



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Katarina Kovačević

Diskretne transformacije signala, primene i algoritmi

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2018

Sadržaj

Predgovor	3
1 Uvod	5
1.1 Pojam i podela signala	5
1.2 Furijeov red	8
1.3 Furijeova transformacija	9
1.4 Poasonova formula	13
1.5 Uzorkovanje neprekidnih vremenskih signala	14
1.6 Rekonstrukcija neprekidnih vremenskih signala	18
1.7 Šenonova teorema o uzorcima	21
1.8 Aliasing	23
2 Diskretna Furijeova transformacija, primene i algoritmi	26
2.1 Diskretna Furijeova transformacija	26
2.2 Povezanost analitičke Furijeove transformacije sa DFT	31
2.3 Osobine diskretne Furijeove transformacije	32
2.3.1 Linearnost	32
2.3.2 Inverznost	33
2.3.3 Preokret u vremenu	34
2.3.4 Konjugacija	35
2.3.5 Pomeranje u vremenskom domenu	36
2.3.6 Pomeranje u frekvencijskom domenu	36
2.3.7 Ciklična konvolucija	36
2.4 Matrični oblik DFT	39
2.5 Primena FFT	46
2.5.1 Izračunavanje Furijeovih integrala	47
2.5.2 Brza konvolucija	48
2.5.3 Brza korelacija	50
3 Z-transformacija	52
3.1 Definicija z-transformacije	52
3.2 Osobine z-transformacije	56
3.2.1 Linearnost	56
3.2.2 Inverznost	56
3.2.3 Vremenski preokret	59
3.2.4 Konjugacija	59
3.2.5 Pomeranje u vremenskom domenu	60
3.2.6 Skaliranje u z-domenu	61
3.2.7 Diferenciranje u z-domenu	61

3.2.8	Konvolucija	62
4	Primene u Matlabu	65
4.1	DFT i FFT algoritmi	65
4.2	Algoritam brze konvolucije	70
4.3	Inverzan FFT algoritam	72
4.4	Generisanje slika	73
	Literatura	75
	Biografija	76
	Ključna dokumentacija	77

Predgovor

Teorija Furijeove transformacije je od izuzetnog značaja i primenjuje se u velikom broju disciplina kao što su fizika, inženjerstvo i primenjena matematika.

U prvom delu ovog rada će se objasniti pojam signala i objasniti njegova podela na neprekidne, diskretne i periodične, što će se ilustrovati primerima. Takođe, navešće se i osnovne definicije i teoreme vezane za Furijeove transformacije i Furijeove redove. Između ostalog dokazaće se Poasonova formula koja uspostavlja elegantnu vezu između Furijeovih redova i Furijeove transformacije. Takođe, posmatraće se transformacije neprekidnih vremenskih signala u diskretne i obratno. Preciznije, posmatraće se uzorkovanje neprekidnih vremenskih signala kao i njihova rekonstrukcija. Posebna pažnja će se posvetiti Šenonovoj teoremi o uzorcima i njenim primenama. Objasniće se i pojava aliasing-a.

U drugom delu rada će se izučavati transformacije koje omogućavaju da se diskretni periodični signali predstave kao sume sinusnih komponenti pridružujući svakoj komponenti odgovarajuću amplitudu i fazni pomeraj odnosno izučavaće se diskretna Furijeova transformacija. Ovde će se formulisati i dokazati fundamentalna teorema diskretne Furijeove transformacije. Potom će se izučavati brza Furijeova transformacija koja je u stvari efikasan algoritam za računanje diskretne Furijeove transformacije.

S obzirom da se diskretna Furijeova transformacija može posmatrati kao specijalni oblik takozvane z – transformacije, treći deo rada će se posvetiti analizi z - transformacije. Posebna pažnja biće na problemima konvergencije, jer je domen konvergencije z – transformacije prsten u polju kompleksnih brojeva čija granica je određena radijusom konvergencije anti-kauzalnog i kauzalnog dela. Takođe, u ovom delu rada će se posmatrati inverzna z – transformacija racionalne funkcije kao i osobine kao što su linearnost, pomak i skaliranje u vremenskom domenu, konjugacija i mnoge druge.

Četvrto poglavlje će se posvetiti algoritmima iz prethodnih poglavlja oblikovanjem u odgovarajuće Matlab kodove.

Posebnu zahvalnost upućujem svom mentoru dr Nenadu Teofanovu na svim savetima i sugestijama prilikom izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Milici Žigić, kao i svim ostalnim profesorima sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master studija.

Najveću zahvalnost dugujem porodici na podršci i razumevanju tokom studiranja.

Katarina Kovačević

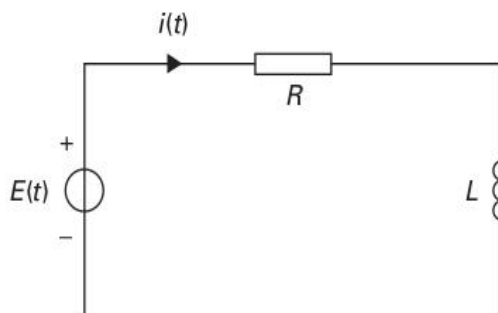
1 Uvod

U ovom delu rada uvešće se osnovne definicije i pojmovi koji su neophodni za razumevanje daljeg rada kao što su pojam signala, definicija Furijeove transformacije i mnogi drugi pojmovi. Potom će se razmatrati problem transformacije neprekidnog vremenskog signala u diskretni vremenski signal i obrnuto. Takođe, formulišće se i dokazati teorema o uzorkovanju. Pri tome je korišćena literatura [3], [4] i [5].

1.1 Pojam i podela signala

Pojam signal se može shvatiti na više različitih načina pa tako postoji i više različitih definicija signala. Pomoću sledećeg primera uvešće se najširi pojam signala odnosno funkcija koja zavisi od vremena.

Primer 1.1. Na Slici 1 je prikazano jednostavno električno kolo. Ovo kolo sadrži otpornik R , namotaj L i generator napona. Kada generator napona nije uključen tada u ovom kolu nema struje. Dakle, kada se uključi generator, on obezbeđuje napon $E(t)$ i zato struja $i(t)$ teče kroz kolo.



Slika 1: Električno kolo sa otpornikom R , namotajem L i naponom $E(t)$

Kažemo da je struja $i(t)$ jednoznačno određena sa naponom $E(t)$. Jačina struje $i(t)$ se može izračunati kao funkcija vremena Kirhofovog ¹ zakona o naponu i veze između struje i napona.

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)\frac{R}{L}} E(s) ds$$

□

¹Gustav Robert Kirchhoff, nemački fizičar

U datom primeru, sistem je određen odnosom funkcija $E(t)$ i $i(t)$ koje predstavljaju input i output, respektivno. Funkcija vremena $E(t)$ predstavlja signal. Ovo je definicija signala u najširem smislu jer domen i kodomen nisu definisani.

Signali se mogu podeliti na više načina. Jedna od podela je na osnovu vrednosti funkcije na:

- realne i
- kompleksne signale.

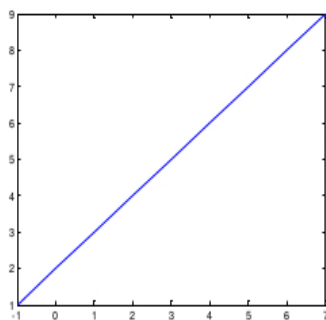
Dakle, realni signali imaju realne vrednosti funkcije. A kompleksni signali se mogu zapisati sledećom formulom: $f = f_1 + if_2$ gde je i imaginaran broj, a f_1 i f_2 predstavljaju dva realna signala. Pri tome signal f_1 predstavlja realni deo kompleksnog signala, a signal f_2 imaginarni deo kompleksnog signala.

Logično, dva kompleksna signala jednaka su ako su im jednaki realni i imaginarni delovi. Ukoliko je imaginarni deo jednak nuli, tada je dati signal realan. A kada su i realni i imaginarni delovi signala jednaki nuli tada se dati signal zove nula-signal jer je njegova vrednost nula.

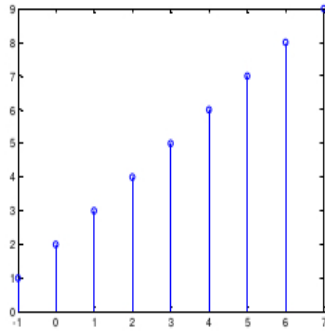
Budući da su signali često funkcije koje zavise od vremena, mogu se podeliti podeliti na:

- neprekidne vremenske signale i
- diskretne vremenske signale.

Neka je dat signal koji zavisi od vremena t . Ukoliko je vreme t realan parametar, govori se o neprekidnim vremenskim signalima.



Slika 2: Primer neprekidnog signala koji zavisi od vremena



Slika 3: Primer diskretnog signala koji zavisi od vremena

Ukoliko funkcija signala nije definisana na celom prostoru \mathbb{R} nego samo na prostoru \mathbb{Z} tada se kaže da je funkcija signala definisana samo u diskretnim vremenskim trenucima, odnosno u pitanju su diskretni vremenski signali.

Neprekidni vremenski signali označavaju se sa $f(t), g(t)$ i sličnim oznakama. Dok se diskretni vremenski signali označavaju sa $f[n], g[n]$ i slično.

Diskretni vremenski signali $f[n]$, gde je $n \in \mathbb{Z}$, se dobijaju kao vrednosti neprekidnih signala $f(t)$ u određenim trenucima što je ilustrovano na Slici 3. Vremenski interval između dve uzastopno odabrane vrednosti naziva se period uzorkovanja.

Posebnu klasu signala čine periodični signali. Oni se mogu podeliti na:

- periodične neprekidne signale i
- periodične diskretne signale.

Definicija 1.1. Neprekidni vremenski signal $f(t)$ je periodičan sa periodom $T > 0$ ako je $f(t + T) = f(t)$ za $t \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.2. Diskretni vremenski signal $f[n]$ je periodičan sa periodom $N \in \mathbb{N}$ ako je $f[n + N] = f[n]$ za $n \in \mathbb{Z}$.

Signal koji nije periodičan zove se **aperiodičan** signal. Međutim, aperiodičan signal se može posmatrati kao deo periodičnog signala čiji period je beskonačne dužine.

Posebno važnu klasu periodičnih signala predstavljaju **sinusoidni signali**.

Definicija 1.3. Sinusoidni signali su realni signali koji imaju sledeću formu:

- $f(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ u neprekidnom slučaju,

- $f[n] = A \cos(\omega n + \phi_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $N = \frac{2\pi}{\omega}$ u diskretnom slučaju,

gde je A amplituda, ω frekvencija, a ϕ_0 je početna vrednost signala.

Sledeća važna podela signala je na:

- kauzalne i
- nekauzalne signale.

Definicija 1.4. Neprekidni vremenski signal $f(t)$ zove se kauzalni ako je $f(t) = 0$ za $t < 0$

Definicija 1.5. Diskretni vremenski signal $f[n]$ se zove kauzalni ako je $f[n] = 0$ za $n < 0$

Napomena: Periodični signali nisu kauzalni. Izuzetak je nula-signal.

1.2 Furijeov red

Definicija 1.6. Neka je $f(t)$ periodična funkcija sa periodom T i frekvencijom $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Tada je Furijeov red signala $f(t)$ definisan sa

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

gde su

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Furijeovi koeficijenti.

Razvoj neprekidne funkcije u Furijeov red je jedinstven, ali se može prikazati i na način koji je u nekim slučajevima jednostavniji za korišćenje. Da bi se taj zapis mogao definisati prvo se treba podsetiti Ojlerove ² formule i osobina kompleksnih brojeva. Dobija se

²Ojlerova formula: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ gde je $i = \sqrt{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} - b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t} \right)
\end{aligned}$$

Ukoliko se uvede smena $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ i $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ dobija se Furijeov red

$$\begin{aligned}
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}
\end{aligned}$$

Dakle, dobijen je drugačiji zapis Furijeovog reda koji umesto koeficijenata a_n i b_n koristi koeficijent c_n . Često se ovaj zapis naziva kompleksan Furijeov red, a njegov odgovarajući koeficijent se zove kompleksan Furijeov koeficijent i može se predstaviti i na sledeći način.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Furijeova transformacija

Neka je $G(\mathbb{R})$ familija funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ koje su po delovima neprekidne i apsolutno integrabilne. Tada se može uvesti definicija Furijeove transformacije.

Definicija 1.7. Neka je data funkcija $f \in G(\mathbb{R})$. Furijeova transformacija funkcije f je definisana sa:

$$F(\omega) = F(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Ova definicija se može zapisati na nekoliko različitih načina. Sasvim je svejedno koji se zapis koristi jer su oni međusobno ekvivalentni. Na primer,

Furijeova transformacija se može zapisati i pomoću sinusnih i kosinusnih talasa, na sličan način kako je to urađeno u definiciji Furijeovih redova:

$$F(\omega) = F(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) dt \cos(2\pi\omega t) + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\omega) dt \sin(2\pi\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Sada slede teoreme koje opisuju osobine Furijeove transformacije. Prvo se razmatra linearnost.

Teorema 1.1. Neka su $f(t)$ i $g(t)$ dve funkcije iz $G(\mathbb{R})$ čije su odgovarajuće Furijeove transformacije $F(\omega)$ i $G(\omega)$. Tada je Furijeova transformacija funkcije $af(t) + bg(t)$ jednaka $aF(\omega) + bG(\omega)$.

Dokaz: Ova teorema se pokazuje pomoću osobina integracije. Dakle, Furijeova transformacija funkcije $af(t) + bg(t)$ se može zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-2\pi i \omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} af(t) e^{-2\pi i \omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} bg(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= aF(\omega) + bG(\omega), \end{aligned}$$

čime je teorema dokazana. ■

Teorema koja sledi tiče se Furijeove transformacije konjugovanog signala.

Teorema 1.2. Neka je data funkcija $f(t) \in G(\mathbb{R})$ čija je odgovarajuća Furijeova transformacija $F(\omega)$. Tada je Furijeova transformacija funkcije $\overline{f(t)}$ data sa $\overline{F(-\omega)}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} F(\overline{f(t)})(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i \omega t} dt} \\ &= \overline{F(-\omega)} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.3. Neka je data funkcija $f(t) \in G(\mathbb{R})$ čija je odgovarajuća Furijeova transformacija $F(\omega)$. Tada za fiksirano $r \in \mathbb{R}$ važi

$$F(f(t-r))(\omega) = e^{-2\pi i \omega r} F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} F(f(t-r))(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-r) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i \omega (s+r)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i \omega s} e^{-2\pi i \omega r} ds \\ &= e^{-2\pi i \omega r} F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

Opisana osobina zove se pomeranje u vremenskom domenu. Postoji takođe i pomeranje u frekvencijskom domenu. Ova osobina opisuje se teoremom koja sledi.

Teorema 1.4. Neka je data funkcija $f(t)$ čija je odgovarajuća Furijeova transformacija $F(\omega)$. Tada za fiksirano $r \in \mathbb{R}$ važi

$$F(e^{2\pi i r t} f(t))(\omega) = F(\omega - r), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} F(\omega - r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i (\omega - r) t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} e^{2\pi i r t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i r t} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= F(e^{2\pi i r t} f(t))(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Sledeće dve teoreme tiču se diferenciranja.

Teorema 1.5. Neka je data neprekidna diferencijabilna funkcija $f(t) \in G(\mathbb{R})$ čija je odgovarajuća Furijeova transformacija $F(\omega)$ i neka je $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$. Tada Furijeova transformacija od $f'(t)$ postoji i važi

$$F(f'(t))(\omega) = 2\pi i \omega F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Dokaz: Koristeći osobine diferenciranja i $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ dobija se

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow \infty} \int_A^B f'(t) e^{-2\pi i \omega t} dt &= \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow \infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} \Big|_A^B + \\ &+ \lim_{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow \infty} 2\pi i \omega \int_A^B f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= 2\pi i \omega F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.6. Neka je data funkcija $f(t) \in G(\mathbb{R})$ čija je odgovarajuća Furijeova transformacija $F(\omega)$. Ako je funkcija $tf(t)$ apsolutno integrabilna tada je $F(\omega)$ diferencijabilna i važi

$$F'(\omega) = -F(2\pi i t f(t))(\omega)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\omega + h) - F(\omega)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{-2\pi i(\omega+h)t} - e^{-2\pi i \omega t}}{h} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i h t} \frac{e^{-2\pi i(\omega+h)t} - 1}{h} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i t f(t)) e^{-2\pi i \omega t} dt \end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i h t} - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(2\pi h t) - 1}{h} - i \frac{\sin(2\pi h t)}{h} \right) \\ &= -i 2\pi t \end{aligned}$$

■

Naravno, postoji još puno osobina Furijeove transformacije koje bi se mogle razmatrati, ali za potrebe ovog rada navedene su samo one koje će se pojaviti i u slučaju diskretne Furijeove transformacije ili z-transformacije.

1.4 Poasonova formula

Poasonova formula daje elegantnu vezu između Furijeovih redova i Furijeove transformacije.

Neka je funkcija f apsolutno integrabilna. Neka je dato $L > 0$. Tada je funkcija

$$f_\sigma(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + nL)$$

periodična sa periodom L .

Poasonova formula data je sledećom teoremom.

Teorema 1.7. Neka je data funkcija $f \in G(\mathbb{R})$ takva da je:

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-p}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|F(f)(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-p}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

za neke konstante $p > 1$ i $C > 0$. Tada, za zadato $L > 0$ važi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + nL) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Formula važi tačkasto za sve $x \in \mathbb{R}$ i obe sume su apsolutno konvergentne.

