FAKULTET ELEKTROTEHNIKE UNIVERZITETA U TUZLI

SIGNALI I SISTEMI

Analiza u frekventnom domenu. *Fourierovi redovi*

PROF. DR. NERMIN SULJANOVIĆ
PROF. DR. ASMIR GOGIĆ

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

Uvod

- Poseban slučaj kompleksnog eksponencijalnog signala jeste $e^{j\omega 0t}$
- Fourierov red = metod predstavljanja periodičnih funkcija preko harmonijskih funkcija
- Fourierova transformacija => poopštenje za aperiodične signale

Svojstvena funkcija

$$\phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{Sistem}} \longrightarrow \lambda_k \phi_k(t)$$

Svojstvena vrijednost

Svojstvena funkcija

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{LTI sistem}} \longrightarrow y(t) = \sum_k \lambda_k a_k \phi_k(t)$$

Određivanje odziva LTI sistema se svodi na određivanje koeficijenata λ_k.

Predstavljanje kontinualnih periodičnih signala pomoću Fourierovih redova

- Periodični signali: $x(t)=x(t+T), \ \forall t \ \ (*)$
- T_0 => osnovni period (najmanja vrijednost T različita od nule za koju relacija * vrijedi)
- Osnovna frekvencija: $\omega_0=2\pi/T_0$.
- Primjer: $x(t)=\cos\omega_0 t$ i $x(t)=e^{j\omega_0 t}$.
- *Oba signala su periodična sa osnovnom frekvencijom ω_0 i osnovnim periodom T_0.*

Bazni signali

- Definiramo skup baznih harmonijskih signala:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t},\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

- Bazni signal ima osnovnu frekvenciju koja je cjelobrojni multipl osnovne frekvencije
- Svaki bazni signal je periodičan u periodu T.

Fourierov red

- Linearna kombinacija baznih harmonijskih signala:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

- Periodična u periodu T
- Član za k=0 je konstanta.
- $k=\pm 1$ => prvi harmonik itd.

Za realne periodične signale

- $x(t)=x^*(T)$ => $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$

- Zamijenimo k sa $-k$:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

- Uporedimo dva gornja izraza:

$$a_k^* = a_{-k}$$

Za realne periodične signale

- $x(t)$ možemo zapisati u obliku:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

$$a_k^* = a_{-k}$$ =>

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

U eksponencijalnom obliku...

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\right\}$$

$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Fourierov red realnih periodičnih signala

Ili algebarskom obliku...

$$a_k = b_k + jc_k$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[b_k \cos k\omega_0 t - c_k \sin k\omega_0 t]$$

Određivanje koeficijenata Fourierovog reda. Primjer

Periodičan signal: $x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi, T = 1/2$$

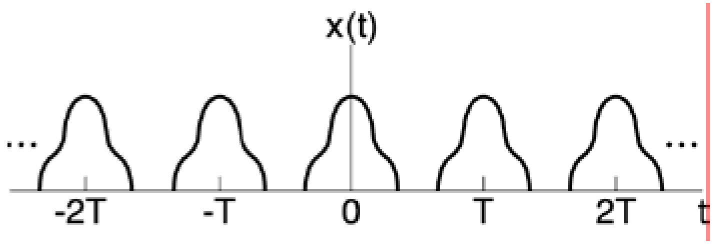
$a_0 = 0$ => nema DC komponente

$a_1 = 1/2$ $a_2 = 1/j$ $a_3 = 0$ $a_4 = 0$ ...

$a_{-1} = 1/2$ $a_{-2} = -1/j$ $a_{-3} = 0$ $a_{-4} = 0$ ...

Određivanje koeficijenata Fourierovog reda

Periodičan signal
$x(t)$



Sa lijeve strane:

1) Pomnožimo sa $e^{-jn\omega 0t}$

2) Integriramo duž perioda T

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Sa desne strane:

1) Pomnožimo sa $e^{-jn\omega 0t}$

2) Integriramo duž perioda T

Određivanje koeficijenata Fourierovog reda

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T x(t) e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j\int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

Određivanje koeficijenata Fourierovog reda

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j\int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

Periodične funkcije sa osnovnim periodom *T/lk-nl*

Integriramo duž intervala *T* koji je cijeli broj perioda ovog signala. Očigledno je da je integral jednak nuli kada ***k≠n*** a *T* za ***k=n***.

