N$  clientes buscando minimizar la distancia total recorrida por los  $M$  vehículos. Cada vehículo debe visitar un sub-conjunto de clientes que comience y termine en el depósito común, y cada cliente debe ser visitado exactamente una vez por un vehículo.

Un claro ejemplo de aplicación de este problema son las fábricas que distribuyen sus productos a sus clientes con más de un vehículo y a la cual no le importa la capacidad del vehículo como si fuera infinita.

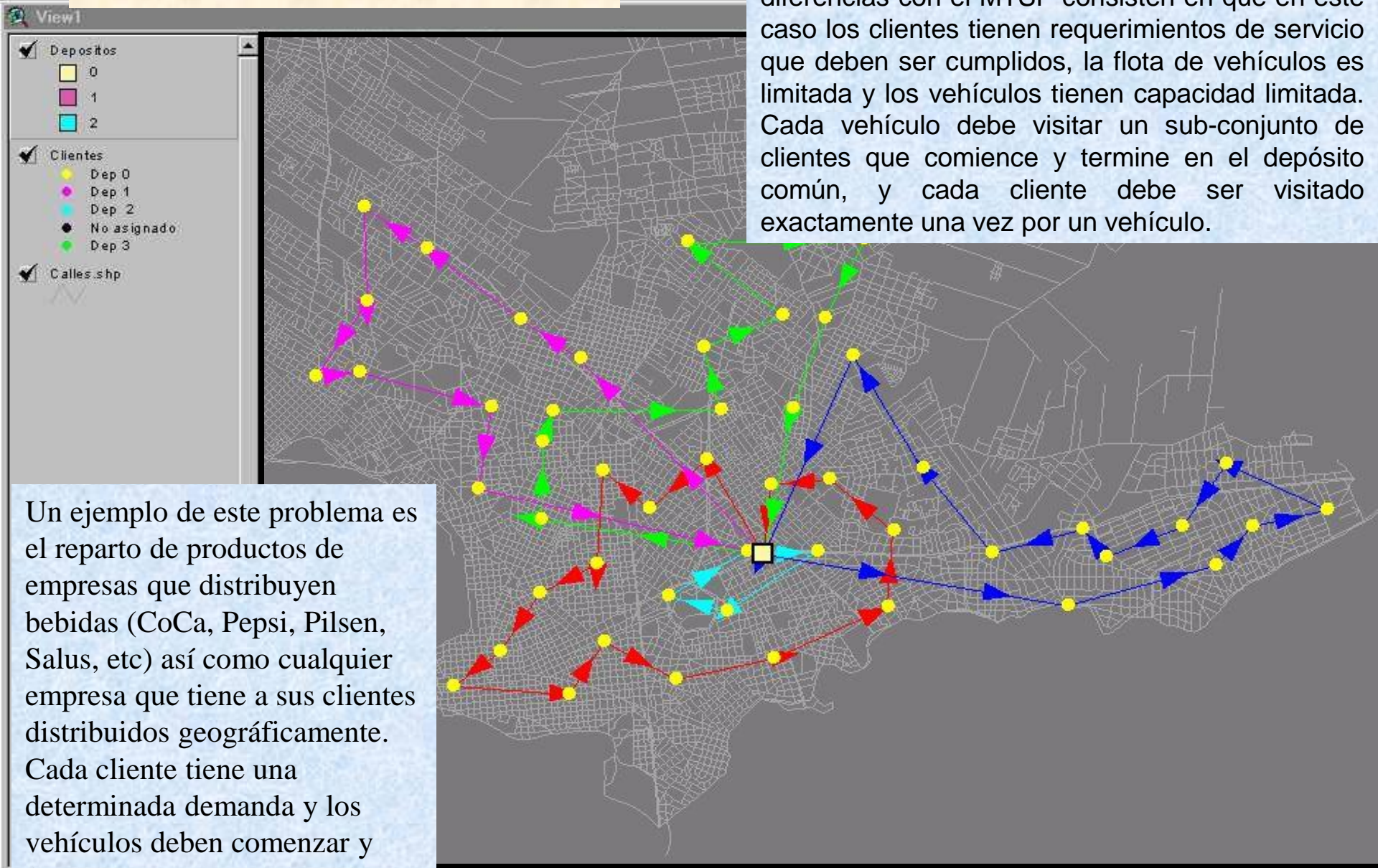


## **2.- EL PROBLEMA DEL RUTEO DE VEHÍCULOS VEHICLE ROUTING PROBLEM (VRP)**

**PENDIENTE**



# MODULO VRP



El VRP clásico es una generalización del MTSP (varios vehículos), lo cual lo hace aplicable a mayor cantidad de casos de la realidad. Las diferencias con el MTSP consisten en que en este caso los clientes tienen requerimientos de servicio que deben ser cumplidos, la flota de vehículos es limitada y los vehículos tienen capacidad limitada. Cada vehículo debe visitar un sub-conjunto de clientes que comience y termine en el depósito común, y cada cliente debe ser visitado exactamente una vez por un vehículo.

Un ejemplo de este problema es el reparto de productos de empresas que distribuyen bebidas (CoCa, Pepsi, Pilsen, Salus, etc) así como cualquier empresa que tiene a sus clientes distribuidos geográficamente. Cada cliente tiene una determinada demanda y los vehículos deben comenzar y finalizar el día en el depósito