Dokaz: Neka je funkcija g periodična funkcija sa periodom $L > 0$. Tada njen Furijeov red u kompleksnom obliku glasi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}},$$

gde je $c_n = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Prema tome, za $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + kL)$ važi

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + kL) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx$$

Koristeći pretpostavke o funkciji f koje dozvoljavaju zamenu sumiranja i integracije dobija se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^L f(x + kL) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} dx \\ &= \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kL}^{(k+1)L} f(y) e^{\frac{-2\pi i n x}{L}} e^{-2\pi i n k} dx \end{aligned}$$

Kako je $e^{-2\pi ink} = 1$ za sve $k, n \in \mathbb{N}$ dobija se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-2\pi inx}{L}} dx \\ &= \frac{2\pi}{L} F\left(\frac{2\pi n}{L}\right), n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Na osnovu jedinstvenosti razvoja funkcije u Furijeov red dobija se traženo tvrđenje. ■

1.5 Uzorkovanje neprekidnih vremenskih signala

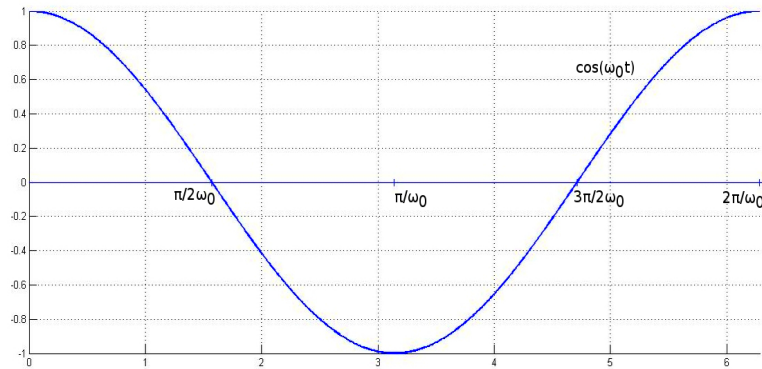
Sada će se navesti neki diskretni vremenski signali, koji su veoma slični neprekidnim vremenskim signalima.

Neka je dat neprekidni vremenski signal $f(t)$ i broj $T > 0$. Tada se diskretni vremenski signal može definisati sa $f[n] = f(nT)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Signal $f[n]$ definisan na ovaj način zove se uzorkovanje od signala $f(t)$ u tačkama $0, \pm T, \pm 2T, \dots$. Broj $T > 0$ zove se period uzorkovanja, $\frac{1}{T}$ je frekvencija uzorkovanja, a $f(nT)$ predstavlja uzorke uzorkovanja.

U daljem razmatranju će se koristiti prvenstveno ugaona frekvencija tj. frekvencija uzorkovanja ω_s data sa $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Primer 1.2. Neka je dat signal $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ gde je ω_0 data pozitivna frekvencija. Sada će se posmatrati uzorkovanje ovog signala sa različitim frekvencijama uzorkovanja. Dobijaju se sledeći diskretni vremenski signali:

- Za frekvenciju $\omega_s = \omega_0$ dobija se diskretni vremenski signal $f[n] = f(nT) = \cos\left(\frac{2\pi nT}{T}\right) = \cos(2\pi n) = 1$.
- Za frekvenciju $\omega_s = 2\omega_0$ dobija se diskretni vremenski signal $f[n] = f(nT) = \cos\left(\frac{2\pi nT}{2T}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Ovde treba primetiti da se za zadatu frekvenciju dobija *periodični* diskretni vremenski signal sa periodom $N = 2$
- Za frekvenciju $\omega_s = 4\omega_0$ dobija se diskretni vremenski signal $f[n] = f(nT) = \cos\left(\frac{2\pi nT}{4T}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Opet je periodični diskretni vremenski signal sa periodom $N = 4$ što je ilustrovano na slici 4
- Za frekvenciju $\omega_s = \pi\omega_0$ dobija se diskretni vremenski signal $f[n] = \cos(2n)$. Ovde, za razliku od prethodnog primera, iako je signal $f(t)$ periodičan, uzorkovanje nije periodično.



Slika 4: Uzorkovanje od $\cos(\omega_0 t)$ sa frekvencijom $4\omega_0$

□

Pod pojmom elementarni signal smatra se diskretni jedinični impuls $\delta[n]$, koji se naziva i Kronekerova delta, koja je definisana na sledeći način:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 0, \\ 0 & \text{za } n \neq 0. \end{cases}$$

Teorema koja sledi daje jednu lepu osobinu da proizvoljan diskretni vremenski signal može biti napisan kao suma pomerenih elementarnih signala.

Teorema 1.8. Za proizvoljan diskretni vremenski signal $f[n]$ važi:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\delta[n-k] \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

Dokaz: Za dokaz ove teoreme dovoljno je primetiti da su u beskonačnoj sumi sa desne strane jednakosti svi izrazi jednaki nuli, osim za $k = n$. U tom slučaju desna strana jednakosti jednaka je $f[n]$ i teorema je pokazana.

■

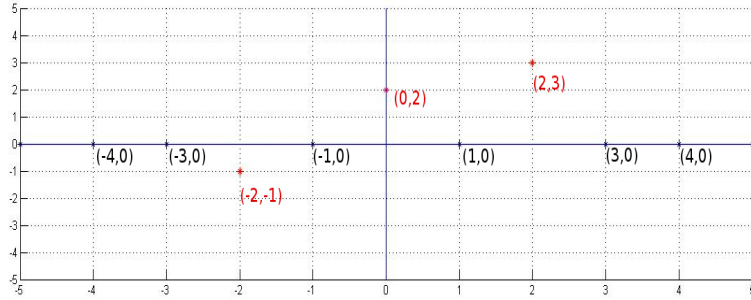
Primer 1.3. Koristeći prethodnu teoremu, signal $f[n]$ definisan sa

$$f[n] = \begin{cases} 3 & \text{za } n = 2 \\ 2 & \text{za } n = 0 \\ -1 & \text{za } n = -2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

može se drugačije zapisati sa

$$f[n] = f[2]\delta[n-2] + f[0]\delta[n] - f[-2]\delta[n+2] \\ 3\delta[n-2] + 2\delta[n] - \delta[n+2]$$

Očigledno, ostali elementi sume su jednaki nula. Dati signal predstavljen je na slici 5.



Slika 5: Signal $f[n] = 3\delta[n - 2] + 2\delta[n] - \delta[n + 2]$

□

Sada će se uvesti pojam periodičnog niza pojedinačnih impulsa ili Dirakov češalj.

Definicija 1.8. Neka je $N > 0$. Periodični niz pojedinačnih impulsa $\delta_N[n]$ sa periodom N je dat sa

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{kada } n = aN \text{ za } a \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

i zove se Dirakov češalj.

Primer 1.4. Na slici 6 prikazan je grafik od

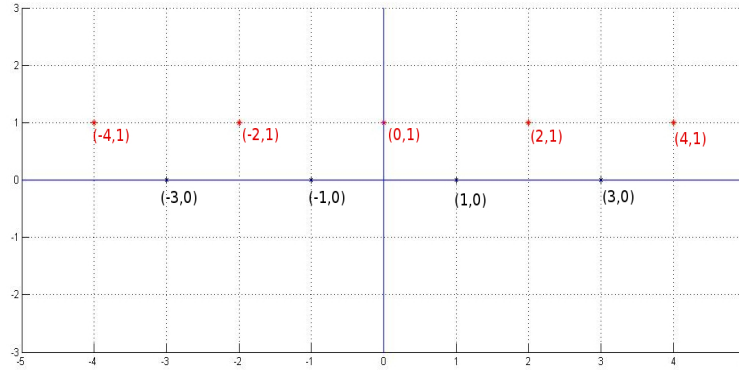
$$\delta_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{kada } n = 2a \text{ za } a \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

□

U nastavku će se izraziti periodični signal sa periodom N kao pomereni niz impulsa pojedinačnih jedinica.

Teorema 1.9. Neka je $f[n]$ periodičan diskretan vremenski signal sa periodom N . Tada važi

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]\delta_N[n - k] \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$



Slika 6: Periodični niz pojedinačnih impulsa $\delta_2[n]$

Dokaz: Potrebno je primetiti da na desnoj strani gornje sume, svaki od termina predstavlja periodičan signal sa periodom N . Dakle, i sama suma takođe predstavlja periodični signal sa periodom N . Zato je dovoljno samo pokazati jednakost za vrednosti $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Ali ovo odmah sledi iz definicije $\delta_N[n]$.

■

Dalje, sledi definicija Hevisajdove funkcije.

Definicija 1.9. Neka je n diskretna promenljiva. Hevisajdova funkcija ili jedinična odskočna funkcija $\epsilon[n]$ je definisana sa

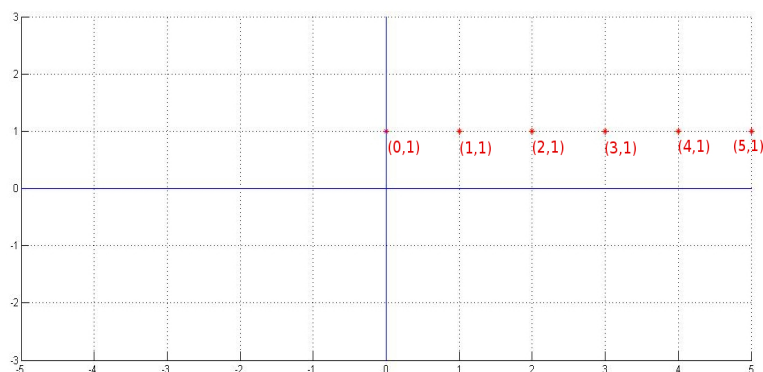
$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

gde $n \in \mathbb{Z}$

Pomenuta funkcija ima vrednost nula za sve negativne vrednosti i vrednost jedan za sve pozitivne vrednosti argumenta n . Treba primetiti da je ova funkcija u stvari suma Kronekerovih delta funkcija tj.

$$\epsilon[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

Signal $\epsilon[N]$ je tako primer kauzalnog signala. Naime, ako je $f[n]$ proizvoljan diskretni vremenski signal, tada je signal $f[n]\epsilon[N]$ kauzalni signal koji se podudara sa signalom $f[n]$ za $n \geq 0$.



Slika 7: Diskretna funkcija koraka jedinice $\epsilon[n]$

1.6 Rekonstrukcija neprekidnih vremenskih signala

Prilikom uzorkovanja odnosno pretvaranja neprekidnog vremenskog signala u diskretni vremenski signal dolazi do greške odnosno do gubitka informacija. Ovaj gubitak ili greška svodi se na nulu ukoliko je moguće od diskretnog vremenskog signala opet dobiti početni neprekidni vremenski signal. Ovaj proces se zove rekonstrukcija.

Postoji nekoliko različitih metoda rekonstrukcije. Razmatra se metod koji koristi linearnu interpolaciju.

Neka je zadato uzorkovanje $f[n] = f(nT)$. Pomoću linearne interpolacije dobija se neprekidni vremenski signal $f_r(t)$ koji ima sledeće osobine:

- $f(nT) = f[n]$ za sve $n \in \mathbb{Z}$
- Grafik od $f_r(t)$ između dve uzastopne tačke nT i $(n+1)T$ je prava linija

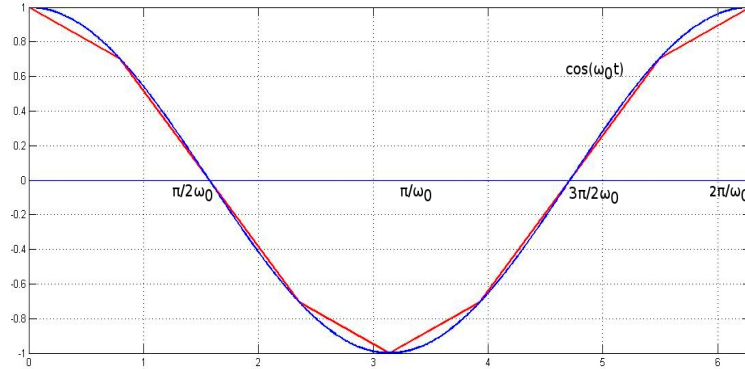
Dakle, vrednosti $f_r(t)$ za neko $t \in (nT, (n+1)T)$ su dobijene linearnom interpolacijom od vrednosti $f[n]$ i $f[n+1]$

Na primer, rekonstrukcija već pomenutog periodičnog signala $\cos(\omega_0 t)$ za frekvenciju uzorkovanja $\omega_s = 4\omega_0$ daje signal prikazan na slici 8

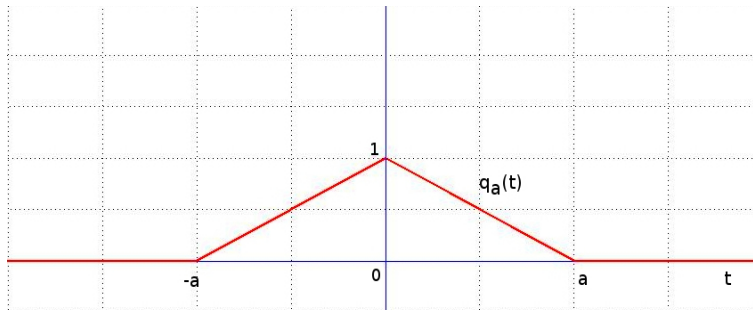
Sada će se uvesti pojam trougaone funkcije. Kao što joj i ime kaže njen grafik je u obliku trougla i prikazan je na slici 9. Ova funkcija je bitna jer predstavlja idealan signal u smislu njegove rekonstrukcije.

Definicija 1.10. Neka je dato fiksirano $a > 0$. Trougaona funkcija $q_a(t)$ visine 1 i osnovice $2a$ definiše se sa

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{za } |t| \leq a \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 8: Rekonstrukcija nakon uzorkovanja signala $\cos(\omega_0 t)$



Slika 9: Trougaona funkcija sa visinom 1 i osnovicom $2a$

Trougaona impulsna funkcija $q_T(t)$ predstavlja aproksimaciju grafika pojedinačnog impulsa. Drugim rečima, to je linearna interpolacija Kronekerove delte.

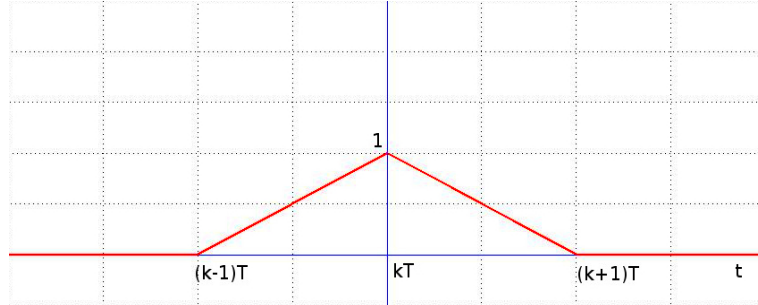
Dakle, signal $f_r(t)$ dobijen linearnom interpolacijom od uzorkovanja $f[n]$ može se napisati kao superpozicija triangularnih impulsa. Ovaj signal se takođe javlja i kao rekonstrukcija dobijena linearnom interpolacijom impulsa diskretne jedinice $\delta[n]$ sa periodom uzorkovanja T .

Pomereni signal $q_T(t - kT)$ se može smatrati rekonstrukcijom od $\delta[n - k]$. Na osnovu teoreme 1.8 je

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \delta[n - k]$$

U nastavku će se pokazati da se rekonstrukcijom proizvoljnog signala $f(t)$ linearnom interpolacijom dobija slična veza.

Teorema 1.10. Neka je $f[n]$ uzorkovanje od $f(t)$ sa periodom uzorkovanja T . Neka je $f_r(t)$ neprekidni vremenski signal dobijen linearnom interpolacijom



Slika 10: Trougaona impulsna funkcija $q_T(t)$ kao linearna interpolacija impulsa pojedinačne jedinice sa periodom uzorkovanja T

od $f[n]$. Tada važi:

$$f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]q_T(t - kT)$$

Dokaz: Treba pokazati da grafik od $f_r(t)$ predstavlja liniju između tačaka $(nT, f(nT))$ i $((n+1)T, f((n+1)T))$ na nekom intervalu $I = [nT, (n+1)T]$.

Na datom intervalu su samo $q_T(t - kT)$ za $k = n$ i $k = n+1$ različiti od nule.

Dakle, za $t \in I$ ostaje

$$f_r(t) = f[n]q_T(t - nT) + f[n+1]q_T(t - (n+1)T)$$

pa je grafik od $f_r(t)$ prava linija na intervalu I .

