COMPLEJIDAD DE UN ALGORITMO

Dr. FLABIO A. GUTIERREZ SEGURA

flabiogs@yahoo.es

https://flabiogutierrez.wordpress.com/

1. Introducción

En los problemas computacionales se habla de problemas "sencillos" y "problemas difíciles". Ejemplos de problemas sencillos: Ordenamiento de valores, multiplicación de matrices. Ejemplos de problemas difíciles, el TSP (Travelling Salesman Problem), problemas combinatorios.

En un sentido amplio, dado un problema y un dispositivo donde resolverlo, es necesario proporcionar un método preciso que lo resuelva. A tal método lo denominamos *algoritmo*.

Hay dos aspectos muy importantes de los algoritmos, como son su diseño y el estudio de su eficiencia. El primero se refiere a la búsqueda de métodos o procedimientos, secuencias finitas de instrucciones adecuadas al dispositivo que disponemos, que permitan resolver el problema. Por otra parte, el segundo nos permite medir de alguna forma el coste (en tiempo y recursos) que consume un algoritmo para encontrar la solución y nos ofrece la posibilidad de comparar distintos algoritmos que resuelven un mismo problema.

Este módulo está dedicado al segundo de estos aspectos: la eficiencia.

En la computación los algoritmos son más importantes que los Lenguajes de Programación (LP); la solución de un problema haciendo uso de las computadoras requiere por una parte un algoritmo o método de resolución y por otra un programa o codificación del algoritmo en un LP. Ambos componentes tienen importancia; pero la del algoritmo es absolutamente indispensable; sabemos que un algoritmo es una secuencia de pasos para resolver un problema, sus características son:

- Independiente: del LP y de la máquina.
- Definido: de pasos claros y concretos.
- Finito: en el número de pasos que usará.
- Preciso: cada paso arroja un cálculo correcto.
- Recibe datos: debe poseer datos de entrada.
- Arroja información: debe arrojar información de salida.

Para un mismo problema existen muchas alternativas de solución y estas alternativas pueden diferir por:

- Número de pasos

- Estructuras

Ahora que sabemos que existen muchas alternativas de solución para un problema, debemos seleccionar el algoritmo más eficiente, el mejor conjunto de pasos, el que tarde menos en ejecutarse, que tenga menos líneas de código.
Esta selección puede ser ejecutada a simple vista con sólo observar la cantidad de líneas del programa, pero cuando el programa crece se requiere una medición más exacta y apropiada, para esto se realizan ciertas operaciones matemáticas que establecen la eficiencia teórica del programa, al estudio de estos casos se denomina Eficiencia de Algoritmos (Complejidad Algorítmica).

2. Eficiencia de Algoritmos

Siempre que se trata de resolver un problema, puede interesar considerar distintos algoritmos, con el fin de utilizar el más eficiente. Pero, ¿cómo determinar cuál es "el mejor"?. La estrategia empírica consiste en programar los algoritmos y ejecutarlos en un computador sobre algunos ejemplares de prueba. La estrategia teórica consiste en determinar matemáticamente la cantidad de recursos (tiempo, espacio, etc.) que necesitará el algoritmo en función del tamaño del ejemplar considerado.

2.1 Concepto de Eficiencia

Un algoritmo es **eficiente** cuando logra llegar a sus objetivos planteados utilizando la menor cantidad de recursos posibles, es decir, minimizando el uso de memoria, de pasos y de esfuerzo humano.
Un algoritmo es **eficaz** cuando alcanza el objetivo primordial, el análisis de resolución del problema se lo realiza prioritariamente.
Puede darse el caso de que exista un algoritmo eficaz pero no eficiente, en lo posible debemos de manejar estos dos conceptos conjuntamente.
La eficiencia de un programa tiene dos ingredientes fundamentales: **espacio** y **tiempo.**

- La ***eficiencia en espacio*** es una medida de la cantidad de memoria requerida por un programa.
- La ***eficiencia en tiempo*** se mide en términos de la cantidad de tiempo de ejecución del programa.

Ambas dependen del tipo de computador y compilador, por lo que no se estudiará aquí la eficiencia de los programas, sino la eficiencia de los algoritmos. Asimismo, este análisis dependerá de si trabajamos con máquinas de un solo procesador o de varios de ellos. Centraremos nuestra atención en los algoritmos para máquinas de un solo procesador que ejecutan una instrucción y luego otra.

2.2 Medidas de Eficiencia

No solo se debe crear algoritmos, sino que deben ser **buenos** algoritmos. La calidad de un algoritmo puede ser avalada utilizando varios criterios. Uno de los criterios más importantes es el tiempo utilizado en la ejecución del algoritmo. Existen varios aspectos a considerar en cada criterio de tiempo. Uno de ellos está relacionado con el **tiempo de ejecución** requerido por los diferentes algoritmos, para encontrar la solución final de un problema o cálculo particular.

Normalmente, un problema se puede resolver por métodos distintos, con diferentes **grados de eficiencia**. Por ejemplo: búsqueda de un número en una lista de números.

Cuando se usa un computador es importante limitar el consumo de recursos.

Recurso Tiempo:

- Aplicaciones informáticas que trabajan "**en tiempo real**" requieren que los cálculos se realicen en el menor tiempo posible.
- Aplicaciones que manejan un **gran volumen de información** si no se tratan adecuadamente pueden necesitar tiempos impracticables.

Recurso Memoria:

- Las máquinas tienen una **memoria limitada**.

2.3 Análisis *A Priori* y Prueba *A Posteriori*

El análisis de la eficiencia de los algoritmos (memoria y tiempo de ejecución) tiene dos enfoques: Análisis *A Priori* y Prueba *A Posteriori*.

El **Análisis *A Priori (o teórico)*** entrega una función que indica indique el comportamiento del algoritmo en el tiempo.

- La predicción del costo del algoritmo puede evitar una implementación posiblemente laboriosa.
- Es aplicable en la etapa de diseño de los algoritmos, constituyendo uno de los factores fundamentales a tener en cuenta.
- La estrategia teórica tiene como ventajas que no depende del computador ni del lenguaje de programación. Permite evitar el esfuerzo inútil de programar algoritmos ineficientes y de desperdiciar tiempo de máquina para ejecutarlos. También permite conocer la eficiencia de un algoritmo cualquiera que sea el tamaño del ejemplar al que se aplique.
- Es preferible al análisis a priori

En la **Prueba *A Posteriori (experimental o empírica)*** se recogen estadísticas de tiempo y espacio consumidas por el algoritmo mientras se ejecuta. La estrategia empírica consiste en programar los

algoritmos y ejecutarlos en un computador sobre algunos ejemplares de prueba, haciendo medidas para

- una máquina concreta, un lenguaje concreto,
- un compilador concreto
- datos concretos.