Određivanje koeficijenata Fourierovog reda

$$\int_0^T x(t)e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases} = T\,\delta[k-n] \quad \textit{Ortogonalnost}$$

Reducira se na Ta_n.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T x(t)e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

U opštem slučaju...

$$\int_T x(t)e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases} = T\delta[k-n]$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Za zadaću

Izvesti koeficijente za b_k i c_k za FR u trigonometrijskom obliku.

Kada periodičan kontinualni signal možemo predstaviti pomoću Fourierovog reda?

- Integral u izrazu a_k divergira, tj. $a_k \to \infty$?
- Koeficijenti a_k konačni, Fourierov red divergira (ne konvergira izvornom signalu $x(t)$)?
- Klasa signala koja se može predstaviti sa FR obuhvata signale sa konačnom energijom u toku perioda:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Ovaj uslov garantira da su svi koeficijenti Fourierovog reda konačni, odnosno da energija greške aproksimacije teži nuli kada $N \to \infty$.

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

P.L. Dirichlet

- Postavka uslova koji garantiraju da je signal $x(t)$ jednak njegovoj predstavi pomoću Fourierovog reda, osim u tačkama u kojim $x(t)$ ima prekid.

- U tačkama prekida, Fourierov red konvergira srednjoj vrijednosti signala sa obje strane prekida.

- Ukupno 3 Dircihletova uslova.

1. *x(t)* mora biti apsolutno integrabilno duž perioda *T*

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

Garancija da će koeficijenti a_k biti konačni:

$$|a_k| \le \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right|dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty \Rightarrow |a_k| < \infty$$

Primjer periodičnog signala koji ne zadovoljava ovaj uslov

$$x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1. T = 1$$

2. *x(t)* ima konačan broj maksimuma i minimuma unutar jednog perioda signala

- Primjer funkcije koja zadovoljava uslov 1 ali ne i uslov 2:

$$\boxed{x(t) = \sin\frac{2\pi}{t}, 0 < t \leq 1, T = 1}$$

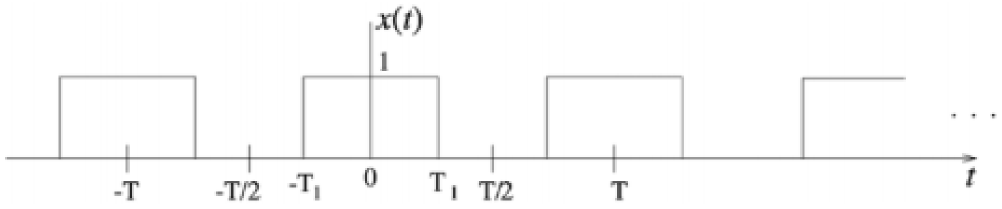
ali funkcija ima beskonačno mnogo maksimuma i minimuma unutar jednog perioda

$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$

3. *x(t)* ima konačan broj prekida u nekom konačnom intervalu. Svaki od ovih prekida je konačan.

Primjer: povorka pravougaonih impulsa

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$ $\Rightarrow$ Srednja vrijednost *x(t)* u periodu T!

$$a_k = \frac{1}{T} = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{-1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, k \neq 0$$

Primjer: povorka pravougaonih impulsa

$$T = 4T_1 \Longrightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2}$$

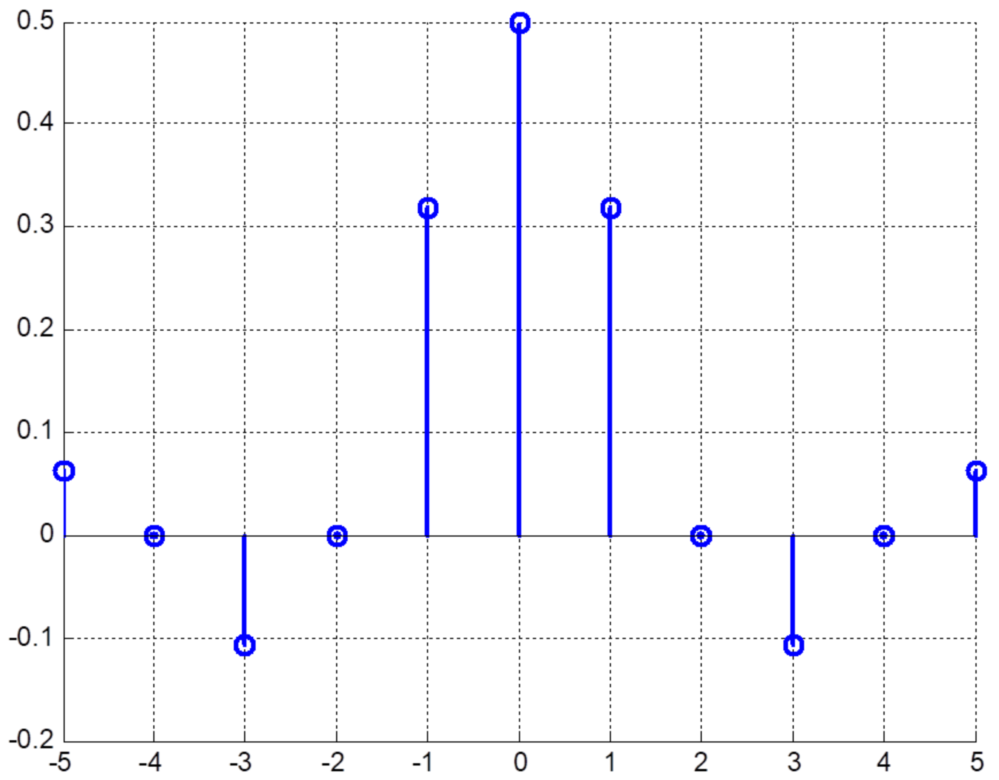
$$a_k = 0 \text{ za parno } k$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_{-3} = a_3 = -\frac{1}{3\pi}$$

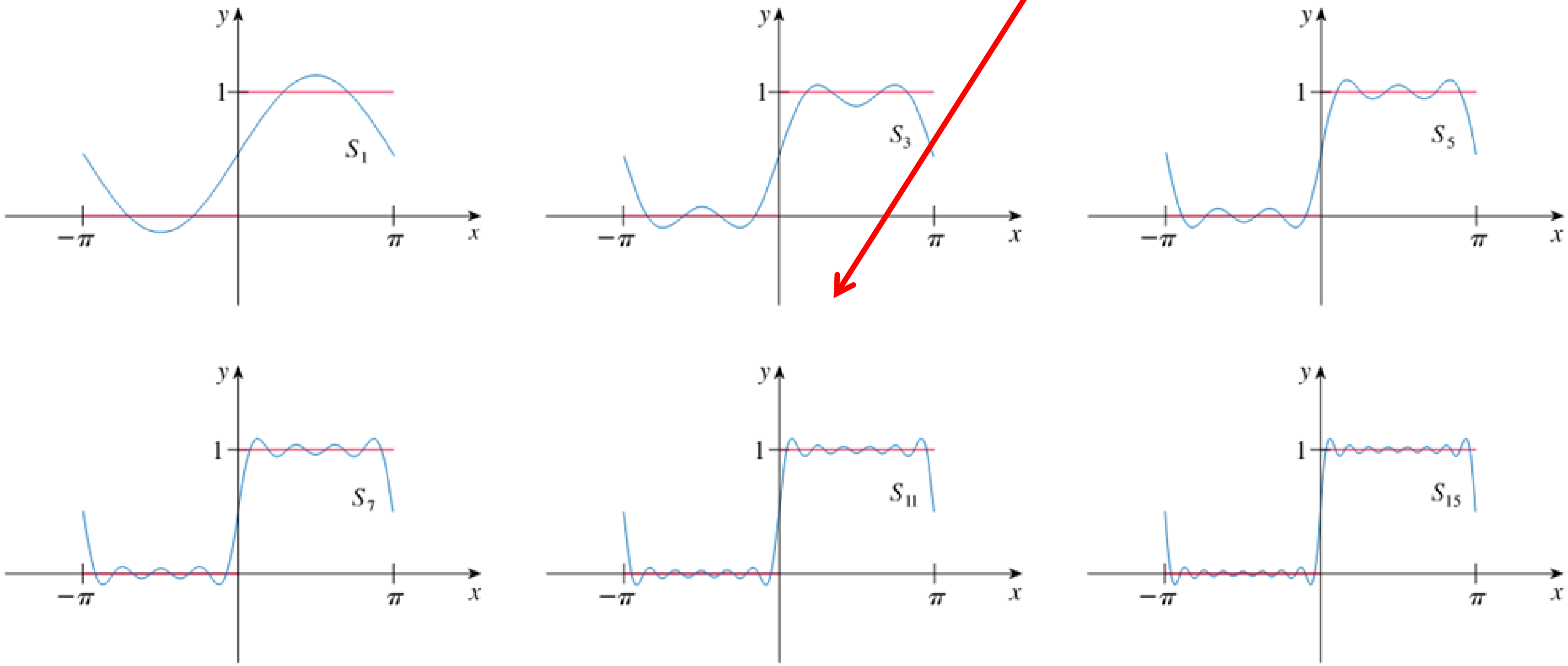
$$a_{-5} = a_5 = \frac{1}{5\pi}$$



Predstavljanje povorke impulsa sa konačnim brojem članova Fourierovog reda

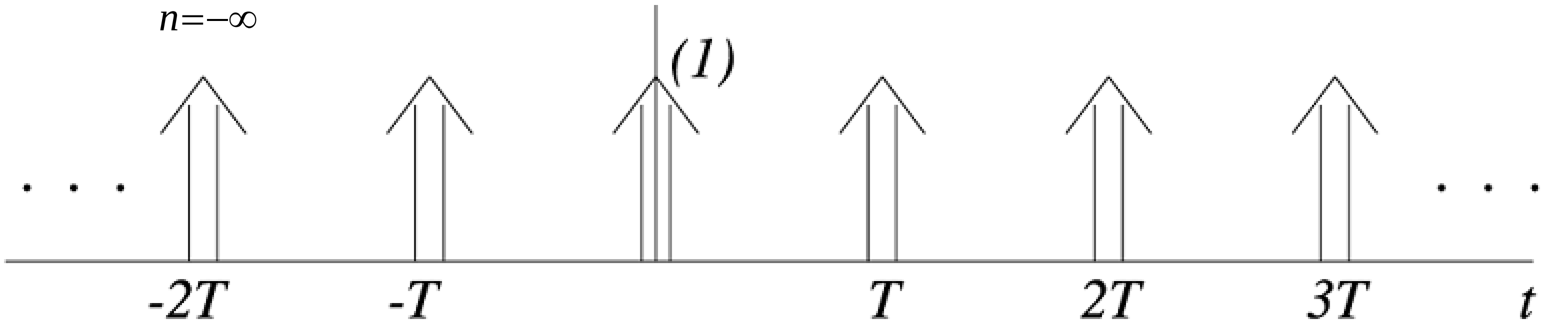
Gibbsov fenomen

Amplituda oscilacija se ne smanjuje nego se one kompresuju prema tački prekida!



Primjer: povorka δ impulsa

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T} \text{ za svako } k!$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}}$$

Parni i neparni signali

- Ako je periodični signal paran, tada su sinusni članovi nula

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega_0 t$$

- a ako je neparan vrijedi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\omega_0 t$$

Amplitudni i fazni spektar periodičnih signala

- Izrazimo koeficijente Fourierovog reda u obliku:

$$a_k = |a_k| e^{j\phi_k}$$

- Dijagram $|a_k|$ u zavisnosti od ugaone frekvencije ω naziva se amplitudni spektar periodičnog signala $x(t)$ a dijagram $\phi_k(\omega)$ fazni spektar.
- Za realni periodičan signal $x(t)$ je:

$$c_{-k} = c_k^*$$

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \phi_{-k} = -\phi_k$$

Parna funkcija od ω

Neparna funkcija od ω

Amplitudni i fazni spektar periodičnih signala

$$\boxed{a_k = |a_k| e^{j\phi_k}}$$

Amplitudni i fazni spektar periodičnog signala su diskretni!

Osobine FR. *Linearnost*

- Neka su $x(t)$ i $y(t)$ dva periodična signala sa periodom T i neka imaju koeficijente Fourierovog reda a_k i b_k, respektivno:

$$x(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} b_k$$

- $x(t)$ i $y(t)$ imaju jednake periode, pa i njihova linearna kombinacija ima isti period.
- c_k - koeficijenti linearne kombinacije.

$$z(t) = x(t) + y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} c_k = a_k + b_k$$

Osobine FR. *Vremenski pomak*

- Vremenski pomak periodičnog signala *x(t)* ne utiče na njegovu periodičnost.

$$y(t) = x(t - t_0) \overset{FR}{\leftrightarrow} b_k$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$\tau = t - t_0$ $\Rightarrow$

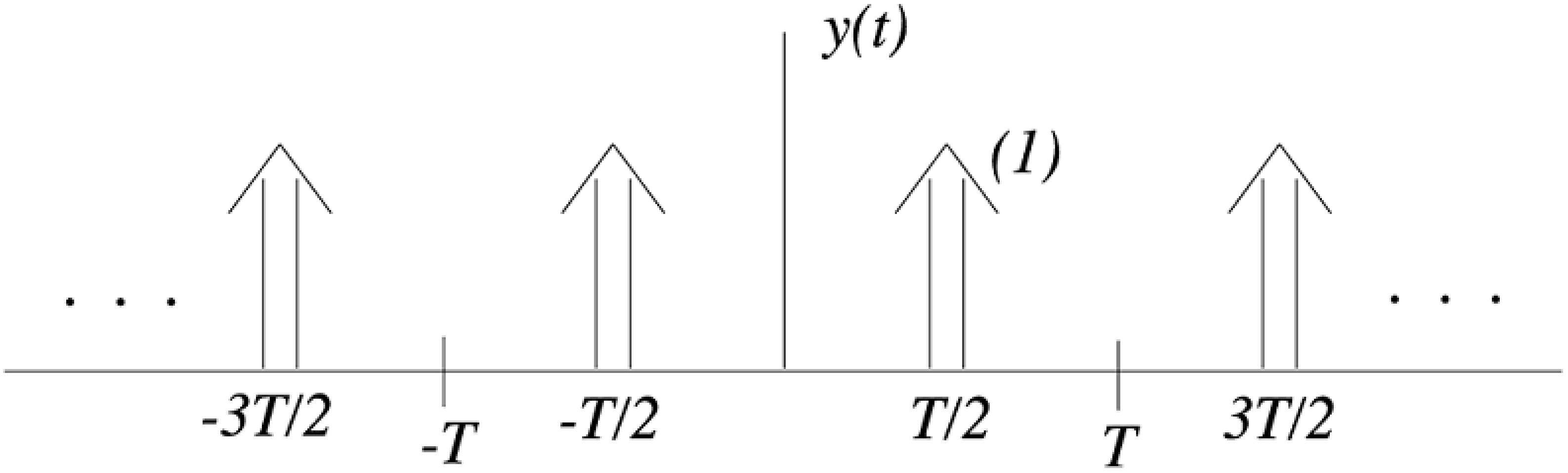
$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau + t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T}\int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0} a_k$$

$$\boxed{x(t - t_0) \overset{FR}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k}$$

Primjer. *Pomak za T/2*

$$y(t) = x(t - T/2) \Rightarrow a_k e^{-jk\omega_0 T/2} = a_k e^{-jk\pi} = (-1)^k a_k$$



$$\boxed{y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} \frac{(-1)^k}{T}}$$

Osobine FR. *Inverzija vremena*

- Period T periodičnog signala $x(t)$ ostaje nepromijenjen i u slučaju obraćanja vremena (-t).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}$$

$$k = -m \quad \Rightarrow \quad y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T} \quad \Rightarrow \quad b_k = a_{-k}$$

$$\boxed{x(-t) \overset{FR}{\leftrightarrow} a_{-k}}$$

Osobine FR. *Vremensko skaliranje*

- α=> realni skalar

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

Vidimo da se koeficijenti Fourierovog reda ne mijenjaju dok se mijenja predstava pomoću Fourierovog reda jer se mijenja osnovna frekvencija.

Signal $x(\alpha t)$ periodičan sa periodom T/α.

Množenje

- Neka su $x(t)$ i $y(t)$ dva periodična signala sa periodom T i neka imaju koeficijente Fourierovog reda a_k i b_k, respektivno:

$$x(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} b_k$$

- Proizvod $x(t)y(t)$ je takođe periodičan sa periodom T i možemo ga predstaviti pomoću Fourierovog reda sa koeficijentima h_k.

$$x(t)y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

Zaista, neka je *z(t)=x(t)y(t):*

$$z(t+T)=x(t+T)y(t+T)=x(t)y(t)=z(t)$$

$$z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$h_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\omega_0 t}\right) y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-j(k-m)\omega_0 t}dt\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

Parsevalov teorem za kontinualne periodične signale

- Snaga signala u toku jednog perioda je:

$$P = \frac{1}{T} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

Iz gornje relacije vidimo da ako su a_k koeficijenti Fourierovog reda signala $x(t)$, tada su a_{-k}^* koeficijenti Fourierovog reda signala $x^*(t)$.

Parsevalov teorem za vremenski kontinualne periodične signale

- Koeficijenti Fourierovog reda proizvoda dva signala su jednaki:

$$h_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{-m}$$

$$b_m = a_{-m}^* \Rightarrow b_{-m} = a_m^*$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

PARSEVALOV TEOREM ZA KONTINUALNE PERIODIČNE SIGNALE

Parsevalov teorem za vremenski kontinualne periodične signale

Parsevalov teorem govori da je (ukupna) srednja snaga periodičnog signala jednaka sumi srednjih snaga svih njegovih harmonijskih komponenti.

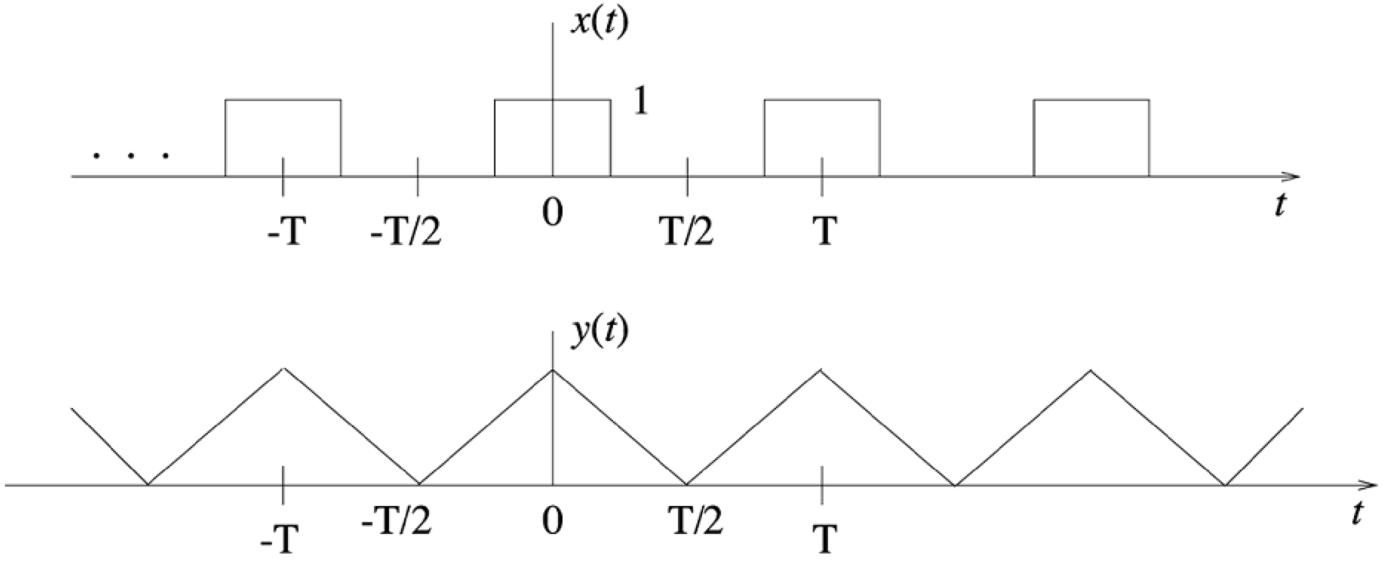
$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \left|a_k\right|^2 dt = \left|a_k\right|^2$$

$$\Downarrow$$

Srednja snaga k-te harmonijske komponente

Periodična konvolucija

x(t) i *y(t)* pozitivni periodični signali:



$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

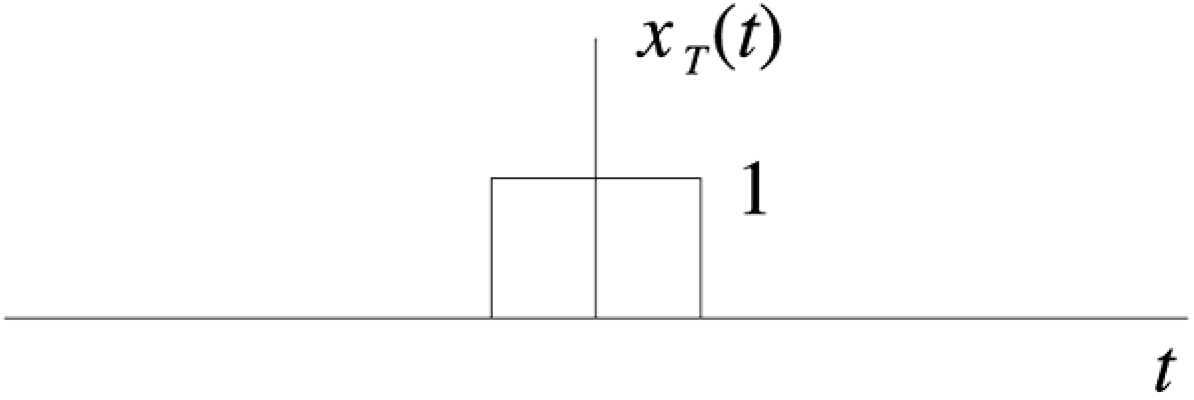
$$x(t) * y(t) = \infty$$

Periodična konvolucija

Ako integriramo duž jednog perioda:

$$x(t) * y(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & za\ ostalo\ t \end{cases}$$



Periodična konvolucija

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \int_T \left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = Ta_k b_k$$

Množenje u frekventnom domenu!

Fourierovi redovi i LTI sistemi

- LTI sistem je okarakteriziran svojim imulsnim odzivom *h(t)*, odnosno prenosnom funkcijom:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- Kada je *s* opšti kompleksan broj, tada je *H(s)* prenosna funkcija sistema.

$$s = j\omega \Rightarrow \mathrm{Re}\{s\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{st} \Rightarrow e^{j\omega t}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Frekventni odziv sistema

Fourierovi redovi i LTI sistemi

- Ako je $x(t)$ periodičan kontinualni signal predstavljen pomoću Fourierovog reda:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- i ako je poznat frekventni odziv $H(j\omega)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$y(t)$ je periodična funkcija sa istim periodom T, odnosno osnovnom frekvencijom ω_0.

$\{a_k H(jk\omega_0)\}$ je skup koeficijenata Fourierovog reda odziva sistema $y(t)$.

EoL