Dalje,

$$f_r(nT) = f[n]q_T(0) + f[n+1]q_T(-T) = f[n]$$

$$f_r((n+1)T) = f[n]q_T(T) + f[n+1]q_T(0) = f[n+1]$$

čime je pokazana teorema. ■

Primer 1.5. Neka je dat signal $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ gde je $\omega_0 > 0$. Kada se dati signal uzorkuje sa frekvencijom uzorkovanja $\omega_s = 4\omega_0$ i potom rekonstruiše linearnom interpolacijom dobija se sledeći $f_r(t)$ signal:

$$f_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q_T(t - 2kT),$$

jer

$$f[k] = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{za } k \text{ neparno}$$

$$f[k] = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k, \quad \text{za } k \text{ parno.}$$

□

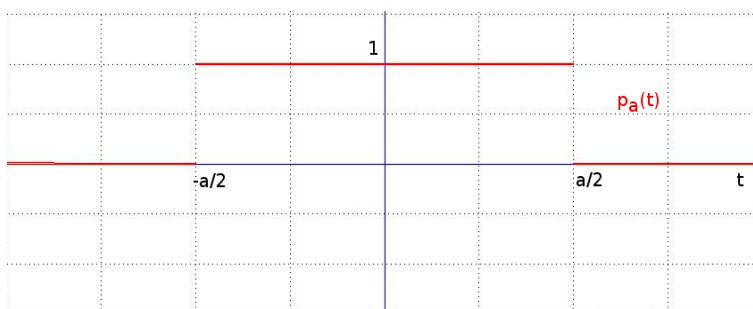
Dakle, može se zaključiti da se pomoću linearne interpolacije može dobiti lepa aproksimacija funkcije $f(t)$ ukoliko je frekvencija uzorkovanja dovoljno velika (slika 8).

Nedostatak ove metode je činjenica da grafik signala $f_r(t)$ može imati oštre krivine pri $t = nT$, što će se odraziti na visokofrekventnim komponentama u spektru $f_r(t)$. Ove visokofrekventne komponente se uopšte ne mogu pojaviti u spektru originalnog signala $f(t)$.

Sada treba definisati pravougaonu funkciju.

Definicija 1.11. Neka je dato fiksirano $a > 0$. Pravougaona impulsna funkcija $p_a(t)$ visine 1 i osnovice a definisana je sa:

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$



Slika 11: Pravougaona funkcija sa visinom 1 i osnovicom a

Neka je $f(t)$ neprekidni vremenski signal. Njegovom rekonstrukcijom dobija se formula

$$f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] p_T(t - kT).$$

Ova formula se zove *interpolacija nultog reda*.

1.7 Šenonova teorema o uzorcima

Po teoremi koja sledi, pod uslovom da su ispunjeni određeni uslovi, moguće je bez greške rekonstruisati vrednosti funkcije u svakoj tački na osnovu poznatih vrednosti u nizu uzoraka. Uslov pod kojim ovo važi jeste da je funkcija ograničenog opsega sa frekvencijom L . Dakle, prvo se mora definisati signal ograničenog opsega.

Definicija 1.12. Signal f je vremenski ograničen ako postoji konstanta M takva da je $f(t) = 0$ za svako $|t| \geq M$.

Definicija 1.13. Signal $f(t)$ sa spektrom $F(\omega)$ je ograničenog opsega ako postoji konstanta L takva da je $F(f)(\omega) = 0$ za svako $|\omega| > L$.

Teorema 1.11. Neka je $f(t)$ ograničenog opsega, neka za njenu Furijeovu transformaciju važi $F(f)(\omega) = 0$ za svako $|\omega| > L$ i neka je $f[n]$ uzorkovanje od $f(t)$ sa frekvencijom uzorkovanja ω_s . Tada za svako $\omega_s > 2L$ važi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \frac{2\sin(\omega_s(t - nT)/2)}{\omega_s(t - nT)}, \quad \text{za } t \in \mathbb{R}$$

pri čemu je $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$

Dokaz: Prvo, neka je data periodična funkcija $F_s(\omega)$ sa periodom ω_s i frekvencijom $\frac{2\pi}{\omega_s} = T$

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s)$$

Treba primetiti da kada je $\omega_s > 2L$ tada je funkcija $F_s(\omega)$ produžetak funkcije $F(\omega)$ sa periodom ω_s . Dakle, $F_s(\omega) = F(\omega)$ za $\omega \in (-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$.

Dalje, pomoću Poasonove formule dobija se:

$$F_s(\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT)e^{inT\omega} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-inT\omega}$$

Potom, množenjem funkcije $F_s(\omega)$ sa pravougaonim impulsom $p_{\omega_s}(\omega)$ dobija se nova funkcija $F_r(\omega) = F_s(\omega)p_{\omega_s}(\omega)$.

Dalje, važi

$$\frac{\sin(\omega_s t/2)}{\pi t} \leftrightarrow p_{\omega_s}(\omega)$$

to jest

$$\frac{\sin(\omega_s(t - nT)/2)}{\pi(t - nT)} \leftrightarrow e^{-in\omega T} p_{\omega_s}(\omega)$$

pa je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{2\sin(\omega_s(t - nT)/2)}{\omega_s(t - nT)} \leftrightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-in\omega T} p_{\omega_s}(\omega)$$

što se označa sa

$$f_r(t) \leftrightarrow F_r(\omega)$$

gde je

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \frac{2\sin(\omega_s(t - nT)/2)}{\omega_s(t - nT)}.$$

Po ranijem razmatranju, ako važi $\omega_s > 2L$ onda je $F_s(\omega) = F(\omega)$ na intervalu $(\frac{-\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$. Odnosno važi da je $F(\omega) = F_s(\omega)p_{\omega_s}(\omega)$ za sve ω . A sada će se pokazati da ako važi $\omega_s > 2L$ onda je i $f_r(t) = f(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$. Da ovo zaista važi sledi iz jedinstvenosti Furijeove transformacije. ■

Drugim rečima, kada neprekidni vremenski signal $f(t)$ ne sadrži frekvencije veće od L , to jest, ako je ograničenog opsega, tada u uzorkovanju sa frekvencijom uzorkovanja $\omega_s > 2L$ nema gubitka informacija. Pa je, prema teoremi 1.11, funkcija $f(t)$ u potpunosti određena svojim vrednostima u nizu ekvidistantnih tačaka sa rastojanjem manjim od $\frac{\pi}{L}$ između susednih tačaka. Ovo znači da se ova funkcija može u celosti rekonstruisati od vrednosti $f[n]$, odnosno, da je signal $f(t)$ jedinstveno određen uzorkovanjem $f[n]$.

Uslov $\omega_s > 2L$ zove se uslov uzorkovanja. Nameće se pitanje - zašto baš taj uslov? Odgovor na ovo pitanje dobija se posmatrajući $\omega_s = 2L$. Naime, signal $f(t) = \sin(Lt)$ ima spektar $F(\omega) = \frac{\pi}{i}(\delta(\omega - L) - \delta(\omega + L))$. Ovaj signal je ograničenog opsega $F(\omega) = 0$ za $|\omega| > L$. Kada se ovaj signal uzorkuje sa frekvencijom uzorkovanja $\omega_s = 2L$ dobija se $f[n] = \sin(nLT) = \sin(2n\pi L/\omega_s) = \sin(n\pi) = 0$. Dakle, uzorkovanje $f[n]$ je jednako uzorkovanju nula signala. Međutim, kako je nula signal takođe ograničenog opsega to znači da signal $f(t)$ nije jednoznačno određen uzorcima. Dakle, potrebno je koristiti veću frekvenciju uzorkovanja.

Definicija 1.14. Neka je $L > 0$ najmanja frekvencija za koju važi $F(\omega) = 0$ za $|\omega| > L$. Tada se frekvencija $2L$ naziva Najkvistova frekvencija.

Ako je frekvencija uzorkovanja veća od Najkvistove frekvencije onda se $f(t)$ može u potpunosti rekonstruisati od uzorkovanja $f[n]$. Na žalost, u praksi je retko zadovoljen uslov $\omega_s > 2L$. Problemi koji proizlaze iz toga se nazivaju aliasing problemi.

1.8 Aliasing

Aliasing je pojava koja može da se javi kada je signal ređe uzorkovan. Retko uzorkovanim signalima smatraju se oni čija je frekvencija uzorkovanja sporija

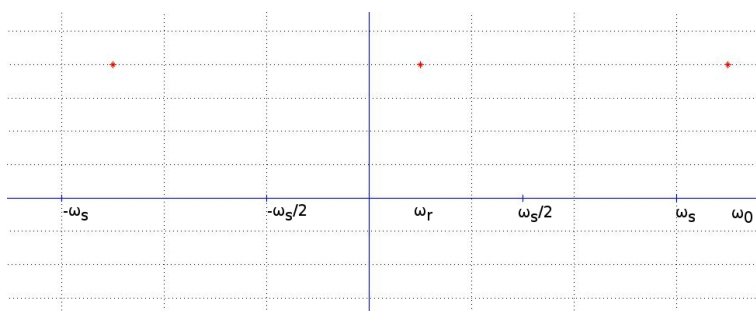
U ovom slučaju, nije moguće rekonstruisati originalni signal na jedinstven način. Na primer, sinusoidni signal uzorkovan u intervalima $a, 2\pi + a, 4\pi + a, \dots$ daće skup uzoraka koji su identični. To su, u stvari, "udarci" između frekvencije i brzine uzorkovanja.

Ukoliko uslov za uzimanje uzoraka nije zadovoljen, odnosno $\omega_s < 2\omega_0$. Može se utvrditi koja frekvencija se posmatra pomoću dokaza teoreme 1.11. U dokazu teoreme spektar rekonstruisanog signala $f_r(t)$ je dat sa

$$f_r(t) \leftrightarrow F_r(\omega) = F_s(\omega)p_{\omega_s}(\omega)$$

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - k\omega_s).$$

Problem koji se na ovaj način dobija jeste već pomenuti aliasing. Ovo je ilustrovano na slici 12. Pomeranjem za rastojanje $k\omega_s$, komponenta frekvencije sa frekvencijom ω_0 završava u intervalu I na poziciji ω_r . Rekonstruisani signal je signal koji sadrži samo frekvenciju ω_r .



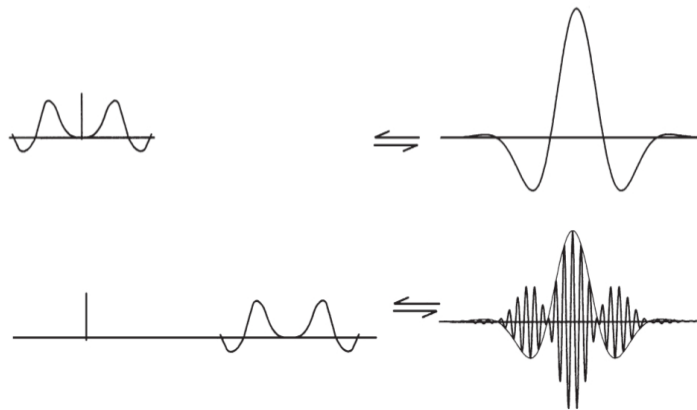
Prilikom ispitivanja signala, treba preduzeti mere opreza kako bi bili sigurni da nema poklapanja frekvencija. Ovo se može učiniti na dva načina:

- Merenjem na različitim uzorcima i povećavanjem frekvencije uzorkovanja na svim uzorcima kod kojih se uočio aliasing.
- Namernim filtriranjem dolaznog signala pomoću antialiasing filtera.

Antialiasing filteri služe da ograniče opseg signala, pre njegovog uzorkovanja. Na ovaj način se zadovoljavaju uslovi Šenonove teoreme o uzorcima. U praksi, kod uzorkovanja zvuka na primer, prvo će se signal pustiti kroz slabo propusni filter sa prekidnom frekvencijom. To znači da će najveća frekvencija koja će proći kroz filter biti jednaka polovini frekvencije uzorkovanja. Na ovaj način izbegava se mogućnost "curenja" visokofrekventnih komponenti koje su prisutne u originalnom signalu.

Teorija dozvoljava postojanje takvih filtera, ali se problemi javljaju pri njihovoj konstrukciji. Naime, ne mogu se konstruisati idealni antialiasing filteri jer se često javlja takozvano curenje visokih frekvencija.

Ipak, aliasing se može iskoristiti. Ako se interval frekvencije proteže od ω_0 do ω_1 , onda se prazni deo intervala frekvencije između ω_0 i 0 može podeliti na nekoliko jednakih intervala frekvencije koji su svi manji od $2(\omega_1 - \omega_0)$. Interval uzorkovanja tada treba da bude samo $\frac{1}{[2(\omega_1 - \omega_0)]}$ umesto $\frac{1}{2\omega_1}$. Ovo je način demodulacije signala, odnosno na ovaj način se iz originalnog signala više frekvencije izdvaja "manji" korisni signal. Ovaj proces je ilustrovan na slici.



Slika 13: Demodulacija signala

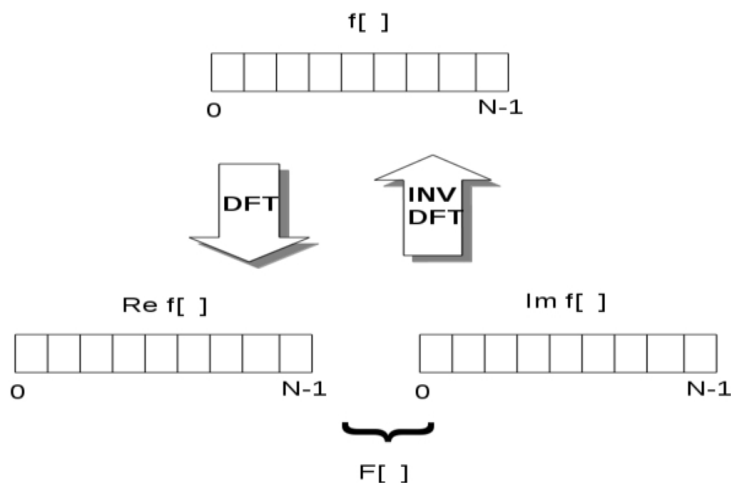
2 Diskretna Furijeova transformacija, primene i algoritmi

U ovom delu rada proučavaće se transformacije koje pretvaraju diskretni vremenski signal direktno u domen frekvencije. Odnosno posmatraće se diskretne Furijeove transformacije. Korišćena je literatura [1], [2], [3], [5], [6] i [7].

2.1 Diskretna Furijeova transformacija

Diskretna Furijeova transformacija, ili kraće DFT, pretvara signal od N uzoraka u signal koji se sastoji od dva dela sa po N uzoraka. Signal koji se transformiše zove se *ulazni* i nalazi se u vremenskom domenu, a signali koji nastaju zovu se *izlazni* signali koji se nalaze u frekvencijskom domenu.

Ulazni signal je u vremenskom domenu jer je posmatrani signal uzorkovan u redovnim intervalima vremena. On sadrži signal koji se razlaže, dok dva izlazna signala sadrže amplitudu komponente sinusnog i kosinusnog talasa. Izraz frekvencijski domen se koristi za opis ovih amplituda.



Slika 14: Šematski prikaz diskretne Furijeove transformacije

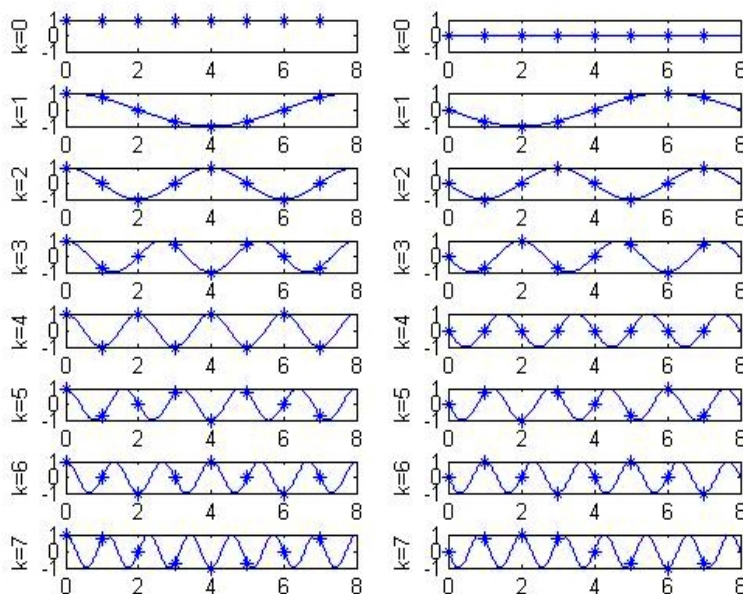
U vremenskom i frekvencijskom domenu se nalaze iste informacije, samo u drugoj formi. Ako je poznat vremenski domen $f[n]$, može se izračunati frekvencijski $F[n]$, što se naziva razlaganje. Moguće je i obrnuto, odnosno

izračunavanje vremenskog domena od frekvencijskog tj. inverzija o kojoj će biti reči kasnije. Ovo je ilustrovano na slici 14.

Broj uzoraka u vremenskom domenu određen je promenljivom N koja predstavlja bilo koji pozitivan broj. Kako se za digitalno čuvanje i obradu podataka koristi binarni zapis često se za N uzima broj koji je neki stepen broja dva.

Dakle, diskretna Furijeova transformacija funkcioniše na sledeći način: Neka je signal od N uzoraka vremenskog domena sadržan u $f[n]$. Frekvencijski domen ovog signala sastoji se od dva dela, realnog dela $Ref[n]$ i imaginarnog dela $Imf[n]$. Oba dela sastoje se od N uzoraka. Vrednosti realnog dela $Ref[n]$ su amplitude kosinusnih talasa, dok su vrednosti imaginarnog dela $Imf[n]$ amplitude sinusnih talasa. Ovo je ilustrovano na sledećem primeru.

Primer 2.1. Neka je dat periodičan diskretni vremenski signal $f[n]$ čiji period je $N = 8$. Kada se ovaj signal transformiše koristeći DFT dobije se 8 kosinusnih i 8 sinusnih talasa. Ovo je ilustrovano na slici 15.



Slika 15: Kosinusni i sinusni talasi koji odgovaraju transformaciji signala perioda $N = 8$

Konačno, sledi definicija diskretne Furijeove transformacije.