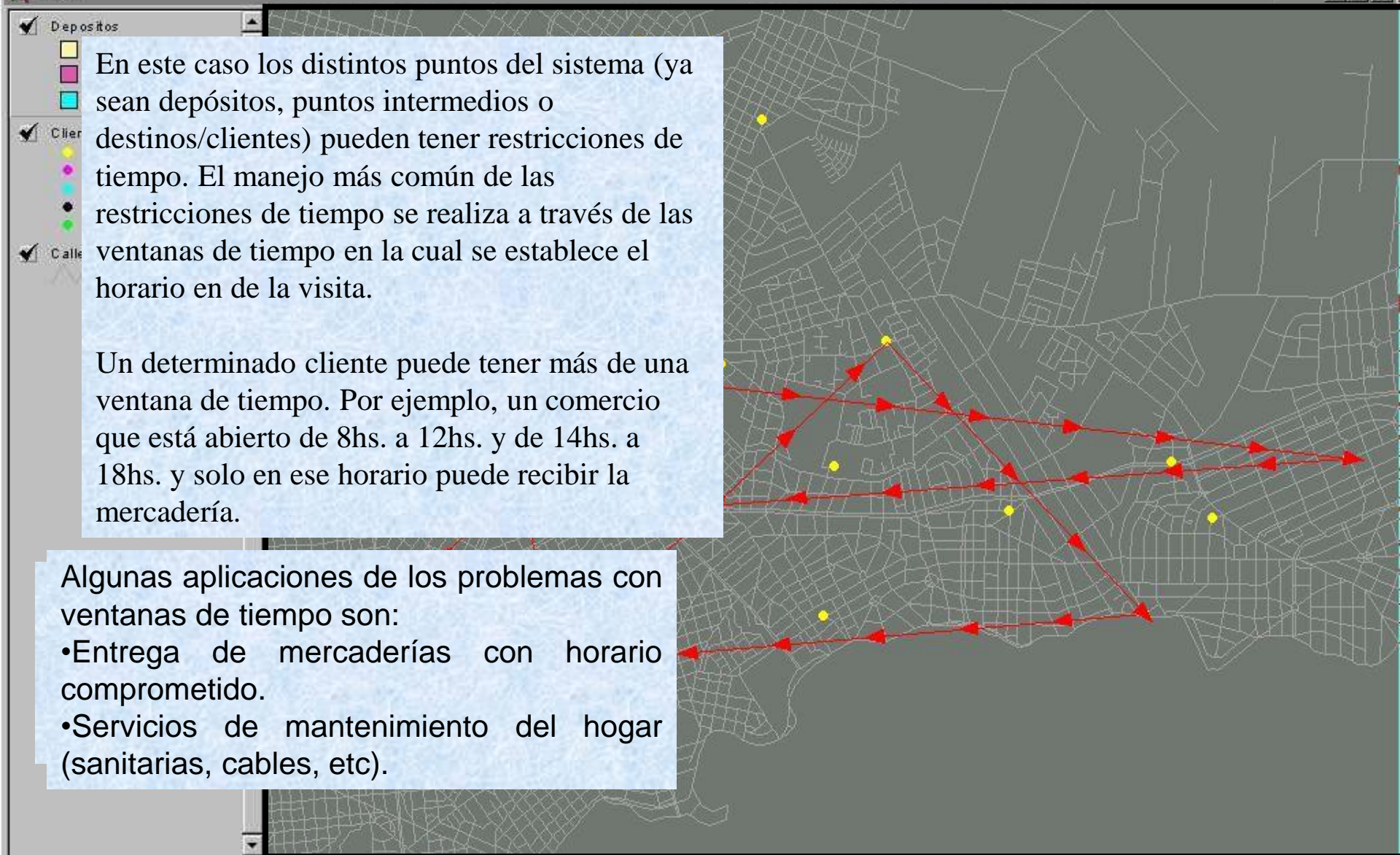
# MODULO VRPTW

En este caso los distintos puntos del sistema (ya sean depósitos, puntos intermedios o destinos/clientes) pueden tener restricciones de tiempo. El manejo más común de las restricciones de tiempo se realiza a través de las ventanas de tiempo en la cual se establece el horario en de la visita.

Un determinado cliente puede tener más de una ventana de tiempo. Por ejemplo, un comercio que está abierto de 8hs. a 12hs. y de 14hs. a 18hs. y solo en ese horario puede recibir la mercadería.

Algunas aplicaciones de los problemas con ventanas de tiempo son:

- Entrega de mercaderías con horario comprometido.
- Servicios de mantenimiento del hogar (sanitarias, cables, etc).