El análisis *a posteriori* permite hacer una evaluación experimental de los recursos consumidos que no es posible en el estudio *a priori*.

Problemas de las pruebas empíricas:

- Hay que implementar el algoritmo.
- Hay que hacer muchas pruebas (y para casos largos).
- Probar algoritmos pesados puede ser muy costoso.
- Los resultados sólo serán válidos para unas determinadas condiciones de ejecución. Es difícil extrapolar los resultados si se producen cambios en el hardware, sistema operativo, lenguaje utilizado, etc. El estudio *a priori* es independiente de las condiciones de ejecución.

2.4 Tamaño del problema

En general la cantidad de recursos que consume un algoritmo para resolver un problema se incrementa conforme crece el tamaño del problema.

PROBLEMA	TAMAÑO DEL PROBLEMA
Búsqueda de un elemento en un conjunto	Número de elementos en el conjunto
Multiplicar dos matrices	Dimensión de las matrices
Recorrer un árbol binario de búsqueda	Número de nodos en el árbol
Resolver un sistema de ecuaciones lineales	Número de ecuaciones y/o incógnitas
Ordenar un conjunto de valores	Número de elementos en el conjunto
Cálculo de la sumatoria $\sum_{i=m}^{n} a_i$	Tamaño del intervalo (m,n)

Una **instancia del problema** son datos de entrada válidos para el problema.

2.5 Cálculo de Costos de Algoritmos

Queremos saber la eficiencia de los algoritmos, no del computador. Por ello, en lugar de medir el tiempo de ejecución en microsegundos o algo por el estilo, nos preocuparemos del número de veces que se ejecuta una operación primitiva (de tiempo fijo).

3. Tiempo de ejecución

Una medida que suele ser útil conocer es el tiempo de ejecución de un programa en función de *n*, lo que denominaremos *T(n).* Esta función se puede medir físicamente (ejecutando el programa, reloj en mano), o calcularse sobre el código contando instrucciones a ejecutar.

Dado que es fácil cambiar de LP y que la potencia de los ordenadores crece a un ritmo vertiginoso (en la actualidad, se duplica anualmente), intentaremos analizar los algoritmos con algún nivel de independencia de estos factores; es decir, en el algoritmo se contará las instrucciones a ejecutar.

Teóricamente *T*(*n*) debe indicar el número de instrucciones ejecutadas por un ordenador idealizado. Debemos buscar por tanto medidas simples y abstractas, independientes del ordenador a utilizar.

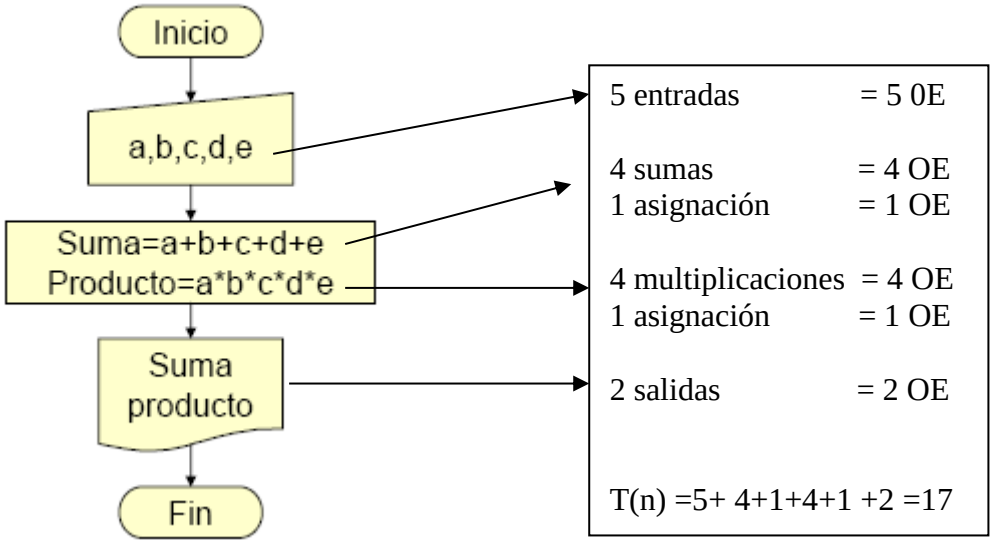
Operaciones Elementales (OE)

- Entradas/salidas
- Operaciones aritméticas básicas
- Asignaciones a variables de tipo predefinido
- Los saltos (llamadas a funciones y procedimientos, retorno desde ellos, etc.),
- Comparaciones lógicas
- Acceso a estructuras indexadas básicas, como son los vectores y matrices.

  Cada una de ellas contabilizará como 1 OE.

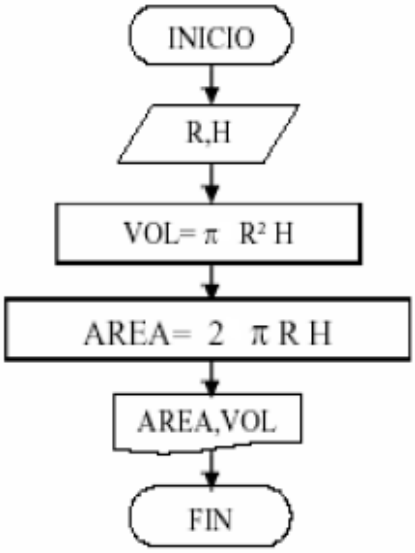
Ejemplo 1.

Hallar el T(n) para el algoritmo que permita ingresar 5 números por teclado y calcule la suma y el producto de los números.



Ejemplo 2.

Hallar el T(n) para el algoritmo que permita determinar el área y volumen de un cilindro dado su radio (R) y altura (H).

Pseudocódigo	Diagrama de Flujo
1. **Inicio** 2. Declaración de variables: R = 0, H = 0 3. **Leer** el valor de Radio (R) y Altura (H) 4. **Calcular** el Volumen aplicando la fórmula 5. **Calcular** el valor del área aplicando la fórmula respectiva 6. **Escribir** el valor del Área y del Volumen 7. **Fin**	

$$T(n) = 2\ OE + 4\ OE + 4\ OE + 2\ OE = 10$$

3.1 Análisis Peor Caso, Mejor Caso y Caso Promedio

El comportamiento de un algoritmo puede cambiar para diferentes entradas (por ejemplo, lo ordenados que se encuentren ya los datos a ordenar), de hecho, para muchos programas el tiempo de ejecución es en realidad una función de la entrada específica, y no sólo del tamaño de ésta.
Como no se puede analizar el comportamiento sobre todas las entradas posibles, va a existir para cada problema particular un análisis.