Definicija 2.1. Neka je $f[n]$ periodičan diskretan vremenski signal sa periodom N . Diskretna Furijeova transformacija od $f[n]$ je

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi i n k / N} \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}$$

Pri tome je na osnovu Ojlerove formule

$$e^{-2\pi i n k / N} = \cos(2\pi n k / N) - i \sin(2\pi n k / N).$$

Primer 2.2. Neka je dat diskretan vremenski signal

$$f[n] = \delta_N[n+1] - \delta_N[n] + \delta_N[n-1]$$

gde je $\delta_N[n]$ periodični niz pojedinačnih impulsa definisan u definiciji 1.8 iz Uvoda. Diskretna Furijeova transformacija ovog signala se dobija na sledeći način

$$\begin{aligned} F[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\delta_N[n+1] - \delta_N[n] + \delta_N[n-1]) e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n+1] e^{-2\pi i n k / N} - \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] e^{-2\pi i n k / N} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n-1] e^{-2\pi i n k / N} \\ &= e^{-2\pi i (N-1)k / N} - 1 + e^{-2\pi i k / N} \\ &= \cos(-2\pi (N-1)k / N) + i \sin(-2\pi (N-1)k / N) - 1 \\ &\quad + \cos(-2\pi k / N) + i \sin(-2\pi k / N) \end{aligned}$$

□

Očigledno je da je $F[k]$ periodična sa periodom N . Dakle, ako se $F[k]$ posmatra kao diskretni periodični signal može se reći da diskretna Furijeova transformacija pretvara periodični diskretni signal u periodični diskretni signal koji ima isti period. Lema koja sledi u nastavku pokazaće da taj period ne mora striktno ići od 0 do $N-1$. Odnosno da suma može da ide od bilo kog celog broja j do $j+N-1$.

Lema 2.1. Neka je $f[n]$ periodični diskretni signal sa periodom N . Tada, za svako $j \in \mathbb{Z}$ važi:

$$\sum_{n=j}^{j+N-1} f[n] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n].$$

Dokaz: Neka su $l, m \in \mathbb{Z}$ takvi da važi $j = mN + l$, gde je $0 \leq l \leq N - 1$. Na ovaj način l i m su jedinstveno određeni. Kako je $f[n]$ periodična važi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{j+N-1} f[n] &= f[j] + f[j+1] + \dots + f[j+N-1] \\ &= f[l] + \dots + f[N-1] + f[N] + \dots + f[N+l-1] \\ &= f[l] + \dots + f[N-1] + f[0] + \dots + f[l-1] \\ &= f[0] + f[1] + \dots + f[N-1] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \end{aligned}$$

čime je pokazana Lema. ■

Drugim rečima, ova Lema kaže da ako se vrednosti signala iz jednog celog perioda saberu zajedno, onda je ishod isti bez obzira na polaznu tačku ove sume u jednom celom periodu. Razlog zbog kojeg se ova Lema može primeniti na diskretne Furijeove transformacije je u tome što je opšti pojam u prikazu $F[k]$ kao suma periodičan, kao funkcija od n , sa periodom N .

Dato svojstvo će biti ilustrovano na sledećem primeru.

Primer 2.3. Neka je dat periodičan diskretni vremenski signal $f[n]$ sa

$$f[-2] = 1, f[-1] = 0, f[0] = 2, f[1] = 0.$$

Period ovog signala je $N = 4$. Diskretna Furijeova transformacija je u ovom slučaju

$$\begin{aligned} F[k] &= \sum_{n=-2}^1 f[n] e^{-2\pi i n k / N} \\ &= f[-2] e^{4\pi i k / 4} + f[-1] e^{2\pi i k / 4} + f[0] e^0 + f[1] e^{-2\pi i k / 4} \\ &= 1 \cdot e^{\pi i k} + 0 + 2 \cdot 1 + 0 \\ &= e^{\pi i k} + 2 \end{aligned}$$

Koristeći Ojlerovu formulu dobija se da je

$$e^{\pi i k} = \cos(\pi k) + i \sin(\pi k) = (-1)^k + 0.$$

Dakle, ovaj signal ima DFT $F[k] = (-1)^k + 2$. Ovde treba primetiti da je imaginarni deo dobijenog signala jednak nuli.

□

Pomenuta Lema takođe implicira da diskretne Furijeove transformacije za $N = 2M + 1$ mogu biti date sa:

$$F[k] = \sum_{n=-M}^M f[n] e^{-2\pi i n k / N}$$

Sada će se pokazati fundamentalna teorema diskretne Furijeove transformacije.

Teorema 2.1. Neka je $f[n]$ periodični diskretni vremenski signal sa periodom N . Neka je diskretna Furijeova transformacija data sa

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi i n k / N}$$

Tada, za svako $n \in \mathbb{Z}$ važi

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{2\pi i n k / N}$$

Dokaz: Teorema se pokazuje uvrštavanjem $F[k]$ u sumu na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{2\pi i n k / N} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] e^{2\pi i k(n-l)/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[l] \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i k(n-l)/N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f[l] \delta_N[n-l] \\ &= f(n) \end{aligned}$$

gde je $\delta_N[n-l] = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(n-l)/N}$

■

Ovde se koristi oznaka $\delta_N[n]$ jer važi

$$\begin{aligned}\delta_N[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i n k / N} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i n N / N}}{1 - e^{2\pi i n / N}} = 0 & \text{inače.} \end{cases}\end{aligned}$$

2.2 Povezanost analitičke Furijeove transformacije sa DFT

Po izgledu i funkciji, diskretna Furijeova transformacija je slična analitičkoj Furijeovoj transformaciji. Ovo se može pokazati polazeći od definicije 1.7 Furijeove transformacije i množenjem $f(x)$ sa funkcijom $\delta_a(x)$. Pri tome se pretpostavlja da je $f(x)$ zanemarljivo malo za sve x koji se ne nalaze u $[0, (N-1)a]$ jer tada Dirakov češalj ima N tačaka.

Dakle,

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_a(x) e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{a} [F(\omega) * \delta_{\frac{1}{a}}(\omega)]\end{aligned}$$

Koristeći osobine integrala dobija se:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} \delta_a(x - na) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} \delta_a(x - na) dx\end{aligned}$$

A kako u Dirakovom češlju ima samo N tačaka, suma je konačna.

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(na) e^{-2\pi i na \omega}$$

Sa druge strane, $\hat{F}(\omega)$ je periodična sa periodom $\frac{1}{a}$ pa važi:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= \frac{1}{a} [F(\omega) * \delta_{\frac{1}{a}}(\omega)] \\ &= \frac{1}{a} [F(\omega) + F(\omega + \frac{1}{a}) + F(\omega - \frac{1}{a}) + F(\omega + \frac{2}{a}) + F(\omega - \frac{2}{a}) + \dots]\end{aligned}$$

gde je prvi period od $\hat{F}(\omega)$ je isti kao kod analitičke funkcije $\frac{1}{a}F(\omega)$.

Neka ima n malih intervala od ω širine $\frac{1}{Na}$. U k -tom takvom intervalu, jednačina postaje

$$\begin{aligned}\hat{F}\left(\frac{k}{Na}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(na)e^{-2\pi ina(k/Na)} \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{k}{Na}\right)\end{aligned}$$

Odnosno, dobija se veza između analitičke Furijeove transformacije i DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-2\pi ink/N} = \frac{1}{a}F(k)$$

2.3 Osobine diskretne Furijeove transformacije

Neka je $f[n]$ diskretni vremenski signal. Tada se transformacija $f[n]$ i $F[k]$ označava sa:

$$f[n] \leftrightarrow F[k].$$

2.3.1 Linearnost

Neka važi

$$F_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f_1[n]e^{-2\pi ink/N}$$

i

$$F_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f_2[n]e^{-2\pi ink/N}$$

odnosno $f_1[n] \leftrightarrow F_1[k]$ i $f_2[n] \leftrightarrow F_2[k]$.

Tada za neke proizvoljne $a, b \in \mathbb{C}$ važi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} (af_1[n] + bf_2[n])e^{-2\pi ink/N} &= \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (af_1[n]e^{-2\pi ink/N} + bf_2[n]e^{-2\pi ink/N}) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} af_1[n]e^{-2\pi ink/N} + \sum_{n=0}^{N-1} bf_2[n]e^{-2\pi ink/N} \\
&= a \sum_{n=0}^{N-1} f_1[n]e^{-2\pi ink/N} + b \sum_{n=0}^{N-1} f_2[n]e^{-2\pi ink/N} \\
&= aF_1[k] + bF_2[k]
\end{aligned}$$

Drugim rečima, važi

$$af_1[n] + bf_2[n] \leftrightarrow aF_1[k] + bF_2[k]$$

Dakle, diskretna Furijeova transformacija je linearna transformacija.

Pri tome, $f_1[n]$ i $f_2[n]$ ne moraju imati period iste dužine. Neka su, na primer, N_1 i N_2 periodi koji odgovaraju $f_1[n]$ i $f_2[n]$ respektivno. Tada je maksimalna dužina perioda od $af_1[n] + bf_2[n]$ jednaka $\max\{N_1, N_2\}$. Ali, da bi $aF_1[k] + bF_2[k]$ imalo smisla, F_1 i F_2 moraju imati isti period. Ovo se može postići dodavanjem nula. Naime, neka je $N_1 < N_2$ tada se F_1 dobija kao zbir klasičnog DFT od $f_1[n]$ i $(N_2 - N_1)$ nula. Odnosno,

$$F_1[k] = \sum_{n=0}^{N_1-1} f_1[n]e^{-2\pi ink/N_2}, \text{ gde } k = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

2.3.2 Inverznost

Teorema 2.1 kaže da se signal $f[n]$ može rekonstruisati iz $F[k]$ odnosno da je transformacija koja pretvara $F[k]$ u $f[n]$ inverzna i zove se inverzna diskretna Furijeova transformacija.

Definicija 2.2. Neka je $F[k]$ diskretna Furijeova transformacija koja odgovara diskretnom vremenskom signalu $f[n]$. Tada

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{2\pi ink/N}$$

i zove se inverzna diskretna Furijeova transformacija.

Dakle, može se zaključiti da se periodični diskretni vremenski signal $f[n]$ može u potpunosti rekonstruisati iz njegovog diskretnog spektra $F[k]$. Ovo je ilustrovano na slici 14.

Primer 2.4. Neka je poznato $F[0] = 1$, $F[1] = 0$, $F[2] = 0$, $F[3] = 1$ i period $N = 4$. Treba naći odgovarajući diskretni vremenski signal $f[n]$ za $n = 0, 1, 2, 3$. Ovaj signal se dobija na sledeći način

$$\begin{aligned} f[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{2\pi i n k / N} \\ &= \frac{1}{4} (F[0] e^0 + F[1] e^{2\pi i k / 4} + F[2] e^{4\pi i k / 4} + F[3] e^{6\pi i k / 4}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 0 + 0 + e^{6\pi i k / 4}) = \frac{1}{4} (1 + \cos(3\pi k / 2) + i \sin(3\pi k / 2)) \end{aligned}$$

Dakle, traženi signal je određen sa $f[0] = \frac{1}{2}$, $f[1] = \frac{1-i}{4}$, $f[2] = 0$ i $f[3] = \frac{1+i}{4}$.

□

Dalje, ukoliko se zamene promenljive k i n dobija se:

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{2\pi i n k / N}.$$

A potom, ako se zameni k sa $-k$ dobija se:

$$N f[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{-2\pi i n k / N}$$

Odnosno, dobija se pravilo:

$$F[n] \leftrightarrow N f[-k].$$

2.3.3 Preokret u vremenu

Pod preokretom u vremenu podrazumeva se operacija koja u vremenskom domenu zamenjuje n sa $-n$. Prilikom pomeranja u vremenskom domenu takođe dolazi do preokreta frekvencije signala. Odnosno diskretna Furijeova

transformacija signala $f[-n]$ postaje

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} f[-n]e^{-2\pi ink/N} &= \sum_{n=0}^{N-1} F[N-n]e^{2\pi i(N-n)k/N} \\ &= \sum_{n=1}^N f[n]e^{2\pi ink/N} \\ &= F[-k]\end{aligned}$$

Drugim rečima važi:

$$f[-n] \leftrightarrow F[-k]$$

2.3.4 Konjugacija

Konjugaciju signala $f[n]$ označavamo sa $\overline{f[n]}$.

Koristeći osobine konjugacije dobija se da važi da

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \overline{f[n]}e^{-2\pi ink/N} &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f[n]e^{2\pi ink/N}} \\ &= \overline{\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{2\pi in(-k)/N}} \\ &= \overline{F[-k]}\end{aligned}$$

Odnosno važi da

$$\overline{f[n]} \leftrightarrow \overline{F[-k]}$$

Za realne signale ovo znači da je $f[n]$ parna funkcija, a da je $F[n]$ neparna funkcija. Odnosno, za realan signal $f[n]$, važi

$$\overline{f[n]} = f[n] \quad \text{ i } \quad \overline{F[-k]} = F[k],$$

što znači da je

$$|F[-k]| = |\overline{F[k]}| = |F[k]|$$

odnosno

$$\arg F[-k] = -\arg \overline{F[k]} = -\arg F[k].$$

Štaviše, kako je $F[k]$ periodičan sa periodom N , za realne signale $f[n]$ važi da je

$$F[N-k] = F[-k] = \overline{F[k]}.$$

To znači da je dovoljno izračunati $F[k]$ za $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$, jer vrednosti $F[k]$ za $\frac{N}{2} < k < N$ slede iz konjugacije.

2.3.5 Pomeranje u vremenskom domenu

Neka je $f[n]$ diskretni vremenski signal. Tada je $f[n-l]$, gde je $l \in \mathbb{Z}$, takođe diskretni vremenski signal. Može se pokazati da važi:

$$f[n-l] \leftrightarrow e^{-2\pi i l k / N} F[k].$$

Drugim rečima, može se pokazati da kada se vremenski domen pomeri za l tačaka dobije se DFT koji je pomnožen sa $e^{-2\pi i l k / N}$. Pri tome, ako je l pozitivan broj, radi se o kašnjenju u vremenu, a ukoliko je l negativan broj, radi se o žurenju.

Ova osobina se pokazuje na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} f[n-l] e^{-2\pi i n k / N} &= \sum_{n=-l}^{N-1-l} f[n] e^{-2\pi i (n+l) k / N} \\ &= e^{-2\pi i l k / N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi i n k / N} \\ &= e^{-2\pi i l k / N} F[k]. \end{aligned}$$

Dakle, iz ove osobine sledi da se spektar amplitude ne menja prilikom promene u vremenskom domenu jer

$$|e^{-2\pi i l k / N} F[k]| = |F[k]|.$$

2.3.6 Pomeranje u frekvencijskom domenu

Sično kao kod pomeranja u vremenskom domenu, pomeraj u frekvencijskom domenu će dovesti do sledećeg pravila:

$$e^{2\pi i n l / N} f[n] \leftrightarrow F[k-l]$$

Odnosno, prilikom promene u jednom domenu, nema promene u drugom.

2.3.7 Ciklična konvolucija

Neka su $f[n]$ i $g[n]$ periodični diskretni vremenski signali sa istim periodom N i diskretnim Furijeovim transformacijama $F[k]$ i $G[k]$. Postavlja se pitanje, koji periodični diskretni vremenski signal u vremenskom domenu ima spektar $F[k]G[k]$. Do ovog signala dolazimo primenom definicije 2.1 na proizvod $F[k]G[k]$ na sledeći način:

$$F[k]G[k] = \sum_{l=0}^{N-1} f[l]G[k] e^{-2\pi i l k / N}$$

Ovaj proizvod je, u stvari, linearna kombinacija signala $f[l]G[k]e^{-2\pi ilk/N}$. Dalje, ako se primeni osobina pomeranja u vremenskom domenu, dobija se

$$g[n-l] \leftrightarrow G[k]e^{-2\pi ilk/N}$$

Zatim, primenom linearnosti se dobija

$$\sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l] \leftrightarrow F[k]G[k]$$

Dakle, sledi definicija ciklične konvolucije.

Definicija 2.3. Neka je diskretni vremenski signal $(f * g)[n]$ definisan na sledeći način

$$(f * g)[n] = \sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l]$$

gde su $f[n]$ i $g[n]$ dva periodična diskretna vremenska signala sa periodom N . Tada je $(f * g)[n]$ ciklična konvolucija.

Primer 2.5. Neka su data dva periodična diskretna vremenska signala

$$f[n] = \delta_N[n+1] - \delta_N[n] + \delta_N[n-1]$$

i

$$g[n] = \delta_N[n+1] + \delta_N[n]$$

sa periodom N . Njihova ciklična konvolucija se dobija na sledeći način:

$$\begin{aligned} (f * g)[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} (\delta_N[l+1] - \delta_N[l] + \delta_N[l-1])(\delta_N[n-l+1] + \delta_N[n-l]) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l+1]\delta_N[n-l+1] + \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l+1]\delta_N[n-l] \\ &\quad - \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l]\delta_N[n-l+1] - \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l]\delta_N[n-l] \\ &\quad + \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l-1]\delta_N[n-l+1] + \sum_{l=0}^{N-1} \delta_N[l-1]\delta_N[n-l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_N[n - N + 2] + \delta_N[n - N + 1] - \delta_N[n + 1] \\
&- \delta_N[n] + \delta_N[n] + \delta_N[n - 1] \\
&= \delta_N[n + 2] + \delta_N[n + 1] - \delta_N[n + 1] + \delta_N[n - 1] \\
&= \delta_N[n + 2] + \delta_N[n - 1]
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. Neka su $f[n]$ i $g[n]$ dva periodična diskretna vremenska signala. Tada važi

$$(f * g)[n] = (g * f)[n], \quad \text{za sve } n \in \mathbb{Z}$$

Odnosno ciklična konvolucija je komutativna.

