

Домашно 4 - леки задачи

Задача 1. През далечната 1690 година, на 18 март, в Прусия (сегашна Германия), бил роден Кристиан Голдбах. Кристиан учил в кралската академия “Албертина” в Кьонигсберг и след завършването си започнал да обикаля из Европа за още повече знания по математика. От 1710г до 1724г той посетил всички околности на Германия, Англия, Холандия, Италия и Франция, срещайки се с много известни математици, като Готфрид Лайбниц, Леонард Ойлер и Николас Бернули.

Години след това, на 7 юни 1742г, на Кристиан му хрумнала идея, която искал да сподели със своя приятел Ойлер. Написал писмо до него, с което предложил така известната хипотеза на Голдбах, която гласи: **Всяко положително четно число, може да се изрази, чрез сумата на две прости числа.**

Вашата задача е да помогнете на Ойлер да покаже верността на предположението на Кристиан Голдбах. Напишете функция, която по дадено цяло положително число N , подадено от Ойлер, проверява дали е четно и ако е, изписва всички двойки прости числа, които дават сбор въведеното число. Ойлер ще ви бъде много благодарен, ако му помогнете за първите 2^{32} числа, после той ще се справи сам със следващите.

Вход:	Изход:
18	(5, 13) (7, 11)
19	Are you joking with me, Euler? This number is not even!
36	(5, 31) (7, 29) (13, 23) (17, 19)

Разбира се, Ойлер, както и студентите от ФМИ, знаят, че $+$ е комутативна операция, за това няма смисъл да изписваме двойките (11, 7) и (13, 5) също :)

Задача 2. Напишете функции, които решават следните алгоритмични проблеми. Където сметете за удобно използвайте дефинирани от вас помощни функции. Може да смятате, че числата с които работите ще са в интервала $[-2\,000\,000\,000, 2\,000\,000\,000]$.

1. Напишете функция, която намира сумата на цифрите на дадено число в дадена бройна система (числото и основата на бройната система се подават като параметри).
2. Всеки две числа имат най-голям общ делител. Напишете функция, която намира най-големия общ делител на две положителни числа.
3. Напишете функция, която за цяло число a и естествено число b намира числото a^b , без използване на `pow` или други библиотечни функции.
4. Ще наричаме едно число **зелено**, ако сумата от третите степени на цифрите му е равна на самото число. Пример за такова число е $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. Напишете функция, която проверява дали едно число е зелено.
5. Някои хора от екипа се интересуват от сумата на зелени числа в даден интервал. Напишете функция, която намира сумата на всички зелени числа в интервала $[M, N]$. Ако $M > N$ използвайте интервала $[N, M]$.
6. Ще наричаме едно число **червено**, ако съществува цяло K , такова че числото е K -пъти по-голямо от сумата на цифрите си. Например 12 е **червено** число, защото $12 = 4 * (1+2)$
7. Намерете разликата на сумата между зелените и червените числа в даден интервал $[M, N]$
8. По дадено реално число x и цяло n намерете сумата на първите n члена на редицата $1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$
9. Сумата от точка 8) ви дава приближение на $\cos(x)$ (когато x е мярка на ъгъл в радиани в интервала $[-\pi, \pi]$). Използвайки тази сума, напишете функции, които намират $\sin(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$. Разбира се, не трябва да използвате вградените тригонометрични функции.