Tipos de análisis

- **Caso mejor:** La traza (secuencia de sentencias) del algoritmo que realiza menos instrucciones (menor tiempo obtenido).
- **Caso peor:** La traza del algoritmo que realiza más instrucciones. (mayor tempo obtenido)
- **Caso promedio**: Traza del algoritmo que realiza un número de instrucciones con las probabilidades de que éstas ocurran para esa entrada. (tiempo promedio obtenido).

El caso promedio es la medida más realista de la *performance*, pero es más difícil de calcular pues establece que todas las entradas son igualmente probables, lo cual puede ser cierto o no.
Trabajaremos con el peor caso.

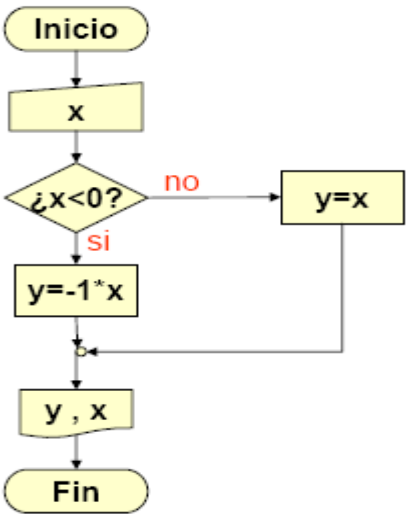
Ejemplo 3

Sea *A* una lista de *n* elementos *A1, A2, A3, ... , An.* Ordenar significa permutar estos elementos de tal forma que los mismos queden de acuerdo con un orden preestablecido.
Ascendente *A*1<=*A*2<=*A*3.....<=*An*
Descendente *A*1>=*A*2>=.....>=*An*

Caso peor: Que el vector esté ordenado en sentido inverso.
Caso mejor: Que el vector esté ordenado.
Caso medio: Cuando el vector esté desordenado aleatoriamente.

Ejemplo 4.

Hallar el T(n) para el algoritmo que cambia el signo de un número, únicamente en caso que sea negativo.

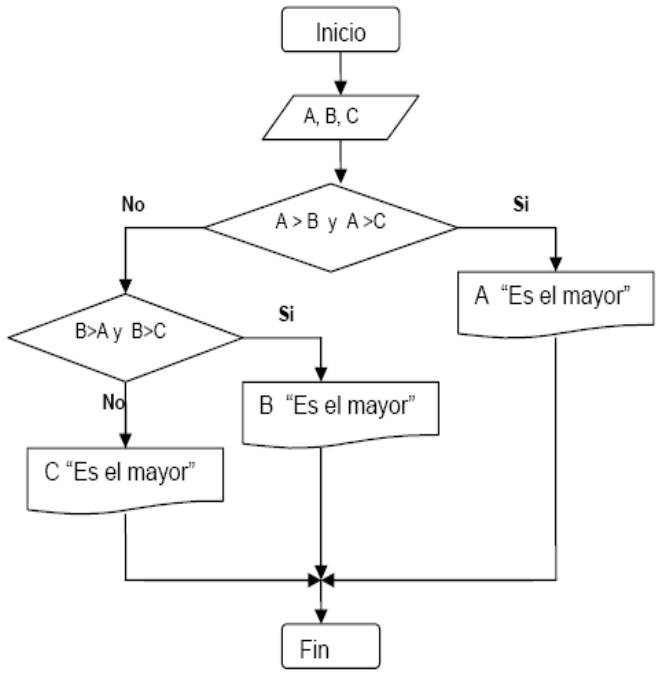



```
Leer x                  (1 OE)
Si   x <0               (1 OE)
     y=-1*x             (2 OE)
Else
     y=x                (1 OE)
End
Escribir y              (1 OE)
Escribir x              (1 OE)

Caso mejor: T(n) = 1 OE + 1 OE + 1 OE + 1 OE + 1 OE = 5

Caso peor   : T(n) = 1 OE + 1 OE +2 OE + 1 OE + 1 OE = 6
```

Ejemplo 5.

Hallar el T(n) para el algoritmo que permita ingresar tres valores diferentes y almacenarlos en las variables A, B y C respectivamente. El algoritmo debe imprimir cual es el mayor.

Diagrama de Flujo



Inicio

Leer A, B, C 3 OE

Si A > B y A > C **Entonces** **3 OE**

Escribir A "Es el mayor" 1 OE

Sino

Si B > A y B > C **Entonces** **3 OE**

Escribir B "Es el mayor" 1 OE

Sino

Escribir C "Es el mayor" 1 OE

Fin Si

Fin Si

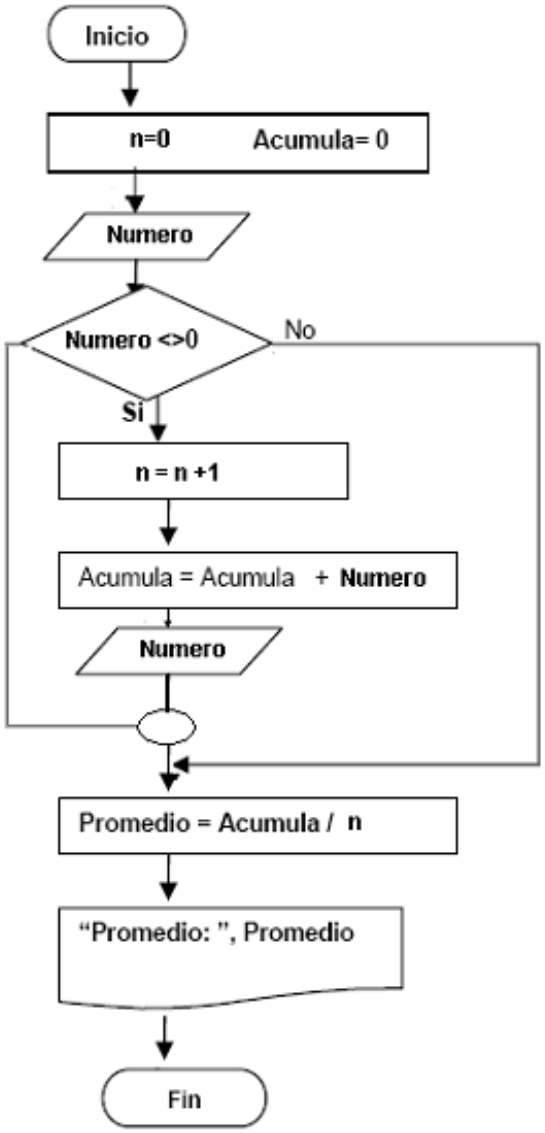
Fin

Caso mejor: T(n) = 3 OE + 3 OE + 1 OE = 7

Caso peor : T(n) = 3 OE + 3 OE + 3 OE + 1 OE = 10

Ejemplo 6.