Dokaz: Uvođenjem smene $m = n - l$ u gornju definiciju dobija se:

$$\begin{aligned}
(f * g)[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} f[l]g[n-l] \\
&= \sum_{m=n}^{n-(N-1)} f[n-m]g[m] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} g[m]f[n-m] \\
&= (g * f)[n]
\end{aligned}$$

■

Dalje, mogu se formulirati i definicije konvolucije u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Definicija 2.4. Neka su $f[n]$ i $g[n]$ periodični diskretni vremenski signali sa periodom N . Neka su $F[k]$ i $G[k]$ njihove diskretne Furijeove transformacije respektivno. Tada je ciklična konvolucija u vremenskom domenu proizvod $(f * g)[n]$ takav da $(f * g)[n] \leftrightarrow F[k]G[k]$

Teorema koja sledi pokazuje da se primenom DFT na proizvod $f[n]g[n]$ u vremenskom domenu dobija konvolucija u frekvencijskom domenu.

Teorema 2.3. Neka su $f[n]$ i $g[n]$ periodični diskretni vremenski signali sa periodom N . Neka su $F[k]$ i $G[k]$ njihove diskretne Furijeove transformacije, respektivno. Tada važi

$$f[n]g[n] \leftrightarrow \frac{1}{N}(F * G)[k].$$

Dokaz: Primenom inverzne diskretne Furijeove transformacije na $F[k]$ dobija se

$$f[n]g[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F[l]e^{2\pi iln/N} g[n]$$

Dakle, proizvod $f[n]g[n]$ u vremenskom domenu je linearna kombinacija signala $F[l]e^{2\pi iln/N} g[n]$. Koristeći osobinu pomeranja u frekvencijskom domenu dobija se

$$F[l]e^{2\pi iln/N} g[n] \leftrightarrow F[l]G[k-l]$$

Primenom linearnosti teorema je dokazana. ■

2.4 Matrični oblik DFT

Da bi se omogućilo korišćenje diskretne Furijeove transformacije u nekom računarskom programu potrebno je vrednosti signala uneti u formi vektora ili matrice. To znači da će diskretna Furijeova transformacija biti operacija množenja odgovarajućih matrica. Kako bi se došlo do odgovarajućeg algoritma za dobijanje vrednosti ovakvog DFT prvo će se prethodna definicija DFT zapisati u malo drugačijem obliku

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]w_N^{nk} \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Pri tome je $w_N = e^{-2\pi i/N}$ i zove se **rotirajući faktor** (*twiddle factor*). Algoritmi koji će se kasnije definisati koristiće matrice čiji elementi će biti ovi faktori. Odnosno, proizvod ove matrice i matrice koja sadrži vrednosti signala predstavlja matrični oblik DFT. Zato će se vrednosti rotirajućih faktora izanalizirati u nastavku.

Prvo, neka se N može zapisati kao proizvod $N = N_1 \times N_2$ gde su $N_1, N_2 \geq 2$. Tada je $w_N = w_{N_1 N_2} = e^{-2\pi i/N_1 N_2}$. Dakle, ako se w_N podigne na stepen N_1 dobija se

$$w_{N_1 N_2}^{N_1} = e^{-2\pi i N_1 / N_1 N_2} = e^{-2\pi i / N_2} = w_{N_2}.$$

Analogno važi i za N_2 odnosno dobija se sledeća veza između korena w_{N_1}, w_{N_2} i w_N :

$$\begin{aligned} w_N^{N_1} &= w_{N_2} \\ w_N^{N_2} &= w_{N_1} \end{aligned}$$

Dakle, sada se može definisati algoritam za diskretnu Furijeovu transformaciju dužine $N_1 N_2$.

Algoritam se sastoji iz sledećih koraka:

1. Na osnovu diskretnog vremenskog signala $f[n]$ konstruisati M_f matricu sa N_1 vrsta i N_2 kolona:

$$M_f = \begin{bmatrix} f[0] & f[N_1] & \dots & f[N - 2N_1] & f[N - N_1] \\ f[1] & f[N_1 + 1] & \dots & f[N - 2N_1 + 1] & f[N - N_1 + 1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f[N_1 - 2] & f[2N_1 - 2] & \dots & f[N - N_1 - 2] & f[N - 2] \\ f[N_1 - 1] & f[2N_1 - 1] & \dots & f[N - N_1 - 1] & f[N - 1] \end{bmatrix}$$

Odnosno, elemenat $M_f(i, j)$ u vrsti $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ i koloni $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ je dat sa

$$M_f(i, j) = f[jN_1 + i]$$

2. Izračunati DFT sa N_2 uzoraka od vrste $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ matrice M_f i staviti je u vrstu nove matrice

$$C = \begin{bmatrix} c[0, 0] & c[0, 1] & \dots & c[0, N_2 - 1] \\ c[1, 0] & c[1, 1] & \dots & c[1, N_2 - 1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c[N_1 - 2, 0] & c[N_1 - 2, 1] & \dots & c[N_1 - 2, N_2 - 1] \\ c[N_1 - 1, 0] & c[N_1 - 1, 1] & \dots & c[N_1 - 1, N_2 - 1] \end{bmatrix}$$

Odnosno, elemenat $C(i, j)$ u vrsti $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ i koloni $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ je dat sa

$$C(i, j) = c[i, j]$$

3. Pomnožiti elemente matrice C sa rotirajućim faktorima w_N^{ij} . Dobija se nova matrica C_t sa elementima $c_t[i, j] = w_N^{ij}c[i, j]$ gde je $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ i $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

$$C_t = \begin{bmatrix} c_t[0, 0] & c_t[0, 1] & \dots & c_t[0, N_2 - 1] \\ c_t[1, 0] & c_t[1, 1] & \dots & c_t[1, N_2 - 1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_t[N_1 - 2, 0] & c_t[N_1 - 2, 1] & \dots & c_t[N_1 - 2, N_2 - 1] \\ c_t[N_1 - 1, 0] & c_t[N_1 - 1, 1] & \dots & c_t[N_1 - 1, N_2 - 1] \end{bmatrix}$$

4. Izračunati DFT dužine N_1 od kolone $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ matrice C_t i staviti ovo u kolonu j matrice M_F

$$M_F = \begin{bmatrix} F[0] & F[1] & \dots & F[N_2 - 1] \\ F[N_2] & F[N_2 + 1] & \dots & F[2N_2 - 1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F[N - 2N_2] & F[N - 2N_2 + 1] & \dots & F[N - N_2 - 1] \\ F[N - N_2] & F[N - N_2 + 1] & \dots & F[N - 1] \end{bmatrix}$$

Odnosno, elemenat $M_F(i, j)$ u vrsti $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ i koloni $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ je dat sa

$$M_F(i, j) = F[iN_2 + j]$$

Rezultat ovog algoritma je matrica M_F koja predstavlja DFT dužine $N_1 N_2$ od $f[n]$.

Dati algoritam će se ilustrovati na sledećem primeru za računanje DFT dužine $N = 8$.

Primer 2.6. Neka su dati signali $f[0] = 0$, $f[1] = 1$, $f[2] = 0$, $f[3] = 1$, $f[4] = 1$, $f[5] = 0$, $f[6] = 1$ i $f[7] = 0$.

1. Prvi korak algoritma jeste konstruisati odgovarajuću matricu M_f . U ovom slučaju ta matrica je data na sledeći način:

$$M_f = \begin{bmatrix} f[0] & f[4] \\ f[1] & f[5] \\ f[2] & f[6] \\ f[3] & f[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Odnosno, broj vrsta ove matrice je 4 pa je $N_1 = 4$, a broj kolona je 2 pa je $N_2 = 2$.

2. Dalje, drugi korak jeste izračunati DFT dužine 2 od vrsta matrice M_f odnosno konstruisati matricu C .

$$C = \begin{bmatrix} c[0, 0] & c[0, 1] \\ c[1, 0] & c[1, 1] \\ c[2, 0] & c[2, 1] \\ c[3, 0] & c[3, 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f[0] + f[4] & f[0] - f[4] \\ f[1] + f[5] & f[1] - f[5] \\ f[2] + f[6] & f[2] - f[6] \\ f[3] + f[7] & f[3] - f[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Zatim, treba pomnožiti matricu dobijenu u koraku 2 sa rotirajućim faktorima w_8^{ij} gde $i = 0, 1, \dots, 3$ i $j = 0, 1$. Dobija se matrica C_t u kojoj prva vrsta i prva kolona ostaju nepromenjene jer su njihovi odgovarajući rotirajući faktori jedinice.

$$C_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

A preostala tri elementa se dobijaju množenjem sa $w_8^{1 \cdot 1} = e^{-\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_8^{2 \cdot 1} = e^{-\pi i/2} = -i$, odnosno $w_8^{3 \cdot 1} = e^{-3\pi i/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Poslednji korak algoritma jeste izračunati DFT dužine 4 od kolona matrice dobijene u koraku 3. Rezultat ovog algoritma je matrica M_F .

$$M_F = \begin{bmatrix} F[0] & F[1] \\ F[2] & F[3] \\ F[4] & F[5] \\ F[6] & F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & i - i\sqrt{2} - 1 \\ 0 & -i - i\sqrt{2} - 1 \\ 0 & i + i\sqrt{2} - 1 \\ 0 & -i + i\sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}$$

□

U ovom primeru je za dobijanje matrice C u drugom koraku potrebno 16 elementarnih operacija. Dalje, u koraku tri, potrebno je 3 elementarne operacije da bi se dobila matrica C_t , a za dobijanje M_F potrebno je 48 elementarnih operacija. To je ukupno 67 elementarnih operacija.

Očigledno, treba nastojati da se taj broj smanji jer za veliko N ovaj algoritam zahteva veliki broj elementarnih operacija.

U opštem slučaju to je $2N_1(N_2^2 - N_2)$ elementarnih operacija za dobijanje matrice C , $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ elementarnih operacija za dobijanje matrice C_t i $2N_2(N_1^2 - N_1)$ elementarnih operacija da bi se dobila matrica M_F .

Dakle, opisani algoritam ima

$$2N_1N_2(N_1 + N_2) - 3N_1N_2 - N_1 - N_2 + 1$$

elementarnih operacija.

Kako je izračunavanje DFT od $N = 2$ dužine jednostavno, izračunavanje DFT dužine N koje se može razložiti na određen broj dvojki treba uraditi uzastopnom primenom DFT dužine $N = 2$. Na ovaj način smanjiće se broj potrebnih elementarnih operacija.

Dakle, sada se razmatra DFT od $N = 2^m$ tačaka za neko $m \geq 1$. Neka je $N_1 = 2$ i $N_2 = 2^{m-1}$.

Da bi se formulisao algoritam, pretpostavlja se da su signali $f[2n]$ i $f[2n+1]$ periodični sa periodom $N_2 = \frac{N}{2}$ i da za njih u frekvencijskom domenu važi

$$f[2n] \leftrightarrow A[k]$$

$$f[2n+1] \leftrightarrow B[k]$$

Dakle, algoritam glasi:

1. Konstruisati matricu M_f dimenzija $2 \times 2^{m-1}$ oblika

$$M_f = \begin{bmatrix} f[0] & f[2] & \dots & f[N-2] \\ f[1] & f[3] & \dots & f[N-1] \end{bmatrix}$$

2. Na vrste matrice M_f primeniti DFT od $\frac{N}{2}$ tačaka. Rezultat je matrica C :

$$C = \begin{bmatrix} A[0] & A[1] & \dots & A[j] & \dots & A[N_2 - 1] \\ B[0] & B[1] & \dots & B[j] & \dots & B[N_2 - 1] \end{bmatrix}$$

3. Elemente ove matrice pomnožiti sa rotirajućim faktorima w_N^{ij} .

$$C_t = \begin{bmatrix} w_N^{0 \cdot 0} A[0] & w_N^{0 \cdot 1} A[1] & \dots & w_N^{0 \cdot j} A[j] & \dots & w_N^{0 \cdot N_2 - 1} A[N_2 - 1] \\ w_N^{1 \cdot 0} B[0] & w_N^{1 \cdot 1} B[1] & \dots & w_N^{1 \cdot j} B[j] & \dots & w_N^{1 \cdot (N_2 - 1)} B[N_2 - 1] \end{bmatrix}$$

4. Primeniti DFT dužine 2 na kolone matrice C_t . Dobija se matrica M_F koja daje DFT od N tačaka od signala $f[n]$:

$$M_F = \begin{bmatrix} F[0] & F[1] & \dots & F[j] & \dots & F[N_2 - 1] \\ F[N_2] & F[N_2 + 1] & \dots & F[N_2 + j] & \dots & F[N - 1] \end{bmatrix}$$

gde je

$$\begin{bmatrix} F[j] \\ F[N_2 + j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[j] + w_N^{1 \cdot j} B[j] \\ A[j] - w_N^{1 \cdot j} B[j] \end{bmatrix}$$

za $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

U suštini, da bi se odredili $A[k]$ i $B[k]$ potrebno je izračunati DFT dužine $\frac{N}{2}$ od signala $f[2n]$ i $f[2n + 1]$ respektivno. Pri tome se može koristiti isti metod sa DFT dužine $\frac{N}{4}$. Ponavljajući ovaj proces dok ne ostane samo DFT dužine 2. Rezultat ovoga je algoritam brze Furijeove transformacije ili skraćeno FFT (Fast Fourier Transform).

Primer 2.7. Neka su dati signali $f[0] = 0$, $f[1] = 1$, $f[2] = 0$, $f[3] = 1$, $f[4] = 1$, $f[5] = 0$, $f[6] = 1$ i $f[7] = 0$.

1. Prvo, treba konstruisati odgovarajuću matricu M_f dimenzija $2 \times 2^{3-1}$.

$$M_f = \begin{bmatrix} f[0] & f[2] & f[4] & f[6] \\ f[1] & f[3] & f[5] & f[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Zatim, treba primeniti DFT dužine 4 na obe vrste matrice M_f da bi se dobila matrica:

$$C = \begin{bmatrix} A[0] & A[1] & A[2] & A[3] \\ B[0] & B[1] & B[2] & B[3] \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} A[0] &= f[0] + f[2] + f[4] + f[6] \\ A[1] &= f[0] - if[2] - f[4] + if[6] \\ A[2] &= f[0] - f[2] + f[4] - f[6]i \\ A[3] &= f[0] + if[2] - f[4] - if[6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B[0] &= f[1] + f[3] + f[5] + f[7] \\ B[1] &= f[1] - if[3] - f[5] + if[7] \\ B[2] &= f[1] - f[3] + f[5] - f[7]i \\ B[3] &= f[1] + if[3] - f[5] - if[7] \end{aligned}$$

pa se dobija

$$C = \begin{bmatrix} 2 & i-1 & 0 & -i-1 \\ 2 & 1-i & 0 & i+1 \end{bmatrix}$$

3. Dalje, treba pomnožiti elemente matrice dobijene u drugom koraku sa rotirajućim faktorima w_8^{ij} gde je $i = 0, 1$ i $j = 0, 1, 2, 3$. Pri tome treba приметити da elementi prve vrste i prve kolone ostaju nepromenjeni. Dobija se matrica C_t .

$$C_t = \begin{bmatrix} w_8^{0,0}A[0] & w_8^{0,1}A[1] & w_8^{0,2}A[2] & w_8^{0,3}A[3] \\ w_8^{1,0}B[0] & w_8^{1,1}B[1] & w_8^{1,2}B[2] & w_8^{1,3}B[3] \end{bmatrix}$$

Kako je $w_8^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_8^2 = -i$ i $w_8^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ dobija se sledeća matrica:

$$C_t = \begin{bmatrix} 2 & i-1 & 0 & -i-1 \\ 2 & -i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4. Poslednji korak algoritma kaže da treba primeniti DFT dužine 2 na kolone matrice C_t . Dobija se:

$$M_F = \begin{bmatrix} F[0] & F[1] & F[2] & F[3] \\ F[4] & F[5] & F[6] & F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & i - 1 - i\sqrt{2} & 0 & -1 - i - i\sqrt{2} \\ 0 & i - 1 + i\sqrt{2} & 0 & -1 - i + i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

□

Ovde sada treba primetiti da su zadate vrednosti signala u primeru 2.6 i primeru 2.7 iste. Logično, iste su i vrednosti $F[j]$ $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ koje proizvode algoritmi. Međutim, ako se pogleda broj elementarnih operacija potrebnih da se dobije krajnji rezultat vidi se značajna razlika.

Kao što je već napomenuto broj potrebnih elementarnih operacija prvog algoritma jeste 67, dok drugi algoritam zahteva 29 elementarnih operacija. Dakle, znatno manje što je od izuzetnog značaja u slučajevima kada je N veliko.

Može se pokazati da u opštem slučaju važi da je broj elementarnih operacija $(3m - 2)2^{m-1} + 1$.

Dokaz: Neka je $\phi(m)$ broj elementarnih operacija potrebnih da se izračuna DFT dužine 2^m . Kako je za dobijanje $A[k]$ i $B[k]$ potrebno je $2\phi(m - 1)$, a za $F[k]$ treba $3 \cdot 2^{m-1} - 1$ elementarnih operacija dobija se:

$$\phi(m) = 2\phi(m - 1) + 3 \cdot 2^{m-1} - 1$$

Ostatak se može pokazati matematičkom indukcijom.