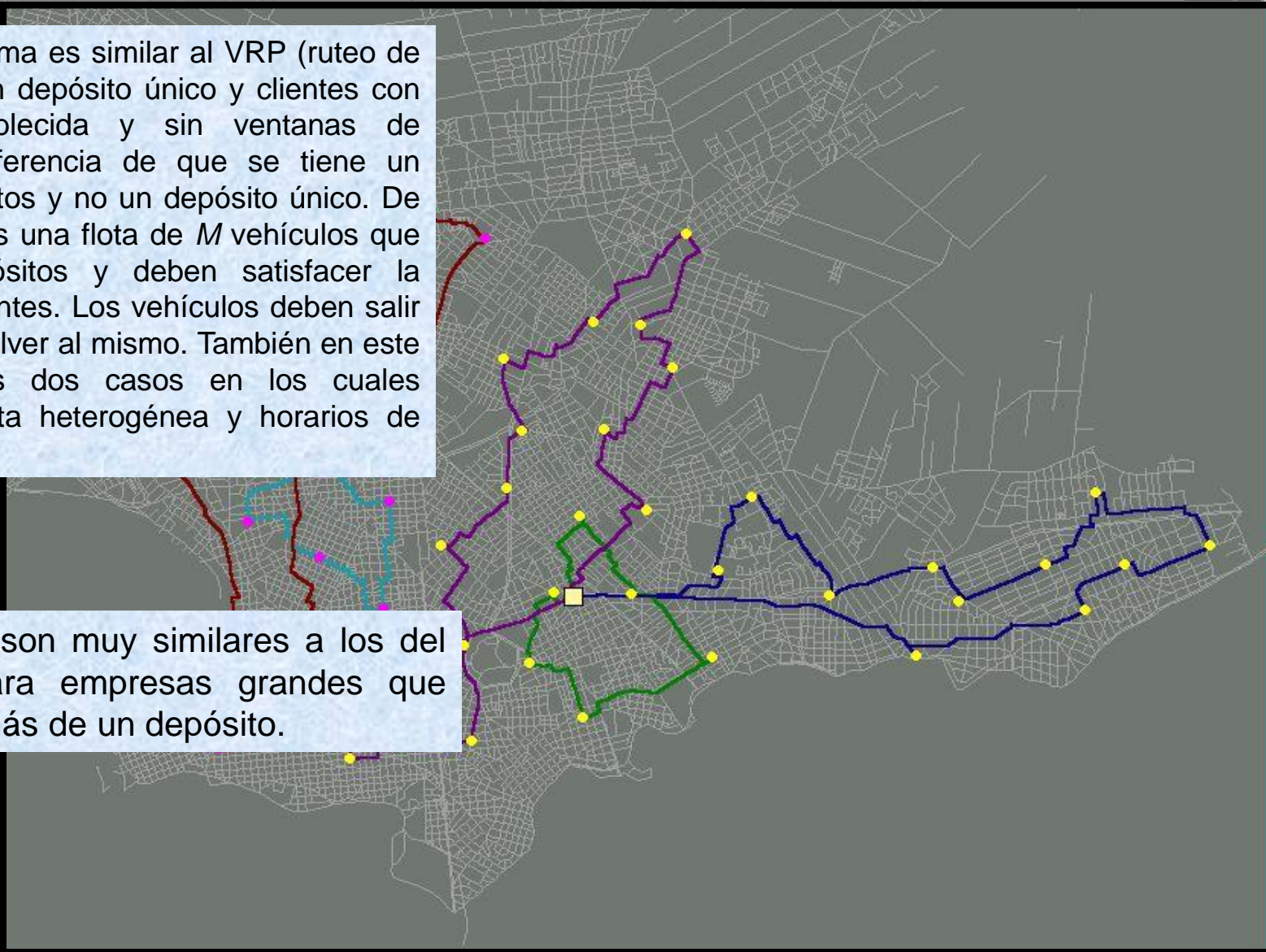


# MODULO MDVRP



Este tipo de problema es similar al VRP (ruteo de  $N$  vehículos con un depósito único y clientes con demanda preestablecida y sin ventanas de tiempo) con la diferencia de que se tiene un conjunto de depósitos y no un depósito único. De esta forma tenemos una flota de  $M$  vehículos que salen de  $D$  depósitos y deben satisfacer la demanda de  $N$  clientes. Los vehículos deben salir de un depósito y volver al mismo. También en este caso tenemos los dos casos en los cuales podemos tener flota heterogénea y horarios de visitas.

Los ejemplos son muy similares a los del VRP pero para empresas grandes que disponen de más de un depósito.



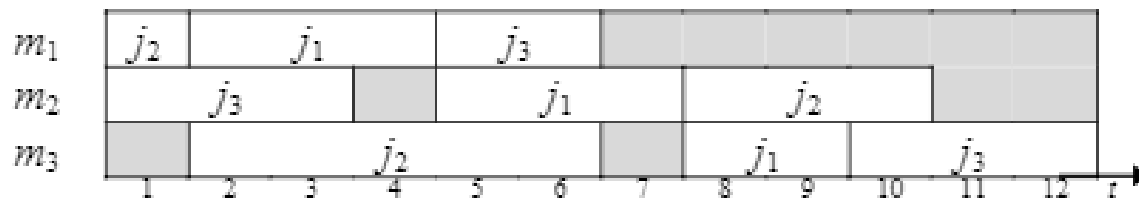


### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

Tiempo de Procesamiento				Secuencia de Máquinas			
Operaciones				Operaciones			
Job	1	2	3	Job	1	2	3
$j_1$	3	3	2	$j_1$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$j_2$	1	5	3	$j_2$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$j_3$	3	2	3	$j_3$	$m_2$	$m_1$	$m_3$

Ejemplo de un problema de tres jobs y tres máquinas.

Objetivo: Minimizar el tiempo total de proceso (makespan)



Un schedule factible.



### **3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)**

El JSSP (secuenciación de tareas) consta básicamente de un conjunto de trabajos, donde cada uno tiene un conjunto de operaciones a ser procesadas en un conjunto de recursos, llamadas máquinas.

Dichas operaciones tienen un orden y un tiempo de procesamiento en cada una de las máquinas y este no es modificable.

Cada máquina puede procesar a lo mucho un trabajo en un tiempo y una vez que un trabajo ha iniciado sobre una máquina se debe completar su procesamiento sobre esa máquina por un tiempo ininterrumpido

El objetivo es encontrar un plan de trabajo (calendario) que cumpla con las restricciones del problema y que concluya todas las operaciones de los trabajos en el menor tiempo posible (función objetivo)

Se debe minimizar el makespan, que es el tiempo en completar todos los trabajos, es decir, la longitud del calendario desde que empieza a ejecutarse el primer trabajo hasta que finaliza el último trabajo.

### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

**El PJSS** son combinatorios y se caracterizan por pertenecer a la clase NP-Duro,

Los problemas de planificación o programación de tareas aparecen constantemente en el mundo real.

Dichos problemas se utilizan en una amplia gama de aplicaciones diversas como:

En las líneas de producción de una fábrica.

En los hospitales para atender a los pacientes.

En los aeropuertos para despachar los vuelos.

En las escuelas para distribuir las actividades de los alumnos y profesores.

En un taller, para decidir qué equipo es reparado primero o bien la secuencia de la reparación, etc.

**El PJSS** es un problema que se caracteriza por pertenecer a la clase NP-Duro,

### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

Para probar un algoritmo que resuelva el PJSS se puede usar la familia de instancias del problema de Job Shop Scheduling conocidas como instancias de Lawrence (LA) (S. R. Lawrence,1984).

Consta de 40 problemas de 8 diferentes tamaños propuestos (M. Ventresca and B. M. Ombuki,2004):

- 10 x 5
- 15 x 5
- 20 x 5
- 10 x 10
- 15 x 10
- 20 x 10
- 30 x 10
- 15 x 15

LA (D. Applegate y W. Cook,1991) es una de las familias más comúnmente utilizadas para probar el desempeño de JSP. Cada instancia se compone de una fila de descripción y varias filas con valores enteros. Cada fila de valores enteros corresponde a un trabajo. El trabajo es un conjunto de parejas conocido como operaciones, la pareja es integrada por el número de la máquina y tiempo de procesamiento en dicha máquina.

Instancia	Tamaño
LA01	10 x 5
LA02	
LA03	
LA04	
LA05	
LA06	15 x 5
LA07	
LA08	
LA09	
LA10	
LA11	20 x 5
LA12	
LA13	
LA14	
LA15	
LA16	10x 10
LA17	
LA18	
LA19	
LA20	
LA21	15 x 10
LA22	
LA23	
LA24	
LA25	
LA26	20 x 10
LA27	
LA28	
LA29	
LA30	
LA31	30 x 10
LA32	
LA33	
LA34	
LA35	
LA36	15 x 15
LA37	
LA38	
LA39	
LA40	

### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

#### **Ejemplo: en el artículo**

Flórez, E., Díaz, N., Gómez, W., Bautista, L., & Delgado, D. (2018). Evaluación de algoritmos bioinspirados para la solución del problema de planificación de trabajos. *I+ D Revista de Investigaciones*, 11(1), 142-155.

