TEMA 1
La eficiencia de los algoritmos

PROGRAMACIÓN Y ESTRUCTURAS DE DATOS

La eficiencia de los algoritmos

- **1. Noción de complejidad**
  - Complejidad temporal, tamaño del problema y paso
- **2. Cotas de complejidad**
  - Cota superior, inferior y promedio
- **3. Notación asintótica**
  - O, Ω, Θ
- **4. Obtención de cotas de complejidad**

1. Noción de complejidad
DEFINICIÓN

- **Cálculo de complejidad: determinación de dos parámetros o funciones de coste:**
  - Complejidad espacial : Cantidad de recursos espaciales (de almacén) que un algoritmo consume o necesita para su ejecución
  - Complejidad temporal : Cantidad de tiempo que un algoritmo necesita para su ejecución
- **Posibilidad de hacer**
  - Valoraciones
    - el algoritmo es: “bueno”, “el mejor”, “prohibitivo”
  - Comparaciones
    - el algoritmo A es mejor que el B

1. Noción de complejidad
COMPLEJIDAD TEMPORAL

- **Factores de complejidad temporal:**
  - Externos
    - La máquina en la que se va a ejecutar
    - El compilador: variables y modelo de memoria
    - La experiencia del programador
  - Internos
    - El número de instrucciones asociadas al algoritmo
- **Complejidad temporal :** $Tiempo(A) = C + f(T)$
  - *C* es la contribución de los factores externos (constante)
  - *f(T)* es una función que depende de *T* (talla o tamaño del problema)

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL

- **Talla o tamaño de un problema:**
  - Valor o conjunto de valores asociados a la **entrada** del problema que representa una medida de su tamaño respecto de otras entradas posibles
- **Paso de programa:**
  - Secuencia de operaciones con contenido semántico cuyo coste es **independiente** de la talla del problema
  - Unidad de medida de la complejidad de un algoritmo
- **Expresión de la complejidad temporal:**
  - Función que expresa el número de pasos de programa que un algoritmo necesita ejecutar para cualquier entrada posible (para cualquier talla posible)
  - No se tienen en cuenta los factores externos

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo1 (int n)
{
    n+ = n;
    return n;
}
```

f (ejemplo1) = 1 pasos

```
int ejemplo2 (int n)
{
    int i;
    for (i=0; i ≤ 2000; i++)
        n+ = n;
    return n;
}
```

f (ejemplo2) = 1 pasos

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo3 (int n)
{  int i, j;
   j = 2;
   for (i=0; i ≤ 2000; i++)
      j=j*j;
   for (i=0; i ≤ n; i++)
   {
      j = j + j;
      j = j - 2;
   }
   return j;
}
```

$f\,(ejemplo3) = 1 + 1 \cdot (n + 1)$ *pasos*

1. Noción de complejidad

COMPLEJIDAD TEMPORAL. Ejemplos

```
int ejemplo4 (int n)
{  int i, j,k;
   k = 1;
   for (i=0; i ≤ n; i++)
      for (j=1; j ≤ n; j++)
         k = k + k;
   return k;
}
```

$f\,(ejemplo4) = 1 + 1 \cdot n \cdot (n + 1)$ *pasos*

```
int ejemplo5 (int n)
{  int i, j,k;
   k = 1;
   for (i=0; i ≤ n; i++)
      for (j=i; j ≤ n; j++)
         k = k + k;
   return k;
}
```

$f\,(ejemplo5) = 1 + \Sigma_{i=0..n}(\Sigma_{j=i..n}\, 1)$ *pasos*

1. Noción de complejidad

CONCLUSIONES

- **Sólo nos ocuparemos de la complejidad temporal**
- **Normalmente son objetivos contrapuestos**
  (complejidad temporal <--> complejidad espacial)
- **Cálculo de la complejidad temporal:**
  - *a priori*: contando pasos
  - *a posteriori*: generando instancias para distintos valores y cronometrando el tiempo
- **Se trata de obtener la función. Las unidades de medida (paso, sg, msg, ...) no son relevantes (todo se traduce a un cambio de escala)**
- **El nº de pasos que se ejecutan siempre es función del tamaño (o talla) del problema**

2. Cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

- **Dado un vector X de *n* números naturales y dado un número natural *z*:**
  - encontrar el índice $i : X_i = z$
  - Calcular el número de pasos que realiza

```
funcion BUSCAR (var X:vector[N]; z: N): devuelve N
var i:natural  fvar;
comienzo
   i:=1;
   mientras (i ≤|X|) ∧ (Xi≠z) hacer
      i:=i+1;
   fmientras
   si i= |X|+1 entonces devuelve 0   (*No encontrado*)
               si_no devuelve i
fin
```

2. Cotas de complejidad

EL PROBLEMA

© DLSI (Univ. Alicante) Tema 1. La eficiencia de los algoritmos

2. Cotas de complejidad

LA SOLUCIÓN: cotas de complejidad

- **Cuando aparecen diferentes casos para una misma talla genérica *n*, se introducen las cotas de complejidad:**
  - Caso peor: cota superior del algoritmo $\rightarrow C_s(n)$
  - Caso mejor: cota inferior del algoritmo $\rightarrow C_i(n)$
  - Término medio: cota promedio $\rightarrow C_m(n)$
- **Todas son funciones del tamaño del problema (*n*)**
- **La cota promedio es difícil de evaluar *a priori***
  - Es necesario conocer la distribución de la probabilidad de entrada
  - No es la media de la inferior y de la superior (ni están todas ni tienen la misma proporción)

2. Cotas de complejidad

EJERCICIO: cotas superior e inferior

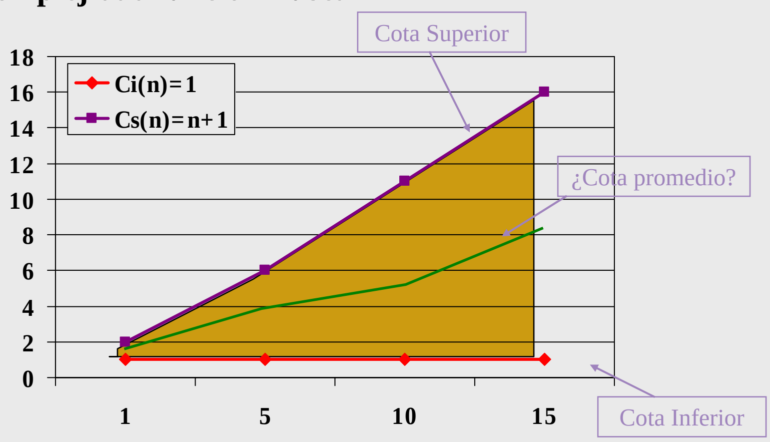
```
funcion BUSCAR (var X:vector[N]; z: N): devuelve N
var i:natural  fvar;
comienzo
   i:=1;
   mientras (i ≤|X|) ∧ (Xi≠z) hacer
      i:=i+1;
   fmientras
   si i= |X|+1 entonces devuelve 0   (*No encontrado*)
               si_no devuelve i
fin
```

- **Talla del problema:** nº de elementos de X**:** *n*
- **¿Existe caso mejor y caso peor?**
  - Caso mejor: el elemento está el primero: $X_1 = z \rightarrow c_i(n) = 1$
  - Caso peor: el elemento no está: $\forall i\ 1 \leq i \leq |X|,\ Xi \neq z \rightarrow c_s(n) = n+1$