Naime,

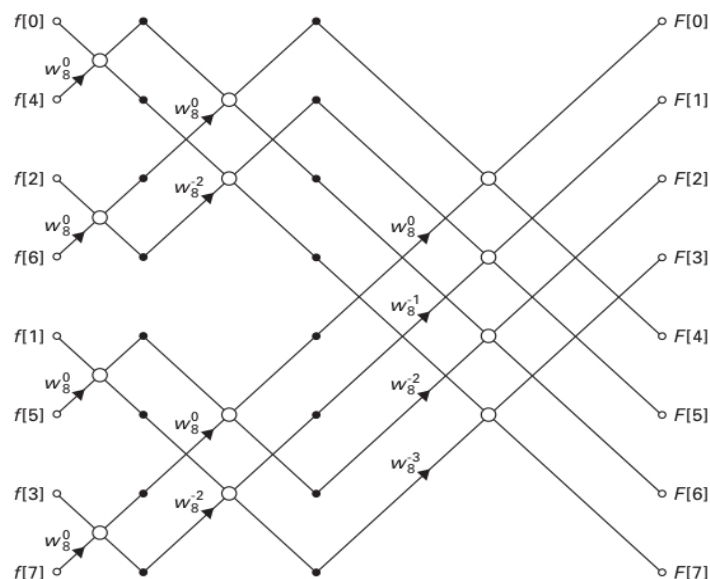
1. $\phi(1) = 2$ jer je za izračunavanje DFT dužine 2 potrebno jedno sabiranje i jedno oduzimanje što se može zapisati $\phi(1) = (3 \cdot 1 - 2)2^{1-1} + 1 = 2$
2. Pretpostavimo da važi $\phi(m - 1) = (3m - 5)2^{m-2} + 1$
3. Koristeći prethodni izraz dobija se

$$\begin{aligned} \phi(m) &= 2\phi(m - 1) + 3 \cdot 2^{m-1} - 1 \\ &= 2[(3m - 5)2^{m-2} + 1] + 3 \cdot 2^{m-1} - 1 \\ &= [3m - 5 + 3]2^{m-1} + 1 \\ &= (3m - 2)2^{m-1} + 1 \end{aligned}$$

Dakle, važi

$$\phi(m) = (3m - 2)2^{m-1} + 1$$

■



Slika 16: Šematski prikaz leptir algoritma

Dakle, za ovakvu FFT broj potrebnih elementarnih operacija je reda $m \cdot 2^m = N \log_2(N)$ što drastično povećava brzinu algoritma, pogotovo za velike N .

Izračunavanje $F[j]$ i $F[N_2 + j]$ se često naziva **leptir** algoritam (*butterfly*) jer šematski prikaz ovog algoritma ima oblik leptira. Logično, FFT algoritam za računanje DFT od 2^m uzoraka predstavlja niz od 2^m leptira. Na slici 16 se može videti šematski prikaz leptir algoritma koji odgovara prethodnom primeru.

Može se pokazati da se za $N = 2^m$ početni niz leptir šeme može dobiti tako da se brojevi $0, 1, \dots, N - 1$ predstavljaju kao binarni brojevi sa m cifara i onda da se promeni red cifara u binarnom predstavljanju broja (*bit reversal*).

2.5 Primena FFT

Kako brza Furijeova transformacija, u stvari, predstavlja algoritam za dobijanje diskretne Furijeove transformacije dužine 2, primena FFT i primena DFT se ne razlikuju.

Dakle, FFT može da se koristi za izračunavanje Furijeovih koeficijenata, Furijeovih integrala, za efikasno dobijanje proizvoda ciklične konvolucije, za **unakrsnu korelaciju** (*cross-correlation*) kao i za mnoge druge stvari. Sada će biti navedene neke od tih primena.

2.5.1 Izračunavanje Furijeovih integrala

Furijska transformacija $F(\omega)$ od neprekinog vremenskog signala $f(t)$ jeste Rimanov integral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Ukoliko je signal $f(t)$ apsolutno integrabilan onda

$$\begin{aligned} |F(\omega) - \int_{-T}^T f(t)e^{-i\omega t} dt| &= \left| \int_{|t| \geq T} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{|t| \geq T} |f(t)| dt \rightarrow 0 \text{ za } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Dakle, za dovoljno veliko T i proizvoljno ω integral

$$F_T(\omega) = \int_{-T}^T f(t)e^{-i\omega t} dt$$

je dobra aproksimacija $F(\omega)$.

Ovaj integral, u stvari, predstavlja spektar od $f(t)\rho_{2T}(t)$ gde je $\rho_{2T}(t)$ pravougaona pulsna funkcija trajanja $2T$. Kaže se da je $f(t)$ pomnožena sa pravougaonim vremenskim prozorom (*time window*) širine $2T$. U frekvencijskom domenu ovo odgovara konvoluciji od $F(\omega)$ sa $\frac{2\sin(T\omega)}{\omega}$.

Izračunavanje spektra $F(\omega)$ množenjem sa vremenskim prozorom rezultuje greškom. Ova greška je mala ukoliko je vremenski prozor dovoljno velik.

Dalje, nakon što se izabere odgovarajuće T , uzorkovanjem od $f(t)$ sa $2N$ uzoraka u intervalu $[-T, T]$ period uzorkovanja je $\frac{T}{N}$.

Neka je $t_n = \frac{nT}{N}$. Primenom trapezoidnog pravila dobija se

$$F_T(\omega) \approx \frac{T}{2N} \left(f(-T)e^{i\omega T} + f(T)e^{-i\omega T} + 2 \sum_{n=1-N}^{N-1} f(t_n)e^{-i\omega t_n} \right)$$

Da bi se mogao primeniti DFT dužine $2N$ potrebno je definisati periodičan diskretni vremenski signal $f_p[n]$ na sledeći način

$$f_p[-N] = \frac{1}{2}(f(-T) + f(T))$$

$$f_p[n] = f(t_n) \quad \text{za } n = -N+1, -N+2, \dots, N-1$$

Neka je, dalje, $\omega = \frac{k\pi}{T}$ tada se dobija

$$F_T\left(\frac{k\pi}{T}\right) \approx \frac{T}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} f_p[n] e^{-2\pi i k n / 2N}$$

Ovde treba primetiti da je desna strana ovog izraza, sve do faktora $\frac{T}{N}$, jednaka DFT-u dužine $2N$ od $f_p[n]$. Kako je $F_T(\omega)$ aproksimacija od $F(\omega)$ može se zaključiti da se DFT može koristiti za aproksimaciju spektra nepériodícnog neprekidnog vremenskog signala.

2.5.2 Brza konvolucija

Konvolucija ima brojne značajne primene u raznim oblastima kao što su verovatnoća, statistika, obrada signala i mnoge druge. Međutim, standardni algoritam konvolucije je spor jer zahteva veliki broj operacija množenja i sabiranja. Štaviše, da bi se izračunala konvolucija za neku fiksiranu vrednost n potrebno je izvršiti operaciju sabiranja $N - 1$ puta i operaciju množenja N puta. Dakle, potrebno je $2N - 1$ elementarnih operacija za izračunavanje konvolucije sa fiksiranim n . U opštem slučaju potrebno je $2N^2 - N$ elementarnih operacija, što za veliko N znači da je broj operacija reda N^2 .

Jednostavnim dovođenjem problema u domen frekvencije preko DFT-a ne rešava se problem jer je i dalje potreban veliki broj računanja. Štaviše, broj operacija koji je potreban za računanje DFT-a je približan broju operacija potrebnih za direktno izračunavanje konvolucije.

Ovo je razlog zbog kojeg iako je dugo bio poznat metod DFT nije se koristio za računanje konvolucije. Tek kada je razvijen FFT, otkriveno je i da konvolucija multiplikacijom u frekvencijskom domenu može biti stotinu puta brža od konvencionalne konvolucije. Problemi koji su se izračunavali po sat vremena, svedeni su na samo nekoliko minuta.

Osnovni koncept brze konvolucije jeste da se iskoristi veza između konvolucije i skalarnog množenja u frekvencijskom domenu. Iz tog razloga, pre nego što se može formulisati algoritam za računanje brze konvolucije potrebno je podsetiti se Teoreme 2.3 po kojoj DFT dužine N proizvoda konvolucije predstavlja proizvod $F[k]$ i $G[k]$. Konačno, sledi algoritam za računanje brze konvolucije:

Neka su dati signali $f[n]$ i $g[n]$.

1. Izračunati DFT od N uzoraka od $f[n]$ i $g[n]$ i označiti sa $F[k]$ i $G[k]$ respektivno.
2. Odrediti proizvod $F[k]G[k]$.

3. Potom, primeniti na $F[k]G[k]$ inverznu DFT. Rezultat je proizvod konvolucije.

Drugim rečima, FFT konvolucija se bazira na množenju u frekvencijskom domenu koje odgovara konvoluciji u vremenskom domenu. Ulazni signal se transformiše u domenu frekvencije koristeći DFT, a zatim se transformiše nazad u vremenski domen koristeći inverzni DFT.

Primer 2.8. Neka su data dva signala $f[n]$ i $g[n]$ na sledeći način:

$$f[0] = 0, f[1] = 0, f[2] = 1, f[3] = 1, f[4] = 1, f[5] = 1, f[6] = 0, f[7] = 0$$

i

$$g[0] = 1, g[1] = 0, g[2] = 1, g[3] = 0, g[4] = 0, g[5] = 1, g[6] = 0, g[7] = 1.$$

Neka su ta dva signala predstavljena pomoću matrica M_f i M_g , respektivno. Odnosno,

$$M_f = \begin{bmatrix} f[0] & f[1] & f[2] & f[3] \\ f[4] & f[5] & f[6] & f[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \begin{bmatrix} g[0] & g[1] & g[2] & g[3] \\ g[4] & g[5] & g[6] & g[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Prvi korak algoritma jeste primeniti DFT dužine $N = 8$ na ove dve matrice. Dobijaju se matrice

$$F[k] = \begin{bmatrix} 4 & i - 1 - i\sqrt{2} & 0 & -1 - i - i\sqrt{2} \\ 0 & i - 1 + i\sqrt{2} & 0 & -1 - i + i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$G[k] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2i & 0 \end{bmatrix}$$

- Drugi korak jeste pomnožiti matrice $F[k]$ i $G[k]$.

$$F[k]G[k] = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Primenom inverzne DFT konačno se dobija

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Da bi se dobila DFT dužine N potrebno je $N \log_2 N$ elementarnih operacija, za određivanje proizvoda $F[k]G[k]$ je potrebno N operacija, a za izračunavanje inverzne DFT je potrebno $2N(\log_2 N)$ elementarnih operacija.

Dakle, za izračunavanje proizvoda konvolucije potrebno je ukupno

$$2N(\log_2 N) + N + N(\log_2 N) = 3N(\log_2 N) + N$$

elementarnih operacija.

Na ovaj način, potrebno je manje elementarnih operacija za dobijanje proizvoda konvolucije nego pomoću direktnog metoda. Štaviše, posmatrajući ovaj broj u odnosu na broj operacija reda N^2 , za veliko N , ova metoda zahteva značajno manje operacija.

2.5.3 Brza korelacija

Jedna od važnih primena brze Furijeove transformacije je efikasno prepoznavanje šablona i detekcija "velikih" signala pomoću "malih". Metod kojim se to postiže se zove **unakrsna korelacija** (*cross-correlation*). Ovaj izraz dolazi od statistike jer operator korelacije igra glavnu ulogu u statističkoj obradi signala.

Definicija 2.5. Neka su $f_1[n]$ i $f_2[n]$ dva periodična diskretna vremenska signala sa periodom N . Tada je unakrsna korelacija definisana na sledeći način:

$$\rho_{1,2}[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_1[l]} f_2[n+l]$$

Ova definicija unakrsne korelacije uzorka važi samo za stacionarne stohastičke procese odnosno signale koji ostaju nepromenjeni tokom vremena. Data definicija će biti ilustrovana na sledećem primeru.

Primer 2.9. Neka su data dva periodična diskretna vremenska signala

$$f_1[n] = \delta_N[n] + \delta_N[n-1]$$

i

$$f_2[n] = \delta_N[n] + \delta_N[n+1]$$

sa periodom N . Koristeći prethodnu definiciju i osobine konjugacije, dobija se unakrsna korelacija na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2}[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_1[l]} f_2[n+l] \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\overline{\delta_N[l] + \delta_N[l-1]}) (\delta_N[n+l] + \delta_N[n+l+1]) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\overline{\delta_N[l]} + \overline{\delta_N[l-1]}) (\delta_N[n+l] + \delta_N[n+l+1]) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\delta_N[l] + \delta_N[l-1]) (\delta_N[n+l] + \delta_N[n+l+1]) \\
&= \delta_N[n] + \delta_N[n+1] + \delta_N[n+1] + \delta_N[n+2]
\end{aligned}$$

Međutim, za razliku od konvolucije, unakrsna korelacija nije komutativna.

$$\begin{aligned}
\rho_{2,1}[n] &= \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_2[l]} f_1[n+l] \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\overline{\delta_N[l] + \delta_N[l+1]}) (\delta_N[n+l] + \delta_N[n+l-1]) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\delta_N[l] + \delta_N[l+1]) (\delta_N[n+l] + \delta_N[n+l-1]) \\
&= \delta_N[n] + \delta_N[n+1] + \delta_N[n-1] + \delta_N[n-2]
\end{aligned}$$

□

Definicija 2.6. Neka je $f[n]$ periodičan diskretni vremenski signal. Tada se

$$\rho[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f[l]} f[n+l]$$

zove autokorelacija signala $f[n]$.

Dalje, kako je $f[n] \leftrightarrow F[k]$, a $f[n+l] \leftrightarrow e^{2\pi i l k / N} F[k]$ dobija se da važi

$$\rho[n] \leftrightarrow \overline{F[k]} F[k] = |F[k]|^2.$$

Dobijeni spektar autokorelacije zove se spektar snage.

3 Z-transformacija

U ovom delu rada će se objasniti pojam z-transformacija jer se diskretne Furijeove transformacije mogu posmatrati kao specijalni oblik z-transformacija. Korišćena je literatura [1], [5]

3.1 Definicija z-transformacije

Z-transformacija predstavlja širi pojam od diskretne Furijeove transformacije jer podrazumeva beskonačnu sumu.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-in\omega}$$

To znači da se signal može u potpunosti sagledati, odnosno mogu se iskoristiti sve informacije sadržane u njemu. Dakle, u ovom delu rada može se razmatrati signal $f[n]$ koji nije periodičan.

Uvrštavanjem $z = e^{i\omega}$ dolazi se do definicije z-transformacije:

Definicija 3.1. Neka je $f[n]$ diskretan vremenski signal. Z-transformacija od $f[n]$ predstavlja

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

za one vrednosti z za koje red konvergira.

Dakle, postavlja se pitanje kada je dati red konvergentan. Da bi se odgovorilo na dato pitanje i da bi se konvergencija z-transformacije mogla bolje sagledati, sada će se z-transformacija podeliti na kauzalni i nekauzalni deo. Odnosno, treba se podsetiti podele signala na kauzalne i nekauzalne signale i definicije 1.5 iz Uvoda koja kaže da je diskretni vremenski signal $f[n]$ kauzalni ako važi $f[n]=0$ za $n < 0$.

Po sličnom principu, slede definicije.

Definicija 3.2. Kauzalni deo z-transformacije je

$$F_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

Definicija 3.3. Nekaualni deo z-transformacije je

$$F_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f[-n]z^n$$

Dakle, može se zaključiti

$$F(z) = F_-(z) + F_+(z)$$

odnosno z-transformacija konvergira ako i samo ako konvergira i kauzalni i nekauzalni deo z-transformacije.

Treba primetiti da je z-transformacija funkcija koja zavisi od kompleksne promenljive, pa se ona definiše u kompleksnoj z-ravni. Odnosno, z-transformacija predstavlja vezu između signala u vremenskom domenu $f[n]$ i signala u z-domenu $F[z]$. U z-ravni krug koji je oivičen sa $|z| = 1$ zove se *jedinični radijus* ili *jedinični krug*. U ovom krugu z-transformacija i Furijeova transformacija se poklapaju. Preciznije, u tački $z = 1$ z-transformacija i Furijeova transformacija se poklapaju za $\omega = 0$, u tački $z = -1$ poklapaju se za $\omega = -\pi$, itd.

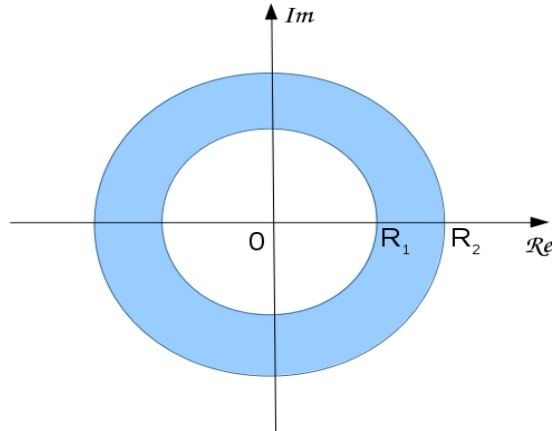
SIGNAL	Z-TRANSFORMACIJA	OBLAST KONVERGENCIJE
$\delta[n]$	1	za sve z
$\epsilon[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-\epsilon[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$z \neq 0$
$a^n \epsilon[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n \epsilon[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n \epsilon[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n \epsilon[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $

Tabela 1: Tablica z-transformacije

Kako Furijeova transformacija ne konvergira u svakom slučaju, tako i z-transformacija ne konvergira za svako z . Treba odrediti oblast u kojoj z-transformacija konvergira. To je moguće pomoću radijusa konvergencije koji će se definisati u nastavku, a primeri z-transformacije kao i odgovarajuće oblasti transformacije se mogu videti u Tabeli 1.