Hallar el T(n) para el algoritmo que permita calcular el Promedio de Notas. El algoritmo finaliza cuando Numero = 0.



Inicio

n= 0, Acumula= 0	2 OE
Leer Numero	1 OE
Mientras Numero <> 0 hacer	1 OE
n = n + 1	2 OE
Acumula = Acumula + Numero	2 OE
Leer Numero	1 OE
Fin Mientras	
Promedio = Acumula/n	2 OE
Imprimir Promedio	1 OE

Fin

Caso mejor: T(n) = 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7

Caso peor: T(n) =

$$\mathbf{2} + \mathbf{1} + \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{2} + \mathbf{1}) \right) + \mathbf{1} \right) + \mathbf{2} + \mathbf{1}$$

T(n) = 3 + (6 n + 1) + 3= 6n+7

Ejemplo 7.

Hallar el T(n) para el siguiente algoritmo

```
    void buscar(int c, float a[n]){
            int j;
1:    j=1;                          1 asignación = 1OE
2:    while(a[j]<c)&&(j<n){         1 acceso vector + 2 cond + 1 and = 4OE
3:      j=j+1;                      1 incremento + 1 asignacion = 2OE
4:    }
5:    if (a[j]==c)                  1 cond + 1 acceso vector = 2OE
6:          return j;               1 return= 1OE
7:    else
8:          return 0;               1 return= 1OE
    }
```

- En el *caso mejor:*

  Para el algoritmo, se efectuará la línea (1) y de la línea (2) sólo la primera mitad de la condición, que supone 2 OE (suponemos que las expresiones se evalúan de izquierda a derecha, y con "cortocircuito", es decir, una expresión lógica deja de ser evaluada en el momento que se conoce su valor, aunque no hayan sido evaluados todos sus términos). Tras ellas la función acaba ejecutando las líneas (5) a (7). En consecuencia, T(n)=1+2+3=6.

- En el *caso peor*:

  Se efectúa la línea (1), el bucle se repite n–1 veces hasta que se cumple la segunda condición, después se efectúa la condición de la línea (5) y la función acaba al ejecutarse la línea (7). Cada iteración del bucle está compuesta por las líneas (2) y (3), junto con una ejecución adicional de la línea (2) que es la que ocasiona la salida del bucle. Por tanto

$$T(n) = 1 + \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} (4+2) \right) + 4 \right) + 2 + 1 = 6n + 2.$$

- En el *caso medio*:

  El bucle se ejecutará un número de veces entre 0 y *n*–1, y vamos a suponer que cada una de ellas tiene la misma probabilidad de suceder.

  Como existen n posibilidades (puede que el número buscado no esté) suponemos a priori que son equiprobables, es decir, en media, la mitad de los elementos *a[j]* son menores que *c* y la otra mitad mayores y por tanto cada una tendrá una probabilidad asociada de 1/n.

  Con esto, el número medio de veces que se efectuará el bucle es de

$$\sum_{i=0}^{n-1} i\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Tenemos pues que

$$T(n) = 1 + \left(\left(\sum_{i=1}^{(n-1)/2} (4+2) \right) + 2 \right) + 2 + 1 = 3n + 3.$$

Es importante observar que no es necesario conocer el propósito del algoritmo para analizar su tiempo de ejecución y determinar sus casos mejor, peor y medio, sino que basta con estudiar su código.

4. Complejidad de un algoritmo

Estudia de forma genérica (e independiente a la maquina) los recursos (tiempo y cantidad de memoria) requeridos por un algoritmo para resolver un problema.

- Se requiere contar con una notación que permita comparar la eficiencia entre los algoritmos…
- La **notación asintótica** es la propuesta de notación aceptada por la comunidad científica para describir el comportamiento en eficiencia (o complejidad) de un algoritmo.
- Describe en forma sintética el comportamiento de la función que con la variable de entrada, determina el número de operaciones que realiza el algoritmo.

Es necesario acotar de alguna forma la diferencia que se puede producir entre distintas implementaciones de un mismo algoritmo, ya sea del mismo código ejecutado por dos máquinas de distinta velocidad, como de dos códigos que implementen el mismo método. Esta diferencia es la que acota el siguiente principio:

Principio de Invarianza

Dado un algoritmo y dos implementaciones suyas *I1* e *I2*, que tardan *T1(n)* y *T*2(*n*) segundos respectivamente, el *Principio de Invarianza* afirma que existe una constante real $c > 0$ y un número natural n_0 tales que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $T1(n) \leq cT2(n)$.
Es decir, el tiempo de ejecución de dos implementaciones distintas de un algoritmo dado no va a diferir más que en una constante multiplicativa.

Notaciones asintóticas

Estudian el comportamiento del algoritmo cuando el tamaño de las entradas es lo suficientemente grande, sin tener en cuenta lo que ocurre para entradas pequeñas y obviando factores constantes.

Una familia de funciones que comparten un mismo comportamiento asintótico será llamada un *Orden de Complejidad*. Estas familias se designan con *O( )*.

- La familia *O(f(n))* define un Orden de Complejidad. Elegiremos como representante de este Orden de Complejidad a la función *f(n)* más sencilla perteneciente a esta familia.
- Las funciones de complejidad algorítmica más habituales en las cuales el único factor del que dependen es el tamaño de la muestra de entrada n, ordenadas de mayor a menor eficiencia son:

O(1)	*Orden constante*
O(log n)	*Orden logarítmico*
O(n)	*Orden lineal*
O(n log n)	*Orden cuasi-lineal*
$O(n^2)$	*Orden cuadrático*
$O(n^3)$	*Orden cúbico*
$O(n^a)$	*Orden polinomico.*
$O(2^n)$	*Orden exponencial*

- Es más, se puede identificar una jerarquía de órdenes de complejidad que coincide con el orden de la tabla anterior; jerarquía en el sentido de que cada orden de complejidad superior tiene a los inferiores como subconjuntos. Si un algoritmo **A** se puede demostrar de un cierto orden O_1, es cierto que también pertenece a todos los órdenes superiores (la relación de orden cota superior de' es transitiva); pero en la práctica lo útil es encontrar la "menor cota superior", es decir el menor orden de complejidad que lo cubra.

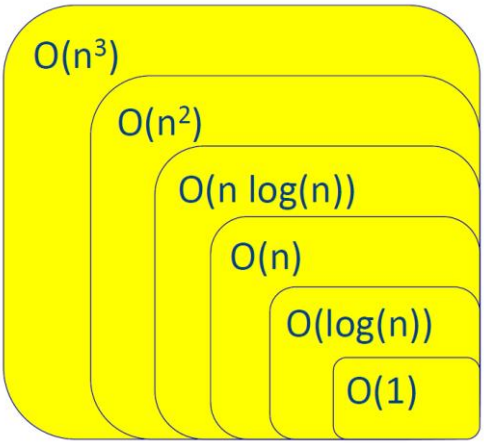
  - *O(1):* Complejidad constante. Cuando las instrucciones se ejecutan una vez.
  - *O(log n)*: Complejidad logarítmica. Esta suele aparecer en determinados algoritmos con iteración o recursión no estructural, ejemplo la búsqueda binaria.
  - *O(n)*: Complejidad lineal. Es una complejidad buena y también muy usual. Aparece en la evaluación de bucles simples siempre que la complejidad de las instrucciones interiores sea constante. Ejemplo: Encontrar el máximo de una lista de números, el método de ordenamiento por inserción
  - *O(n log n)*: Complejidad cuasi-lineal. Se encuentra en algoritmos de tipo divide y vencerás como por ejemplo en el método de ordenación quicksort y se considera una buena complejidad. Si *n* se duplica, el tiempo de ejecución es ligeramente mayor del doble.

- $O(n^2)$: Complejidad cuadrática. Aparece en bucles o ciclos doblemente anidados. Si n se duplica, el tiempo de ejecución aumenta cuatro veces, ejemplo método de ordenación de la burbuja.
- $O(n^3)$: Complejidad cúbica. Suele darse en bucles con triple anidación. Si n se duplica, el tiempo de ejecución se multiplica por ocho. Para un valor grande de n empieza a crecer dramáticamente. Ejemplo el producto de matrices

- $O(n^a)$: Complejidad polinómica ($a > 3$). Si a crece, la complejidad del programa es bastante mala.
- $O(2^n)$: Complejidad exponencial. No suelen ser muy útiles en la práctica por el elevadísimo tiempo de ejecución. Aparecen en muchos problemas de tipo combinatorio, también en subprogramas recursivos que contengan dos o más llamadas internas. Ejemplos: Enumerar todos los subconjuntos de un conjunto dado, Problema del viajante

Relación entre distintos conjuntos de funciones

$$O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n\log(n)) < O(n^2) < O(n^2\log(n)) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!)$$



Algoritmos Polinomiales: Aquellos que son proporcionales a n^a. Son en general factibles o aplicables, los problemas basados en estos algoritmos son solucionables.

Algoritmos Exponenciales: Aquellos que son proporcionales a k^n. En general no son factibles salvo un tamaño de entrada n exageradamente pequeño, pero generalmente pertenecen a un universo de problemas de los cuales el cómputo se hace imposible.

Procedimiento para hallar el Orden de complejidad:

- Analizar cómo crece el tiempo *t* de ejecución en función del tamaño *n* del problema
- Obtener el tiempo de ejecución T(n)
- Obviar los casos pequeños y estudiando la tendencia

$$O(n) = \lim_{n\to\infty} T(n)$$

Ejemplo 8

a) $T(3n^2 + 6n + 8) = T(3n^2 + 6n) = O(3n^2) = O(n^2)$.
b) $T(2^n + n^{12}) = O(2^n)$.

5.- Impacto Práctico

Ejemplo 9

Contamos con una computadora capaz de procesar datos en 10^{-4} seg. En esta computadora se ejecuta un algoritmo que lee registros de una base de datos, dicho algoritmo tiene una complejidad exponencial 2^n, *¿Cuánto tiempo se tardará en procesar una entrada n de datos?*

n	**Tiempo**	**TIEMPO**
10	$2^{10}(0.0001) = 0.1024$ seg	≈ 1 décima de segundo
20	$2^{20}(0.0001) = 104.8576$ seg	≈ 2 minutos
30	$2^{30}(0.0001) = 107374.1824$ seg = 1.242757 dias	> 1 día
40	$2^{40}(0.0001) = 109951162.776$ seg= 3.53495251 años	> 3 años
50	$2^{50}(0.0001) =1.125899906842624 \times 10^{11}$seg. = 3619.791367 años	≈ 3 3620 años
100	$2^{100}(0.0001) = 1.267650600228229401496703205376 \times 10^{26}$ seg. = 4.075522763079441234235799914403292181069958847736625 5 × 10^15 milenios	= 4,075,522,763,079,441 milenios

Ahora se tiene la misma computadora capaz de procesar datos en 10^{-4} seg. Se ejecuta un algoritmo que hace el mismo trabajo antes citado, pero este algoritmo tiene una complejidad cúbica n^3.
¿Cuánto tiempo se tardará en procesar una entrada ***n*** *de datos?*

n	**TIEMPO**	**TIEMPO**
10	10^3 (0.0001) = 0.1 seg.	= 1 décima de segundo
20	20^3 (0.0001) =0.8 seg.	= 8 décimas de segundo
100	100^3 (0.0001) = 100 seg.	= 1.7 minutos
200	200^3 (0.0001) = 800 seg	= 13.3 minutos
1000	1000^3 (0.0001) = 100000 seg = 1.1574 dias	≈ 1 día

Ejemplo 10:

Sea un problema que sabemos resolver con algoritmos de diferentes complejidades. Para compararlos entre sí, supongamos que todos ellos requieren 1 hora de ordenador para resolver un problema de tamaño n=100.
¿Qué ocurre si disponemos del doble de tiempo? Nótese que esto es lo mismo que disponer del mismo tiempo en un ordenador el doble de potente, y que el ritmo actual de progreso del hardware es exactamente ese:
"duplicación anual del número de instrucciones por segundo".

¿Qué ocurre si queremos resolver un problema de tamaño 2n?

O(f(n))	**n=100**	**t=2h**	**n=200**
log n	1 h	10000	1.15 h
n	1 h	200	2 h
n log n	1 h	199	2.30 h
$\mathbf{n^2}$	1 h	141	4 h
$\mathbf{n^3}$	1 h	126	8 h
$\mathbf{2^n}$	1 h	101	10^{30} h

Los algoritmos de complejidad O(n) y O(n log n) son los que muestran un comportamiento más "natural": prácticamente a doble de tiempo, doble de datos procesables.

Los algoritmos de complejidad logarítmica son un descubrimiento fenomenal, pues en el doble de tiempo permiten atacar problemas notablemente mayores, y para resolver un problema el doble de grande sólo hace falta un poco más de tiempo (ni mucho menos el doble).

Los algoritmos de tipo polinómico no son una maravilla, y se enfrentan con dificultad a problemas de tamaño creciente. La práctica viene a decirnos que son el límite de lo "tratable".