2. Cotas de complejidad

EJERCICIO: cotas superior e inferior

- **Complejidad función Buscar**



2. Cotas de complejidad

CONCLUSIONES

- **La cota promedio no la calcularemos. Sólo se hablará de complejidad por término medio cuando la cota superior y la inferior coinciden**
- **El estudio de la complejidad se hace para tamaños grandes del problema por varios motivos:**
  - Los resultados para tamaños pequeños o no son fiables o proporcionan poca información sobre el algoritmo
  - Es lógico invertir tiempo en el desarrollo de un buen algoritmo sólo si se prevé que éste realizará un gran volumen de operaciones
- **A la complejidad que resulta de tamaños grandes de problema se le denomina** complejidad asintótica **y la notación utilizada es la** notación asintótica

3. Notación asintótica

INTRODUCCIÓN

- **Notación matemática utilizada para representar la complejidad espacial y temporal cuando $n \to \infty$**
- **Se definen tres tipos de notación:**
  - Notación O (big-omicron) $\Rightarrow$ caso peor
  - Notación Ω (omega) $\Rightarrow$ caso mejor
  - Notación Θ (big-theta) $\Rightarrow$ caso promedio

3. Notación asintótica

Teorema de la escala de complejidad

$$O(1) \subset O(\lg\lg n) \subset O(\lg n) \subset O(\lg^{a>1} n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset$$
$$\subset O(n \lg n) \subset O(n^2) \subset \cdots \subset O(n^{a>2}) \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$$

- f(n) + g(n) + t(n) $\in$ O(Max(f(n), g(n), t(n)))
- Ejemplos:
  - $n + 1$ pertenece a $O(n)$
  - $n^2 + log\ n$ pertenece a $O(n^2)$
  - $n^3 + 2^n + nlogn$ pertenece a $O(2^n)$
- Válido para Notación Ω y Notación Θ

3. Notación asintótica

NOTACIÓN O: escala de complejidad

Complejidad	*n = 32*	*n = 64*
n^3	3 seg.	26 seg.
2^n	5 días	$58{\cdot}10^6$ años

- Tiempos de respuesta para dos valores de la talla y complejidades n^3 y 2^n.
  (paso = 0’1 mseg.)

- Queda clara la necesidad del cálculo de complejidad

```
función POT_2 (n: natural): natural
    opción
        n = 1: devuelve 2
        n > 1: devuelve 2 * POT_2(n-1)
    fopción
ffunción
```

Coste lineal

1 seg.

```
función POT_2 (n: natural): natural
    opción
        n = 1: devuelve 2
        n > 1: devuelve POT_2(n-1)+POT_2(n-1)
    fopción
ffunción
```

Coste exponencial

miles de años

4. Obtención de cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

- **Etapas para obtener las cotas de complejidad:**
  1. Determinación de la talla o tamaño (de la instancia) del problema
  2. Determinación del caso mejor y peor: instancias para las que el algoritmo tarda más o menos
     - No siempre existe mejor y peor caso ya que existen algoritmos que se comportan de igual forma para cualquier instancia del mismo tamaño
  3. Obtención de las cotas para cada caso. Métodos:
     - cuenta de pasos
     - relaciones de recurrencia (funciones recursivas)

4. Obtención de cotas de complejidad

INTRODUCCIÓN

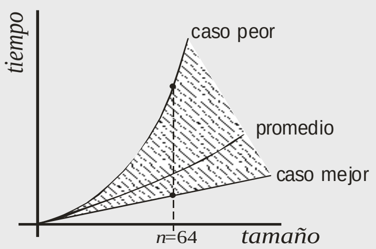
```
función FACTORIAL (n:natural): natural
```

- La talla es *n* y no existe caso mejor ni peor

```
función BUSCA (v: vector[natural]; x:natural)
```

- La talla es $n=|v|$
- caso mejor: instancias donde x está en $v[1]$
- caso peor: instancias donde x no está en v

- **Se trata de delimitar con una región el tiempo que tarda un algoritmo en ejecutarse**



4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

Cálculo del máximo de un vector

```
funcion  MÁXIMO  (var  v : vector[n]; n:entero) : entero
var  i, max : entero fvar
comienzo
    max:=v[1]
    para i:=2 hasta n hacer
        si v[i]>max  entonces  max:=v[i] fsi
    fpara
    devuelve max
fin
```

- determinar la talla del problema: *n=tamaño del vector*
- mejor caso $c_i = 1 + \sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + (n-2+1) = n \in \Omega(n)$
- peor caso $c_s = 1 + \sum_{i=2}^{n} 2 = 1 + (n-2+1) \cdot 2 = 2n - 1 \in O(n)$

$$\left.\begin{array}{l} c_i \in \Omega(n) \\ c_s \in O(n) \end{array}\right\} \in \Theta(n)$$

© DLSI (Univ. Alicante) Tema 1. La eficiencia de los algoritmos

4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

Búsqueda de un elemento en un vector ordenado (Búsqueda binaria)

```
funcion BUSCA (var v:vector[N]; x,pri,ult: natural): natural
var m: natural fvar
comienzo
    repetir
        m:= (pri+ult)/2
        si v[m]>x  entonces ult:= m-1
                   sino pri:= m+1
        fsi
    hasta  (pri>ult) ∨ v[m]=x
    si v[m]=x  entonces devuelve m
               sino devuelve 0
    fsi
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Ejemplos

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

- **Directos**
  - Inserción directa
  - Inserción binaria
  - Selección directa
  - Intercambio directo (burbuja)

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN DIRECTA

- Divide lógicamente el vector en dos partes: origen y destino
- Comienzo:
  - *destino* tiene el primer elemento del vector
  - *origen* tiene los *n-1* elementos restantes
- Se va tomando el primer elemento de *origen* y se inserta en *destino* en el lugar adecuado, de forma que *destino* siempre está ordenado
- El algoritmo finaliza cuando no quedan elementos en *origen*
- Características
  - caso mejor: vector ordenado
  - caso peor: vector ordenado inversamente

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN DIRECTA

```
funcion  INSERCION_DIRECTA  (var a:vector[natural];  n: natural)
var i,j: entero;  x:natural  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        x:=a[i];  j:=i-1
        mientras   (j>0) ∧ (a[j]>x)   hacer
            a[j+1]:=a[j]
            j:=j-1
        fmientras
        a[j+1]:=x
    fpara
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INSERCIÓN BINARIA

```
funcion  INSERCION_BINARIA  (var a:vector[natural];  n: natural)
var i, j, iz, de, m: entero;  x:natural  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        x:=a[i]; iz:=1; de:=i-1
        mientras (iz≤de) hacer
            m:= (iz+de)/2
            si a[m]>x  entonces de:= m-1
                       sino iz:=m+1
            fsi
        fmientras
        para  j:=i-1  hasta iz hacer  (*decreciente*)
            a[j+1]:=a[j]
        fpara
        a[iz]:=x
    fpara
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

SELECCIÓN DIRECTA

```
funcion  SELECCION_DIRECTA  (var a:vector[natural]; n:natural)
var i, j, posmin: entero;  min:natural  fvar
comienzo
    para  i:=1  hasta  n-1  hacer
        min:=a[i];  posmin:=i
        para  j:=i+1  hasta  n  hacer
            si  a[j]<min  entonces
                min:=a[j]; posmin:=j
            fsi
        fpara
        a[posmin]:=a[i];  a[i]:=min
    fpara
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación

INTERCAMBIO DIRECTO (Burbuja)

```
funcion INTERCAMBIO_DIRECTO  (var a:vector[natural]; n:natural )
var i,j:entero  fvar
comienzo
    para  i:=2  hasta  n  hacer
        para  j:=n  hasta  i  hacer
            si  a[j]<a[j-1]  entonces
                SWAP(a[j],a[j-1])
            fsi
        fpara
    fpara
fin
```

4. Obtención de cotas de complejidad

Algoritmos de ordenación