Definicija 3.4. Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stepeni red. Tada postoji neko R takvo da:

1. ako $R = \infty$ onda red apsolutno konvergira za svako $z \in \mathbb{C}$,
2. ako $R = 0$ onda red konverira samo ako je $z = 0$ ili
3. ako $R > 0$ onda red konvergira za $|z| < R$ a divergira za $|z| > R$



Slika 17: Oblast konvergencije z-transformacije kada $R_1 < R_2$

Tada se R naziva radius konvergencije stepenog reda.

Neka je sada R_1^{-1} radius konvergencije kauzalnog dela i neka je R_2 radius konvergencije nekauzalnog dela. Tada, kauzalni deo konvergira za $|z| > R_1$, a nekauzalni deo apsolutno konvergira za $|z| < R_2$.

Ukoliko važi $R_1 < R_2$ tada:

- Ako $|z| > R_2$ kauzalni deo konvergira dok nekauzalni deo divergira pa je z-transformacija divergentna.
- Ako je $|z| < R_1$ tada je z-transformacija opet divergentna jer iako nekauzalni deo konvergira, kauzalni deo je divergentan.

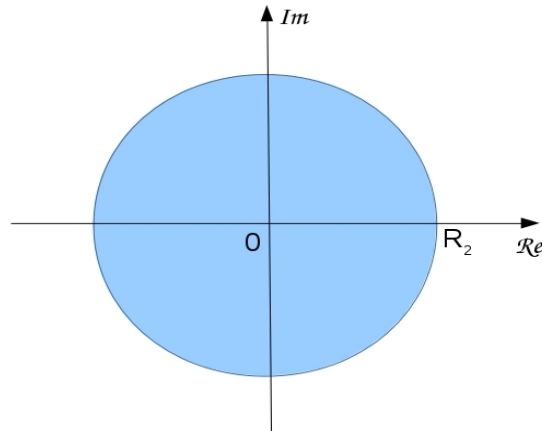
Dakle, za $R_1 < R_2$ z-transformacija konvergira u prstenu $R_1 < |z| < R_2$. Ovaj prsten se naziva **oblast konvergencije** (*region of convergence*) z-transformacije. Ovo je prikazano na slici 17.

Očigledno, ako je $R_1 > R_2$ onda je oblast konvergencije prazna, odnosno z-transformacija je divergentna za svako $z \in \mathbb{C}$.

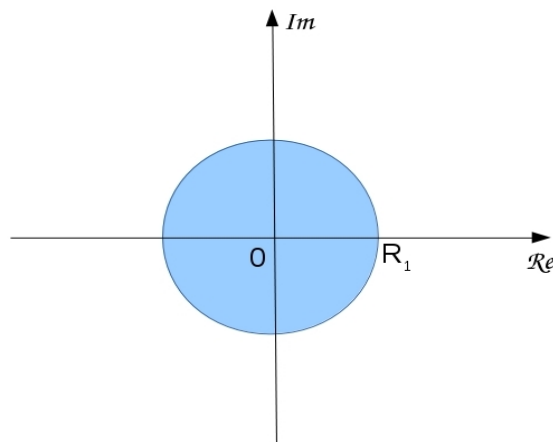
Ako je $R_1 = 0$ onda je oblast konvergencije unutrašnjost kruga čiji je radijus R_2 izuzev $z = 0$. Ovo je ilustrovano na slici 18.

Ako je $R_2 = \infty$ onda je oblast konvergencije spoljašnjost kruga čiji je radijus R_1 što se može videti na slici 19.

Moguće je da z-transformacija konvergira iako Furijeova transformacija ne konvergira. Naime, ako je $f[n] = s[n]$ funkcija koja nije apsolutno sumabilna odnosno Furijeova transformacija ne konvergira apsolutno. Međutim, $s[n]z^{-n}$ je apsolutno sumabilna ukoliko je $z > 1$ odnosno z-transformacija konvergira.



Slika 18: Oblast konvergencije z-transformacije kada $R_1 = 0$



Slika 19: Oblast konvergencije z-transformacije kada $R_2 = \infty$

Ovo se moglo naslutiti na osnovu činjenice da se z-transformacija i Furijeova transformacija poklapaju za $|z| \leq 1$.

U praksi se često pojavljuju signali koji su uključeni u određenom vremenskom trenutku. Za takve signale postoji N takav da $f[n] = 0$ za sve $n < N$. Tada se nekauzalni deo z-transformacije sastoji od konačnog broja elemenata koji nisu nula pa ovaj deo z-transformacije konvergira za sve z . Odnosno, tada je $R = \infty$, a oblast konvergencije je spoljašnjost kruga čiji je radijus R_1 . Primer ovog su kauzalni signali.

Neka je P oblast konvergencije, tada se z-transformacija koja se dodeljuje signalu $f[n]$ može predstaviti na sledeći način:

$$f[n] \leftrightarrow F(z), \text{ za sve } z \in P$$

3.2 Osobine z-transformacije

3.2.1 Linearnost

Neka su $f[n]$ i $g[n]$ dve diskretna vremenska signala. Neka su $F(z)$ i $G(z)$ odgovarajuće z-transformacije. Drugim rečima, neka važi:

$$f[n] \leftrightarrow F(z)$$

$$g[n] \leftrightarrow G(z)$$

Tada za sve $a, b \in \mathbb{C}$ važi

$$af[n] + bg[n] \leftrightarrow aF(z) + bG(z)$$

Da je to zaista tako pokazaće se u nastavku:

$$\begin{aligned} & af[n] + bg[n] \\ & \Leftrightarrow \\ & af[n]z^{-n} + bg[n]z^{-n} \\ & \Leftrightarrow \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} af[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} bg[n]z^{-n} \\ & \Leftrightarrow \\ & a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} \\ & \Leftrightarrow \\ & aF(z) + bG(z) \end{aligned}$$

Dakle, z-transformacija je linearna.

3.2.2 Inverznost

Jedna od važnih uloga z-transformacija jeste analiza linearnih diskretnih vremenskih sistema. Ovakve analize zahtevaju da se z-transformacija može ponovo dobiti nakon određenih manipulacija. Odnosno, potrebno je naći inverznu z-transformaciju.

U nastavku će se objasniti tri metode pomoću kojih se dobijaju inverzne z-transformacije. Prvi metod jeste **metod inspekcije** (*inspection method*). Pomenuti metod će se objasniti na sledećem primeru.

Primer 3.1. Neka je dat signal $f[n] = \delta[n]$ gde je $\delta[n]$ Kronekerova delta. Z-transformacija ovog signala je data sa

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (2)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} \quad (3)$$

$$(4)$$

Kako je Kronekerova delta jednaka nuli za sve vrednosti n koje nisu nula, a samo za $n = 0$ je jednaka 1, data suma je jednaka jedinici. Sada treba naći inverznu z-transformaciju. Pri tome se koristi Tabela 1 z-informacije u kojoj se "inspekcijom" pronalazi da je za z-transformaciju $F(z) = 1$ odgovarajući signal $\delta[n]$. Odnosno, dobija se da važi

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

□

Očigledno, metod inspekcije zavisi od obimnosti tablice z-transformacije. Problem nastaje ukoliko se neka z-transformacija ne nalazi u datoj tabeli.

Sada će se razmotriti z-transformacije koje se ne nalaze u tabeli, ali se mogu razložiti na delove koji se nalaze u tablici. Drugim rečima razmotriće se metod **parcijalnog proširenja razlomka**. (*partial fraction expansion*).

Neka je dato $F(z)$ kao jedna racionalna funkcija koja se može zapisati u obliku

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Neka je $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$, odnosno, red od $A(z)$ je n , a red od $B(z)$ je m .

Da bi se primenio pomenuti metod, treba primetiti da se $F(z)$ može zapisati i u sledećem obliku

$$F(z) = \frac{a_0 (1 - c_1z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - c_nz^{-1})}{b_0 (1 - d_1z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - d_mz^{-1})}$$

gde su $c_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$ nule polinoma $A(z)$, a $d_k \neq 0$, $k = 1, \dots, m$ su nule polinoma $B(z)$ koje se još zovu i **polovi** (*poles*).

Ukoliko je $n < m$ i polovi su prvog reda, prethodna jednačina se može zapisati kao

$$F(z) = \frac{A_1}{1 - d_1 z^{-1}} + \dots + \frac{A_m}{1 - d_m z^{-1}}$$

Na ovaj način, $F(z)$ se može predstaviti kao suma elemenata koji se nalaze u tablici. Sledeći primer ilustruje ovo svojstvo.

Primer 3.2. Neka je data z-transformacija $F(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}$. Primenom metoda parcijalnog proširenja razlomka dobija se

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \\ &= \frac{A_1}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 4z^{-1})} \\ &= \frac{2}{(1 - 4z^{-1})} - \frac{1}{(1 - 2z^{-1})} \end{aligned}$$

Odnosno, na osnovu Tabele 1 se može zaključiti da je odgovarajući signal za datu z-transformaciju $f[n] = 2 \cdot 4^n \epsilon[n] - 1 \cdot 2^n \epsilon[n]$.

□

Treći metod za dobijanje inverzne z-transformacije je **razvoj reda u stepeni red** (*power series expansion*). Ovaj metod pronalazi inverznu z-transformaciju na sličan način kao i prethodni metod, pronalaženjem koeficijenta uz z^{-1} . Odnosno, z-transformacija će se posmatrati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \\ &= \dots + f[0]z^0 + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Sledi primer za ilustraciju ovog metoda.

Primer 3.3. Neka je data z-transformacija

$$F(z) = (1 - 2z^{-1})(1 + 4z^{-1})$$

Kako su svi polovi jednaki nuli, ne može se primeniti prethodni metod parcijalnog proširenja razlomka. Umesto toga, inverzna transformacija se dobija na sledeći način

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 - 2z^{-1})(1 + 4z^{-1}) \\ &= 1 + 2z^{-1} + 8z^{-2} \end{aligned}$$

Da bi se dobio traženi signal potrebno je obratiti pažnju na koeficijente. Odnosno, treba primetiti

$$\begin{aligned} f[0] &= 1 \\ f[1] &= 2 \\ f[2] &= 8 \\ f[k] &= 0 \text{ za sve ostale } k \end{aligned}$$

Dakle, dobija se da je odgovarajući signal

$$f[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 8\delta[n-2]$$

□

3.2.3 Vremenski preokret

Postavlja se pitanje, šta se dešava ukoliko se n zameni sa $-n$. Odnosno, polazeći od sledeće sume

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[-n]z^n$$

da li je moguće dobiti z-transformaciju.

Odgovor se nalazi u smeni $s = \frac{1}{z}$. Naime, ako važi data smena, suma postaje

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[-n]s^{-n} = F(s)$$

Drugim rečima, važi

$$f[-n] \leftrightarrow F\left(\frac{1}{z}\right)$$

Treba, takođe, primetiti da ako je R radijus konvergencije od $F(z)$ tada je $\frac{1}{R}$ radijus konvergencije od $F(\frac{1}{z})$.

3.2.4 Konjugacija

Z-transformacija od signala $\overline{f[n]}$ je $\overline{F(\bar{z})}$ odnosno $\overline{f[n]} \leftrightarrow \overline{F(\bar{z})}$ jer:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f[n]}z^{-n} &= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n](\bar{z})^{-n}} \\ &= \overline{F(\bar{z})} \end{aligned}$$

Odavde sledi da ako je $f[n]$ realan signal tj ako važi $f[n] = \overline{f[n]}$ tada uvrštavanjem u gornju jednačinu se dobija da važi i $F(z) = \overline{F(\bar{z})}$.

Očigledno, važi i obrnuto. Neka važi $F(z) = \overline{F(\bar{z})}$ tada su sume

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

i

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f[n]}z^{-n}$$

jednake pa je $f[n] = \overline{f[n]}$ odnosno dati signal je realan.

Neka je $f[n]$ realan signal i neka je a nula od $F(z)$. Tada je $\overline{F(\bar{a})} = F(a) = 0$ sledi da je $F(a) = 0$ odnosno \bar{a} je nula od $F(z)$.

3.2.5 Pomeranje u vremenskom domenu

Neka je $l \in \mathbb{Z}$ tada važi

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n-l]z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-(n+l)} \\ &= z^{-l}F(z) \end{aligned}$$

odnosno

$$f[n-l] \leftrightarrow z^{-l}F(z)$$

Kada je $l < 0$ tada se signal $f[n]$ pomera levo, a kada je $l > 0$ onda se pomera desno.

Diskretni vremenski signal za koji važi $f[n] \neq 0$ za samo konačno mnogo vrednosti n može se prikazati na sledeći način:

$$f[n] = \sum_{l=-N}^N f[l]\delta[n-l]$$

gde je N takvo da $f[n] = 0$ za $|n| > N$.

Sledi da je z-transformacija datog signala data sa

$$F(z) = \sum_{l=-N}^N f[l]z^{-l}$$

Primer 3.4. Neka je dat signal $\delta[n - l]$. Korišćenjem osobine pomeranja u vremenskom domenu, lako se dobija da je odgovarajuća z-transformacija datog signala

$$\begin{aligned}\hat{F}(z) &= z^{-l}F(z) \\ &= z^{-l} \cdot 1\end{aligned}$$

Ovo se može proveriti u Tabeli 1.

□

3.2.6 Skaliranje u z-domenu

Pod skaliranjem u z-domenu smatra se smena z sa $\frac{z}{a}$ gde je a kompleksan nenula broj.

Dakle,

$$\begin{aligned}F\left(\frac{z}{a}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n f[n]z^{-n}\end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$a^n f[n] \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

3.2.7 Diferenciranje u z-domenu

Prvo se treba podsetiti diferencijabilnosti stepenog reda $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Neka ovaj red ima radijus konvergencije R . Tada za $|z| < R$ važi

$$\frac{d}{dz}S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Ova osobina se može proširiti na stepeni red u z-domenu.

Da bi se došlo do definicije diferenciranja u z-domenu treba krenuti od definicije z-transformacije. Potom treba diferencirati i levu i desnu stranu i na kraju pomnožiti sa $-z$.

Odnosno,

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)f[n]z^{-n-1} \\
&\Leftrightarrow \\
-z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)f[n]z^{-n-1} \\
&\Leftrightarrow \\
-z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf[n]z^{-n}
\end{aligned}$$

Sledi da je diferenciranje z-transformacije dato na sledeći način

$$nf[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z)$$

Primer 3.5. Neka je dat signal $f[n] = \epsilon[n]$. Iz tablice je poznato da je z-transformacija ovog signala jednaka $F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$. Da bi se dobila z-transformacija koja odgovara signalu $\hat{f}[n] = n\epsilon[n]$, data z-transformacija će se diferencirati po z i potom pomnožiti sa $-z$.

$$\begin{aligned}
-z \frac{d}{dz} F(z) &= -z \frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} \\
&= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \hat{F}(z)
\end{aligned}$$

Ovo je zaista z-transformacija od $\hat{f}[n]$ što se može videti u u sedmom redu Tabele 1 za $a = 1$.

3.2.8 Konvolucija

Neka su data dva diskretna vremenska signala $f[n]$ i $g[n]$. Neka su njihove z-transformacije date sa $F(z)$ i $G(z)$, respektivno. Do definicije konvolucije

u z-domenu dolazi se pomoću z-transformacije signala oblika

$$h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l].$$

Naime, z-transformacija ovakvog signala je

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l]z^{-n} \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $k = n - l$ dobija se

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[k]z^{-k-l} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[k]z^{-k}z^{-l} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]z^{-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]z^{-k} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]z^{-l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]z^{-k} \\ &= F(z)G(z) \end{aligned}$$

Dakle, sledi definicija konvolucije u z-domenu.

Definicija 3.5. Neka su data dva diskretna vremenska signala $f[n]$ i $g[n]$. Proizvod konvolucije je

$$(f * g)[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l]$$

Teorema koja sledi zove se teorema konvolucije i biće data bez dokaza.

Teorema 3.1. Neka su data dva diskretna vremenska signala $f[n]$ i $g[n]$. Neka su $F(z)$ i $G(z)$ odgovarajuće z-transformacije. I neka je P presek oblasti konvergencije ovih z-transformacija. Tada važi

$$(f * g)[n] \leftrightarrow F(z)G(z) \text{ za } z \in P$$

U praksi se često susreću signali koji imaju konačno vreme uključivanja (*finite switch-on time*). Oblast konvergencije ovakvih signala predstavlja spoljašnjost kruga. Proizvod konvolucije dva ovakva signala je opet jedan takav signal pa je oblast konvergencije opet spoljašnjost kruga.

Neka su $f[n]$ i $g[n]$ diskretni vremenski signali takvi da važi $f[n] = g[n] = 0$ za $n < N$. Konvolucija se tada može zapisati kao

$$\begin{aligned}(f * g)[n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l] \\ &= \sum_{l=N}^{\infty} f[l]g[n-l]\end{aligned}$$

Ako je $n < 2N$ onda $n-l < 2N - N = N$ za $l \leq N$. Odnosno, proizvod konvolucije je nula za $n < 2N$. Ako je pri tome i $l > n - N$ tada je $g[n-l] = 0$ tj., samo konačan broj elemenata ove sume nije nula.