Sobre la tratabilidad de los algoritmos de complejidad polinómica habría mucho que hablar, y a veces semejante calificativo es puro eufemismo. Mientras complejidades del orden $O(n^2)$ y $O(n^3)$ suelen ser efectivamente abordables, prácticamente nadie acepta algoritmos de orden $O(n^{100})$, por muy polinómicos que sean. La frontera es imprecisa.

Cualquier algoritmo por encima de una complejidad polinómica se dice "intratable" y sólo será aplicable a problemas ridículamente pequeños.

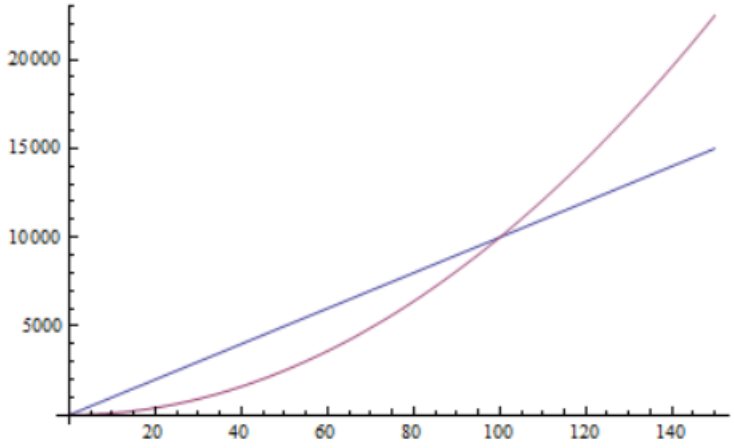
A la vista de lo anterior se comprende que se busquen algoritmos de complejidad lineal. Es un golpe de suerte encontrar algo de complejidad logarítmica. Si se encuentran soluciones polinomiales, se puede vivir con ellas; pero ante soluciones de complejidad exponencial, más vale seguir buscando.

Ejemplo 11:

Si disponemos de dos algoritmos para el mismo problema, con tiempos de ejecución respectivos:

algoritmo	**tiempo**	**complejidad**
f	100 n	O(n)
g	n^2	O(n^2)

Asintóticamente, "f" es mejor algoritmo que "g"; pero esto es cierto a partir de N > 100.

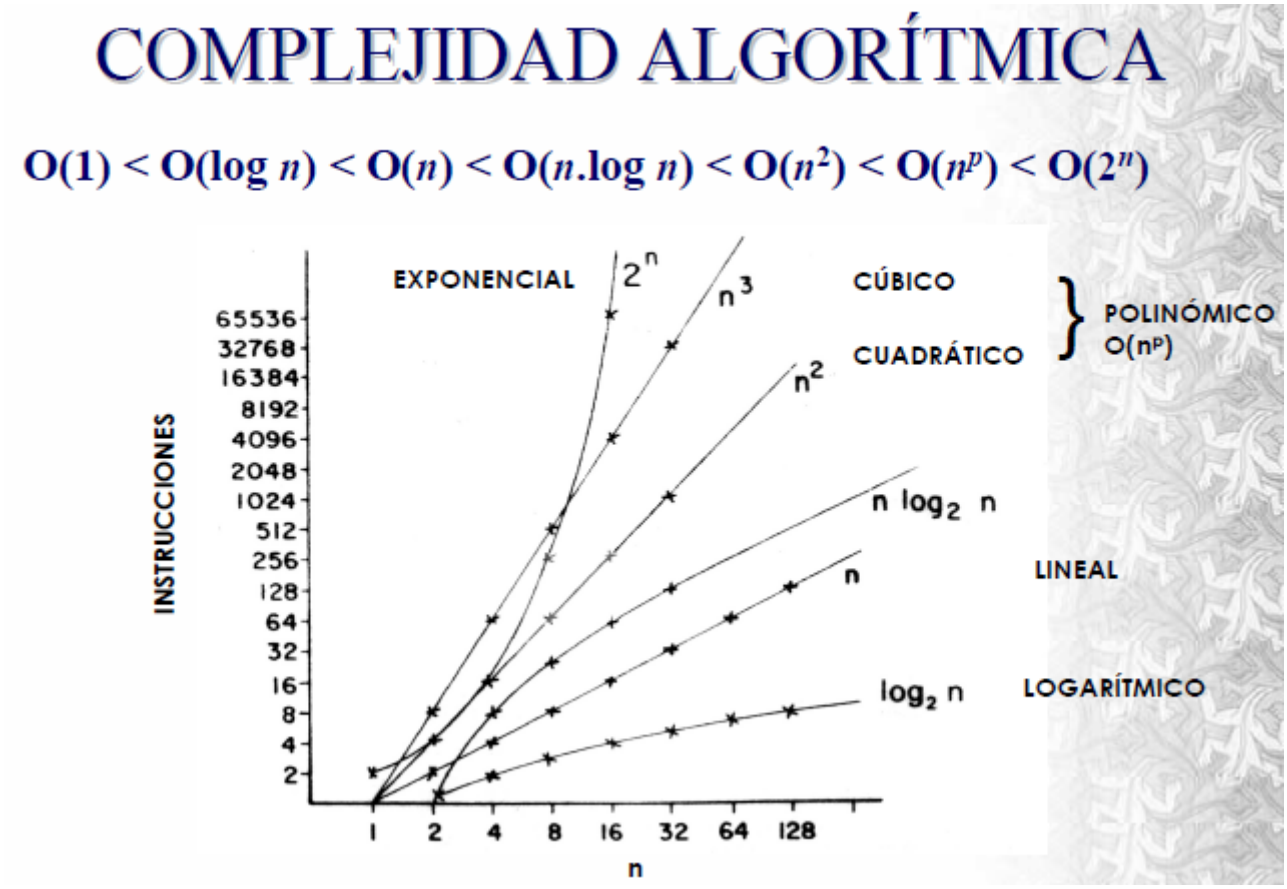


Si nuestro problema no va a tratar jamás problemas de tamaño mayor que 100, es mejor solución usar el algoritmo "g".

El ejemplo anterior muestra que las constantes que aparecen en las fórmulas para T(n), y que desaparecen al calcular las funciones de complejidad, pueden ser decisivas desde el punto de vista de ingeniería. Pueden darse incluso ejemplos más dramáticos:

algoritmo	**tiempo**	**complejidad**
f	n	O(n)
g	100 n	O(n)

Aun siendo dos algoritmos con idéntico *comportamiento* asintótico, es obvio que el algoritmo “f" es siempre 100 veces más el " rápido que g" y candidato primero a ser utilizado.



6. Problemas P, NP y NP-completos

Un problema es computable si existe un algoritmo que lo resuelva, no todos los problemas son computables.

Clasificación de problemas
Años 30
Problemas computables y no computables.

Años 50
Complejidad de los problemas computables (búsqueda de algoritmos más eficaces).

Años 70
Clasificación de los problemas computables: P y NP.

Cuando nos enfrentamos a un problema concreto, habrá una serie de algoritmos aplicables. Se suele decir que el orden de complejidad de un problema es el del mejor algoritmo que se conozca para resolverlo. Así se clasifican los problemas, y los estudios sobre algoritmos se aplican a la realidad.

Estos estudios han llevado a la constatación de que existen problemas muy difíciles, problemas que desafían la utilización de los ordenadores para resolverlos.

Clase P

Los algoritmos de complejidad polinómica se dice que son tratables en el sentido de que suelen ser abordables en la práctica. Los problemas para los que se conocen algoritmos con esta complejidad se dice que forman la clase P. Aquellos problemas para los que la mejor solución que se conoce es de complejidad superior a la polinómica, se dice que son problemas intratables. Seria muy interesante encontrar alguna solución polinómica (o mejor) que permitiera abordarlos.

Ejemplos de algoritmos de complejidad P: Búsqueda Binaria, método de ordenación quicksort, multiplicación de matrices, calcular el determinante de una matriz, algoritmos de programación lineal (método simplex).

Clase NP

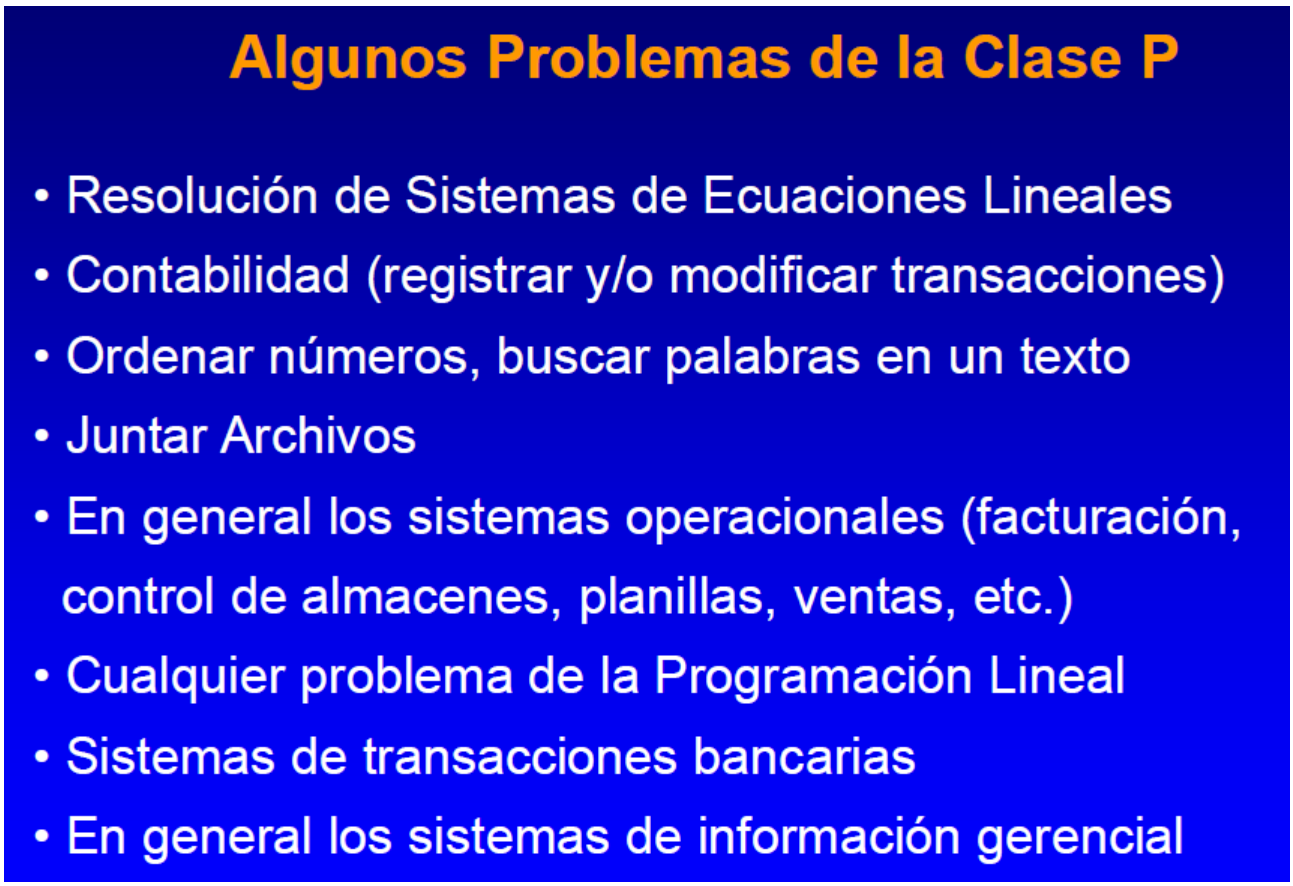
Algunos de estos problemas intratables pueden caracterizarse por el curioso hecho de que puede aplicarse un algoritmo polinómico para comprobar si una posible solución es válida o no. Esta característica lleva a un método de resolución no determinista consistente en aplicar heurísticos para obtener soluciones hipotéticas que se van desestimando (o aceptando) a ritmo polinómico. Los problemas de esta clase se denominan NP (la N de no-deterministas y la P de polinómicos).

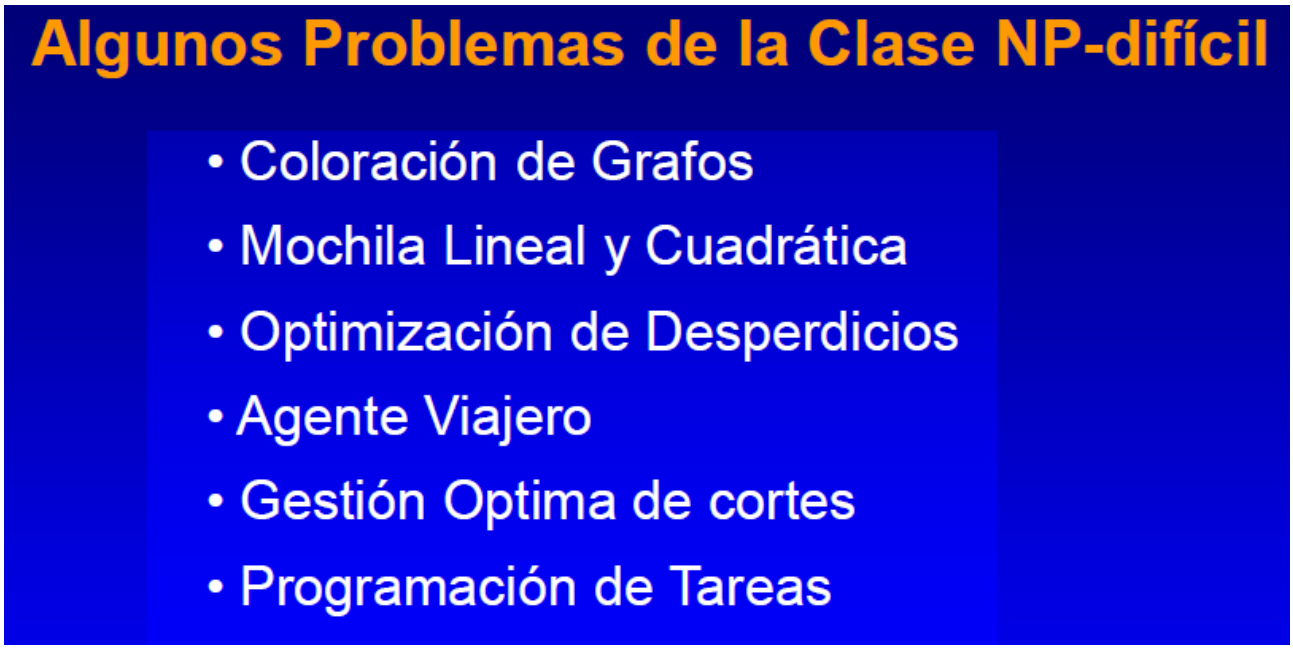
Ejemplos de algoritmos de complejidad NP: el TSP (Travelling Salesman Problem), problemas combinatorios, algoritmo para hallar la raíz cuadrada, varios Problemas de Programación Lineal Entera

Clase NP-completos

Se conoce una amplia variedad de problemas de tipo NP, de los cuales destacan algunos de ellos de extrema complejidad. Podemos decir que algunos problemas se hayan en la "frontera externa" de la clase NP. Son problemas NP, y son los peores problemas posibles de clase NP. Estos problemas se caracterizan por ser todos "iguales" en el sentido de que si se descubriera una solución P para alguno de ellos, esta solución sería fácilmente aplicable a todos ellos. Actualmente hay un premio de prestigio equivalente al Nobel reservado para el que descubra semejante solución ... ¡y se duda seriamente de que alguien lo consiga!

Es más, si se descubriera una solución para los problemas NP-completos, esta sería aplicable a todos los problemas NP y, por tanto, la clase NP desaparecería del mundo científico al carecerse de problemas de ese tipo. Realmente, tras años de búsqueda exhaustiva de dicha solución, es hecho ampliamente aceptado que no debe existir, aunque nadie ha demostrado, todavía, la imposibilidad de su existencia.





Ejemplo 12:

Se pide comprobar si un número determinado X es la raíz cuadrada de Z

Alternativas

a) Calcular la raíz de Z y comparando con X (proceso lento y engorroso)

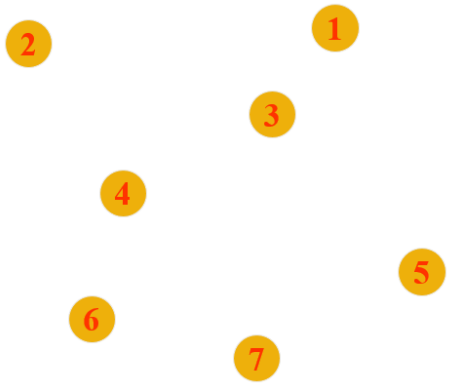
b) Elevar al cuadrado a X y comparar con Z (simple multiplicación X·X)

La complejidad de la función “elevar al cuadrado” (Clase P) es más simple que calcular la raíz cuadrada.
En algunos problemas comprobar la solución es más eficiente que calcularla.

Esta idea es el fundamento para el desarrollo de las heurísticas y metaheuristicas.

La **clase de complejidad NP** contiene problemas que **no pueden resolverse** en un tiempo polinómico. Cuando se dice que un algoritmo no puede obtener una solución a un problema en tiempo polinómico siempre se intenta buscar otro procedimiento que lo consiga mejorar.

Ejemplo 13: El problema del viajante de comercio
Travelling Salesman Problem (TSP)



Se tiene una red de nodos, que pueden ser ciudades.

Se parte de un lugar inicial, y debe recorrerse todos sin pasar más de una vez por cada lugar, volviendo al lugar inicial, y con una distancia total recorrida mínima

Para cada arco, se tiene un valor Cij, que indica la distancia o el costo de ir del nodo i al nodo j

Sea n= número de ciudades

Para n=7, hay 7! = 5040 posibles rutas **(**permutaciones) posibles.

Para n=10, hay 10! = 3 628 800 rutas posibles.

Para n=12, hay 12! = 479 001 600 rutas posibles.

Para n=20 hay 2432 9020 0817 6640 000 rutas posibles.

Explorando 10000 permutaciones por segundo, una búsqueda exhaustiva demandaría un tiempo estimado de:

n	Rutas	Tiempo estimado
7	5040	0.504 seg
10	3 628 800	362.88 seg. aprox 6.048 minutos
12	479 001 600	47 900.2 seg= 798.333 minutos 13.3055 horas
20	2432 9020 0817 6640 000	243290200817664 seg. 4.05484xE10 minutos 7.82183xE6 años

Aplicaciones

- El camino más corto entre varios puntos,
- Un plan de mínimo coste para repartir mercancías a clientes,
- Una asignación óptima de trabajadores a tareas a realizar,
- Una secuencia óptima de proceso de trabajos en una cadena de producción,
- Una distribución de tripulaciones de aviones con mínimo coste,
- El mejor enrutamiento de un paquete de datos en Internet

7.- Conclusión

- Se puede concluir, que solo un algoritmo eficiente, con un orden de complejidad bajo, puede tratar grandes volumen de datos, se razona que un algoritmo es:
  - Muy eficiente si su complejidad es de orden *log n*
  - Eficiente si su complejidad es de orden n^a
  - Ineficiente si su complejidad es de orden 2^n
- Se considera que un problema es tratable si existe un algoritmo que lo resuelve con complejidad menor que 2^n, y que es intratable o desprovisto de solución en caso contrario.

8.- ¿Que tengo que saber de todo esto?

- Conocer y entender los conceptos de O(n)
- Ser capaz de realizar operaciones básicas sobre órdenes de complejidad.
- Ser capaz de estimar la complejidad de algoritmos iterativos sencillos.
- Conocer y entender los conceptos básicos de complejidad computacional

Piura, 07 de Marzo