Presentan:

Un Algoritmo Colonia de Hormigas Elitista (EAS) y un algoritmo de Selección Clonal (CLONALG) para resolver el PJSS y se evalúan en las instancias de Lawrence

### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

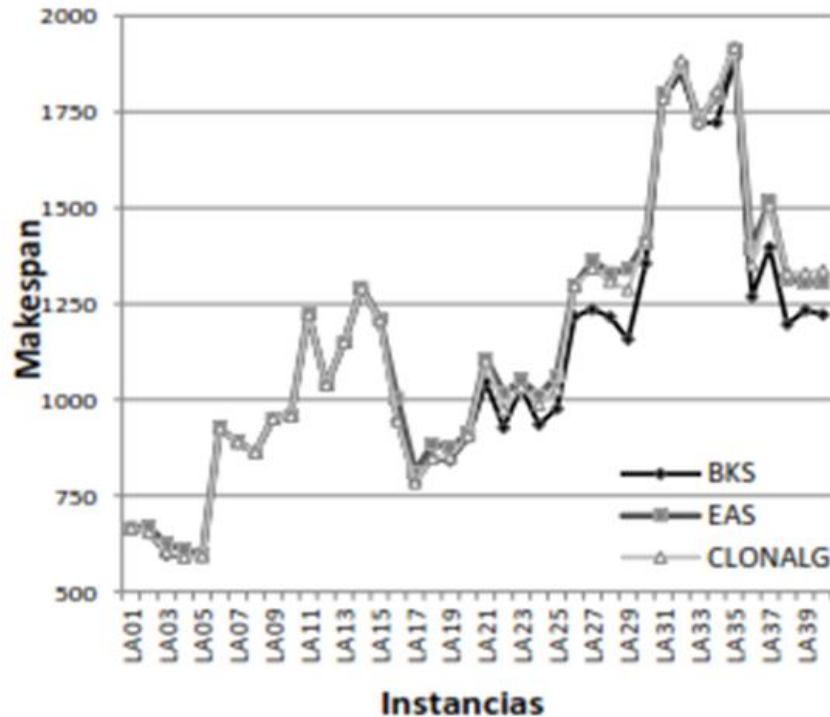
Se observa los resultados en cada instancia de Lawrence, se listan el mejor makespan  $C_{max}$  obtenido por cada algoritmo, el error relativo frente al makespan de la mejor solución conocida (Best Known Solution, BKS)

Instancia	Tamaño	BKS	EAS		CLONALG	
			$C_{max}$	Error relativo %	$C_{max}$	Error relativo %
LA01	10 x 5	666	666	0,00	666	0,00
LA02		655	669	2,14	655	0,00
LA03		597	617	3,35	603	1,01
LA04		590	595	0,85	590	0,00
LA05		593	593	0,00	593	0,00
LA06	15 x 5	926	926	0,00	926	0,00
LA07		890	890	0,00	890	0,00
LA08		863	863	0,00	863	0,00
LA09		951	951	0,00	951	0,00
LA10		958	958	0,00	958	0,00
LA11	20 x 5	1222	1222	0,00	1222	0,00
LA12		1039	1039	0,00	1039	0,00
LA13		1150	1150	0,00	1150	0,00
LA14		1292	1292	0,00	1292	0,00
LA15		1207	1212	0,41	1207	0,00
LA16	10x 10	945	996	5,40	946	0,11
LA17		784	812	3,57	784	0,00
LA18		848	885	4,36	848	0,00
LA19		842	873	3,68	851	1,07
LA20		902	912	1,11	907	0,55
LA21	15 x 10	1046	1107	5,83	1102	5,35
LA22		927	995	7,34	974	5,07
LA23		1032	1049	1,65	1033	0,10
LA24		935	1008	7,81	987	5,56
LA25		977	1062	8,70	1028	5,22
LA26	20 x 10	1218	1296	6,40	1297	6,49
LA27		1235	1349	9,23	1342	8,66
LA28		1216	1322	8,72	1308	7,57
LA29		1157	1331	15,04	1286	11,15
LA30		1355	1410	4,06	1414	4,35
LA31	30 x 10	1784	1784	0,00	1784	0,00
LA32		1850	1860	0,54	1884	1,84
LA33		1719	1731	0,70	1723	0,23
LA34		1721	1778	3,31	1804	4,82
LA35		1888	1902	0,74	1918	1,59
LA36	15 x 15	1268	1396	10,09	1352	6,62
LA37		1397	1517	8,59	1508	7,95
LA38		1196	1315	9,95	1330	11,20
LA39		1233	1304	5,76	1331	7,95
LA40		1222	1300	6,38	1338	9,49



### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

Comportamiento de los Makespan de los algoritmos para el JSP (Best Known Solution [BKS], Algoritmo Colonia de Hormigas Elitista [EAS], Algoritmo de Selección Clonal [CLONALG])

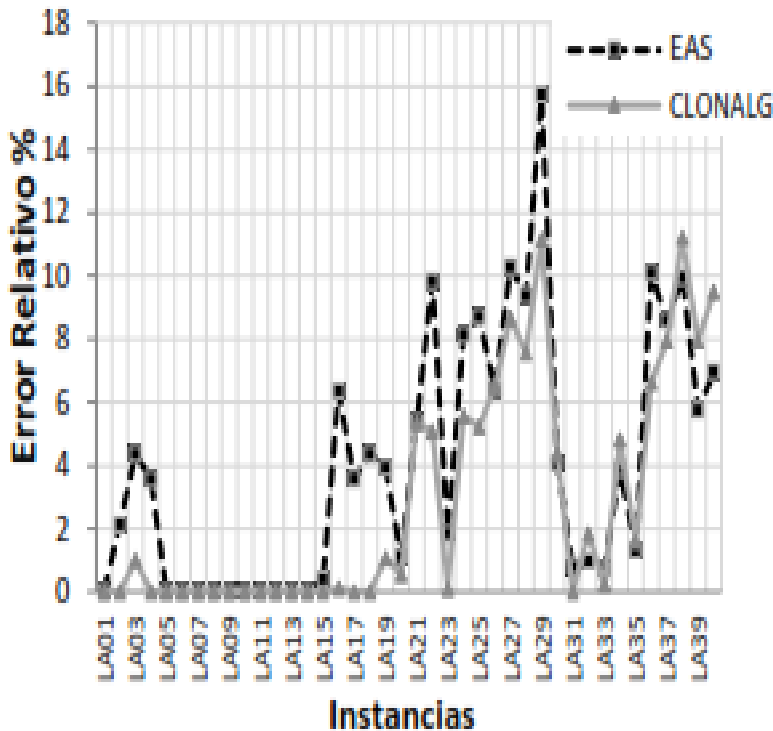


Instancia	Tamaño	BKS	EAS		CLONALG	
			C <sub>max</sub>	Error relativo %	C <sub>max</sub>	Error relativo %
LA01	10 x 5	666	666	0,00	666	0,00
LA02		655	669	2,14	655	0,00
LA03		597	617	3,35	603	1,01
LA04		590	595	0,85	590	0,00
LA05		593	593	0,00	593	0,00
LA06	15 x 5	926	926	0,00	926	0,00
LA07		890	890	0,00	890	0,00
LA08		863	863	0,00	863	0,00
LA09		951	951	0,00	951	0,00
LA10		958	958	0,00	958	0,00
LA11	20 x 5	1222	1222	0,00	1222	0,00
LA12		1039	1039	0,00	1039	0,00
LA13		1150	1150	0,00	1150	0,00
LA14		1292	1292	0,00	1292	0,00
LA15		1207	1212	0,41	1207	0,00
LA16	10x 10	945	996	5,40	946	0,11
LA17		784	812	3,57	784	0,00
LA18		848	885	4,36	848	0,00
LA19		842	873	3,68	851	1,07
LA20		902	912	1,11	907	0,55
LA21	15 x 10	1046	1107	5,83	1102	5,35
LA22		927	995	7,34	974	5,07
LA23		1032	1049	1,65	1033	0,10
LA24		935	1008	7,81	987	5,56
LA25		977	1062	8,70	1028	5,22
LA26	20 x 10	1218	1296	6,40	1297	6,49
LA27		1235	1349	9,23	1342	8,66
LA28		1216	1322	8,72	1308	7,57
LA29		1157	1331	15,04	1286	11,15
LA30		1355	1410	4,06	1414	4,35
LA31	30 x 10	1784	1784	0,00	1784	0,00
LA32		1850	1860	0,54	1884	1,84
LA33		1719	1731	0,70	1723	0,23
LA34		1721	1778	3,31	1804	4,82
LA35		1888	1902	0,74	1918	1,59
LA36	15 x 15	1268	1396	10,09	1352	6,62
LA37		1397	1517	8,59	1508	7,95
LA38		1196	1315	9,95	1330	11,20
LA39		1233	1304	5,76	1331	7,95
LA40		1222	1300	6,38	1338	9,49

# 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

Comportamiento del error relativo para las instancias de Lawrence (Algoritmo Colonia de Hormigas Elitista [EAS], Algoritmo de Selección Clonal [CLONALG])

Se observa que conforme las instancias son más grandes y de mayor complejidad los errores crecen en la mayoría de los casos haciendo una excepción en la instancia 23 y el rango de la 30 a la 35, este comportamiento es similar en los 2 algoritmos.

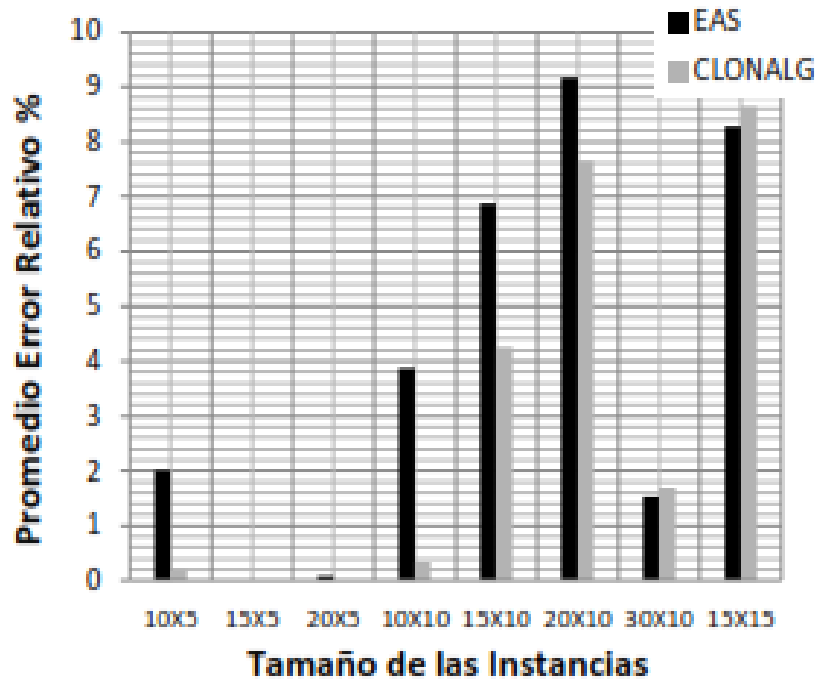


Instancia	Tamaño	BKS	EAS		CLONALG	
			C <sub>max</sub>	Error relativo %	C <sub>max</sub>	Error relativo %
LA01	10 x 5	666	666	0,00	666	0,00
LA02		655	669	2,14	655	0,00
LA03		597	617	3,35	603	1,01
LA04		590	595	0,85	590	0,00
LA05		593	593	0,00	593	0,00
LA06	15 x 5	926	926	0,00	926	0,00
LA07		890	890	0,00	890	0,00
LA08		863	863	0,00	863	0,00
LA09		951	951	0,00	951	0,00
LA10		958	958	0,00	958	0,00
LA11	20 x 5	1222	1222	0,00	1222	0,00
LA12		1039	1039	0,00	1039	0,00
LA13		1150	1150	0,00	1150	0,00
LA14		1292	1292	0,00	1292	0,00
LA15		1207	1212	0,41	1207	0,00
LA16	10x 10	945	996	5,40	946	0,11
LA17		784	812	3,57	784	0,00
LA18		848	885	4,36	848	0,00
LA19		842	873	3,68	851	1,07
LA20		902	912	1,11	907	0,55
LA21	15 x 10	1046	1107	5,83	1102	5,35
LA22		927	995	7,34	974	5,07
LA23		1032	1049	1,65	1033	0,10
LA24		935	1008	7,81	987	5,56
LA25		977	1062	8,70	1028	5,22
LA26	20 x 10	1218	1296	6,40	1297	6,49
LA27		1235	1349	9,23	1342	8,66
LA28		1216	1322	8,72	1308	7,57
LA29		1157	1331	15,04	1286	11,15
LA30		1355	1410	4,06	1414	4,35
LA31	30 x 10	1784	1784	0,00	1784	0,00
LA32		1850	1860	0,54	1884	1,84
LA33		1719	1731	0,70	1723	0,23
LA34		1721	1778	3,31	1804	4,82
LA35		1888	1902	0,74	1918	1,59
LA36	15 x 15	1268	1396	10,09	1352	6,62
LA37		1397	1517	8,59	1508	7,95
LA38		1196	1315	9,95	1330	11,20
LA39		1233	1304	5,76	1331	7,95
LA40		1222	1300	6,38	1338	9,49

### 3.- EL PROBLEMA DEL JOB SHOP SCHEDULING (PJSS)

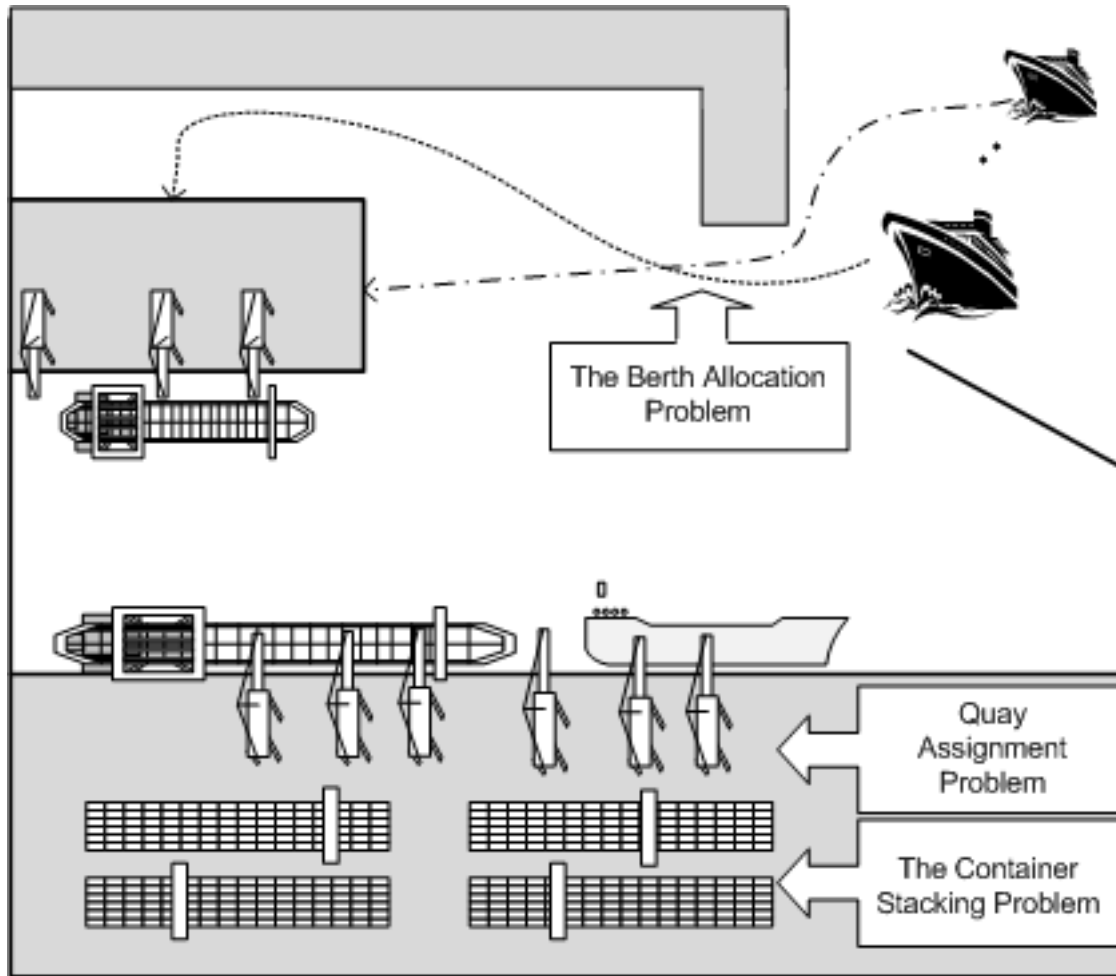
Representación del error relativo vs tamaño de las instancias para cada algoritmo en el JSP (Algoritmo Colonia de Hormigas Elitista [EAS], Algoritmo de Selección Clonal [CLONALG])

Es interesante observar que aunque en la mayoría de tamaños el mejor rendimiento lo obtuvo el algoritmo CLONALG para el caso de las instancias de mayor tamaño (30x10 y 15X15) presenta un mejor desempeño el algoritmo EAS.



Instancia	Tamaño	BKS	EAS		CLONALG	
			Cmax	Error relativo %	Cmax	Error relativo %
LA01	10 x 5	666	666	0,00	666	0,00
LA02		655	669	2,14	655	0,00
LA03		597	617	3,35	603	1,01
LA04		590	595	0,85	590	0,00
LA05		593	593	0,00	593	0,00
LA06	15 x 5	926	926	0,00	926	0,00
LA07		890	890	0,00	890	0,00
LA08		863	863	0,00	863	0,00
LA09		951	951	0,00	951	0,00
LA10		958	958	0,00	958	0,00
LA11	20 x 5	1222	1222	0,00	1222	0,00
LA12		1039	1039	0,00	1039	0,00
LA13		1150	1150	0,00	1150	0,00
LA14		1292	1292	0,00	1292	0,00
LA15		1207	1212	0,41	1207	0,00
LA16	10x 10	945	996	5,40	946	0,11
LA17		784	812	3,57	784	0,00
LA18		848	885	4,36	848	0,00
LA19		842	873	3,68	851	1,07
LA20		902	912	1,11	907	0,55
LA21	15 x 10	1046	1107	5,83	1102	5,35
LA22		927	995	7,34	974	5,07
LA23		1032	1049	1,65	1033	0,10
LA24		935	1008	7,81	987	5,56
LA25		977	1062	8,70	1028	5,22
LA26	20 x 10	1218	1296	6,40	1297	6,49
LA27		1235	1349	9,23	1342	8,66
LA28		1216	1322	8,72	1308	7,57
LA29		1157	1331	15,04	1286	11,15
LA30		1355	1410	4,06	1414	4,35
LA31	30 x 10	1784	1784	0,00	1784	0,00
LA32		1850	1860	0,54	1884	1,84
LA33		1719	1731	0,70	1723	0,23
LA34		1721	1778	3,31	1804	4,82
LA35		1888	1902	0,74	1918	1,59
LA36	15 x 15	1268	1396	10,09	1352	6,62
LA37		1397	1517	8,59	1508	7,95
LA38		1196	1315	9,95	1330	11,20
LA39		1233	1304	5,76	1331	7,95
LA40		1222	1300	6,38	1338	9,49

## 4.- PROBLEMA DE ATRAQUE DE BARCOS BERTH ALLOCATION PROBLEM (BAP)



**PENDIENTE**

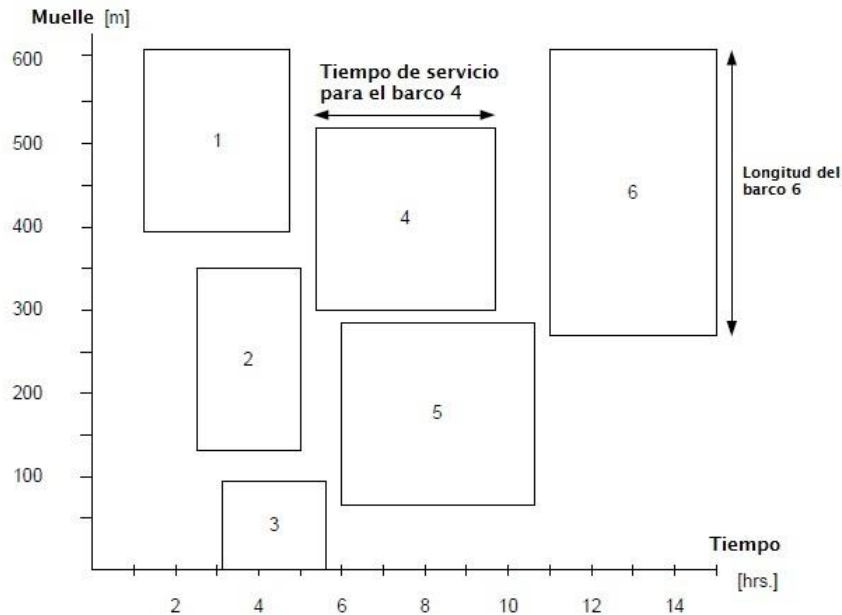
## 4.- PROBLEMA DE ATRAQUE DE BARCOS BERTH ALLOCATION PROBLEM (BAP)





## 4.- PROBLEMA DE ATRAQUE DE BARCOS BERTH ALLOCATION PROBLEM (BAP)

**BERTH ALLOCATION PROBLEM:** qué espacio en el muelle y qué tiempo de servicio asignar a los barcos que han de cargarse y descargarse en una terminal.



■ El problema es NP-duro.

[Lim1998]

### DATOS DE ENTRADA

Longitudes de los barcos  
Tiempos de llegada  
Tiempos de trabajo  
Tipo de muelle

### PROBLEMA

BERTH ALLOCATION PROBLEM

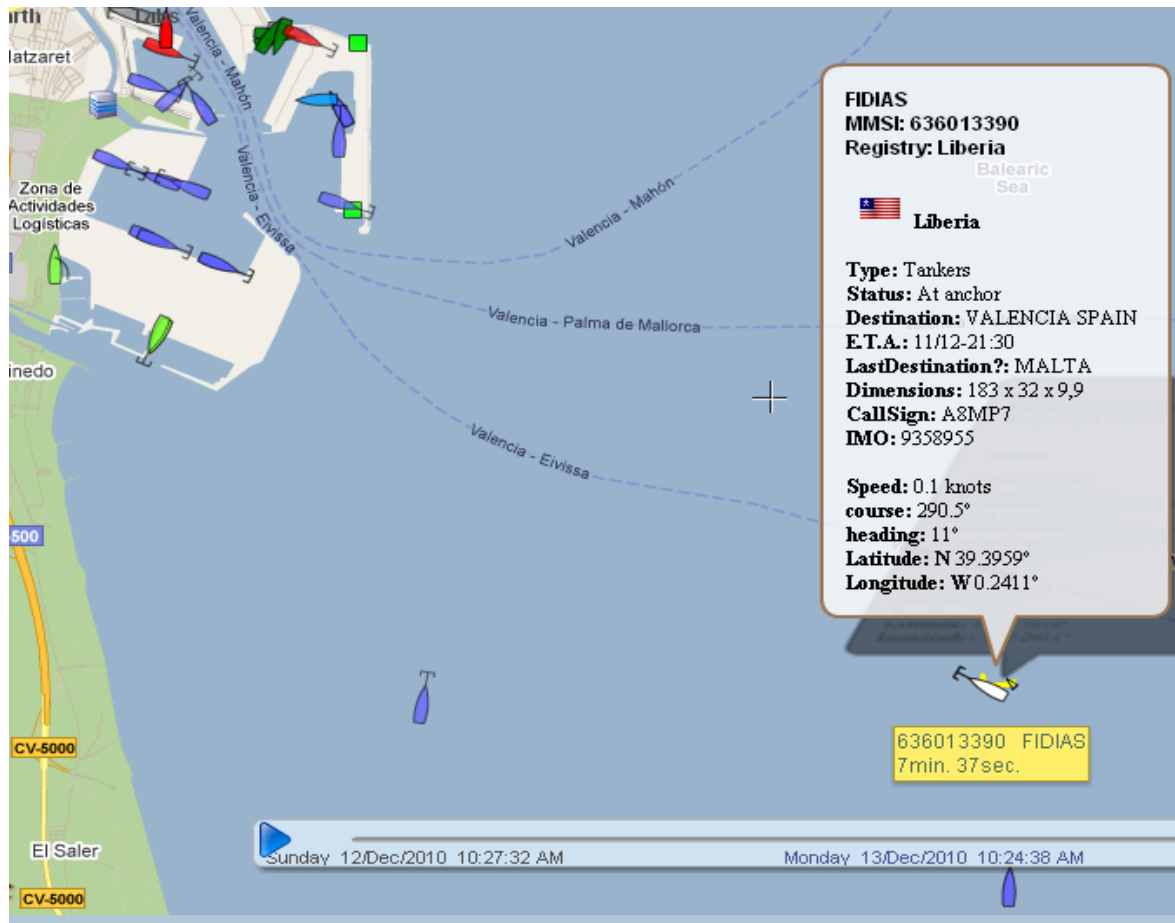
### DATOS DE SALIDA

PLAN DE  
ATRAQUE



## 4.- PROBLEMA DE ATRAQUE DE BARCOS BERTH ALLOCATION PROBLEM (BAP)

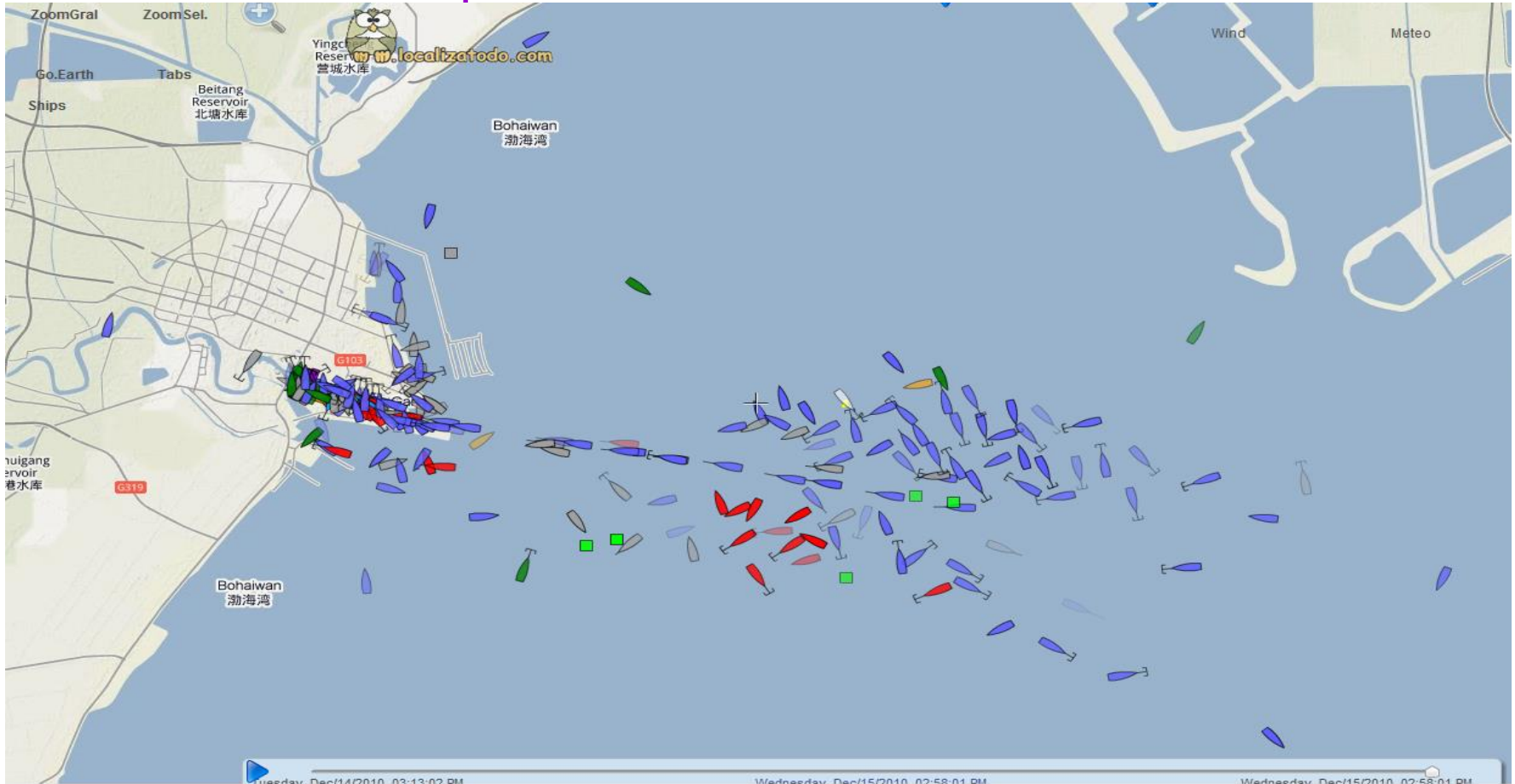
<http://www.localizatodo.com/>  
<http://www.marinetraffic.com/>



## 4.- PROBLEMA DE ATRAQUE DE BARCOS BERTH ALLOCATION PROBLEM (BAP)

<http://www.localizatodo.com/>

<http://www.marinetraffic.com/>



## 5 .- JUEGO DEL AJEDREZ

Encontrar un algoritmo que permita siempre ganar la partida de

¿Cuántas partidas de ajedrez diferentes se pueden llegar a jugar?



- En la primera jugada hay 20 posibilidades

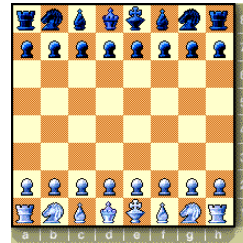
Claude Shannon hizo un cálculo del número total de partidas posibles que formarían el árbol completo del juego del Ajedrez. Dio la cifra 10

**PENDIENTE**

# 5 .- JUEGO DEL AJEDREZ

Jugador de  
Ajedrez

Situación  
Inicial



Movimien-  
tos de A



Movimien-  
tos de B



Movimien-  
tos de A



## 5 .- JUEGO DEL AJEDREZ

Para juegos complejos, como el ajedrez, el árbol de búsqueda adquiere dimensiones inimaginables.. Si suponemos que un computador tarda 1/3 de nanosegundo ( $15^{-9}$  seg.) en generar cada sucesor, el árbol del ajedrez sería generado en:

$$10^{120} * 15 * 10^{(-9)} \text{ seg.}$$

[illegible]

= aproximadamente 1021 siglos.

Por consiguiente, por ahora se debe desechar la idea de generar en juegos complejos todo el árbol de búsqueda con la intención de determinar de antemano una estrategia ganadora.

# Cita...

- “No hay un incremento concebible en el poder de las computadoras que pueda saturar la demanda científica: aún pensando que una computadora posea un ciclo de tiempo subnuclear ( $10^{-23}$  seg.) y densidades de almacenamiento subnucleares ( $10^{39}$  bits/cm<sup>3</sup>), ésta no podría manejar la mayoría de los problemas que son importantes en la investigación científica básica y aplicada. Por lo tanto, existirá siempre una fuerte presión para incrementar la **eficiencia** de los programas, para poder incrementar también la cantidad de información útil generada por un programa.”

*Ken Wilson, Nóbel de Física 1982*