Dakle, zaključak je da važi

$$(f * g)[n] = \left(\sum_{l=N}^{n-N} f[l]g[n-l] \right) \in [n - 2N]$$

A ako su pri tome $f[n]$ i $g[n]$ kauzalni signali onda je i njihov proizvod konvolucije takođe kauzalni signal. Drugim rečima,

$$(f * g)[n] = \left(\sum_{l=0}^n f[l]g[n-l] \right) \in [n]$$

4 Primene u Matlabu

Algoritmi koji su uvedeni u poglavlju 2 mogu se primeniti u raznim programima. U ovom radu korišćen je Matlab program. Dakle, slede odgovarajući kodovi i njihova objašnjenja.

4.1 DFT i FFT algoritmi

Prvo se razmatra algoritam koji je ilustrovan na primeru 2.6. Njegov odgovarajući Matlab kod glasi

```
function MF = algoritam(Mf)
[N1, N2] = size(Mf);
N = N1 * N2;
for n = 0 : 1 : N2 - 1
    for k = 0 : 1 : N2 - 1
        w2 = cos(-2 * pi * n * k / N2) + 1i * sin(-2 * pi * n * k / N2);
        A(n + 1, k + 1) = w2;
    end
end
C = Mf * A';
C
for n = 0 : 1 : N1 - 1
    for k = 0 : 1 : N2 - 1
        w = exp(-2 * pi * i * n * k / N);
        Ct(n + 1, k + 1) = C(n + 1, k + 1) * w;
    end
end
Ct
for n = 0 : 1 : N1 - 1
    for k = 0 : 1 : N1 - 1
```

```

        w1 = cos(-2 * pi * n * k / N1) + 1i * sin(-2 * pi * n * k / N1);
        B(n + 1, k + 1) = w1;
    end
end
MF = B * Ct;

```

Ovaj algoritam za unešenu matricu M_f računa matricu M_F . Dakle, prvi korak ovog algoritma jeste uneti matricu M_f . Potom, unešeni podaci prolaze kroz tri for petlje.

Prva for petlja pravi matricu A koja u sebi sadrži odgovarajuće vrednosti rotirajućih faktora. Potom se formira matrica C kao proizvod unešene matrice i transponovane matrice A . Drugim rečima ova for petlja predstavlja drugi korak algoritma.

Druga for petlja ovog algoritma kreira matricu C_t . Ova matrica se dobija tako što se elementi prethodno dobijene matrice C pomnože sa odgovarajućim rotirajućim faktorima. Odnosno, ovo predstavlja treći korak algoritma.

Treća for petlja pravi matricu B od odgovarajućih rotirajućih faktora. Konačno, dobija se željena matrica M_F kao proizvod matrica B i C_t gde je C_t matrica koja je izračunata u prethodnom koraku.

Sada se ovaj algoritam može primeniti na primer 2.6 tako što se u Matlab unese odgovarajuća matrica M_f odnosno: `algoritam([0 1;1 0;0 1;1 0])`.

Algoritam će u ovom slučaju ispisati sledeće matrice:

$$C = \begin{array}{cc} 1.0000 + 0.0000i & -1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i & -1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i \end{array}$$

$$C_t = \begin{array}{cc} 1.0000 + 0.0000i & -1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i & 0.7071 - 0.7071i \\ 1.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 1.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i & -0.7071 - 0.7071i \end{array}$$

$$ans = \begin{array}{cc} 4.0000 + 0.0000i & -1.0000 - 0.4142i \\ -0.0000 - 0.0000i & -1.0000 - 2.4142i \\ 0.0000 - 0.0000i & -1.0000 + 2.4142i \\ 0.0000 - 0.0000i & -1.0000 + 0.4142i \end{array}$$

Drugim rečima, algoritam ispisuje iste matrice koje su ručno dobijene u primeru 2.6. Treba primetiti da za rad algoritma nije neophodno ispisati matrice C i C_t već je to učinjeno da bi se pomenuti primer mogao bolje sagledati.

Sada se posmatra drugi algoritam koji je ilustrovan na primeru 2.7. Odgovarajući Matlab kod ovog algoritma je

```

function MF = algoritam2(Mf)
[N1, N2] = size(Mf);
N = N1 * N2;
if N1 ~= 2 || rem(N2, 2) ~= 0
    fprintf('Uneta matrica nije odgovarajucih dimenzija.
Dimenzije moraju biti  $2 \times 2^{m-1}$ ');
else
    for n = 0 : 1 : N2 - 1
        for k = 0 : 1 : N2 - 1
            w = exp(-2 * pi * i * n * k / (N/2));
            A(n + 1, k + 1) = w;
        end
    end
    C = Mf * A;
    C
    for n = 0 : 1 : 1
        for k = 0 : 1 : N2 - 1
            v = exp(-2 * pi * i * n * k / N);
            Ct(n + 1, k + 1) = C(n + 1, k + 1) * v;
        end
    end
    Ct
    for n = 0 : 1 : 1
        for k = 0 : 1 : 1
            y = exp(-2 * pi * i * n * k / 2);
            B(n + 1, k + 1) = y;
        end
    end
    MF = B * Ct;
end

```

Ovaj algoritam funkcioniše na sličan način kao i prethodni tako što za unešenu matricu M_f računa matricu M_F . Međutim, sada su bitne dimenzije

matrice M_f . Odnosno, prvo se mora ispitati da li je uneta matrica dimenzija $2 \times 2^{m-1}$. Ovo se ispituje pomoću operacije "if". Dakle, prvi korak ovog algoritma jeste uneti matricu M_f i ispitati da li su dimenzije date matrice odgovarajuće. Potom, unešeni podaci prolaze kroz tri for petlje, na sličan način kao i u prethodnom algoritmu.

Prva for petlja, odnosno drugi korak algoritma, kreira matricu A koja sadrži odgovarajuće vrednosti rotirajućih faktora. Zatim se formira matrica C , slično kao i pre. Dobijena matrica C biće dimenzija $2 \times 2^{m-1}$.

Druga for petlja, treći korak algoritma, pravi matricu C_t . Ova matrica je, u stvari, matrica C pomnožena sa odgovarajućim rotirajućim faktorima.

Treća for petlja, ujedno i poslednji korak algoritma, daje matricu B od odgovarajućih rotirajućih faktora. Konačno, dobija se tražena matrica M_F .

Za ilustraciju ovog algoritma će se koristiti podaci iz primera 2.7. Kao i u prethodnom slučaju, u Matlab-u se algoritam poziva na sledeći način: `algoritam2([0 0 1 1;1 1 0 0])`.

Analogno prethodnom, algoritam ispisuje sledeće matrice:

$$C = \begin{matrix} & 2.0000 & -1.0000 + 1.0000i & 0.0000 & -1.0000 - 1.0000i \\ 2.0000 & & 1.0000 - 1.0000i & 0.0000 & 1.0000 + 1.0000i \end{matrix}$$

$$C_t = \begin{matrix} & 2.0000 & -1.0000 + 1.0000i & 0.0000 & -1.0000 - 1.0000i \\ 2.0000 & & 0.0000 - 1.4142i & 0.0000 & 0.0000 - 1.4142i \end{matrix}$$

$$ans = \begin{matrix} & 4.0000 & -1.0000 - 0.4142i & 0.0000 & -1.0000 - 2.4142i \\ 0.0000 & & -1.0000 + 2.4142i & 0.0000 & -1.0000 + 0.4142i \end{matrix}$$

Odnosno, algoritam daje iste matrice koje su prethodno ručno dobijene u primeru 2.7. Naravno, kao i ranije, nije bilo neophodno ispisati matrice C i C_t već je to urađeno da bi se primer 2.7 mogao pratiti kroz korake.

Matlab program ima u sebi funkciju za računanje brze Furijeove transformacije. To je funkcija *fft*. Iako ova ugrađena funkcija nije zgodna za poređenje dva algoritma kojima se bavi ovaj rad, može da posluži kao provera drugog algoritma. Dakle, ukoliko se pozove `fft([0 1 0 1 1 0 1 0])` što, u stvari predstavlja `fft([f[0] f[1] f[2] f[3] f[4] f[5] f[6] f[7]])` dobiće se iste vrednosti kao i malopre.

Kako su oba algoritma predstavljena i pokazana na primerima, ostalo je uporediti njihove brzine. Merenje vremena potrebnog za izvršavanje programa je u Matlab-u moguće pomoću naredbi "tic" i "toc". Na osnovu razmatranja iz Poglavlja 2 očekuje se da će drugi algoritam biti brži jer zahteva značajno manje elementarnih operacija.

Dodavanjem naredbe "tic" na početak programa i naredbe "toc" na kraj programa dobija se da je vreme izvršenja prvog algoritma 0.001841 sekunda, dok je vreme potrebno da se izvrši drugi algoritam 0.000381 sekunde.

Neophodno je napomenuti da brzina programa takođe zavisi od verzije Matlab-a koji se koristi, kao i od operativnog sistema i samog računara. U svakom slučaju, zaključak je da je drugi algoritam zaista brži od prvog, kao što se i pretpostavljalo. Naravno, razlika u brzini je ovde mala, ali sa povećanjem dimenzija matrice M_f povećava se i ova razlika.

4.2 Algoritam brze konvolucije

Sledeći Matlab kod koji se razmatra jeste kod koji odgovara algoritmu za računanje brze konvolucije.

Da bi se za unete vrednosti signala $f[n]$ i $g[n]$ dobio rezultat proizvoda ciklične konvolucije, potrebno je prvo pomenute signale zapisati u obliku matrica M_f i M_g koje sadrže vrednosti ovih signala, respektivno. Nakon toga, program će proveriti da li su unete matrice odgovarajućih dimenzija. Dakle, treba paziti da oba signala budu perioda N .

Sledeći korak jeste primeniti FFT algoritam na obe matrice. Rezultat su matrice F i G koje odgovaraju frekvencijama $F[k]$ i $G[k]$. Potom se dobijene matrice F i G pomnože. Ovde treba obratiti pažnju da se ovde ne radi o matričnom množenju već o množenju odgovarajućih elemenata.

Poslednji korak algoritma jeste primeniti inverznu FFT na prethodno pomenut proizvod. Ovo se rešava putem programa koji će biti opisan kasnije.


```

function res = algoritam3(Mf, Mg)
[N1, N2] = size(Mf);
[M1, M2] = size(Mg);
N = N1 * N2;
if N1 ~= M1 || N2 ~= M2
    fprintf('Unete matrice nisu odgovarajucih dimenzija.
    Dimenzije moraju biti iste');
else
    F = algoritam2(Mf);
    F
    G = algoritam2(Mg);
    G
    FK = F * G;
    res = invalg(FK);
end

```

Sada će se ilustrovati primer 2.8 pomoću matlaba i prethodnog koda. Dakle, za uneto `algoritam3([0 0 1 1;1 1 0 0],[1 0 1 0;0 1 0 1])` dobija se

$F =$

4.0000	$-1.0000 - 0.4142i$	0.0000	$-1.0000 - 2.4142i$
0.0000	$-1.0000 + 2.4142i$	0.0000	$-1.0000 + 0.4142i$

$G =$

4.0000	0.0000	$2.0000 + 2.0000i$	0.0000
0.0000	0.0000	$2.0000 - 2.0000i$	0.0000

$FK =$

16.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

```

ans =
    2.0000    2.0000    2.0000    2.0000
    2.0000    2.0000    2.0000    2.0000

```

Dakle, rešenje koje se dobija pomoću ovog algoritma odgovara rešenju dobijenom ručnim izračunavanjem u primeru 2.8.

Naravno, za dobijanje matrica F i G mogao se koristiti i prvi algoritam, ali kao što je ranije ustanovljeno, drugi algoritam je brži.

4.3 Inverzan FFT algoritam

Kao što je najavljeno, sada će se prikazati kod kojim se dobija inverzan FFT algoritam.

```

function Mf = invalg(MF)
[N1, N2] = size(MF);
N = N1 * N2;
if N1 ~= 2 || rem(N2, 2) ~= 0
    fprintf('Uneta matrica nije odg dimenzija');
else
    for n = 0 : 1 : 1
        for k = 0 : 1 : 1
            w = exp(2 * pi * 1i * n * k / 2);
            A(n + 1, k + 1) = w;
        end
    end
    C = A * MF;
    for n = 0 : 1 : 1
        for k = 0 : 1 : N2 - 1
            v = exp(2 * pi * 1i * n * k / N);
            Ct(n + 1, k + 1) = C(n + 1, k + 1) * v;
        end
    end
end

```

```

for n = 0 : 1 : N2 - 1
    for k = 0 : 1 : N2 - 1
        y = exp(2 * pi * 1i * n * k / (N/2));
        B(n + 1, k + 1) = y;
    end
end
Mf = (1/N) * Ct * B;
end

```

Da je ovo zaista algoritam za dobijanje inverzne FFT može se proveriti unošenjem rezultata programa *algoritam2* u *invalg* program. Rezultat je signal koji je prvobitno unešen u program *algoritam2*.

4.4 Generisanje slika

Matlab program je, u ovom radu, takođe korišćen za dobijanje odgovarajućih slika. Sada će se objasniti kod kojim se generiše slika dobijena pomoću DFT vrednosti.

Matlab kod koji sledi služi za dobijanje slike 15. Odnosno, za unetu vrednost N , ovim kodom se dobija N cosinusnih i N sinusnih talasa koji predstavljaju realni i imaginarni deo signala koji je transformisan koristeći diskretnu Furijeovu transformaciju. Uzorkovani talasi generisani su pomoću rotirajućih faktora w_N^{ij} .

```

function res = grafik(N)
n = [0 : N - 1];
t = [0 : 0.01 : N];
k = n';
w = -2 * pi * k / N;
clf;

```

```

for i = 1 : N
    subplot(N, 2, 2 * i - 1);
    plot(t, cos(w(i) * t))
    axis([0, N, -1, 1]);
    hold on;
    plot(n, cos(w(i) * n), ' *')
    ylabel(sprintf('k = %d', k(i)));
    subplot(N, 2, 2 * i);
    plot(t, sin(w(i) * t))
    axis([0, N, -1, 1]);
    hold on;
    plot(n, sin(w(i) * n), ' *')
    ylabel(sprintf('k = %d', k(i)));
end

```

Literatura

- [1] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, John R. Buck *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, 1999.
- [2] Julius O. Smith III *Mathematics of the Discrete Fourier Transform*, Center for Computer Research in Music and Acoustics, Stanford University, 2002.
- [3] J. F. James *A Student's Guide to Fourier Transforms with Applications in Physics and Engineering, Third Edition*, Cambridge University Press, 2011.
- [4] Nenad Teofanov *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
- [5] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.
- [6] Ronald N. Bracewell *The Fourier Transform And Its Applications, Third Edition*, McGraw-Hill, 2000.
- [7] Steven W. Smith *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, 1999.

Biografija



Katarina Kovačević rođena je 24.01.1993. godine u Novom Sadu. Pored osnovne škole "Sonja Marinković" završila je i osnovnu baletsku školu. Potom je upisala prirodno-matematički smer u gimnaziji "Isidora Sekulić" u Novom Sadu. Gimnaziju je završila 2011. godine sa odličnim uspehom i upisala osnovne akademske studije primenjene matematike na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i 2015. godine završila osnovne akademske studije. Iste godine je upisala master studije primenjene matematike. Provela je dva semestra na univerzitetu u Bolonji, u Italiji gde je polagala ispite na italijanskom i engleskom jeziku. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2017. godine položila je sve ispite i stekla uslov za odbranu ovog master rada. Od novembra 2017. godine zaposlena je u kompaniji DDOR RE.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Katarina Kovačević

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: Diskretne transformacije signala, primene i algoritmi

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2018

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/75/0/1/4/15/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza

ND

Ključne reči: Signal, Furijeova transformacija, diskretna Furijeova transformacija, brza Furijeova transformacija, brza konvolucija, brza korelacija, z-transformacija

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj rad se bavi proučavanjem primena diskretne Furijeove transformacije. U uvodnom delu se objašnjava pojam signala, njegovo uzorkovanje i rekonstrukcija. Takođe se definiše Furijeov red i Furijeova transformacija. Potom se proučavaju diskretne Furijeove transformacije i njene osobine. Definišu se DFT i FFT algoritmi i objašnjavaju se primene kao što su brza konvolucija i brza korelacija. Zatim se uvodi pojam z-transformacije kao širi oblik diskretne Furijeove transformacije. Na kraju rada se prethodno objašnjeni algoritmi primenjuju u Matlab programu.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.10.2017.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Katarina Kovačević

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

MN

Title: Discrete transforms of signals, applications and algorithms

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2018

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (4/75/0/1/4/15/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis

SD

Subject/Key words: Signals, Fourier transform, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, fast convolution, fast correlation, z-transform

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This Master thesis studies the applications of discrete Fourier transform. The introductory part explains the concept of the signal, its sampling and reconstruction. It also defines Fourier series and Fourier transform. Then, discrete Fourier transforms and its properties are studied. DFT and FFT algorithms are defined and applications such as fast convolution and fast correlation are explained. In the following chapter, the concept of z-transformation is introduced as a wider form of discrete Fourier transform. At the end of the thesis, the previously explained algorithms are applied in the Matlab program.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.10.2017.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Milica Žigić, docent at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad