Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

MASTER RAD

KOMPAKTNI I RISOVI OPERATORI

mentor:
Prof. dr Dragan Đorđević

student:
Jelena Jovanović

2015,
Niš

Sadržaj

Uvod

Funkcionalna analiza je jedno od najsadržajnijih i najznačajnijih područja savremene matematike. Nastala je krajem devetnaestog i početkom dvadesetog veka kao nadgradnja linearne algebre i nekih područja klasične analize. Predmet proučavanja funkcionalne analize su funkcije koje imaju neko zajedničko svojstvo, a ne individualna funkcija. Danas je funkcionalna analiza primenljiva u gotovo svim matematičkim disciplinama, ali i u fizici i tehnici.

U ovom radu razmatrani su veoma važni pojmovi u matematici uopšte, operatori. Konkretno, opisani su kompaktni i Risovi operatori. U prvoj glavi su, ukratko, date osnovne definicije i teoreme vezane za neke vektorske prostore. Najveća pažnja, jasno, ukazana je Banahovim i Hilbertovim prostorima. Zatim, dati su rezultati vezani za prostore ograničenih linearnih operatora.

Sa kompaktnim operatorima sretali smo se još u okviru kursa "Funkcionalna analiza", ali u ovom radu su detaljnije opisana svojstva kompaktnih operatora i rezultati vezani za spektar kompaktnog operatora, i za kompaktne operatore na različitim vektorskim prostorima. To je sadržaj druge glave.

Ako se zadržimo na spektralnoj teoriji kompaktnih operatora, i ignorisemo ostale njihove osobine, izvršili smo generalizaciju istih, i dobili takozvane Risove operatore. O njima ce biti reči u trećoj glavi.

Ovom prilikom želim da se zahvalim pre svega svom mentoru, prof. Dr Draganu Đorđevicu na ukazanoj pomoći pri izradi rada. Veoma sam zahvalna i na pomoći pri odabiru teme, i nadam se da sam uspela da ostvarim ono sto se od mene očekuje. Naravno, svesna sam da rad sadrži dosta propusta, i unapred se zbog njih izvinjavam.

Takođe, ogromnu zahvalnost dugujem svojoj porodici i prijateljima koji su bez izuzetka bili uz mene svih ovih godina i pružali mi bezgraničnu podršku. Ovom prilikom želim da izrazim neizmernu zahvalnost prema profesoru Miliću Mitroviću koji je davno probudio u meni ljubav prema matematici i usmerio me na ovaj put, i koji je oduvek verovao u mene i bodrio me.

1 NORMIRANI PROSTORI

1.1 Osnovne definicije i teoreme

Definicija 1.1.1. Funkcija $x \longmapsto |x|$ sa vektorskog prostora X u skup realnih brojeva je *norma* na X ako ona ima svojstva:
(N1) $x \geqslant 0$ za svako $x \in X$;
(N2) $|x| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;
(N3) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ za svaki skalar λ i svako $x \in X$ (homogenost norme) ;
(N4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ za sve $x, y \in X$ (nejednakost trougla).

Uređen par $(X, |.|)$ vektorskog prostora X i norme $x \longmapsto |x|$ definisane na X naziva se *normiran vektorski prostor.*
Komentar: Norma se često označava i sa $\| \cdot \|$.
Neka je $\Phi = C$ ili R.

Primer 1.1. Sa

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

data je norma na vektorskom prostoru Φ^n.

Primer 1.2. Sa

$$|x|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, ..., |\xi_n|\}, \qquad\qquad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

data je norma na vektorskom prostoru Φ^n .

Primer 1.3. Ako je $(x, y) \longmapsto (x|y)$ skalarni proizvod na prostoru X , onda je

$$(1) \qquad\qquad x \longmapsto |x| = (x|x)^{1/2}$$

norma na X .
Norma iz *Primera 1.3.* zadovoljava *relaciju paralelograma* :

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2, (x, y \in X).$$

Teorema 1.1.1.(P.Žordan- J. Fon Nojman) *Ako norma $x \longmapsto |x|$ na prostoru X zadovoljava relaciju paralelograma (1) , onda je sa*

$$(x|y) = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2)$$

dat skalarni proizvod na X u slučaju da je X realan prostor, odnosno sa

$$(x|y) = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) + \frac{i}{4}(|x+iy|^2 - |x-iy|^2)$$

u slučaju da je X kompleksan prostor. U oba slučaja je

$$|x|^2 = (x|x).$$

Definicija 1.1.2. Funkcija $d : X \times X \longmapsto [0, \infty)$ je *metrika* na skupu X ako zadovoljava sledeće uslove:
(M1) $d(x,y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in X$;
(M2) $d(x,y) = 0$ akko $x = y$;
(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ za sve $x, y \in X$;
(M4) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$,za sve $x, y, z \in X$ (nejednakost trougla).
Uređen par (X, d) naziva se *metrički prostor*.

Teorema 1.1.2. *Ako je $x \longmapsto |x|$ norma na vektorskom prostoru X, onda je*

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x, y \in X$$

metrika na X.
Vektorski prostor X snabdeven skalarnim proizvodom $(.|.)$ naziva se unitarni (pre-Hilbertov) prostor. U daljem razmatranju smatraćemo da je svaki unitaran prostor X snabdeven normom $x \longmapsto (x|x)^{\frac{1}{2}}$ *(norma indukovana skalarnim proizvodom)*, i da je svaki normiran prostor X snabdeven metrikom $(x,y) \longmapsto |x-y|$ *(metrika indukovana normom)* .

1.2 Banahovi i Hilbertovi prostori

Definicija 1.2.1. Za niz $(x_n)_n$ vektora normiranog vektorskog prostora X kažemo da *konvergira po normi* ka vektoru $x_0 \in X$ ako niz brojeva $|x_n - x_0|$ konvergira nuli.
Ako niz $(x_n)_n$ konvergira ka x_0 onda pišemo $x_0 = \lim x_n$.

Definicija 1.2.2. Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira* ako niz $(s_n)_{n \in N}$ parcijalnih suma $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ konvergira po normi.

Definicija 1.2.3. Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *apsolutno konvergira* ako brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergira.

Definicija 1.2.4. Niz $(x_n)_{n \in N}$ normiranog prostora X je *Košijev niz* ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in N)(\forall p, q \geqslant n(\varepsilon) \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon).$$

Svaki konvergentan niz je Košijev. Medjutim, nije svaki Košijev niz konvergentan. Za vektorski prostor kažemo da je *kompletan* ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Definicija 1.2.5. Normiran vektorski prostor X je *Banahov prostor* ako je svaki Košijev niz elemenata prostora X konvergentan u X.
Drugim rečima, normiran prostor X je Banahov ako je (X, d) kompletan metrički prostor, gde je d metrika indukovana normom.

Definicija 1.2.6. Kompletan unitaran prostor naziva se *Hilbertov prostor.*

Teorema 1.2.1. *Normiran prostor X je kompletan ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red vektora iz X konvergira u X.*

Definicija 1.2.7. Skup $F \subseteq X$ normiranog prostora X je :

(a) *zatvoren*, ako sadrži sve granične vrednosti konvergentnih nizova iz F;
(b) *relativno kompaktan*, ako svaki niz iz F ima konvergentan podniz;
(c) *kompaktan*, ako svaki niz iz F sadrži konvergentan podniz čija granična vrednost pripada skupu F.
Zatvorenje skupa F u normiranom prostoru X jeste $\overline{F}$.

Ako je Y potprostor normiranog (unitarnog) prostora X , onda je i $\overline{Y}$ potprostor od X. Takođe, lako se pokazuje da ako je X Banahov (Hilbertov prostor), takav je i $\overline{Y}$.

Teorema 1.2.2. *Svaki konačno-dimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je Banahov prostor. Specijalno, svaki konačno-dimenzionalan normiran prostor je Banahov.*

Posledica 1.2.3. *Konačno-dimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je zatvoren skup u X.*

Teorema 1.2.4. *Zatvorena kugla u beskonačno-dimenzionalnom normiranom prostoru nije relativno kompaktan skup.*

Navešćemo i jedan važan rezultat do kog je došao F.Ris. On je od velike važnosti onda kada ispitujemo kompaktnost skupova.

Teorema 1.2.5. *Normiran prostor X je konačno-dimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

1.3 Normiran prostor $L(X, Y)$

Neka su X i Y normirani vektorski prostori.

Definicija 1.3.1. Linearan operator $A : X \longrightarrow Y$ je *ograničen* ako postoji realan broj $M \geqslant 0$ takav da je

$$|Ax| \leqslant M|x| \qquad \forall x \in X.$$

Teorema 1.3.1. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori. Linearan operator $A : X \longrightarrow Y$ je ograničen ako i samo ako je A neprekidan na X.*

Skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y označen je sa $L(X, Y)$. Specijalno $L(X, X) = L(X)$.

Teorema 1.3.2. *Ako je* $\dim X < \infty$*, onda je svaki linearni operator koji slika X u Y neprekidan.*

Definicija 1.3.2. Neka su X i Y normirani prostori. *Norma operatora* $A \in L(X, Y)$ je broj definisan sa:

$$|A| = \sup\{Ax : x \in X, |x| \leqslant 1\}$$

Teorema 1.3.3. *Ako su X i Y normirani prostori, onda je $L(X, Y)$ normiran prostor.*

Jedan od najznačajnijih rezultata iz ove oblasti je sledeći:

Teorema 1.3.4. *Ako je Y Banahov prostor, onda je $L(X, Y)$ Banahov prostor.*

1.4 Spektar i rezolventa

Ono što je važno za teoriju operatora uopšte, jeste da ako je X Banahov prostor, prostor $L(X)$ predstavlja **Banahovu algebru**. Za elemenat $a \in A$, gde je A algebra, definisali smo spektar $\sigma(a)$ kao

$$\sigma(a) = \{\lambda \in C : a - \lambda \notin A^{-1}\}$$

gde je sa A^{-1} označen skup svih elemenata iz A koji su invertibilni. Zato možemo posmatrati spektar operatora $T \in L(X)$.

Neka je X Banahov prostor i neka je $T \in L(X)$.

Definicija 1.4.1. *Rezolventni skup operatora T*, u oznaci $\rho(T)$ je skup kompleksnih brojeva λ za koje je $\lambda I - T$ invertibilan element Banahove algebre $L(X)$.

Definicija 1.4.2. *Spektar operatora T*, $\sigma(T)$, definišemo kao

$$\sigma(T) = C \backslash \rho(T).$$

Definicija 1.4.3. Funkcija

$$\lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1} \qquad (\lambda \in \rho(T))$$

naziva se *rezolventa operatora T.*

Teorema 1.4.1. *Neka je $T \in L(X)$. Rezolventni skup $\rho(T)$ je otvoren*

Teorema 1.4.2. *Ako je $d(\lambda)$ rastojanje između λ i spektra $\sigma(T)$, onda*

$$|(\lambda I - T)^{-1}| \geqslant \frac{1}{d(\lambda)}, \qquad (\lambda \in \rho(T)).$$

Stoga $|(\lambda I - T)^{-1}| \longrightarrow \infty$ kada $d(\lambda) \longrightarrow 0$.

Teorema 1.4.3. *Neka je $T \in L(X)$. Tada je $\sigma(T)$ je kompaktan i neprazan skup.*

Definicija 1.4.4. Spektralni radijus $\nu(T)$ definisan je sa

$$\nu(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 1.4.4. *Za spektralni radijus operatora T važi*

$$\nu(T) = \lim |T^n|^{1/n} \leqslant |T|.$$

Definicija 1.4.5. Operator T je *kvazi-nilpotentan* ako i samo ako je $\lim |T^n|^{1/n} = 0$.

Teorema 1.4.5. *Neka je $T \in L(X)$.*
(i) T je kvazi-nilpotentan ako i samo ako $\nu(T) = 0$.
(ii) T je kvazi-nilpotentan ako i samo ako je $\sigma(T) = \{0\}$.

Definicija 1.4.6. Za linearni operator T definišemo:
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in C : \lambda I - T \text{ nije } "1-1"\}$,
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in C : \lambda I - T \text{ je } "1-1", \overline{(\lambda I - T)X} = X, (\lambda I - T)X \neq X\}$,
$\sigma_r(T) = \{\lambda \in C : \lambda I - T \text{ je } "1-1", \overline{(\lambda I - T)X} \neq X\}$.

$\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ nazivaju se, respektivno, *tačkasti, neprekidni i rezidualni spektar operatora T.*
Očigledno:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Za $\lambda \in \sigma_p(T)$ kažemo da je *sopstvena vrednost operatora T.* To znači da postoji nenula vektor x takav da je $Tx = \lambda x$. Taj vektor nazivamo *sopstveni vektor* odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ od T.

Definicija 1.4.7. Neka je $T \in L(X)$. *Aproksimativni tačkasti spektar operatora T*, $\sigma_a(T)$, definišemo kao

$\sigma_a(T) = \{\lambda \in C :$ postoji niz (x_n) u X takav da je $|x_n| = 1$, i $lim|(\lambda I - T)x_n| = 0\}$.

Teorema 1.4.6. *Neka je U invertibilan element iz $L(X)$. Pretpostavimo da postoji realan broj M takav da*

$$|U^n| \leqslant M < \infty \qquad (n \in Z).$$

Tada je $\sigma(U) \subseteq \{z : |z| = 1\}$.

Teorema 1.4.7. *Neka je Y zatvoren potprostor od X. Tada postoji linearna izometrija $J_1 : (X/Y)^* \longrightarrow Y$ koja je definisana sa*

$$(x|J_1 z) = ([x]_Y|z)$$

za svako $z \in (X/Y)^*$ i za svako $x \in X$, gde je $[x]_Y = \phi(T)$ kanonsko preslikavanje iz X u X/Y, koje je neprekidno, linearno i važi $|\phi| \leqslant 1$.

Definicija 1.4.8. Neka je X vektorski prostor nad poljem skalara K i neka su L i M potprostori prostora X. Tada je i $L \cap M$ potprostor od X. *Suma potprostora L i M* označava se sa $L + M$ i definiše kao

$$L + M = \{x + y|\ x \in L,\ y \in M\}.$$

Kažemo da je suma potprostora L i M *direktna* (i označavamo je sa $L \oplus M$) ako je $L \cap M = \{0\}$.

Dakle, ako su potprostori L i M u direktnoj sumi, važi $X = L \oplus M$. Odavde, proizvoljan vektor $x \in X$ se na jedinstven način može predstaviti u obliku

$$x = u + v, \quad u \in L, v \in M.$$

Ako je $\dim X < \infty$, onda je

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M).$$

Očigledno,

$$\dim(L \oplus M) = \dim L + \dim M.$$

Definicija 1.4.9. Neka je X vektorski prostor nad poljem skalara K i neka je L potprostor od X. Potprostor M prostora X se naziva direktan komplement od L ako važi

$$X = L \oplus M.$$

Ako je X konačno-dimenzionalan prostor i L potprostor od X onda postoji direktan komplement od L u X.

Teorema 1.4.8. *Neka je $E \in L(X)$. E je projekcija ako i samo ako je $E^2 = E$. Ako je E projekcija, onda postoje zatvoreni potprostori X_1 i X_2 prostora X takvi da je $X_1 = R(E)$, $X_2 = N(E)$ i $X = X_1 \oplus X_2$.*

Za zatvorene potprostore X_1 i X_2 prostora X kažemo da *redukuju* T ili da su *redukujući potprostori za* T ako je $X = X_1 \oplus X_2$ i X_1 i X_2 su invarijantni u odnosu na T.

Teorema 1.4.9. *Neka je $T \in L(X)$. Pretpostavimo da zatvoreni potprostori X_1 i X_2 prostora X redukuju T. Tada je $\sigma(T) = \sigma(T \restriction_{X_1}) \cup \sigma(T \restriction_{X_2})$.*

Teorema 1.4.10. *Neka je $T \in L(X)$. Neka Σ_0 označava Bulovu algebru na otvoreno-zatvorenim podskupovima skupa $\sigma(T)$. Ako je $\tau \in \sigma_0$, $E(\tau)$ je projekcija, $TE(\tau) = E(\tau)T$ i $\sigma(T \restriction_{E(\tau)X}) = \tau$. Preslikavanje $\tau \longrightarrow E(\tau)$ je izomorfizam iz σ_0 na Bulovu algebru projekcija u $L(X)$. To znači da $E(\emptyset) = 0$ i*

$$E(\sigma(T) \backslash \tau) = I - E(\tau) \qquad (\tau \in \Sigma_0),$$

$$R(\tau_1 \cup \tau_2) = E(\tau_1) + E(\tau_2) - E(\tau_1)E(\tau_2),$$

$$E(\tau_1 \cap \tau_2) = E(\tau_1)E(\tau_2) \qquad (\tau_1, \tau_2 \in \Sigma_0).$$

Teorema 1.4.11. *Neka je $T \in L(X)$ i neka je λ_0 izolovana tačka skupa $\sigma(T)$. Tada je λ_0 pol rezolvente $\lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1}$ reda m, ako i samo ako je*

$$(\lambda_0 I - T)^m E(\lambda_0) = 0, \qquad (\lambda_0 I - T)^{m-1} E(\lambda_0) \neq 0.$$

2 KOMPAKTNI OPERATORI

Posmatrajmo metrički prostor (X, d). Ako su M i S podskupovi metričkog prostora (X, d) i $\varepsilon > 0$, tada se skup S naziva *ε - mreža skupa M* ako za svako $x \in M$ postoji $s \in S$ tako da je $d(x, s) < \varepsilon$. Ako je skup S konačan, tada se ε - mreža S naziva *konačna ε - mreža skupa M*. Skup M je *totalno ograničen* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε mreža skupa M. Skup M je *relativno kompaktan* ako je zatvorenje skupa M kompaktan skup. Ako je skup M relativno kompaktan, tada je skup M totalno ograničen. Obrat važi u kompletnim metričkim prostorima, odnosno: ako je metrički prostor (X, d) kompletan, tada je skup M relativno kompaktan ako i samo ako je M totalno ograničen.

Kao što znamo podskup M metričkog prostora X je kompaktan ako svaki niz (x_n) iz M ima konvergentan podniz pri čemu granica tog podniza pripada skupu M. Lako se pokazuje da je podskup M metričkog prostora X relativno kompaktan ako i samo ako svaki niz (x_n) iz M ima konvergentan podniz; pri tome granična vrednost tog podniza može, ali ne mora da pripada skupu M.

Sada ćemo pristupiti izučavanju kompaktnih operatora. Videćemo da oni imaju mnoga svojstva operatora na konačno-dimenzionalnim prostorima. Ispitivaćemo kompaktne operatore na Hilbertovim prostorima, gde ćemo, između ostalog, pokazati da za kompaktan operator K na Hilbertovom prostoru X, postoji niz $(K_n)_{n \in N}$ konačno-dimenzionalnih linearnih operatora, koji po normi konvergiraju prema K.

Kompaktni operatori su se pojavili u teoriji integralnih jednačina, gde i danas imaju osnovnu primenu. Pokazalo se da osnovne teoreme teorije integralnih jednačina mogu biti prenesene na opšte prostore i linearne operatore koji imaju svojstvo da ograničene skupove prevode u relativno kompaktne skupove. To su upravo kompaktni operatori.

Podsetimo se još da su sledeća tri svojstva podskupa S kompletnog metričkog prostora Y ekvivalentna:

(1) *S je relativno kompaktan skup.*

(2) *Svaki niz (y_n) iz S ima Košijev podniz.*

(3) *Za svako $\varepsilon > 0$ skup S ima konačnu ε - mrežu, tj. postoji $m \in N$ i*

elementi $y_1, y_2, ...y_m$ u S takvi da je skup S sadržan u uniji kugli $K(y_i, \varepsilon)$:

$$S \subseteq \cup_{i=1}^{m} K(y_i, \varepsilon).$$

Odavde sledi da je svaki relativno kompaktan skup ograničen, dok obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

2.1 Definicija i osnovne osobine kompaktnih operatora

Definicija 2.1.1. Neka su X i Y normirani prostori. Linearan operator $A : X \longrightarrow Y$ je *kompaktan* (potpuno neprekidan) ako on jediničnu $K[0,1] = \{x \in X : |x| \leqslant 1\}$ prostora X slika u relativno kompaktan skup prostora Y.
Skup svih kompaktnih operatora $A : X longrightarrow Y$ označavamo sa $K(X, Y)$. Ukoliko je $Y = X$ pisaćemo $K(X)$. Kompaktne operatore ne moramo definisati preko jedinične kugle. Da bismo to videli dokazaćemo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.1.1. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori. Operator $A : X \longrightarrow Y$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (x_n) iz X, niz (Ax_n) ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $A \in K(X, Y)$ i neka je (x_n) ograničen niz u X. Označimo sa $Q = \{x_n, n \in N\}$ skup svih elemenata niza (x_n). Skup Q je ograničen podskup u X. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $|x_n| \leqslant 1$ za svako $n \in N$. Iz kompaktnosti operatora A sledi da je $A(Q)$ relativno kompaktan skup, pa niz (Ax_n) ima konvergentan podniz.
Obrnuto, pretpostavimo da niz (Ax_n) ima konvergentan podniz, za svaki ograničen niz (x_n) iz X. Ako je K jedinična kugla u X, i (y_n) niz iz $A(K)$, tada postoji niz (x_n) iz K (dakle ograničen) takav da je $y_n = Ax_n$, za svako $n \in N$. Prema tome, niz (y_n) ima konvergentan podniz. Dakle, $A(K)$ je relativno kompaktan skup.□

Odavde sledi da je operator $A : X \longrightarrow Y$ kompaktan ako i samo ako je $A(Q)$ relativno kompaktan podskup u Y, za svaki ograničen podskup Q u X, što se takođe može uzeti za definiciju kompaktnih operatora.

Ako je $A \in K(X, Y)$, tada je slika $AK = \{Ax : x \in K\}$ jedinične kugle $K = \{x \in X : |x| \leqslant 1\}$ relativno kompaktan, pa dakle i ograničen skup u Y. To znači da postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|Ax| \leqslant M$ za

$x \in K$. Odavde, i iz činjenice da je A linearan operator, proizilazi da je $|Ax| \leqslant M|x|$ za svako $x \in X$. To pokazuje da je A ograničen operator. Dakle, $K(X,Y) \subseteq L(X,Y)$. Da obrat ne važi pokazuje sledeći primer:

Primer 2.1. Neka je X beskonačno-dimenzionalan normiran prostor i $I \in L(X)$ identičan operator. Operator I je ograničen ali nije kompaktan. Očigledno je $I \in L(X)$. Neka je $K[0,1] = \{x \in X : |x| \leqslant 1\}$. Tada je $K[0,1]$ ograničen podskup u X, a $I(K[0,1]) = K[0,1]$ nije relativno kompaktan podskup u X, na osnovu **Teoreme 1.2.4.**

Teorema 2.1.2. *Neka su X, Y i Z normirani vektorski prostori.*
(i) $K(X,Y)$ je potprostor prostora $L(X,Y)$.
(ii) Ako je jedan od operatora $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$ kompaktan, onda je i njihova kompozicija kompaktan operator.

Dokaz.(i) Neka su $A, B \in K(X,Y)$ i (x_n) ograničen niz u X. Zbog kompaktnosti operatora A postoji podniz (u_n) niza (x_n), takav da je (Au_n) konvergentan niz u Y. Podniz (u_n) je ograničen, pa zbog kompaktnosti operatora B postoji podniz (v_n) niza (u_n) takav da je (Bv_n) konvergentan u Y. Sada, zbog konvergencije nizova (Au_n) i (Bv_n), za svaki par skalara α, β i niz $n \longmapsto \alpha A v_n + \beta B v_n$ konvergira. Dakle, za svaki ograničen niz (x_n) iz X postoji podniz (v_n) takav da niz $(\alpha A v_n + \beta B v_n)$ konvergira u Y, pa je $\alpha A + \beta B$ kompaktan operator. Kako je $K(X,Y) \subseteq L(X,Y)$ to znači da je $K(X,Y)$ potprostor od $L(X,Y)$.
(ii) Neka su $A \in L(X,Y)$, $B \in K(Y,Z)$ i (x_n) ograničen niz u X. Kako je $A \in L(X,Y)$, niz (Ax_n) je ograničen u Y, a zbog kompaktnosti operatora $B : Y \longrightarrow Z$ za svaki ograničen niz iz Y, pa i za $(Ax_n)_n$, postoji podniz $(Ax_{p(n)})_n$ niza $(Ax_n)_n$ takav da je niz $(BAx_{p(n)})_n$ konvergentan u Z.
Ako je $A \in K(X,Y)$ onda postoji podniz $(x_{p(n)})_n$ niza $(x_n)_n$ takav da je $(Ax_{p(n)})_n$ konvergentan u Y. Neprekidnost operatora B povlači konvergenciju niza $(BAx_{p(n)})_n$.
Dakle,vidimo da u oba slučaja za svaki ograničen niz $(x_n)_n \subseteq X$ postoji podniz $(x_{p(n)})_n \subseteq (x_n)_n$ takav da niz $(BAx_{p(n)})_n$ konvergira u Z, to je $BA : X \longrightarrow Z$ kompaktan operator.$\square$

Teorema 2.1.3 *Neka su X i Y normirani vektorski prostori.*

(i) *Ako je* $\dim X < \infty$ *ili* $\dim Y < \infty$ *onda je*

$$K(X,Y) = L(X,Y).$$

(ii) *Jedinični operator I prostora X je kompaktan ako i samo ako je* $\dim X <$

∞.
(iii) Ako je $\dim X = \infty$ *i* $A \in K(X)$*, onda je* A *singularni operator, tj.* $0 \in \sigma(A)$.

Dokaz.(i) Neka je (x_n) ograničen niz u X.
Ako je $\dim Y < \infty$ i $A \in L(X,Y)$, onda je skup $\{Ax_n : n \in N\}$ ograničen, pa je kao takav u konačno-dimenzionalnom prostoru i relativno kompaktan. Dakle, $A \in K(X,Y)$.
Ako je $\dim X < \infty$ i $A \in L(X,Y)$, onda je potprostor $R(A) = AX$ konačno-dimenzionalan. Budući da je $\{Ax_n : n \in N\}$ ograničen skup u $R(A)$ i $\dim R(A) < \infty$, to postoji podniz $(x_{p(n)})$ niza (x_n) takav da niz $(Ax_{p(n)})$ konvergira u $R(A) \subseteq Y$. Dakle $A \in K(X,Y)$.
(ii) Iz *Primera 2.1.*
(iii) Pretpostavimo da je $A \in L(X)$ regularan operator. Tada postoji $B \in L(X)$ takav da je $AB = BA = I$. Sada je $A \in K(X), B \in L(X)$, pa je na osnovu **Teoreme 2.1.2.(ii)** $I = AB \in K(X)$. Ovo, na osnovu dela *(ii)* implicira $\dim X < \infty$. Dakle, ako je $\dim X = \infty$ i $A \in K(X)$, A je singularan operator.□

Sada ispitujemo kakve je prirode operator kome niz kompaktnih operatora uniformno konvergira. Pokazaćemo, uz uslov da je Y Banahov prostor, da ako za niz $(A_n)_{n\in N}$ kompaktnih operatora iz $L(X,Y)$ postoji operator $A \in L(X,Y)$ takav da $|A_n - A| \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$, onda je A kompaktan operator. Drugim rečima, važi:

Teorema 2.1.4. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori. Ako je* Y *Banahov prostor, onda je* $K(X,Y)$ *zatvoren potprostor u* $L(X,Y)$.

Dokaz. U dokazu ove teoreme koristićemo rezultat na koji smo ukazali na početku ovog poglavlja, tj. ako je metrički prostor (X,d) kompletan, tada je skup M relativno kompaktan ako i samo ako je M totalno ograničen. Neka je $(A_n)_{n\in N}$ niz operatora prostora $K(X,Y)$, i neka je A granična vrednost tog niza. Treba dokazati da je A kompaktan operator. Skup Y je Banahov, te je dovoljno dokazati da je skup $A(K)$, $K = \{x \in X : |x| \leqslant 1\}$ totalno ograničen, tj. da za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε - mreža skupa $A(K)$. Iz $|A_n - A| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$, sledi da postoji $n_0 \in N$ tako da je $|A_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ za svako $n \geqslant n_0$. Kako je $A_n \in K(X,Y)$ za svako $n \in N$, to su skupovi $A_n(K)$ relativno kompaktni za svako $n \in N$, pa su i totalno ograničeni. Dakle, postoje vektori $x_1, x_2, ...x_m \in K$ takvi da je $S_n = \{A_nx_1, A_nx_2, ..., A_nx_m\}$ $\frac{\varepsilon}{3}$ - mreža skupa $A_n(K)$, $\forall n \in N$. Izaberimo $x \in K$ i neka je $n \geqslant n_0$. Posmatrajmo vektor $A_n x \in A_n(K)$. Kako je S_n $\frac{\varepsilon}{3}$- mreža skupa $A_n(K)$, to vazi procena

$$|A_n x_j - A_n x| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall j \in \{1, 2, ...m\}.$$

$$|Ax - Ax_j| \leqslant |Ax - A_n x| + |A_n x - A_n x_j| + |A_n x_j - Ax_j)|$$

$$\leqslant |A - A_n||x| + |A_n x - A_n x_j| + |A - A_n||x_j| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Odavde vidimo da je $\{Ax_1, Ax_2, ..., Ax_m\}$ ε - mreža skupa $A(K)$. Sledi, $A(K)$ je relativno kompaktan skup, pa je $A \in K(X, Y)$.□

2.2 Kompaktni operatori na Hilbertovim prostorima

Definicija 2.2.1. Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $T \in L(X, Y)$, i neka je $(.|.)$ skalarni proizvod u X, odnosno u Y. Operator $S \in L(Y, X)$, za koji važi da je

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(Tx|y) = (x|Sy)$$

nazivamo *Hilbert-adjungovanim operatorom operatora* T. Ovakav operator S je jedinstven, i pišemo $S = T^*$.

Neka su $S, T \in L(X, Y)$. Tada važi:
(i) $(T^*)^* = T$;
(ii) $(T + S)^* = T^* + S^*$;
(iii) $(TS)^* = S^* T^*$;
(iv) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$, za svako $\lambda \in C$.

Definicija 2.2.2. Neka je X Hilbertov prostor. Za operator $A \in L(X)$ kažemo da je:
(1) *ermitski(samokonjugovan)* ako je $T = T^*$;
(2) *normalan* ako je $TT^* = T^* T$;
(3) *unitaran* ako je $TT^* = T^* T = I$.

Definicija 2.2.3. Neka su X i Y normirani vektorski prostori. Za operator $A \in L(X, Y)$ kažemo da je *konačno-dimenzionalan operator*, ako je $\dim R(A) < \infty$.

Jasno, linearna kombinacija konačno-dimenzionalnih operatora je konačno-dimenzionalan operator. Ako je u kombinaciji AB gde je $A \in L(X, Y), B \in L(Y, Z)$ jedan od operatora konačno-dimenzionalan, tada je i kompozicija AB konačno-dimenzionalan operator.

Teorema 2.2.1. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Operator $A \in L(X,Y)$ je konačno-dimenzionalan ako i samo ako postoje nezavisni vektori $e_1, e_2, ..., e_n \in Y$ i vektori $f_1, f_2, ...f_n \in X$ takvi da je*

$$(1) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|f_i)e_i, \qquad (x \in X).$$

Tada je $e_1, e_2, ..., e_n$ baza u $R(A)$, $f_1, f_2, ...f_n$ baza u $R(A^*)$ i

$$(2) \qquad A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y|e_i)f_i, \qquad (y \in Y).$$

Dakle, A je konačno-dimenzionalan ako i samo ako je A^* konačno- dimenzionalan.

Dokaz. Ako operator $A : X \longrightarrow Y$ ima reprezentaciju (1), onda je $\dim R(A) \leq n$ pa je operator A konačno-dimenzionalan.
Neka je $n = \dim R(A) < \infty$. Dokažimo da A ima reprezentaciju oblika (1). Neka je $e_1, e_2, ..., e_n$ baza u $R(A)$. Tada je

$$(3) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} f_i^{,}(x)e_i, \qquad (x \in X),$$

gde su $f_i^{,}$ neki funkcionali na X. Neka su $e_1^{,}, e_2^{,}, ..., e_n^{,}$ vektori prostora $R(A)$ izabrani tako da je

$$(4) \qquad (e_i^{,}|e_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = (1,2,...,n)$$

gde je $\delta_{ij} = \{^{0,}_{1,} \quad ^{i \neq j}_{i=j}$. Iz (3) i (4), množeći (3) sa $e_i^{,}$ dobijamo $f_i^{,}(x) = (Ax|e_i^{,})$, što pokazuje da je $f_i^{,}$ linearan i neprekidan funkcional. Stavimo li

$$f_i = A^*e_i^{,} \qquad (i = 1, ..., n),$$

dobijamo

$$(x|f_i) = (x|A^*e_i') = (Ax|e_i') = f_i'(x)$$

tj. $f_i^{,}(x) = (x|f_i)$ pa (3) daje (1).
Za $x \in X$ i $y \in Y$, koristeći (2) dobijamo

$$(A^*y|x) = (y|Ax) = \overline{(Ax|y)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} (x|f_i)(e_i|y)} = \sum_{i=1}^{n} (y|e_i)(f_i|x) = (\sum_{i=1}^{n} (y|e_i)f_i)x$$

odakle sledi (2). Iz (2) sledi $\dim R(A^*) \leqslant n = \dim R(A)$. Iz istih razloga

$$\dim R(A) = \dim R[(A^*)^*] \leqslant \dim R(A^*)$$

pa je $\dim R(A) = \dim R(A^*)$, što povlači nezavisnost vektora $f_1, f_2, ...f_n$, tj. $f_1, f_2, ...f_n$ čine bazu u $R(A^*)$.□

Definicija 2.2.4. Neka je X Hilbertov prostor. Skup $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ linearno nezavisnih vektora prostora X je *baza* prostora X ako se svaki vektor $x \in X$ na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$. Ukoliko su vektori $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ medjusobno ortogonalni, i $|e_i| = 1, i \in N$, onda se baza $\{e_1, e_2, ...e_n...\}$ vektorskog prostora X naziva *ortonormirana baza.*

Drugim rečima, baza $\{e_1, e_2, ...e_n...\}$ vektorskog prostora X je ortonormirana ako važi:

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i,j \in N.$$

Lema 1. *Neka je $(e_n, n \in N)$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X i neka je $(\lambda_n, n \in N)$ ograničen niz skalara. Postoji jedinstven operator $N \in L(X)$ takav da je*

$$Ne_n = \lambda_n e_n, \qquad n \in N.$$

Operator N je normalan i

$$\sigma(N) = \overline{\{\lambda_n : n \in N\}}.$$

Teorema 2.2.2. *Neka je $(e_n, n \in N)$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X i neka je $(\lambda_n, n \in N)$ niz kompleksnih brojeva takvih da je*

$$(5) \qquad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ...; \lim \lambda_n = 0.$$

Tada je sa

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i) e_i \qquad (x \in X) \qquad (*)$$

definisan je ***normalan kompaktan operator A****. Dalje,*

$$\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}.$$

Svaki element $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$ je sopstvena vrednost operatora A.

Dokaz. Na osnovu **Leme 1.** postoji jedinstven operator $N \in L(X)$ takav da je $Ne_n = \lambda_n e_n, n \in N$. Za $x = e_n$ vidimo da za operator definisan u (*) važi $Ae_n = \lambda_n e_n, n \in N$, pa iz jedinstvenosti sledi da je A normalan operator. Na osnovu leme takođe sledi da je $\sigma(A)$ zatvorenje skupa $\{\lambda_n, n \in N\}$. Kako je nula jedina tačka nagomilavanja niza $(\lambda_n, n \in N)$, to važi $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}$. Dokažimo sada kompaktnost operatora A. U tu svrhu, posmatrajmo konačno-dimenzionalne operatore A_n:

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i \qquad (x \in X).$$

Iz

$$|Ax - A_n x|^2 = |\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i) e_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x|e_i)|^2 \overset{|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ...}{\leqslant} |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i)|^2,$$

za $x = e_i$ dobijamo $|A - A_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|$, što zbog (5) daje $|A - A_n| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$. Kako su A_n konačno-dimenzionalni operatori, dakle kompaktni, na osnovu **Teoreme 2.1.4.** i operator A je kompaktan.□

Teorema 2.2.3. *Neka je $(e_n, n \in N)$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora X i (a_{ij}) beskonačna matrica takva da je*

$$M = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Tada je sa

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i, \qquad (j \in N)$$

odnosno sa

$$(6) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} (x|e_j)) e_i, \qquad (x \in X),$$

definisan kompaktan operator na X.

Dokaz. Dokažimo da red (6) konvergira za svako $x \in X$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da red

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} (x|e_j)|^2$$

konvergira za svako $x \in X$. Iz

$$(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x|e_j)|)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |(x|e_j)|^2,$$

kada $n \longrightarrow \infty$ dobijamo

$$(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(x|e_j)|)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2.$$

Sumiranjem po i dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(x|e_j)|)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 \leqslant M|x|^2.$$

Dakle, ovaj red konvergira za svako $x \in X$. Sledi, sa (6) je definisan linearan operator A za koji je $|Ax|^2 \leqslant M|x|^2$, odnosno,

$$|A| \leqslant \sqrt{M} \qquad (*).$$

Za $n \in N$ definišimo operator A_n na sledeći način:

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x|e_j))e_i, \qquad (x \in X).$$

Primetimo da matrica $(a_{ij}^{'})$ operatora $A-A_n$ nastaje iz matrice (a_{ij}) tako što se elementi koji se nalaze u preseku prvih n vrsta i n kolona zamene nulama. Stoga, za operator $A - A_n$, koristeći $(*)$, dobijamo:

$$|A - A_n|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}^{'}|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

što teži nuli jer je $M < \infty$. Dakle, operator A_n je konačno-dimenzionalan i $|A - A_n| \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$, pa je A kompaktan operator.$\square$

Uslov

$$M = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$$

je dovoljan ali ne i potreban za kompaktnost operatora A definisanog u (6). Na primer matrica $(a_{ij}), a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{j}}\delta_{ij}$ ne zadovoljava ovaj uslov, ali je sa (6) definisan operator A:

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(x|e_k)e_k \qquad (x \in X)$$

koji je kompaktan i normalan. Kompaktni operatori iz prethodne dve teoreme dobijeni su kao uniformni limesi konačno-dimenzionalnih operatora. Shodno tome, imamo sledeći rezultat:

Teorema 2.2.4. *Neka je X normiran a Y Hilbertov prostor. Operator $A \in L(X,Y)$ je kompaktan ako i samo ako postoji niz $(A_n, n \in N)$ konačno-dimenzionalnih operatora $A_n \in L(X,Y)$ takvih da*

$$|A - A_n| \longrightarrow 0.$$

Dokaz. Neka je $A \in K(X,Y)$ i neka je K jedinična kugla prostora X. Tada je skup AK relativno kompaktan u prostoru Y, pa je on totalno ograničen u Y. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža $y_1, ...y_{n(\varepsilon)}$ skupa AK. Neka je $x \in X$, $|x| < 1$. Tada postoji indeks $i \in \{1, ...n(\varepsilon)\}$ takav da je

$$|Ax - y_i| < \varepsilon.$$

Potprostor Y_n koji razapinju vektori $y_1, ...y_{n(\varepsilon)}$ ima dimenziju $n \leqslant n(\varepsilon) < \infty$. Označimo sa P_n ortogonalni projektor na Y_n. Operator $A_n = P_nA$ je konačno-dimenzionalan. Za $x \in X$, $|x| < 1$, najbolja aproksimacija vektora Ax vektorima prostora Y_n data je sa P_nAx. Budući da je $A_nx = P_nAx$ *najbolja* aproksimacija, to je $|Ax - A_nx| \leqslant |Ax - y_i| < \varepsilon$. Dakle, za svako $x \in X$, $|x| < 1$ imamo $|Ax - A_nx| < \varepsilon$, pa je $|A - A_n| \leqslant \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, važi $|A - A_n| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.

Obrnuto, neka su $A_n \in L(X,Y)$ konačno-dimenzionalni operatori takvi da $|A - A_n| \longrightarrow 0$. Tada je, na osnovu jedne od prethodnih teorema, A kompaktan operator, jer je Y kompletan prostor i svaki konačno-dimenzionalan operator je kompaktan.$\Box$

Teorema 2.2.5. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Ako je $A \in L(X,Y)$, i A^*A kompaktan operator, onda je i A kompaktan operator.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X, $|x_n| \leqslant 1, n \in N$. Tada je

$$|Ax_n - Ax_m|^2 = (Ax_n - Ax_m|Ax_n - Ax_m) =$$

$$(A^*A(x_n - x_m)|x_n - x_m) \leqslant$$
$$|A^*A(x_n - x_m)| \cdot |x_n - x_m| \Rightarrow$$
$$|Ax_n - Ax_m|^2 \leqslant 2|A^*A(x_n - x_m)|. \qquad (7)$$

Kako je A^*A kompaktan operator, niz $(x_n)_n$ ima podniz $(x_{p(n)})_n$ takav da je $(A^*Ax_{p(n)}, n \in N)$ konvergentan niz. Odavde, i iz (7) sledi da je

$$|Ax_{p(n)} - Ax_{p(m)}|^2 \leqslant 2|A^*A(x_{p(n)} - x_{p(m)})|,$$

što pokazuje da je $(Ax_{p(n)}, n \in N)$ Košijev niz u Y. Kako je Y Hilbertov prostor, ovaj niz je konvergentan. Dakle, A je kompaktan operator.□

Posledica 2.2.6. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Operator $A \in L(X,Y)$ je kompaktan ako i samo ako je operator $A^* \in L(Y,X)$ kompaktan.*

Dokaz. Ako je $A \in K(X,Y)$, onda je $AA^* \in K(Y)$ (na osnovu **Teoreme 2.2.(ii)**). Budući da je za operator $A^* \in L(Y,X)$ operator $(A^*)^*A^* = AA^*$ kompaktan, to je, prema prethodnoj teoremi, operator A^* kompaktan.□

2.3 Kompaktni ermitski operatori

Rezultati koji se odnose na kompaktne ermitske operatore spadaju u najznačajnije rezultate iz oblasti kompaktnih operatora. Sa stanovišta primene, važni su ne samo rezultati, već i način na koji su oni dokazani. Podsetimo se:

Definicija 2.3.1. Za linearan operator $H \in L(X)$, X unitaran prostor, kažemo da je ermitski (samokonjugovan) ako je

$$(Hx|y) = (x|Hy) \qquad x, y \in X.$$

Ako je X Hilbertov prostor, onda je svaki simetričan operator definisan na X ograničen ermitski operator. Nadalje, neka je X Hilbertov prostor. Za ograničen, ermitski operator H na Hilbertovom prostoru X, bitna je sledeća činjenica, koja će nam biti od značaja u daljem izlaganju: funkcija $x \longmapsto (Hx|x)$ na Hilbertovom vektorskom prostoru X je realna. Takođe, važi formula:

$$|H| = \sup\{|(Hx|x)| : |x| = 1, x \in X\}.$$

Ako je $\dim X = \infty$, onda jedinična sfera $S = \{x \in X : |x| = 1\}$ nije relativno kompaktan skup. U sledećoj teoremi dokazaćemo da funkcija $x \longmapsto (Hx|x)$

uz određene pretpostavke dostiže najveću vrednost na S. Ta vrednost je dostignuta na sopstvenom vektoru operatora H i jednaka je normi operatora H.

Teorema 2.3.1. *Ako je H kompaktan ermitski operator na Hilbertovom prostoru X, onda je bar jedan od brojeva $|H|, -|H|$ sopstvena vrednost λ operatora H. Za odgovarajući sopstveni jedinični vektor e je*

$$\lambda = (He|e).$$

Dokaz. Za $H = 0$ nemamo šta dokazivati, zato ćemo pretpostaviti da je $H \neq 0$. Kako je $|H| = \sup\{|(Hx|x)| : |x| = 1, x \in X\}$, to postoji niz (z_n) jediničnih vektora u X takav da je

$$(1) \qquad |H| = \lim |(Hz_n|z_n)|$$

Budući da je $H \neq 0$, možemo uzeti da je $(Hz_n|z_n) \neq 0$ za svako $n \in N$. Dalje, postoji podniz $(z_{p(n)} = y_n)$ niza (z_n) takav da je $(Hy_n|y_n)$ istog znaka za svako $n \in N$. No, tada na osnovu (1) sledi

$$M = \lim(Hy_n|y_n),$$

gde je $M = |H|$, ako su $(Hy_n|y_n)$ pozitivni, i $M = -|H|$, ako su $(Hy_n|y_n)$ negativni brojevi. Kako je H kompaktan operator i $|y_n| = 1$, to postoji podniz $(y_{q(n)} = x_n)$ niza (y_n) takav da niz $(Hx_n)_n$ konvergira u X, i neka je $x = \lim Hx_n$.

$$|Hx_n - Mx_n|^2 = |Hx_n|^2 - 2M(Hx_n|x_n) + M^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Hx_n|x_n)$$

a ovo teži nuli kada $n \longrightarrow \infty$. Dakle,

$$(2) \qquad v_n = (Hx_n - Mx_n) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

No, tada niz $(x_n) = (\frac{1}{M}Hx_n - \frac{1}{M}v_n)$ konvergira vektoru $\dfrac{1}{M}x$. Iz $|x_n| = 1$ sledi $|\frac{1}{M}x| = 1$, tj. $x \neq 0$. Prelaskom na graničnu vrednost u (2) dobijamo $H(\frac{1}{M}x) - M(\frac{1}{M}x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{M}H(x) - x = 0$, tj.$Hx = Mx$. Za jedinični vektor $e = \dfrac{|x|}{x}$, imamo $He = Me$, $(He|e) = M$.$\square$

Pored rezultata koje daju sledeće dve teoreme, sada posebnu pažnju treba obratiti i na način na koji su one dokazane. Postupak je značajan zato što daje algoritam za praktično pronalaženje sopstvenih vektora i sopstvenih vrednosti ermitskog kompaktnog operatora.

Teorema 2.3.2. *Neka je* X *Hilbertov prostor i* $H \neq 0$ *ermitski konačno-dimenzionalan operator na* X. *Postoje ortonormirani vektori* $e_1, e_2, ..., e_n$ *i realni brojevi* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *takvi da je:*

$$(3) \qquad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant, ..., |\lambda_n| > 0, He_i = \lambda_i e_i (i = 1, ..., n)$$

$$(4) \qquad Hx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i, \qquad x \in X$$

$$(5) \qquad X = R(H) \oplus N(H).$$

Dokaz. H je ermitski konačno-dimenzionalan operator, pa je kao takav on ermitski kompaktan operator. Na osnovu prethodne teoreme, postoje jedinični vektor $e_1 \in X$ i realan broj λ_1, $|\lambda_1| = |H|$, takvi da je $He_1 = \lambda_1 e_1$. Stavimo $X_1 = X$, i označimo sa X_2 ortogonalni komplement vektora e_1, tj. skup $\{x \in X : (x|e_1) = 0\}$. Potprostor X_2 je invarijantan za H jer:

$$(x|e_1) = 0 \Rightarrow (Hx|e_1) = (x|He_1) = (x|\lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x|e_1) = 0;$$

dakle, $x \in X_2 \Rightarrow Hx \in X_2$. Označimo sa H_2 operator kojeg $H = H_1$ indukuje na X_2. Očigledno je i H_2 ermitski i kompaktan operator na X_2. Ako je $H_2 \neq 0$ onda, prema prethodnoj teoremi, postoje jedinični vektor $e_2 \in X_2$ i realan broj λ_2 takvi da je $H_2 e_2 = \lambda_2 e_2$, gde je

$$|\lambda_2| = |H_2| = \sup\{|(H_2 x|x) : |x| = 1, x \in X_2\}$$
$$= \sup\{|(Hx|x)| : |x| = 1, x \in X_2\}$$
$$\leqslant \sup\{|(Hx|x)| : |x| = 1, x \in X\} = |H| = |\lambda_1|.$$

Dakle, $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2|, (e_2, e_1) = 0, He_2 = H_2 e_2 = \lambda_2 e_2$. Neka je X_3 ortogonalni komplement potprostora $L(e_1, e_2)$, tj. skup svih $x \in X$ takvih da je $(x|e_1) = (x|e_2) = 0$. Ponovo je X_3 invarijantan potprostor u odnosu na operator H, a operator H_3 indukovan na X_3 operatorom H je ermitski i kompaktan. Ako je $H_3 \neq 0$, onda ponovo na osnovu prethodne teoreme, postoje jedinični vektor $e_3 \in X_3$ i realan broj λ_3 takvi da je $H_3 e_3 = \lambda_3 e_3$ i

$$|\lambda_3| = |H_3| = \sup\{|(H_3 x|x) : |x| = 1, x \in X_3\}$$
$$= \sup\{|(H_2 x|x)| : |x| = 1, x \in X_3\}$$
$$\leqslant \sup\{|(H_2 x|x)| : |x| = 1, x \in X_2\} = |H_2| = |\lambda_2|.$$

Dakle, važi $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|, He_3 = H_3e_3 = \lambda_3 e_3$ i e_1, e_2, e_3 su ortonormirani. Nastavimo li dalje, dolazimo do ortonormiranih vektora $e_1, e_2, ..., e_k$ i realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ takvih da važi (3). Ortogonalni komplement X_{k+1} potprostora $L(e_1, e_2, ..., e_k)$, tj. skup svih $x \in X$ takvih da je $(x|e_1) = ... = (x|e_k) = 0$ invarijantan je za operator H. Operator H_{k+1} indukovan na X_{k+1} operatorom H je ermitski i kompaktan, pa u slučaju $H_{k+1} \neq 0$ postupak se može nastaviti. Kako je $\dim R(H) < \infty$ i $e_1, e_2, ...$ su ortonormirani, to postoji $n \in N$ takav da je $H_{n+1} = 0$. Tada vektor $\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$ za $x \in X$ pretstavlja ortogonalnu projekciju od x na $L(e_1, e_2, ..., e_n)$ pa vektor

$$(6) \qquad y_n = x - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$$

pripada prostoru X_{n+1}. To povlači $Hy_n = H_{n+1}y_n \overset{H_{n+1}=0}{=} 0$, tj.

$$Hx = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)He_i,$$

a to je upravo (4). Iz (6) i $Hy_n = 0$ sledi da je $X_{n+1} = N(H)$ nul-potprostor opertora H, dakle važi i (5).

Slučaj kada je $\dim R(H) = \infty$ i H ermitski, kompaktan operator je trivijalan jer je tada $\dim N(X) = \infty$, pa je nula sopstvena vrednost operatora H.$\square$

Teorema 2.3.3. *Neka je X Hilbertov prostor i H kompaktan ermitski beskonačno-dimenzionalan operator na X.*
Tada postoji ortonormiran niz $(e_n, n \in N)$ u X i niz $(\lambda_n, n \in N)$ realnih brojeva λ_n takvih da je:

(6) $\qquad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ... \geqslant |\lambda_n| \geqslant ... > 0$

(7) $\qquad He_i = \lambda_i e_i \qquad (i \in N)$

(8) $\qquad \lim \lambda_i = 0,$

(9) $\qquad Hx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x|e_i)e_i \qquad (x \in X).$

Ako je $\lambda \neq 0$ sopstvena vrednost operatora H, onda je $\lambda = \lambda_i$ za neko $i \in N$.

Sopstveni potprostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda = \lambda_i$ je konačno-dimenzionalan i njegova dimenzija je jednaka frekvenciji s kojom se λ_i pojavljuje u nizu $\lambda_1, \lambda_2, ...$. Ortonormiran skup $(e_n, n \in N)$ je maksimalan u X ako i samo ako nula nije sopstvena vrednost operatora H.

Dokaz. Koristeći **Teoremu 2.3.1.** na isti način kao i u prethodnoj teoremi, izvodimo dokaz ovog tvrđenja. Ovde pretpostavka $\dim R(H) = \infty$ povlači da je $H_{n+1} \neq 0$ za svako n. Prema tome, postupkom opisanim u prethodnom dokazu, dobijamo niz $\lambda_1, \lambda_2, ...$ realnih brojeva i ortonormiran niz vektora $e_1, e_2, ...$ za koje važe (6) i (7). Kako je niz (6) monoton i odozdo ograničen, on je konvergentan. Neka je $a = \lim |\lambda_n|$. Dokažimo da ovaj niz teži nuli, tj. pokažimo da važi (8). Očigledno, $a \geqslant 0$. Zaista, ako bi bilo $a > 0$, onda bi niz $(\frac{e_n}{\lambda_n}, n \in N)$ bio ograničen. Zatim, kako je $e_n = H(\frac{e_n}{\lambda_n})$ i $|\frac{e_n}{\lambda_n}| \leqslant \frac{1}{a}$ to bi zbog kompaktnosti operatora H niz (e_n) imao konvergentan podniz. To je nemoguće jer je $|e_n - e_m| = \sqrt{2}$ za $n \neq m$. Dakle, mora biti $a = 0$, pa važi (8).

Za $x \in X$, vektor $y_n = x - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$ pripada prostoru X_{n+1}, pa je

$$|Hy_n| = |H_{n+1}y_n| \leqslant |\lambda_{n+1}||y_n| \leqslant |\lambda_{n+1}||x|.$$

Odavde, i iz (8) dobijamo da je $\lim |Hy_n| = 0$, tj.

$$\lim |Hx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i)e_i| = 0$$

dakle važi (9). Iz (9) vidimo da se svaki vektor iz $R(H)$ može razviti u Furijeov red po vektorima $e_1, e_2, ...$.

Ako je $Hx = \lambda x$ i $x \neq 0$, onda zamenom u (9) imamo da je

$$(10) \qquad \lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i)e_i.$$

Množeći ovu jednakost sa e_k i koristeći činjenicu da je $e_1, e_2, ...$ niz međusobno ortonormiranih vektora, dobijamo:

$$(11) \qquad (\lambda - \lambda_k)(x|e_k) = 0, \qquad k \in N.$$

Ako je $\lambda \neq \lambda_k$ za svako $k \in N$, onda iz (11) dobijamo $(x|e_k) = 0, \forall k \in N$, što zajedno sa (10) daje $\lambda x = 0$. Kako je $x \neq 0$ mora biti $\lambda = 0$. Prema tome, niz $\lambda_1, \lambda_2, ...$ sadrži sve od nule različite sopstvene vrednosti operatora H. Neka je m broj ponavljanja sopstvene vrednosti λ_1 u nizu $\lambda_1, \lambda_2, ...$. Neka je $p \in N$ takav da je:

$$|\lambda_1| = ... = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|.$$

Tada je $m \leqslant p$ i $\lambda_1 = \lambda_{i_2} = ... = \lambda_{i_m}$, pa je $\lambda_i = -\lambda_1$ za $i \neq 1, i_2, ...i_m; i \leqslant p$. Sopstveni potprostor operatora H koji pripada sopstvenoj vrednosti λ_1 razapinju vektori $e_1, e_{i_2}, ...e_{i_m}$, pa je on m-dimenzionalan. Na sličan način se vidi da je sopstveni potprostor operatora H koji pripada sopstvenoj vrednosti $\lambda_k \neq 0$ konačno-dimenzionalan.
Ako je $Hx = 0$, onda je $(x|e_i) = (x|\frac{He_i}{\lambda_i}) = \dfrac{1}{\lambda_i}(Hx|e_i) = 0$ za svako $i \in N$. Odavde i iz (9) zaključujemo da je $x \perp R(H)$. Dakle, $N(H)$ je ortogonalni komplement potprostora $R(H)$. Prema tome, $\{e_n : n \in N\}$ je maksimalan ortonormiran skup u X ako i samo ako je $N(H) = \{0\}$, tj. ako i samo ako nula nije sopstvena vrednost operatora H.□

Teorema 2.3.4. *Neka je X Hilbertov prostor i H kompaktan ermitski beskonačno-dimenzionalan operator na X. Neka su λ_n i e_n dati kao malopre. Za svako $x \in X$ važi:*

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)e_i, \tag{12}$$

gde je x_0 vektor nul-potprostora operatora H. Drugim rečima,

$$X = N(H) \oplus R(H). \tag{13}$$

Nadalje je

$$\sigma(H) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ...\}.$$

Dokaz. Na osnovu Beselove nejednakosti ($\sum_{i=1}^{\infty}|(x|e_i)|^2 \leqslant |x|^2$) sledi konvergencija reda $\sum_{i=1}^{\infty}|(x|e_i)|^2$. Prostor X je kompletan, pa konvergira i red $\sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)e_i$. Označimo sa

$$x_0 = x - \sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)e_i.$$

Kada delujemo na x_0 operatorom H, zbog njegove neprekidnosti, dobijamo

$$Hx_0 = Hx - \sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)He_i = Hx - \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x|e_i)e_i,$$

što sa (9) daje $Hx_0 = 0 \Rightarrow x_0 \in N(H)$.$\square$

Posledica 2.3.5. *Ako je H ermitski kompaktan beskonačno-dimenzionalan operator na Hilbertovom prostoru X, onda vektori $(e_n, n \in N)$ iz Teoreme 2.3.3. obrazuju ortonormiranu bazu u X ako i samo ako nula nije sopstvena vrednost operatora H.*

Za proizvoljan kompaktan operator H na Hilbertovom prostoru X imamo uopštenje prethodne teoreme:

Teorema 2.3.6. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A : X \longrightarrow Y$ kompaktan beskonačno-dimenzionalan operator. Tada postoje nizovi ortonormiranih vektora (e_n) u X i (f_n) u Y i niz brojeva (s_n) takvih da je $s_1 \geqslant s_2 \geqslant ... \geqslant s_m \geqslant ... > 0, \lim s_n = 0$ i da važi*

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i)e_i, \qquad (x \in X)$$

$$(13) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x|e_i)f_i, Ax_0 = 0.$$

Sa (13) je dat takozvani ***Šmitov prikaz operatora A****.*

Dokaz. Kako je A kompaktan operator, to je $H = A^*A$ kompaktan ermitski operator na X, pa na njega možemo primeniti **Teoremu 2.3.4.**. Naime, postoji ortonormiran niz (e_i) u X i niz (λ_i) realnih brojeva takvih da je $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)e_i$, i $Hx_0 = 0, He_i = \lambda_i e_i, |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ... \geqslant |\lambda_n| \geqslant ... > 0$ i $\lim \lambda_i = 0$. Množenjem $He_i = \lambda_i e_i$ sa e_i, dobijamo da je

$$\lambda_i = (He_i|e_i) = (A^*Ae_i|e_i) = |Ae_i|^2 > 0 \Rightarrow s_i = \sqrt{\lambda_i} > 0.$$

Stavimo $f_i = \frac{Ae_i}{s_i}$. Tada je

$$(f_i|f_j) = \frac{1}{s_i s_j}(Ae_i|Ae_j) = \frac{1}{s_i s_j}(He_i|e_j) = \delta_{ij},$$

gde je δ_{ij} Kronekerov δ - simbol. Kada delujemo na vektor x neprekidnim operatorom A, dobijamo

$$Ax = Ax_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)Ae_i = Ax_0 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x|e_i)f_i.$$

Na kraju, $|Ax_0|^2 = (Ax_0|Ax_0) = (Hx_0|x_0) = 0$ povlači $Ax_0 = 0$. Time je dokazano i (13).$\square$

2.4 Spektralna teorema za kompaktne normalne operatore

Pre nego što pristupimo formulaciji i dokazu glavne teoreme, dokazaćemo neka tvrđenja na koja ćemo se pozivati u njenom dokazu.

Teorema 2.4.1. *Neka su $P_1, P_2 : X \longrightarrow X$ ortogonalni projektori na zatvorene potprostore Y_1 i Y_2 Hilbertovog prostora X.*
(i) Operator $P = P_1P_2$ je ortogonalni projektor ako i samo ako je $P_1P_2 = P_2P_1$. Tada je P ortogonalni projektor na potprostor $Y_1 \cap Y_2$.
(ii) Operator $P = P_1 + P_2$ je ortogonalni projektor ako i samo ako je $Y_1 \perp Y_2$. Tada je P ortogonalni projektor na $Y_1 \oplus Y_2$.

Teorema 2.4.2.*(o graničnoj vrednosti niza ermitskih operatora iz $L(X)$)* *Ako je $(A_n, n \in N)$, monoton niz ermitskih operatora iz $L(X)$ i ako je*

$$M = \sup\{|A_n|, n \in N\} < \infty,$$

onda postoji ermitski operator $A \in L(X)$ takav da je $A_n \leqslant A, \forall n \in N$, odnosno $(A_n \geqslant A, \forall n \in N)$ i

$$Ax = \lim A_n x \qquad (x \in X).$$

I ova teorema data je bez dokaza. Sledeća teorema je njena direktna posledica.

Teorema 2.4.3. *Ako je $(X_n)_{n\in N}$ niz zatvorenih medjusobno ortogonalnih potprostora Hilbertovog prostora X, onda je njihova ortogonalna suma*

$$(1) \qquad \oplus_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n \oplus ...$$

zatvoren potprostor u X. Dalje je

$$(2) \qquad Px = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x \qquad (x \in X),$$

gde je P ortogonalni projektor na potprostor (1) i P_n ortogonalni projektor na X_n.

Dokaz. Podsetimo se da je ortogonalna suma (1) niza (X_n) definisana kao skup svih vektora $x \in X$ oblika

$$(3) \qquad x = x_1 + x_2 + ...x_n + ... \qquad (x_n \in X_n).$$

Budući da je konvergencija reda (3) ekvivalentna konvergenciji brojnog reda

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 + ...,$$

očigledno da je (1) potprostor od X.
Iz $X_n \perp X_m, n \neq m$ na osnovu **Teoreme 2.4.1.** zaključujemo da je $P_n P_m = 0 = P_m P_n$. Odavde sledi da je niz $A_n = P_1 + P_2 + ... + P_n$, ortogonalnih projektora, rastući. Na njega, dakle, možemo primeniti prethodnu teoremu pa je sa

$$Px = \lim A_n x \qquad (x \in X)$$

definisan ograničen ermitski operator. Iz

$$P^2 x = P(Px) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(Px) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\sum_{k=1}^{\infty} P_k x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} P_n P_k x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x = Px$$

zaključujemo da je P ortogonalni projektor. Kada na vektor (3) delujemo sa P, dobijamo

$$Px = Px_1 + Px_2 + ...Px_n + ... = x_1 + x_2 + ...x_n + ... = x,$$

što pokazuje da je prostor (1) sadržan u potprostoru $R(P) = \{x \in X : Px = x\}$. S druge strane, iz

$$x \in R(P) \Rightarrow x = Px = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x,$$

pa je x oblika (3) sa $x_n = P_n x$. Dakle je $R(P) = X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n \oplus ....$ Na kraju, zbog neprekidnosti projektora P, potprostor $R(P)$ je zatvoren.$\Box$

Lema 1. *Sopstveni potprostori odgovarajući različitim sopstvenim vrednostima normalnog operatora međusobno su ortogonalni.*

Dokaz. Neka su λ', λ'' sopstvene vrednosti normalnog operatora A i neka su X' i X'' odgovarajući sopstveni potprostori, odnosno $Ax' = \lambda' x'$, $Ax'' = \lambda'' x''$. Tada je $(A - \lambda' I)x' = 0 \Rightarrow x' \in N(A - \lambda' I)$.

$$N(A-\lambda' I) \overset{(1)}{=} N((A-\lambda' I)^*(A-\lambda' I)) \overset{(A-\lambda' I))je\ norm.}{=} N((A-\lambda' I)(A-\lambda' I)^*) \overset{(2)}{=}$$

$$R((A - \lambda' I)(A - \lambda' I)^*)^{\perp} \overset{(3)}{=} R(A - \lambda' I)^{\perp}$$

$$Ax'' = \lambda'' x'' \Rightarrow (A - \lambda' I)x'' = Ax'' - \lambda' x'' = (\lambda'' - \lambda')x'' \Rightarrow$$

$$x'' = \frac{1}{\lambda'' - \lambda'}(A - \lambda' I)x'' \in R(A - \lambda' I) \Rightarrow x' \perp x''.$$

(1) Za normalan operator A važi: $N(A) = N(A^*A) = N(AA^*)$,

(2) $N(A) = R(B^*)^\perp, (A - \lambda' I)(A - \lambda' I)^*$ je ermitski, tj. $((A - \lambda' I)(A - \lambda' I)^*)^* = (A - \lambda' I)(A - \lambda' I)^*$,

(3) Za normalan operator A važi $R(A) = R(AA^*) = R(A^*A)$.

Lema 2. *Kompaktan normalan operator N ima bar jednu sopstvenu vrednost. Skup svih sopstvenih vrednosti operatora N je prebrojiv. Sopstveni potprostor odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda \neq 0$ operatora N je konačno-dimenzionalan.*

Dokaz. Operatori N, N^* i $H = NN^* = N^*N$ imaju isto jezgro. Prema **Teoremi 2.3.2.** $\overline{R(H)}$ je ortogonalni komplement prostora $N(H)$. Potprostor $\overline{R(H)} = X \ominus N(H)$ je invarijantan za H, N i N^*. Označimo sa N_1 operator indukovan operatorom N na $\overline{R(H)}$; on je kompaktan i normalan. Dalje, ermitski operator $H_1 = N_1 N^*$ (kojeg na $\overline{R(H)}$ indukuje N) nema nulu kao sopstvenu vrednost ako je $N_1 \neq 0$. Budući da operatori H_1 i N_1 komutiraju, to su sopstveni potprostori operatora H_1 invarijantni i za operator N_1. No, ovi potprostori su konačno-dimenzionalni pa N_1, a tim pre i N, ima bar jedan invarijantan konačno-dimenzionalan potprostor, dakle N ima bar jednu sopstvenu vrednost. S druge strane, na osnovu **Teoreme 2.3.2.** sledi da je prostor $\overline{R(H)}$ separabilan. Odavde, i na osnovu **Leme 1.** operator N_1, pa dakle i operator N, ima prebrojivo mnogo različitih sopstvenih vrednosti. Na kraju, sopstveni potprostor odgovarajući sopstvenoj vrednosti operatora N različitoj od nule, je konačno-dimenzionalan.$\square$

Teorema 2.4.4. *Za kompaktan, normalan operator N na Hilbertovom prostoru X postoje međusobno različiti kompleksni brojevi $\lambda_0, \lambda_1, ...$ i medjusobno ortogonalni projektori $P_0, P_1, ...$ takvi da je*

(4) $\qquad \sigma(N) = \overline{\{\lambda_0, \lambda_1, ...\}}$,

(5) $\qquad N = \sum \lambda_n P_n$ (*konvergencija* u $L(X)$),

(6) $\qquad (\forall x \in X) \quad x = \sum P_n x$ (*konvergencija* u X).

Dokaz. Bez gubljenja opštosti, pretpostavićemo da je $N \neq 0$ i $\dim X \neq 0$. Izaberimo sve od nule različite sopstvene vrednosti operatora N; neka su to $\lambda_1, \lambda_2, ...$ i neka su one numerisane tako da važi $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ...$ Stavimo da je $\lambda_0 = 0$, ako je nula sopstvena vrednost operatora N. Sa X_n označimo sopstven potprostor operatora N odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ_n a sa P_n odgovarajući ortogonalni projektor. Tvrdimo da je ortogonalna suma $Y = \oplus_n X_n = X$. Da bismo to dokazali, primetimo da je Y invarijantno za N i za N^*. No tada je i potprostor $Y^\perp$ invarijantan za N i za N^*. Operator N_0 indukovan operatorom N na $Y^\perp$ je kompaktan i normalan. Ako je $\dim Y^\perp \geqslant 1$, onda prema **Lemi 2.** postoji broj α i vektor $a \in Y^\perp, a \neq 0$ takvi da je $N_0 a = \alpha a$. Tim pre je $Na = \alpha a$, tj $\alpha = \lambda_n$ za neko $n \in N$. To povlači $a \in X_n$, što je u kontradikciji sa $a \perp X_n, a \neq 0$.
Dakle $\dim Y^\perp = 0$, tj. $X = X_0 \oplus X_1 \oplus ...$ Iz ovog poslednjeg sledi (6). Ako je $\sigma_p(N)$ konačan skup, gde je $\sigma_p(N) = \{\lambda \in C : \lambda I - N \text{ nije "}1-1\text{"}\}$ tačkasti spektar operatora N, onda je (5) očigledno. Ako je $\sigma_p(N)$ beskonačan skup, onda primenom operatora N na (6) dobijamo:

$$Nx = \sum_{k=0}^{\infty} NP_k x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k x \Rightarrow$$

$$|(N - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k)x|^2 = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k P_k x|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |P_k x|^2$$

$$\leqslant |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k x|^2 \leqslant |\lambda_{n+1}|^2 |x|^2 \Rightarrow$$

$$|N - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k| \leqslant |\lambda_{n+1}|. \tag{7}$$

Budući da je $|\lambda_n|^2$ sopstvena vrednost kompaktnog ermitskog operatora $H = NN^*$, to je $|\lambda_n|^2 \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$. Odavde i iz (7) dobijamo (5).
Ako broj α nije u zatvorenju skupa $\sigma_p(N)$, onda je niz $(\frac{1}{\alpha - \lambda_n})$ ograničen, pa je sa

$$Rx = \sum \frac{P_n x}{\alpha - \lambda_n} \qquad (x \in X)$$

definisan ograničen normalan operator na X. Iz $(\alpha I - N)R = R(\alpha I - N) = I$ sledi $x \in \sigma(N)$, pa je time i (4) dokazano.$\square$

Posledica 2.4.5. *Ako je N kompaktan normalan operator na Hilbertovom prostoru X, onda je*

$$X = N(N) + \overline{R(N)}, \quad N(N^*) = N(N).$$

Posledica 2.4.6. *Normalan operator N je kompaktan ako i samo ako je svaki od nule različit element spektra $\sigma(N)$ sopstvena vrednost operatora N konačne višestrukosti i ako je nula jedina tačka nagomilavanja skupa $\sigma(N)$.*

Posledica 2.4.7. *Ako je N kompaktan normalan operator na Hilbertovom prostoru X, onda postoji ortonormirana baza (e_n) u X i niz kompleksnih brojeva (λ_n) takvih da je*

$$Ne_i = \lambda_i e_i, \forall i;$$

$$x = x_0 + \sum (x|e_i)e_i, \qquad \forall x \in X;$$

$$Nx = \sum \lambda_i (x|e_i)e_i, \qquad Nx_0 = 0;$$

$$N^* x = \sum \lambda_i \overline{(x|e_i)} e_i.$$

Ako je $\dim R(N) = \infty$, *onda je* $\lim \lambda_n = 0$.

Dokaz. U svakom potprostoru X_n iz **Teoreme 2.4.6.** izaberimo ortonormiranu bazu. Skup takvih baza čini ortonormiranu bazu u X koja ima sva svojstva navedena u formulaciji ove posledice.□

2.5 Ekstremalna svojstva sopstvenih vrednosti kompaktnog ermitskog operatora

Neka je H ermitski kompaktan operator na Hilbertovom prostoru X. Pretpostavićemo da je H beskonačno-dimenzionalan i da ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo strogo negativnih sopstvenih vrednosti. Neka su $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant ...$ sve strogo pozitivne, i $\lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant ...$sve strogo negativne sopstvene vrednosti operatora H. Prema **Teoremi 2.3.3.** postoje ortonormirani vektori $e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^-, ...$ takvi da je $He_i^+ = \lambda_i^+ e_i^+, He_i^- = \lambda_i^- e_i^-, \quad (i \in N)$ i

$$(1) \qquad Hx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^+ (x|e_i^+)e_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^- (x|e_i^-)e_i^-, \quad x \in X.$$

Iz (1) dobijamo:

$$(2) \qquad (Hx|x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^+ |(x|e_i^+)|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^- |(x|e_i^-)|^2, \quad x \in X.$$

Teorema 2.5.1. *Uz već navedene oznake je:*

$$\lambda_1^+ = \max\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\},$$

$$\lambda_2^+ = \max\{(Hx|x) : |x| = 1; x \perp e_1^+, x \in X\},$$

.

.

.

$$\lambda_i^+ = \max\{(Hx|x) : |x| = 1; x \perp e_1^+, ..., e_{i-1}^+; x \in X\},$$

.

.

.

Nadalje je

$$\lambda_1^- = \min\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\},$$

$$\lambda_2^- = \min\{(Hx|x) : |x| = 1; x \perp e_1^-, x \in X\},$$

.

.

.

$$\lambda_i^- = \min\{(Hx|x) : |x| = 1; x \perp e_1^-, ..., e_{i-1}^-; x \in X\},$$

.

.

.

Dokaz. Iz (2) za $x = e_1^+$ dobijamo $\lambda_1^+ = (He_1^+|e_1^+)$ pa je

$$(3) \qquad \sup\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\} \geqslant \lambda_1^+.$$

S druge strane iz (2) zbog $\lambda_i^- < 0$ i Beselove nejednakosti dobijamo:

$$(Hx|x) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^+ |(x|e_i^+)|^2 \leqslant \lambda_1^+ \sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i^+)|^2 \leqslant \lambda_1^+ |x|^2,$$

što zajedno sa (3) povlači formulu za λ_1^+ koju izvodimo.
Iz (2) za $x = e_2^+$ dobijamo $\lambda_2^+ = (He_2^+|e_2^+)$. Za $x \perp e_1^+$ imamo:

$$(Hx|x) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^+ |(x|e_i^+)|^2 = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^+ |(x|e_i^+)|^2 \leqslant \lambda_2^+ |x|^2,$$

što daje formulu za λ_2^+ koju tražimo.
Na sličan način se dokazuju formule za λ_i^+.

Iz (2) za $x = e_1^-$ dobijamo $\lambda_1^- = (He_1^-|e_1^-)$ pa je

$$(4) \qquad \inf\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\} \leqslant \lambda_1^-.$$

Ponovo, zbog Beselove nejednakosti i ovog puta, zbog $\lambda_i^+ > 0$, iz (2) dobijamo:

$$(Hx|x) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^- |(x|e_i^-)|^2 \geqslant \lambda_1^- \sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i^-)|^2 \geqslant \lambda_1^- |x|^2,$$

što zajedno sa (4) daje formulu za λ_1^-. Slično bismo dokazali i formulu za λ_i^-.$\square$

Posledica 2.5.2. *Ako su granice*

$$m = \inf\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\}, M = \sup\{(Hx|x) : |x| = 1, x \in X\}$$

kompaktnog ermitskog operatora H različite od nule, onda su m i M jedine sopstvene vrednosti operatora H.

Prema **Teoremi 2.5.1.** sopstvene vrednosti kompaktnog ermitskog operatora H su ekstremne vrednosti kvadratne forme $x \longrightarrow (Hx|x)$ uz određene uslove za vektore x. Uz uslov $|x| = 1$, ova funkcija ima maksimum λ_1^+ i minimum λ_1^-.

Za određivanje sopstvene vrednosti λ_k^+ prema ovoj teoremi vezana je ekstremna vrednost funkcije $x \longmapsto (Hx|x)$. Zahteva se da $x \in X$ zadovoljava uslove $|x| = 1, x \perp e_1^+, ..., e_{k-1}^+$. S tim u vezi, izaberimo proizvoljne vektore $y_1, y_2, ..., y_{k-1}$ iz X i veze $|x| = 1, x \perp y_1, y_2, ..., y_{k-1}$, pa variranjem tih veza nastojimo dobiti sopstvenu vrednost λ_k^+. U tu svrhu definišimo:

$$(5) \qquad \lambda_k^+(H; y_1, ..., y_{k-1}) = \sup\{(Hx|x) : |x| = 1, x \perp y_1, y_2, ..., y_{k-1}, x \in X\}$$

Dokažimo da je

$$(6) \qquad \lambda_k^+ = \lambda_k^+(H; e_1^+, ..., e_{k-1}^+) \leqslant \lambda_k^+(H; y_1, ..., y_{k-1})$$

Da bismo dokazali da važi (6), potražimo jedinični vektor $x_0 \in X$ takav da bude:

$$(7) \qquad (x_0|y_j) = 0 \qquad (j = 1, ..., k-1);$$

$$(8) \qquad \lambda_k^+ \leqslant (Hx_0|x_0) \leqslant \lambda_k^+(H; y_1, ..., y_{k-1});$$

Za vektor $x = \sum_{i=1}^k t_i e_i^+$, zahtevi $(x|y_j) = 0$, $(j = 1, ..., k-1)$; upućuju na homogen sistem

$$\sum_{i=1}^{k} (e_i^+|y_j) t_i = 0, \qquad (j = 1, ..., k-1);$$

od *k-1* jednačina sa k nepoznatih. Takav sistem uvek ima netrivijalno rešenje, pa vektor $x_0 = \dfrac{x}{|x|} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i^+$ zadovoljava (7). No, tada je

$$\lambda_k^+(H; y_1, ..., y_{k-1}) \geqslant (Hx_0|x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^+ |\xi_i|^2 = \lambda_k^+ |x_0|^2,$$

što i jeste nejednakost (8). Mi smo sada zapravo dokazali jednu teoremu, koja se često naziva **Fišerova minimaks teorema.**

Teorema 2.5.3. *(Fišer, 1905.) Neka su oznake i uslovi kao u Teoremi 2.5.1. Tada važi:*

$$(9) \qquad \lambda_k^+ = \min[\max(Hx|x)],$$

$$(10) \qquad \lambda_k^- = \max[\min(Hx|x)],$$

pri čemu se maksimum u (9) (minimum u (10)) uzima po svim jediničnim vektorima x koji su ortogonalni na proizvoljan sistem $y_1, y_2, ... y_{k-1}$ vektora iz X, a minimum u (9) (maksimum u (10)) uzima se po svim takvim sistemima.

Sada možemo da izvedemo neke nejednakosti koje se odnose na sopstvene vrednosti triju ermitskih kompaktnih operatora H', H''i$H' + H''$.

Teorema 2.5.4. *Neka su H', H'' i $H = H' + H''$ ermitski kompaktni operatori na Hilbertovom prostoru X. Uz evidentne oznake sopstvenih vrednosti tih operatora imamo:*

$$(11) \qquad \lambda_{i+j-1}^+ \leqslant \lambda_i'^+ + \lambda_j''^+ \qquad (i, j = 1, 2, ...)$$

$$(12) \qquad \lambda_{i+j-1}^- \geqslant \lambda_i'^- + \lambda_j''^- \qquad (i, j = 1, 2, ...).$$

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan skup $S = \{y_1, ...y_{i-1}, z_1, ..., z_{j-1}\}$ i jedinični vektor x. Imamo:

$$\lambda_i^+(H'; y_1, ..., y_{i-1}) + \lambda_j^+(H''; z_1, ..., z_{j-1}) =$$

$$\sup_{x \perp (y_1,...,y_{i-1})} (H'x|x) + \sup_{x \perp (z_1,...,z_{j-1})} (H''x|x) \geqslant \sup_{x \perp S}(H'x|x) + \sup_{x \perp S}(H''x|x) \geqslant$$

$$\sup_{x \perp S}[(H'x|x) + (H''x|x)] = \lambda_{i+j-1}^+(H; y_1, ..., y_{i-1}; z_1, ..., z_{j-1}) \geqslant \lambda_{i+j-1}^+$$

Dakle,

$$\lambda_i^+(H'; y_1, ..., y_{i-1}) + \lambda_j^+(H''; z_1, ..., z_{j-1}) \geqslant \lambda_{i+j-1}^+.$$

Pređemo li sada na infimum po $(y_1, y_2, ..., y_{i-1})$, a zatim po $(z_1, ..., z_{j-1})$, a onda koristeći (9) dobijamo (11). Slično se dokazuje i nejednakost za negativne sopstvene vrednosti operatora.$\square$

2.6 Teorema Arcela-Askoli

Neka je K kompaktan skup iz R^n ili C^n, odnosno proizvoljan kompaktan (Hausdorfov) topološki prostor. Sa $C(K)$ označimo Banahov prostor svih neprekidnih funkcija $f : K \longrightarrow C$, sa normom $|f| = \max\{|f(x)| : x \in K\}$. Za skup $T \subseteq C(K)$ sa

$$\delta(T) = \sup\{|f - g| : f, g \in T\}$$

označavamo dijametar skupa T. Sa $U(x)$ označavamo otvoren skup koji sadrži tačku x.

Definicija 2.6.1. Skup $T \subset C(K)$ je *ekvineprekidan u tački* $x_0 \in K$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je

$$(\forall f \in T)(\forall x \in U(x_0) \cap K) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Skup T je ekvineprekidan na skupu $S \subseteq K$ ako je on ekvineprekidan u svakoj tački $x_0 \in S$.

Konačan skup je ekvineprekidan u svakoj tački $x_0 \in K$. Zaista, za $T = \{f_1, ...f_n\}, x_0 \in K$ i $\varepsilon > 0$ postoje okoline U_i tačke x_0 takve da $x \in U_i \cap K \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$. Označimo sa $U = U_1 \cap ... \cap U_n$, tada je

$$(\forall x \in U \cap K) \qquad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, ...n.$$

Teorema 2.6.1.(*Arcela-Askoli) Neka je K kompaktan skup u R^n odnosno C^n, odnosno kompaktan topološki prostor i T podskup Banahovog prostora $C(K)$. Skup T je relativno kompaktan u $C(K)$ ako i samo ako je ograničen i ekvineprekidan.*

2.7 Kompaktnost nekih integralnih operatora

Označimo sa Δ segment u R, odnosno kvadrat u R^2, odnosno n-dimenzionalni kvadar u R^n, a sa $C(N)$ označavamo vektorski prostor svih neprekidnih funkcija definisanih na Δ, tj. vektorski prostor funkcija $x : \Delta \longrightarrow C$.

Vektorski prostor $C(\Delta)$ snabdeven je normom

$$|x| = \max\{|x(t)| : t \in \Delta\}.$$

U odnosu na metriku indukovanu ovom normom, $C(\Delta)$ je Banahov prostor. Takođe, vektorski prostor $C(\Delta)$ snabdeven je skalarnim proizvodom

$$(x|y) = \int_\Delta x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Analogno se mogu definisati norma i skalarni proizvod na prostorima $C(\Delta)$ gde je $\Delta \subseteq R^2$ odnosno $\Delta \subseteq R^n$.
Integralni operator A definisan sa:

$$(1) \qquad Ax(s) = y(s) = \int_\Delta k(s,t)x(t)dt,$$

uz razne pretpostavke o jezgru κ i o skupu Δ, je kompaktan. To pokazuje teorema Arcela-Askolija. Te pretpostavke obezbeđuju da se na (1) može primeniti nejednakost Švarc-Koši-Bunjakovskog:

$$(2) \qquad |y(s)| = (\int_\Delta |\kappa(s,t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_\Delta |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3)\ |y(s_1) - y(s_2)| \leqslant (\int_\Delta |\kappa(s_1,t) - \kappa(s_2,t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_\Delta |x(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 2.7.1. *Ako je jezgro κ operatora (1) neprekidna funkcija na $\Delta \times \Delta$, onda je sa (1) definisan kompaktan operator iz Hilbertovog prostora $C(\Delta)$ na Banahov prostor $C(\Delta)$.*

Dokaz. Funkcija $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$ je uniformno neprekidna, jer je skup $\Delta \times \Delta$ kompaktan. Dakle,

$$(4) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| \leqslant \delta \Rightarrow |\kappa(s_1,t_1) - \kappa(s_2,t_2)| \leqslant \varepsilon).$$

Odavde, i iz (3) dobijamo

$$(5) \qquad |y(s_1) - y(s_2)| < \varepsilon\sqrt{\mu(\Delta)}$$

za svaku funkciju x iz jedinične kugle prostora $C(\Delta)$ i za sve $s_1, s_2 \in \Delta$, za koje je $|s_1 - s_2| \leqslant \delta$, gde smo sa $\mu(\Delta)$ označili meru n-kvadra Δ. Po definiciji, (5) kazuje da je funkcija $y = Ax$ neprekidna funkcija za $x \in C(\Delta)$. Dakle, sa (1) je definisan operator koji slika $C(\Delta)$ u $C(\Delta)$.
Dalje, iz (5) vidimo da A slika jediničnu kuglu K prostora $C(\Delta)$ u ekvineprekidan skup. Neka je $M \geqslant 0$ takav broj da je

$$(6) \qquad \int_\Delta |\kappa(s,t)|^2 dt \leqslant M, \qquad s \in \Delta,$$

pa na osnovu (2) imamo da je

$$(7) \qquad |y(s)| \leqslant \sqrt{M}, \qquad s \in \Delta.$$

Pređimo na maksimum po s i dobijamo $\{|y(s)| : s \in \Delta\} \leqslant \sqrt{M}$, što povlači ograničenost operatora A i ograničenost skupa AK u Banahovom prostoru $C(\Delta)$. Konačno, skup AK, kao ograničen i ekvineprekidan zadovoljava uslove teoreme Arcela-Askolija, pa je relativno kompaktan.□

Posledica 2.7.2. *Ako je $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$, onda formula (1) definiše kompaktan operator sa Hilbertovog prostora $C(\Delta)$ u Hilbertov prostor $C(\Delta)$.*

Teorema 2.7.3. *Ako je $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$, onda je A simetričan operator ako i samo ako njegovo jezgro κ zadovoljava*

$$(8) \qquad \kappa(s,t) = \overline{\kappa(t,s)}, \qquad s,t \in \Delta \quad \textit{(ermitska simetrija).}$$

Dokaz. Za sve $x, y \in C(\Delta)$ imamo:

$$(Ax|y) = \int_\Delta (Ax)(s)\overline{y(s)}ds = \int_\Delta \Big(\int_\Delta \kappa(s,t)x(t)dt\Big)\overline{y(s)}ds \Rightarrow$$

$$(x|Ay) = \int_\Delta x(s)\overline{Ay(s)}ds = \int_\Delta x(s)\overline{\Big(\int_\Delta \kappa(s,t)y(t)dtds}$$

$$= \int_{\Delta\times\Delta} \overline{\kappa(s,t)y(t)}x(s)dtds \overset{s\rightleftarrows t}{=} \int_{\Delta\times\Delta} \overline{\kappa(t,s)y(s)}x(t)dsdt$$

pa $(Ax|y) = (x|Ay)$ prelazi u

$$\int_{\Delta\times\Delta} [\kappa(s,t) - \overline{\kappa(t,s)}]x(t)\overline{y(s)}dsdt = 0,$$

što povlači (8).
Drugi smer je očigledan.□

Neka sada jezgro $\kappa \in C(\Delta)$ zadovoljava (8) i neka je $A \neq 0$ konačno-dimenzionalan operator. Prema **Teoremi 2.3.2.** postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ različiti od nule, i ortonormirane funkcije $e_1, e_2, ...e_n$ takve da je

$$(9) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i$$

$$Ae_i = \lambda_i e_i \qquad (i = 1, ...n),$$

odnosno

$$(10) \qquad \int_\Delta \kappa(s,t) e_i(t) dt = \lambda_i e_i(s).$$

Tada je

$$(11) \qquad \kappa(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s) \overline{e_i(t)} \qquad (s, t \in \Delta).$$

Da bismo dokazali (11) stavimo

$$\alpha(s,t) = \kappa(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s) \overline{e_i(t)}.$$

Za $x \in C(\Delta)$ imamo:

$$\int_\Delta \alpha(s,t) x(t) dt = \int_\Delta \kappa(s,t) x(t) dt - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(s) \int_\Delta x(t) \overline{e_i(t)} dt$$

$$= (Ax)(s) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) e_i(s) = 0$$

zbog (9). Odavde sledi $\alpha(s,t) = 0$ za sve $s, t \in \Delta$, pa je time (11) dokazano. Ako $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$ zadovoljava (8) i ako A nije konačno-dimenzionalan, onda prema **Teoremi 2.3.3.** postoji niz (λ_n) realnih brojeva $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ... > 0$ i ortonormiran niz funkcija (e_n) takvih da je $\lim \lambda_n = 0$, da važi (10) i da red funkcija

$$(12) \qquad Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i) e_i, \quad x \in C(\Delta)$$

konvergira u srednjem ka funkciji Ax.

Teorema 2.7.4.(Hilbert-Šmit) *Ako jezgro $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$ zadovoljava ermitsku simetriju (8), i ako operator A nije konačno-dimenzionalan, onda red (12) uniformno konvergira funkciji Ax za svaku funkciju $x \in C(\Delta)$.*

Dokaz. $\lambda_i \in R, \forall i \in \{1, ..., n\}$ pa iz (10), za fiksirano $s \in \Delta$ imamo:

$$\lambda_i \overline{e_i(s)} = \int_\Delta \overline{\kappa(s,t) e_i(t)} dt, \tag{13}$$

što pokazuje da je $\lambda_i \overline{e_i(s)}$ Furieov koeficijent funkcije $t \longmapsto \overline{\kappa(s,t)}$ u odnosu na ortonormiran sistem (e_i). No tada iz (7), na osnovu Beselove nejednakosti, sledi:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \overline{e_i(s)}|^2 \leqslant M, \qquad n \in N. \tag{14}$$

Za dato $\varepsilon > 0$ zbog Beselove nejednakosti postoji $(n \in N)$ takvo da je

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |(x|e_i)|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Za neko $p \in N$ imamo:

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i (x|e_i) e_i(s)| \leqslant (\sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i(s)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=n+1}^{n+p} |(x|e_i)|^2)^{1/2}.$$

Odavde, i iz (14) dobijamo:

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\lambda_i (x|e_i) e_i(s)| \leqslant \varepsilon \sqrt{M} \qquad (s \in \Delta),$$

što pokazuje da red (12) konvergira uniformno.$\square$

Teorema 2.7.5. *Ako jezgro $\kappa \in C(\Delta \times \Delta)$ definiše beskonačno- dimenzionalan simetričan operator A, onda važi:*

$$\kappa(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(s) \overline{e_i(t)}, \tag{15}$$

$$\int_{\Delta \times \Delta} |\kappa(s,t)|^2 ds dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \tag{16}$$

i red (15) konvergira u srednjem funkciji κ.

Teorema 3.5.6.*(Mercer) Neka funkcija κ zadovoljava sve uslove prethodne teoreme. Ako je $(Ax|x) \geqslant 0$ za svako $x \in C(\Delta)$, onda red (15) uniformno konvergira funkciji κ.*

2.8 Spektar kompaktnog operatora

Neka je A kompaktan operator. Kako je za $\lambda \neq 0$ i $\lambda^{-1}A$ kompaktan operator i

$$\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A), \tag{1}$$

to bez gubljenja opštosti možemo uzeti da je $\lambda = 1$. Za $n \in N$ uvedimo sledeće oznake:

$$T = I - A, \quad N_n = N[(I - A)^n], \quad R_n = R[(I - A)^n].$$

Pre nego pristupimo dokazivanju teorema vezanih za spektar kompaktnog operatora, dokazaćemo neka tvrđenja na koja ćemo se kasnije pozivati.
Najpre, navešćemo jednu od osnovnih tvrđenja iz oblasti funkcionalne analize, a to je **Risova lema**: *Neka je X Hilbertov prostor i K neprazan konveksan zatvoren skup u X. Za svako $x \in X$ postoji jedinstven vektor $y_0 \in K$, takav da je $|x - y_0| = \inf\{|x - y| : y \in K\}$.*

Teorema 2.8.1. *Ako je A kompaktan operator na normiranom prostoru X i n prirodan broj, onda je nul-potprostor N_n konačno-dimenzionalan. Ako je n dovoljno veliko, onda je $N_n = N_{n+1}$.*

Dokaz. Da bismo dokazali prvi deo stava, posmatrajmo operator

$$U_n = T^n - I = -nA + ... + (-1)^n A^n. \tag{3}$$

Operator U_n je kompaktan, pa $T^n = I + U_n$ pokazuje da operator $-U_n$ na N_n indukuje jedinični operator I_n. Zbog kompaktnosti operatora $-U_n$ i operator I_n je kompaktan, pa je $\dim N_n < \infty$.

Kada bismo imali $N_n \neq N_{n+1}$ za svako n, onda iz

$$N_1 \subset N_2 \subset ...N_n \subset N_{n+1} \subset ...$$

na osnovu **Risove leme**, postoji jedinični vektor $e_n \in N_{n+1}$ takav da je $d(e_n, N_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Ako je $m < n$, onda je

$$z = Te_n - Te_m + e_m \in N_n,$$

pa imamo

$$|Ae_m - Ae_n| = |z - e_n| \geqslant d(e_n, N_n) \geqslant \frac{1}{2},$$

pa (Ae_n) nema Košijev podniz. To je nemoguće jer A je kompaktan operator i (e_n) je ograničen niz. Dakle, došli smo do kontradikcije, što dovodi do zaključka da naša polazna pretpostavka nije tačna. Dakle, postoji prirodan broj n takav da je $N_n = N_{n+1}$. Tada, za svako $k \geqslant n, N_k = N_n$.$\square$

Definicija 2.8.1. Neka je X normiran prostor i $T \in L(X)$. Ako postoji $k \in \{0, 1, ...\}$ takav da je $N(T^k) = N(T^{k+1})$, tada se za operator T kaže da *ima konačan uspon*; u suprotnom se kaže da operator T *ima beskonačan uspon*. Uspon operatora T označava se sa $\alpha(T)$. Ako operator T ima konačan uspon, onda je

$$\alpha(T) = \min\{k \in \{0, 1, ...\} : N(T^k) = N(T^{k+1})\} < \infty,$$

a ako operator T ima beskonačan uspon, onda je $\alpha(T) = \infty$.

U skladu sa ovom definicijom, $\alpha(T) < \infty$ ako i samo ako je $T = I - A$ i A kompaktan operator.

Teorema 2.8.2. *Ako je A kompaktan operator na normiranom prostoru X, onda je slika R_n operatora $(I-A)^n$ zatvoren potprostor. Ako je n dovoljno veliko, onda je $R_{n+1} = R_n$.*

Dokaz. Uzmimo da je

$$(4) \qquad y_0 = \lim T^n x_k \qquad (x_k \in X).$$

Treba dokazati da je $y_0 \in R_n$. Niz $k \longmapsto d_k = d(x_k, N_n)$ je ograničen. Zaista, ukoliko pretpostavimo suprotno, imamo da $d_k \longrightarrow \infty$. Označimo sa $z_k = x_k/d_k$. Tada je $d(z_k, N_n) = 1$, pa postoji vektor $u_k \in N_n$ takav da je $|v_k| \leqslant 2, v_k = z_k - u_k$. Kako je (v_k) ograničen niz, možemo uzeti da niz $(U_n v_k, k \in N)$ konvergira nekom vektoru v', jer je $U_n = (T^n - I)$ kompaktan operator. Tada je

$$v_k = T^n v_k - U_n v_k = T^n z_k - T^n U_k - U_n v_k = T^n z_k - U_n v_k$$

$$= \frac{T^n x_k}{d_k} - U_n v_k \longrightarrow -v' = v.$$

Sledi, $d(v, N_n) = \lim d(v_k, N_n) = 1 - 0 = 1$, a to je u kontradikciji sa $T^n v = \lim T^n v_k = T^n z_k = 0$.
Dakle, postoji realni broj $M > 0$ takav da je $d_k \leqslant M, \forall k \in N$. Iz $d(x_k, N_n) \leqslant M \Rightarrow (\exists x'_k \in X)(|x'_k| \leqslant 1 + M$ i $x_k - x'_k \in N_n)$. Budući da je niz (x'_k) ograničen, možemo uzeti da niz $(U_n x'_k)_{k \in N}$ konvergira nekom vektoru a'. Tada $y_0 = \lim T^n x_k = \lim T^n x'_k$ povlači $x'_k = T^n x'_k - U_n x'_k \longrightarrow y_0 - a'$ pa je

$y_0 = \lim T^n x'_k = T^n(y_0 - a')$, tj. $y_0 \in R_n$. Dakle, potprostor R_n je zatvoren. Ako bi bilo $R_{n+1} \neq R_n, \forall n \in N$ onda

$$R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_n \supset R_{n+1} \supset ...$$

Na osnovu **Risove leme**, postoji jedinični vektor $e_n \in R_n$ takav da je $d(e_n, R_{n+1}) \geqslant \dfrac{1}{2}$. Za $m > n$ je $z = Te_n - Te_m + e_m \in R_{n+1}$, što povlači

$$|Ae_m - Ae_n| = |z - e_n| \geqslant d(e_n, R_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zaključujemo da (Ae_n) nema Košijev podniz, a to je nemoguće. Dakle, postoji prirodan broj n takav da je $R_{n+1} = R_n$. Tada je $R_k = R_n, \forall k \geqslant n$.□

Definicija 2.8.2. Neka je X normiran prostor, i $T \in L(X)$. Ako postoji $k \in \{0, 1, 2...\}$, tako da je

$$R(T^k) = R(T^{k+1})$$

tada se kaže da operator T *ima konačan pad*; u suprotnom kažemo da operator T *ima beskonačan pad*. Pad operatora T se označava sa $\delta(T)$; ako operator T ima konačan pad, onda je

$$\delta(T) = \min\{k \in \{0, 1, 2, ...\} : R(T^k) = R(T^{k+1})\} < \infty$$

a ako operator T ima beskonačan pad, piše se jednostavno $\delta(T) = \infty$.

Iz prethodne teoreme sledi da je $\delta(T) < \infty$ ako je $T = I - A$ i A kompaktan operator.

Teorema 2.8.3. *Ako je X normiran prostora, $T \in L(X)$ i $\alpha(T), \delta(T) < \infty$, tada je $\alpha(T) = \delta(T)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\delta(T) = 0$ i dokažimo da je tada i $\alpha(T) = 0$. Ako bi bilo $\alpha(T) > 0$, to bi značilo da postoji $x_1 \neq 0, x_1 \in X$, tako da je $Tx_1 = 0$. Kako je $R(T) = X$, to postoji niz (x_n) iz X takav da za njegove članove važi $Tx_{n+1} = x_n$, za svako $n \in N$. Sada je $T^n x_{n+1} = x_1, T^{n+1}x_{n+1} = 0$, i prema tome $x_{n+1} \in N(T^{n+1}) \backslash N(T^n)$. Kako ovo važi za svako $n \in N$ sledi da je $\alpha(T) = \infty$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme, dakle, mora biti $\alpha(T) = 0$.
Neka je $\delta(T) = p \geqslant 1$. Dokažimo da je

$$\alpha(T) \leqslant \delta(T).$$

Iz $\delta(T) = p$ sledi $R(T^p) = R(T^{p+1}) = T(R(T^p))$. Ako je $T_1 = T \restriction_{R(T^p)}$ restrikcija operatora T na potprostor $R(T^p)$, tada je $\delta(T_1) = 0$. Za svako $n = 0, 1, ...$ je očigledno T_1^n restrikcija operatora T^n na potprostor $R(T^p)$ i $N(T_1^n) \subset N(T^n)$. Sledi

$$N(T_1^{n+1}) \backslash N(T_1^n) \subset N(T^{n+1}) \backslash N(T^n),$$

odnosno $\alpha(T_1) \leqslant \alpha(T) < \infty$. Sada, na osnovu dokazanog prvog dela teoreme, sledi da je $\alpha(T_1) = 0$, a preslikavanje T_1 je injekcija. Neka je $x \in N(T^{p+1})$ i $T^p x = y$. Iz $y \in R(T^p)$ i $T_1 y = Ty = T^{p+1}x = 0 \xrightarrow{N(T_1)=0, T_1 je\ inj.} y = 0, x \in N(T^p)$. Ovim smo dokazali $\alpha(T) \leqslant \delta(T)$.
Dokažimo da je

$$\alpha(T) \geqslant \delta(T).$$

Neka je $\delta(T) = p \geqslant 1$. Tada postoji $y \in R(T^{p-1}) \backslash R(T^p)$ i $x \in X$ sa svojstvom $T^{p-1}x = y$. Neka je $z = Ty = T^p x$. Primetimo još i da iz $T^p R(T^p) = R(T^{2p}) = R(T^p)$ sledi da postoji $u \in R(T^p)$ tako da je $T^p u = z$. Ako je $v = x - u$, tada je $T^p v = T^p(x - u) = T^p x - T^p u = z - z = 0$, odnosno $v \in N(T^p)$.
Takođe

$$T^{p-1}v = T^{p-1}x - T^{p-1}u = y - T^{p-1}u \neq 0,$$

jer je $u \in T^p$. Odavde imamo da je $T^{p-1}u \in R(T^{2p-1}) = R(T^p)$, i budući da je $y \notin R(T^p)$ sledi $y - T^{p-1}u \neq 0$. Dakle, $T^p v = 0$ i $T^{p-1}v \neq 0$, pa je $N(T^p) \neq N(T^{p-1})$. Sledi da je $\alpha(T) \geqslant p$. Ovim je dokazano da je $\alpha(T) \geqslant \delta(T)$. Iz antisimetričnosti relacije " $\geqslant$ " sledi jednakost $\alpha(T) = \delta(T)$.□

Teorema 2.8.4. *Neka je X normiran prostor i $T \in L(X)$ ograničen operator na X. Ako je $\alpha(T) < \infty$ i $\delta(T) < \infty$, onda je $\alpha(T) = \delta(T)$ i prostor X je direktna suma potprostora $N(T^p)$ i $R(T^p)$, gde je $p = \alpha(T) = \delta(T)$.*

Dokaz. Ako je $y \in R(T^p) \cap N(T^p)$, tada je $T^p y = 0$ i postoji $x \in X$ tako da je $y = T^p x$. Očigledno je $T^{2p}x = 0$, (jer je $N((T)^{2p}) \supseteq N((T)^p)$, i $x \in N(T^{2p})$). Iz $N(T^{2p}) = N(T^p)$ sledi $y = T^p x = 0$. Ovim smo dokazali da je $R(T^p) \cap N(T^p) = \{0\}$. Ako je $z \in X$, tada postoji $u \in R(T^p)$ tako da je $T^p u = T^p z$. Iz $z = u + (z - u)$ i $z - u \in N(T^p) \Rightarrow X = R(T^p) \oplus N(T^p)$.□

Posledica 2.8.5. *Ako je A kompaktan operator na normiranom prostoru X, onda je X direktna topološka suma konačno-dimenzionalnog potprostora N i zatvorenog potprostora R, gde je*
$N = N[(I - A)^p]$, $R = R[(I - A)^p]$, *i* $p = \alpha(I - A) = \delta(I - A)$.

Teorema 2.8.6. *Neka je A kompaktan operator na normiranom prostoru X, $T = I - A$ i $\delta(T) = p$. Tada na prostoru $R(T^p)$ operator T indukuje regularan operator.*

Dokaz. Neka je T_0 onaj operator koji T indukuje na prostoru $R_p = R(T^p)$. Treba dokazati da je T_0 bijekcija, i da je operator T_0^{-1} neprekidan. Očigledno je T_0 sirjekcija. Neka je $x \in R_p$ takvo da je $T_0 x = 0$. Tada je $x \in N_p$, pa je zbog $N_p \cap R_p = \{0\}, x = 0$. Sledi T_0 je i injekcija. Dakle T_0 je bijekcija sa R_p na R_p.
Da bismo dokazali neprekidnost operatora T_0^{-1}, dokazaćemo ekvivalent, a to je da T_0 zatvorene skupove slika u zatvorene skupove. Neka je $F \subseteq R_p$ zatvoren skup, i neka je $y_0 = \lim T_0 x_n (x_n \in F)$. Treba dokazati da $y_0 \in T_0 F$. Niz $n \longmapsto d_n = |x_n|$ je ograničen. Zaista, pretpostavimo da $d_n \longrightarrow \infty$. Vektori $z_n = \frac{x_n}{d_n}$ su jedinični, pa možemo uzeti da niz (Az_n) konvergira nekom vektoru z_0. Sada iz

$$z_n = (I - A)z_n + Az_n = T_0 \frac{x_n}{d_n} + Az_n = \frac{T_0 x_n}{d_n} + Az_n$$

sledi $z_n \longrightarrow z_0$. Odavde je $z_0 \in F$ i $T_0 z_n \longrightarrow T_0 z_0$. Međutim,

$$\lim T_0 z_n = T_0 \frac{x_n}{d_n} = 0.$$

Dakle, $T_0 z_0 = 0$, odakle je $z_0 = 0$. Evo kontradikcije sa $|z_0| = \lim |z_n| = \lim |\frac{x_n}{d_n}| = 1$. Dakle, niz (x_n) je ograničen.
Kako je A kompaktan operator, možemo uzeti da niz Ax_n konvergira nekom vektoru x_0'. Tada

$$x_n = (I - A)x_n + Ax_n \longrightarrow y_0 + x_0' = x_0,$$

pa je $x_0 \in F$. Dalje je $y_0 = \lim T_0 x_n = T_0 x_0$, što pokazuje da je $y_0 \in T_0 F$.$\square$

Sada možemo pristupiti izučavanju glavnih karakteristika spektra kompaktnog operatora.

Teorema 2.8.7. *Neka je X kompleksan normiran prostor i $A \in L(X)$ kompaktan operator.*
(i) Ako kompleksan broj $\lambda, \lambda \neq 0$ nije sopstvena vrednost operatora A, onda je $\lambda I - A$ regularan operator.
(ii) Operator A ima najviše prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti. Jedina moguća tačka nagomilavanja sopstvenih vrednosti operatora A je nula.

(iii) Sopstveni potprostor koji je pridružen sopstvenoj vrednosti $\lambda \neq 0$ operatora A je konačno-dimenzionalan.

Dokaz. *(i)* Pretpostavimo da $\lambda \neq 0$ nije sopstvena vrednost operatora A. Tada je $0 \neq \lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$, pa je $B = \lambda^{-1}A$ kompaktan operator, i $I - B$ je injekcija. Tada je $\alpha(I - B) = 0$ pa je i $\delta(I - B) = 0$, odakle je $I - B$ bijekcija. Prema prethodnoj teoremi, $I - B$ je regularan operator na X. No, tada je i $\lambda I - A$ regularan operator.

(ii) Neka je $\dim X = \infty$ i $\varepsilon > 0$. Dokazaćemo prvo da je skup svih sopstvenih vrednosti λ operatora A takvih da je $|\lambda| \geqslant \varepsilon$ konačan. Zaista, ukoliko bi ovaj skup bio beskonačan, postojao bi niz (λ_n) različitih sopstvenih vrednosti operatora A takvih da je $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$. Neka je $x_n \neq 0$ takav da je $Ax_n = \lambda_n x_n$ i sa X_n označimo potprostor razapet nad vektorima $x_1, x_2, ..., x_n$. Kako su $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ različite sopstvene vrednosti, vektori $x_1, x_2, ..., x_n$ su nezavisni pa je $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n \subset ...$.
Prema **Risovoj lemi** postoji jedinični vektor $e_n \in X$ takav da je $d(e_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Za $x \in X_n$ postoje skalari α_i takvi da je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. No tada je

$$(\lambda_n I - A)x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\alpha_n - \alpha_i)x_i \in X_{n-1},$$

dakle, $(\lambda_n I - A)x_n \in X_{n-1}$.
Specijalno, ako x_n zamenimo sa e_n, imamo da je $(\lambda_n I - A)e_n \in X_{n-1}$. Odavde, i iz $e_n \in X_n$, nalazimo da je $Ae_n \in X_n$, pa je

$$e = \lambda_n^{-1}(\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m) \in X_{n-1}$$

za $m \leqslant n - 1$. Sada je

$$|Ae_n - Ae_m| = |\lambda_n e_n - (\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m)| = |\lambda_n(e_n - e)| = |\lambda_n||e_n - e|$$
$$\geqslant |\lambda_n| d(e_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

što pokazuje da niz (Ae_n) ne sadrži Košijev podniz. To je u kontradikciji sa $|e_n| = 1$ i činjenicom da je A kompaktan operator.

(iii) Kako je $N(I - B) = \{x \in X : (\lambda I - A)x = 0\}$ i pošto je prema **Teoremi 2.8.1.** $\dim N(I - B) < \infty$, to važi *(iii)*.

Posledica 2.8.8. *(Vajlova teorema) Neka je X Banahov prostor, $S \in L(X)$ i A kompaktan operator na X. Tada je*

$$\sigma(S + A) \subseteq \sigma(S) \cup \sigma_p(S + A).$$

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(S + A)$ i $\lambda \notin \sigma(S)$. Tada je $\lambda I - S$ regularan operator, pa je

$$\lambda I - (S + A) = B^{-1}(I - BA), \; B = (\lambda I - S)^{-1}.$$

Odavde proizilazi da je $I - BA$ singularan operator, tj. $1 \in \sigma(BA)$. Budući da je BA kompaktan operator, to je 1 sopstvena vrednost tog operatora. Dakle, postoji vektor $x_0 \neq 0$ takav da je $BAx_0 = x_0$. Odavde je $[\lambda I - (S + A)]x_0 = 0$, pa je $\lambda \in \sigma_p(S + A)$.□

Sledeća posledica predstavlja osnovnu teoremu *Fredholmove teorije integralnih jednačina*. U tome se vidi značaj izučavanja kompaktnih operatora i poznavanja svojstava spektra kompaktnog operatora.

Posledica 2.8.9. *Neka je Δ n-kvadar u R^n i $\kappa : \Delta \times \Delta \longrightarrow C$ neprekidna funkcija. Integralna jednačina*

$$(1) \qquad x(s) - \int_\Delta \kappa(s,t)x(t)dt = y(s) \qquad (s \in \Delta)$$

ima jedinstveno rešenje za svaku neprekidnu funkciju $y \in C(\Delta)$ ako i samo ako odgovarajuća homogena jednačina

$$(2) \qquad x(s) - \int_\Delta \kappa(s,t)x(t)dt = 0 \qquad (s \in \Delta)$$

ima samo trivijalno rešenje.

Dokaz. Označimo sa A integralni operator definisan sa

$$A(s) = \int_\Delta \kappa(s,t)x(t)dt, \qquad x \in C(\Delta)$$

na Banahovom prostoru $C(\Delta)$. Operator A je kompaktan. Ako jednačina (1), tj. jednačina $(I - A)x = y$ ima jedinstveno rešenje za svako y, onda je $I - A$ bijekcija sa $C(\Delta)$ na $C(\Delta)$ pa 1 nije sopstvena vrednost operatora A. Tada (2) ima samo trivijalno rešenje.
S druge strane, ako (2), tj. jednačina $(I - A)x = 0$ ima samo trivijalno rešenje, onda $1 \notin \sigma_p(A)$, pa **Teorema 2.8.7.** obezbeđuje regularnost operatora $I - A$. No, tada je $(I - A)^{-1}y$ jedinstveno rešenje jednačine (1), za svako $y \in C(\Delta)$.□

Formulišimo apstraktnu varijantu prethodne posledice:

Posledica 2.8.10. *Neka je A kompaktan operator na Banahovom prostoru X. Nehomogena jednačina*

$$x - Ax = y$$

ima jedinstveno rešenje za svako $y \in X$ ako i samo ako homogena jednačina $x - Ax = 0$ ima samo trivijalno rešenje.

Teorema 2.8.11. *Neka je $A \in L(X)$ kompaktan operator na kompleksnom normiranom prostoru X i $\lambda \neq 0$ sopstvena vrednost operatora A. Postoji jedinstven par u odnosu na A invarijantnih prostora $R(\lambda)$ i $N(\lambda)$ takvih da je:*
(i) $R(\lambda)$ zatvoren, $N(\lambda)$ konačno-dimenzionalan i $X = R(\lambda) \oplus N(\lambda)$;
(ii) Na $R(\lambda)$ operator $\lambda I - A$ indukuje regularan operator;
(iii) Operator $\lambda I - A$ na $N(\lambda)$ indukuje nilpotentan operator.

Dokaz. Za operator $T = I - \lambda^{-1}A$ i broj $p = \alpha(T) = \delta(T)$ potprostori $R(\lambda) = R(T^p)$ i $N(\lambda) = N(T^p)$ zadovoljavaju tvrdnje *(i)*,*(ii)* *i* *(iii)* jer je restrikcija operatora $(\lambda I - A)^p$ na potprostor $N(\lambda)$ nul-operator. Dokažimo jedinstvenost.
Neka su R' i N' u odnosu na A invarijantni potprostori takvi da je $\dim N' < \infty$, da je R' zatvoren, da $\lambda I - A$ indukuje na R' regularan operator i da je m celi broj takav da je restrikcija operatora $(\lambda I - A)^m$ na N' nul-operator, i da je $X = R' \oplus N'$. Za $x \in N'$ postoje $y \in R(\lambda)$ i $z \in N(\lambda)$ takvi da je $x = y + z$. Po pretpostavci je $T^m x = 0$. Budući da T na $R(\lambda)$ indukuje regularan operator, to $T^m x = T^m y = 0$ povlači $y = 0$, pa je $x \in N(\lambda)$. Dakle, $N' \subseteq N(\lambda)$.
Slično bismo pokazali da je $N(\lambda) \subseteq N'$, pa je, dakle $N(\lambda) = N'$.
Ako je $x = y + z \in R', y \in R(\lambda), z \in N(\lambda)$, tada $T^p x = T^p y$ povlači $T^p(R') \subseteq R(\lambda)$. Kako je $TR' = R'$, to je $R' \subseteq R(\lambda)$. Slično se dobija $R(\lambda) \subseteq R'$ pa je $R' = R(\lambda)$.$\Box$

3 RISOVI OPERATORI

3.1 Uvodni pojmovi i tvrđenja

Lema 3.1.1. *Neka je $E \in L(X)$ i $E^2 = E$. E je kompaktan operator ako i samo ako je EX konačne dimenzije.*

Dokaz. Ako je EX konačno-dimenzionalan, onda je E kompaktan operator, što smo dokazali u prethodnom poglavlju. Neka je E kompaktan operator. Tada je restrikcija od E na EX (identički operator na $E(X)$) takođe kompaktan operator. Odavde, zatvorena jedinična kugla u EX je kompaktan skup, tj. jedinična kugla je relativno kompaktan skup, pa je EX konačne dimenzije.□

Definicija 3.1.1. Neka je $T \in L(X)$. Definišimo

$$\kappa(T) = \inf\{|T - C| : C \in K(X)\}$$

gde je $K(X)$ skup kompaktnih operatora na prostoru X. Za T kažemo da je *asimptotski kvazi-kompaktan operator* ako $\{\kappa(T^n)\}^{1/n} \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$.

Definicija 3.1.2. Neka je $T \in L(X)$. Definišimo

$$\phi(T) = \inf\{|T - C| : C \in F(X)\}$$

gde je $F(X)$ skup operatora konačnog ranga na X. Za T kažemo da je *asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan* ako $\{\phi(T^n)\}^{1/n} \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$.

Definicija 3.1.3. Neka je $T \in L(X)$. Operator T je *Risov operator* ukoliko zadovoljava sledeća tri uslova:
(i) Za svako $\lambda \neq 0$ i svaki prirodan broj n, jezgro $N_n(\lambda)$ operatora $(\lambda I - T)^n$ je konačno-dimenzionalan potprostor od X. Dalje, $N_n(\lambda) = N_{n+1}(\lambda)$ za dovoljno veliko n.
(ii) Za svako $\lambda \neq 0$ i svaki prirodan broj n, područje vrednosti $R_n(\lambda)$ operatora $(\lambda I - T)^n$ je zatvoren potprostor od X. Dalje, $R_n(\lambda) = R_{n+1}(\lambda)$ za dovoljno veliko n.
(iii) Sopstvene vrednosti operatora T imaju najviše jednu tačku nagomilavanja, a to je nula.

Dokazaćemo da se klasa kvazi-kompaktnih, klasa operatora kvazi-konačno-dimenzionalnih, i klasa Risovih operatora poklapaju. Najpre, dokažimo neke elementarne činjenice o kvazi-kompaktnim operatorima.

Teorema 3.1.2. *Neka su $A, B \in L(X)$ kvazi-kompaktni operatori, takvi da je $AB = BA$. Tada su AB i $A+B$ asimptotski kvazi-kompaktni operatori. Za proizvoljno $\lambda \in C, \lambda A$ je takođe asimptotski kvazi-kompaktan operator.*

Dokaz. Neka $[A]$ i $[B]$ označavaju, respektivno, slike od A i B unutar kanonske projekcije od $L(X)$ unutar količničke algebre $L(X)/K(X)$, i neka je sa $r(.)$ označen spektralni radijus druge algebre. Iz pretpostavke stava sledi $r([A]) = r([B]) = 0$ i $[A][B] = [B][A]$. Odavde je

$$0 \leqslant r([A][B]) \leqslant r([A])r([B]),$$

$$0 \leqslant r([A] + [B]) \leqslant r([A]) + r([B]).$$

Sada je $r([A] + [B]) = 0 = r([A][B])$. Posledji deo stava je trivijalan.□

Zbir i proizvod dva asimptotski kvazi-kompaktna operatora ne mora biti asimptotski kvazi-kompaktan, što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.1. Neka je $X = l^2$. Definišimo

$$x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$$

$$Sx = \{0, x_1, 0, x_3, ...\}$$

$$Tx = \{x_2, 0, x_4, 0, ...\}$$

$$STx = \{0, x_2, 0, x_4, ...\}$$

$$TSx = \{x_1, 0, x_3, 0, ...\}$$

$$(S + T)x = \{x_2, x_1, x_4, x_3, ...\}$$

Uočimo da $S, T \in L(X)$ i $S^2 = T^2 = 0$. Odavde su S i T asimptotski kvazi-kompaktni operatori. S druge strane, $ST(X)$ je beskonačno-dimenzionalan, pa na osnovu **Leme 3.1.1.** $ST \notin K(X)$. Takođe $ST = (ST)^n$ i $K(X)$ je zatvoren potprostor od $L(X)$. Odavde,

$$\{\kappa((ST)^n)\}^{1/n} \longrightarrow 1, n \longrightarrow \infty$$

pa ST nije asimptotski kvazi-kompaktan operator. Dalje, $(S \subseteq T)^2 = I \notin K(X)$, pa sada sledi da $S+T$ nije asimptotski kvazi-kompaktan. Uočimo još i to da ni S ni T nisu kompaktni, jer bi u suprotnom ST bio kompaktan, i kao takav imao bi sliku konačne dimenzije.

Teorema 3.1.3. *Neka je $T \in L(X)$. Ako je T asimptotski kvazi-kompaktan operator, onda je i T^* asimptotski kvazi-kompaktan operator.*

Dokaz. Neka je T asimptotski kvazi-kompaktan operator. T je kompaktan ako i samo ako je T^* kompaktan operator i važi procena

$$\{\kappa(T^*)^n\}^{1/n} \leqslant \{\kappa(T^n)\}^{1/n} \qquad n \in N$$

pa je i T^* asimptotski kvazi-kompaktan operator.□

Dokažimo sada da je svaki asimptotski kompaktan operator - Risov operator. U tu svrhu uočimo sledeće:

Ako je $T \in L(X)$ asimptotski kvazi-kompaktan, tada za svaki pozitivan realan broj $\varLambda$ postoji prirodan broj q takav da

$$\{\kappa(T^q)\}^{1/q} < \frac{1}{6\varLambda}, \quad \kappa(T^q) < \frac{1}{(6\varLambda)^q}.$$

Dakle, možemo naći kompaktan operator V takav da je

$$|T^q - V| < \frac{1}{(6\varLambda)^q}.$$

Stavimo $U = T^q - V$. Takođe, za $\lambda \in C$ i $n \in N$ definišemo:

$$N_n(\lambda) = \{x \in X : (\lambda I - T)^n x = 0\}.$$

Teorema 3.1.4. *Neka je $T \in L(X)$ asimptotski kvazi-kompaktan operator i neka je $\lambda \neq 0$. Za svako $n \in N$, $N_n(\lambda)$ je konačno-dimenzionalni potprostor od X.*

Dokaz. Neka je $\mu = \lambda^{-1}$. Dokažimo lemu za $|\mu| < \varLambda$. Kako je $\varLambda$ proizvoljno izabran broj, ovo ne umanjuje opštost dokaza. Sada, pošto je $|U| < \frac{1}{(6\varLambda)^q} < \frac{1}{(6|\mu|)^q}$ sledi $|\mu^q U| < 6^{-q} \leqslant \frac{1}{6}$, operator $I - \mu^q U$ ima ograničen inverz, dat sa

$$K = I + \mu^q U + (\mu^q U)^2 + ...$$

Sada,

$$K(I+\mu T+...+\mu^{q-1}T^{q-1})(I-\mu T) = K[I-\mu^q T^q] = K[I-\mu^q(U+V)] = I-\mu^q KV,$$

stoga, ako je $x \in N_1(\lambda) = \{x \in X | (\lambda I - T)x = 0\} = \{x \in X | \lambda(I-\mu T)x = 0\}$, imamo $(I-\mu^q KV)x = 0$. Međutim, $\mu^q KV$ je kompaktan operator, pa rešenja ove jednačine čine konačno-dimenzionalan potprostor od X. Stoga je $N_1(\lambda)$, kao potprostor ovog prostora, takođe konačno-dimenzionalan. Na osnovu **Teoreme 3.1.2,**

$$(\lambda I - T)^n = \lambda^n I - T_0,$$

gde je T_0 asimptotski kvazi-kompaktan operator.□

Lema 3.1.5. *Neka je $T \in L(X)$ asimptotski kvazi-kompaktan operator, i neka je $\lambda \neq 0$. Postoji $p \in N$ takav da je $N_n(\lambda) = N_p(\lambda)$ za $n > p$.*

Dokaz. Dovoljno je naći $p \in N$ za koje je $N_p(\lambda) = N_{p+1}(\lambda)$. Pretpostavimo suprotno, da je $N_p(\lambda)$ odgovarajući potprostor od $N_{p+1}(\lambda)$ za svako p. Ponovo, neka je $\mu = \lambda^{-1}$ i $|\mu| < \Lambda$. Tada, za svako $n \in N$ postoji $y_n \in N_{n+1}(\lambda), |y_n| = 1$ i $d(y_n, N_n(\lambda)) \geqslant \frac{1}{2}$, na osnovu Risove leme. Stavimo $z_n = \mu^q V y_n$. Tada

$$z_n = \mu^q(T^q y_n - U y_n) = \mu^q T^q y_n - \mu^q U y_n = (I - (I - \mu^q T^q)) y_n - \mu^q U y_n$$

$$= y_n - (I + \mu T + ... + \mu^{q-1} T^{q-1})(I - \mu T) y_n - \mu^q U y_n.$$

Kako je $(I + \mu T + ... + \mu^{q-1} T^{q-1})(I - \mu T) \in N_n(\lambda)$, sledi da je za $n > m$, $z_m = \mu^q V y_m$,

$$z_n - z_m = y_n - y - \mu^q U y_n + \mu^q U y_m,$$

gde je $y \in N_n(\lambda)$, pa je

$$|z_n - z_m| \geqslant |y_n - y| - |\mu^q U y_n| - |\mu^q U y_m| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Dakle, (z_n) ne može sadržati konvergentan podniz. Ovo je u kontradikciji sa činjenicom da je V kompaktan operator. Time je tvrđenje dokazano.

Lema 3.1.6. *Neka je $T \in L(X)$ asimptotski kvazi-kompaktan operator, i neka je $\lambda \neq 0$. Za svako $n \in N, (\lambda I - T)^n X$ je zatvoren potprostor od X. Štaviše, postoji prirodan broj p, takav da je*

$$(\lambda I - T)^n X = (\lambda I - T)^p X \qquad (n > p).$$

Dokaz. Na osnovu **Teoreme 3.1.3,** T^* je asimptotski kvazi-kompaktan operator. Sledi, na osnovu **Teoreme 3.1.4,** za svaki prirodan broj n potprostor

$$Y = \{y \in X^* : (\lambda I^* - T^*)^n y = 0\}$$

je konačno-dimenzionalan. Štaviše, Y je slabo-zatvoren potprostor od X^*. Da bismo ovo dokazali, neka je $\{x_\alpha\}$ mreža elemenata iz Y u odnosu na slabu-topologiju na y. Pošto su sve Hausdorfove linearne topologije saglasne na konačno-dimenzionalnom prostoru, $\{x_\alpha\}$ konvergira ka y po normi prostora X^*. Kako je konačno-dimenzionalan potprostor od X^* zatvoren po normi, sledi da je Y slabo-zatvoren. Sledi, Y je anulator od $(\lambda I - T)^n X$ a ovo je zatvoren potprostor od X. Sada zaključak sledi iz **Teorema 3.1.3.** i **3.1.4.**

Lema 3.1.7. *Neka je $T \in L(X)$ asimptotski kvazi-kompaktan operator. Sopstvene vrednosti operatora T imaju najviše jednu tačku nagomilavanja, nulu.*

Dokaz. Neka je $\Lambda > 0$. Dovoljno je dokazati da postoji samo konačno mnogo sopstvenih vrednosti operatora T takvih da je $|\lambda^{-1}| \leqslant \Lambda$. Pretpostavimo suprotno, da je (λ_n) niz različitih sopstvenih vrednosti takvih da je $|\lambda_n| \leqslant \frac{1}{\Lambda}$ tj. $|\lambda_n^{-1}| \leqslant \Lambda$. Neka je x_n sopstveni vektor odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ_n, i neka je Y_n potprostor koji razapinju linearno nezavisni vektori $x_1, x_2, ...x_n$. Na osnovu **Risove leme**, možemo naći niz (y_n) takav da je $y_n \in Y_n, |y_n| = 1$, i $d(y_n, Y_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Niz $(\lambda_n^{-q} y_n)_n$ je ograničen. Definišimo

$$z_n = \lambda_n^{-q} V y_n = \lambda_n^{-q} T^q y_n - \lambda_n^{-q} U y_n = y_n - (I - \lambda_n^{-q} T^q) y_n - \lambda_n^{-q} U y_n.$$

Kako je y_n linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, ...x_n$, i $(I - \lambda_n^{-q} T^q) y_n$ je linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, ...x_{n-1}$. Dakle $y_n \in Y_{n-1}$. Sledi da za svako $m < n$

$$z_n - z_m = y_n - y - \lambda_n^{-q} U y_n + \lambda_m^{-q} U y_m,$$

gde je $y \in Y_{n-1}$, pa je

$$|z_n - z_m| \geqslant |y_n - y| - |\lambda_n^{-q} U y_n| - |\lambda_m^{-q} U y_m| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Sledi, (z_n) ne može da sadrži ni jedan konvergentan podniz, što je u kontradikciji sa činjenicom da je V kompaktan operator.□

Navodimo, bez dokaza, teoreme na koje ćemo se pozivati.

Teorema 3.1.8.. *Neka je $T \in L(X)$ i neka je λ_0 pol rezolvente operatora T, reda m. Neka je $\tau = \sigma(T) \backslash \{\lambda_0\}$. Tada je λ_0 sopstvena vrednost operatora T. Uspon i pad operatora $\lambda_0 I - T$ su oba jednaka m. Takođe,*

$$E(\lambda_0) X = N((\lambda_0 I - T)^m),$$

$$E(\tau)X = R((\lambda_0 I - T)^m).$$

Teorema 3.1.9. *Neka je $T \in L(X)$ i neka je τ otvoreno-zatvoren podskup skupa $\sigma(T)$. Pretpostavimo da su zatvoreni potprostori X_1 i X_2 prostora X takvi da redukuju T i da je $\sigma(T \restriction_{X_1}) \subseteq \tau, \sigma(T \restriction_{X_2}) \subseteq C \backslash \tau$. Tada*

$$E(\tau)X = X_1 \text{ i } (I - E(\tau))X = X_2.$$

Teorema 3.1.10. *Neka je $T \in L(X)$ i neka je $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Pretpostavimo da su $\alpha(\lambda_0 I - T), \delta(\lambda_0 I - T)$ oba konačna (pa zato su i jednaki). Neka je $\alpha(\lambda_0 I - T) = \delta(\lambda_0 I - T) = m$. Pretpostavimo da je $(\lambda_0 I - T)^m X$ zatvoren skup. Tada je λ_0 pol rezolvente od T reda m.*

3.2 Karakterizacija Risovih operatora

Teorema 3.2.1. *Neka je $T \in L(X)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) T je asimptotski kvazi-kompaktan operator.
(ii) T je Risov operator.
(iii) T je asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan.

Dokaz. Iz **Lema 3.1.5,3.1.6** i **3.1.7.** sledi da *(i)* implicira *(ii)*. Pretpostavimo sada da važi *(ii)* i neka je $\lambda \neq 0$ kompleksan broj. Preslikavanje $\lambda I - T$ ima konačan uspon i konačan pad. Prema jednom tvrđenju ova dva broja su jednaka među sobom, i jednaka su nekom broju m. Ako je $m = 0$ onda $\lambda \in \rho(T)$. Ako je $m \neq 0$ onda je λ sopstvena vrednost operatora T pa je kao takva izolovana tačka skupa $\sigma(T)$. Kako je $(\lambda I - T)^m X$ zatvoren skup, λ je pol rezolvente od T reda m, a to na osnovu **Teoreme 3.1.10.** Neka je $\varepsilon > 0$. Definišimo : $V = \sum_{|\lambda| > \varepsilon} E(\lambda)T$ i $U = T - V$ gde je suma uzeta po konačnom broju tačaka iz $\sigma(T)$ koje su po apsolutnoj vrednosti veće od ε. Primetimo da $T^n = U^n + V^n$ pa je $U^n = T^n - V^n$, budući da je $UV = 0$. Takođe važi i da je

$$\sigma(U) \subseteq \{\lambda, |\lambda| \leqslant \varepsilon\}.$$

Sledi, $\mu I - U$ je invertibilan u $L(X)$ ako $|\mu| > \varepsilon$ i

$$(\mu I - U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U^n \mu^{-(n+1)}.$$

Uvedimo oznaku $\lambda = \mu^{-1}$. Tada

$$(I - \lambda U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^n \qquad (|\lambda| < \varepsilon^{-1})$$

pa je

$$\limsup |U^n|^{1/n} \leqslant \varepsilon.$$

U svakom slučaju, $\phi(T^n) \leqslant |U^n|$, jer je $U^n = T^n - V^n$ a V^n je konačno-dimenzionalan. Sledi da je T asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan. Dakle, $(ii) \Rightarrow (iii)$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Očigledno.

Posledica 3.2.2. *Neka je $S(X)$ skup koji čine svi linearni operatori čije slike unutar kanonske projekcije iz $L(X)$ na $L(X)/\overline{F(X)}$ su kvazi-nilpotentni elementi. Tada $S(X)$ predstavlja klasu Risovih operatora.*

Dokaz. Svaki operator iz $S(X)$ je asimptotski kvazi-kompaktan. Ako je T asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan, tada je $T \in S(X)$. Željeni rezultat sada sledi primenom prethodne teoreme.□

Teorema 3.2.3. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operator.*
(i) $\sigma(T)$ je prebrojiv i nema tačaka nagomilavanja osim možda 0. Svaki nenula element iz $\sigma(T)$ je sopstvena vrednost operatora T, i uz to i pol rezolvente operatora T.
Neka je $\lambda \neq 0, \lambda \in \sigma(T)$ i neka je $v(\lambda)$ red pola λ.
(ii) Za svaki prirodan broj n, $N((\lambda I - T)^n)$ je konačno-dimenzionalan. Takođe,

$$N((\lambda I - T)^m) = N((\lambda I - T)^{m+1}) \qquad (m \geqslant v(\lambda))$$

a $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovim svojstvom.
(iii) Za svaki prirodan broj n, $(\lambda I - T)^n X$ je zatvoren. Takođe

$$(\lambda I - T)^{m+1} X = (\lambda I - T)^m X \qquad (m \geqslant v(\lambda))$$

a $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovim svojstvom.
(iv) Spektralna projekcija $E(\lambda)$ ima sliku konačne dimenzije (različite od nule), i data je sa

$$E(\lambda)X = N((\lambda I - T)^{v(\lambda)}).$$

Nul-prostor od $E(\lambda)$ je $(\lambda I - T)^{v(\lambda)} X$.
(v) Ako je $d(\lambda)$ dimenzija od $E(\lambda)X$, onda je $1 \leqslant v(\lambda) \leqslant d(\lambda)$.

Napomena. Veličine $v(\lambda)$ i $d(\lambda)$ se, respektivno, nazivaju *indeks* i *algebarska mnogostrukost* sopstvene vrednosti λ.

Dokaz. Pri dokazivanju **Teoreme 3.2.1.** ustanovili smo da je svaki nenula element iz $\sigma(T)$ pol rezolvente od T. Ovo opravdava tvrđenje pod *(i)*.

Stavke *(ii)* i *(iii)* su takođe ustanovljene pri dokazivanju **Teoreme 3.1.7.** *(iv)* sledi iz **Posledice 3.8.5.**
Poslednju stavku dokazujemo tako što razmatramo restrikciju od $\lambda I - T$ na konačno-dimenzionalnom prostoru $E(\lambda)X$, koristeći se elementarnim operacijama u okviru linearne algebre.

Sada ćemo izložiti rezultate Vesta koji nam daju dovoljne uslove da je granična vrednost niza Risovih operatora - Risov operator.

Teorema 3.2.4. *Neka je $T_n \in L(X)$ Risov operator za svako $n \in N$. Pretpostavimo da (T_n) konvergira po normi operatoru T, i pretpostavimo da T komutira sa $T_n, \forall n \in N$. Tada je T Risov operator.*

Dokaz. Koristićemo činjenicu da je T Risov operator ako i samo ako je T asimptotski kvazi-kompaktan operator. Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo p tako da je $|T - T_p| < \frac{\varepsilon}{3}$, i stavimo $U_p = T - T_p$. Tada je $|U_p| < \frac{\varepsilon}{3}$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $U_p \neq 0$, jer u suprotnom je $T = T_p$ pa tačnost tvrđenja direktno sledi.
Kako je za svako $n \in N$ operator T_n asimptotski kvazi-kompaktan, možemo izabrati q tako da je

$$\{\kappa(T_p^n)\}^{1/n} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (n > q)$$

Kako T_p komutira sa U_p (jer komutira sa samim sobom, a i sa T po pretpostavci), imamo:

$$T^n = (T_p + U_p)^n = \sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} T_p^r U_p^{n-r} + \sum_{r=q+1}^{n} \binom{n}{r} T_p^r U_p^{n-r} \qquad (n \geqslant q)$$

pa je

$$\begin{aligned}\kappa(T^n) &\leqslant \sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} |T_p|^r |U_p|^{n-r} + \sum_{r=q+1}^{n} \binom{n}{r} |T_p|^r |U_p|^{n-r} \\ &= |U_p|^n \sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} (|T_p|/|U_p|)^r + \sum_{r=q+1}^{n} \binom{n}{r} \kappa(T_p^r) |U_p|^{n-r}.\end{aligned}$$

Očigledno, $\sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} (|T_p|/|U_p|)^r$ je polinom, pa postoji pozitivna konstanta k takva da važi nejednakost

$$\sum_{r=0}^{q} \binom{n}{r} (|T_p|/|U_p|)^r < k \cdot 2^n$$

za dovoljno veliko n. Sledi

$$\kappa(T^n) < (\frac{\varepsilon}{3})^n \cdot k \cdot 2^n + \sum_{r=q+1}^{n} \binom{n}{r}(\frac{\varepsilon}{3})^r(\frac{\varepsilon}{3})^{n-r} \leqslant (k+1)(2\varepsilon/3)^n$$

za dovoljno veliko n. Pošto

$$(k+1)(2/3)^n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty,$$

to

$$\kappa(T^n) < \varepsilon^n \Rightarrow \{\kappa(T^n)\}^{1/n} < \varepsilon$$

za dovoljno veliko n. Sledi, T je asimptotski kvazi-kompaktan operator. Dakle, T je Risov operator.$\square$

Teorema 3.2.5. *Neka je $T \in L(X)$. T je Risov operator ako i samo ako zadovoljava sledeća dva uslova:*
(i) Svako $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ je pol rezolvente operatora T.
(ii) Za svaku nenula tačku $\lambda \in \sigma(T)$, spektralna projekcija $E(\lambda)$ je konačno-dimenzionalnog ranga.

Dokaz. Dokazano je u **Teoremi 3.2.3.** da Risov operator ima svojstva *(i)* i *(ii)*.
Da dokažemo drugi smer,pretpostavimo da $T \in L(X)$ zadovoljava *(i)* i *(ii)*. Svaka nenula tačka iz $\sigma(T)$ je sopstvena vrednost operatora T. Sledi da skup sopstvenih vrednosti operatora T ima eventualno jednu tačku nagomilavanja, 0. Takođe, za svako $\lambda \neq 0$, skup rešenja jednačine $(\lambda I - T)^n x = 0$ čini konačno-dimenzionalni potprosotor od X čija je nazavisnost od n obezbeđena za dovoljno veliko n. Za svako $\lambda \neq 0, (\lambda I - T)^n X$ je potprostor prostora X. Ako je $\lambda \in \rho(T)$, ovaj potprostor je sigurno zatvoren. Da bismo kompletirali dokaz treba da dokažemo da ovo važi i kada je $\lambda \in \sigma(T)$. Neka je λ pol rezolvente operatora T reda m. Tada je λ pol rezolvente operatora T^* reda m. Neka je $F(\lambda)$ spektralna projekcija odgovarajuća otvoreno-zatvorenom podskupu $\{\lambda\}$ skupa $\sigma(T^*)$. Tada je $F(\lambda) = \{E(\lambda)\}^*$. Kako je $E(\lambda)X$ konačno-dimenzionalan potprostor, $E(\lambda)$ je kompaktan. Sledi, $\{E(\lambda =)\}^* = F(\lambda)$ je kompaktan, pa je sada $F(\lambda)$ konačno-dimenzionalnog ranga.
Neka je $n \in N$ i neka je $f \in X^*$ takvo da je zadovoljava $f(y) = 0, \forall y \in (\lambda I - T)^n X$. Na osnovu **Teoreme 2.8.2.** $f(y) = 0, \forall y \in (\lambda I - T)^m X$. Sledi,

$$y \in \{f : (\lambda I^* - T^*)^m f = 0\} = F(\lambda)X^*$$

a ovaj potprostor je konačno-dimenzionalan. Zato je anulator od $(\lambda I - T)^n X$ konačno-dimenzionalan potprostor od X^* i kao takav slabo-zatvoren. Sledi

$(\lambda I - T)^n X$ je zatvoren i dokaz je kompletan.

Definicija 3.2.1. Neka je $T \in L(X)$. Risova tačka za T je tačka $\lambda \in \sigma(T)$ takva da je
(i) λ je izolovana u $\sigma(T)$,
(ii) X je direktna suma zatvorenog potprostora $F(\lambda)X$ i konačno-dimenzionalnog potprostora $N(\lambda)X$ tako da su oba ova potprostora invarijantna u odnosu na T, restrikcija $\lambda I - T$ na $F(\lambda)X$ je linearni homeomorfizam i restrikcija od $\lambda I - T$ na $N(\lambda)X$ je nilpotentan operator.

Teorema 3.2.6. *Neka je $T \in L(X)$. Tada je T Risov operator ako i samo ako je svaka tačka $\lambda \in \sigma(T)$ različita od nule zapravo Risova tačka za T.*

Dokaz. Ako je T Risov operator, onda je $\forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$, λ je Risova tačka za operator T. Da bismo ovo dokazali, uzmimo $N(\lambda)X = E(\lambda)X$ i $F(\lambda)X = (I - E(\lambda))X$. Primenimo **Teoremu 3.2.3.** i koristimo činjenicu da je $\lambda \in \rho(T|F(\lambda)X)$.
Obratno, pretpostavimo da $\forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$, λ je Risova tačka za operator T. Ako E označava projekciju na $N(\lambda)X$, onda je $ET = TE$. Imamo $\{\lambda\} = \sigma(T \restriction_{EX})$ i $\lambda \in \rho(T \restriction_{(I-E)X})$. Prema **Teoremi 3.1.9.** je $E = E(\lambda)$. Izaberimo najmanji prirodan broj m takav da je $(\lambda I - T)^m E(\lambda) = 0$. Sledi da je $(\lambda I - T)^{m-1} E(\lambda) \neq 0$, pa je, prema **Teoremi 1.4.10,** λ pol rezolvente operatora T reda m. Sada na osnovu **Teoreme 3.2.5.** T je Risov operator.$\square$

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza, budući da se pri njenom dokazivanju koriste analitičke funkcije i svojstva analitičkih funkcija, koja izlaze iz okvira predmeta izučavanja ovog teksta.

Teorema 3.2.7. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operator i neka je Y zatvoren potprostor od X invarijantan u odnosu na operator T. Tada je $T \restriction_Y$ Risov operator.*

Posledica 3.2.8. *Neka je $T \in L(X)$. T je Risov operator ako i samo ako je T^* Risov operator.*

Dokaz. Već smo dokazali da ako je T Risov operator, onda je i T^* Risov operator. Dokažimo, dakle, obrat. Neka je T^* Risov operator.Tada je T^{**} Risov operator. Sada, na osnovu prethodne teoreme, T, budući restrikcija operatora T^{**} na svoj zatvoren invarijantan potprostor od X, je Risov operator. $\square$

Posledica 3.2.9. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operator i neka je Y zatvoren potprostor od X invarijantan u odnosu na T. Tada je T_Y, operator indukovan operatorom T na količničkom prostoru X/Y, takođe Risov operator.*

Dokaz. Prema **Posledici 3.2.8,** T^* je Risov operator. Još, $Y^\perp$, anulator potprostora Y, je zatvoren potprostor od X^* invarijantan u odnosu na operator T^*, pa je $T^* \restriction_{Y^\perp}$ Risov operator. Pošto možemo identifikovati T_Y^* i $T^* \restriction_{Y^\perp}$, to je na osnovu iste posledice, T_Y Risov operator.

Neka je $T \in L(X)$ Risov operator. Iz **Posledice 3.2.8.** sledi da je T^* Risov operator. Neka je $0 \neq \lambda \in \sigma(T) = \sigma(T^*)$. Već je dokazano da je λ, kao pol rezolvente od T, istog reda kao i λ, kao pol rezolvente od T^*. Dalje, pokazujemo da je dimenzija prostora $E(\lambda; T)X$ jednaka dimenziji prostora $E(\lambda; T^*)X^*$. Ovde $E(\lambda; T)X$ i $E(\lambda; T^*)X^*$ označavaju, respektivno, spektralnu projekciju odgovarajuću otvoreno-zatvorenom potskupu $\{\lambda\}$ od $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

3.3 Dekompozicija Risovih operatora

Definicija 3.3.1. Za potprostor M vektorskog prostora F kažemo da ima *konačnu kodimenziju u F* ako i samo ako količnički prostor F/M ima konačnu dimenziju. Ako M ima konačnu kodimenziju, onda se dimenzija prostora F/M zove *kodimenzija od M u F* i označava sa *codim M*.

Lema 3.3.1. *Potprosotor M vektorskog prostora F ima konačnu kodimenziju n u F ako i samo ako postoji n-dimenzionalan potprostor N prostora F takav da je $F = M \oplus N$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $codim M = n < \infty$ i neka je

$$\{x_1 + M, x_2 + M, ... \; x_n + M\}$$

baza prostora F/M. Lako je uočiti da je $\{x_1, x_2, ... x_n\}$ linearno nezavisan skup i da je njegov lineal N takav da je $F = M \oplus N$. Dokažimo da važi obrat. Pretpostavimo da je n-dimenzionalni potprostor N prostora F takav da je $F = M \oplus N$. Restrikcija kanonske projekcije $x \longmapsto x + M$ na N je injektivno linearno preslikavanje iz N na F/M, pa je zbog toga F/M dimenzije n.$\square$

Ako je F konačno-dimenzionalni vektorski porstor, a M i N potprostori prostora F, takvi da je $F = M \oplus N$, onda je $\dim F = \dim M + \dim N$. Sledi, na osnovu **Leme 3.3.1.** da je $\dim F = \dim M + codimM$. Sada na osnovu teoreme o jezgru i rangu, da ako je S linearan operator na F

$$(1) \qquad codimR(S) = \dim N(S).\Box$$

Vratimo se sada na Risove operatore.

Teorema 3.3.2. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operator. Tada je $R(I-T)$ konačne kodimenzije u X i*

$$codimR(I-T) = \dim N(I-T).$$

Dokaz. Ako je $1 \in \rho(T)$ tvrđenje je očigledno tačno. Dakle, bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $1 \in \sigma(T)$. Tada je $(I-T)(I-E(1))X \subseteq E(1)X$; kao i

$$(I-T)(I-E(1))X = (I-E(1))X,$$

te je

$$R(I-T) = (I-T)X = (I-T)E(1)X \oplus (I-T)(I-E(1))X \qquad (2)$$

$$(I-T)X = (I-T)E(1)X \oplus (I-E(1))X.$$

Prema **Posledici 3.2.2.(iv)** $E(1)X$ je konačno-dimenzionalan potprostor od X pa je stoga

$$N((I-T) \restriction_{E(1)X}) = N(I-T)$$

jer je $N(I-T) \subseteq E(1)X$. Primenjujući (1) na na operator $(I-T) \restriction_{E(1)X}$, vidimo da su dimenzija od $N(I-T)$ i kodimenzija od $(I-T)E(1)X$ u $E(1)X$. Na osnovu **Leme 3.3.1.** postoji potprostor N prostora $E(1)X$ čija je dimenzija jednaka kodimenziji od $(I-T)E(1)X$ u $E(1)X$ takav da je $E(1)X = (I-T)E(1)X \oplus N$. Stoga,

$$X = E(1)X \oplus (I-E(1))X$$

$$= N \oplus (I-T)E(1)X \oplus (I-E(1))X$$

$$\overset{(2)}{=} N \oplus (I-T)X.$$

Pomenuta lema sada pokazuje da je $R(I-T)$ konačne kodimenzije u X i da je

$$codimR(I-T) = \dim N = \dim N(I-T).\Box$$

Posledica 3.3.3. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operataor. Tada je*

$$\dim N(I-T) = \dim N(I^* - T^*).$$

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi $\dim N(I-T) = codim R(I-T)$. Sledi

$$\dim N(I-T) = \dim X/R(I-T)$$

$$= \dim\{X/R(I-T)\}^*$$
$$= \dim[R(I-T)^{\perp}]$$
$$= \dim N(I^* - T^*).$$

Teorema 3.3.4. *Neka je $T \in L(X)$ Risov operataor i neka je $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$. Tada je za svaki prirodan broj n $\dim N((\lambda I - T)^n) = \dim N((\lambda I^* - T^*)^n)$.*

Dokaz. Prema **Teoremi 3.1.2.**

$$(\lambda I - T)^n = \lambda^n I - K,$$

gde je K Risov operator. Stoga

$$N((\lambda I - T)^n) = N(I - \lambda^{-n} K^*),$$

i $\lambda^{-n}K$ je Risov operator. Prva jednakost sledi na osnovu **Teoreme 3.3.2,** a poslednja sledi ako uzmemo za indeks sopstvene vrednosti λ upravo n.□

Teorema 3.3.5. *Neka je K kompaktan operator na X i neka je $Q \in L(X)$ kvazi-nilpotentan operator. Tada je $K+Q$ Risov operator.*

Dokaz. Neka je $n \in N$. Budući da kompaktni operatori čine ideale u $L(X)$ to je

$$(K+Q)^n = Q^n + C,$$

gde je C kompaktan operator. Sledi da je

$$\{\kappa(K+Q)^n\}^{1/n} \leqslant |Q^n|^{1/n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

pa je $K+Q$ kvazi-kompaktan operator. Sada tačnost tvrđenja direktno sledi iz teoreme o karakterizaciji Risovih operatora.□

Risovi operatori na kompleksnom Hilbertovom prostoru mogu biti izraženi kao zbir kompaktnog i kvazi-nilpotentnog operatora. Postupak dokazivanja ove činjenice analogan je postupku super-dijagonalizacije matrice, a onda razlaganja iste na zbir dijagonalne i nilpotentne matrice. Super-dijagonalizacija matrica zavisi od postojanja odgovarajućih invarijantnih zatvorenih potprostora. Međutim, u teoriji Risovih operatora nisu poznati ekvivalentni rezultati, pa (bez njih) ne možemo očekivati kompletnu teoriju super-dijagonalizacije takvih operatora.

Neka je H beskonačno-dimezionalan kompleksan Hilbertov prostor i neka je K Risov operator na H. Postoje tri mogućnosti:
(i) $\sigma(K) = \{0\}$;
(ii) $\sigma(K)$ je konačan skup koji sadrži nenula elemente;
(iii) $\sigma(K)$ je beskonačan skup.

Vestova dekompozicija je trivijalna u slučaju *(i)*.
U slučaju *(ii)* definišemo:

$$C = \sum_{r=1}^{n} KE(\lambda_r; K)$$

gde su $\{\lambda_r : r = 1, 2, ...n\}$ različite nenula sopstvene vrednosti operatora K i $E(\lambda_r; K)$ je spektralna projekcija odgovarajuća otvoreno-zatvorenom skupu $\{\lambda_r\}$ u $\sigma(K)$. Ako je $Q = K - C$ tada je $K = Q + C$ dekompozicija željenog tipa, pošto je po teoremi o spektralnoj projekciji $\sigma(Q) = \{0\}$.
Razmotrimo sada slučaj *(iii)*. Označimo sa $\sigma_0(K)$ netrivijalan spektar operatora K. U ovom slučaju $\sigma_0(K)$ je beskonačan niz $\{\lambda_r\}_{r=1}^{\infty}$ čiji su članovi numerisani tako da zadovoljavaju sledeći uslov

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant ...$$

Neka je $N_r = E(\lambda_r; K)H$ i za $k \geqslant 0$

$$L_k = \oplus_{r=1}^{k} N_r. \qquad (3)$$

Posmatraćemo familiju potprostora

$$\Im_0 = \{\{0\}, L_1, L_2, ...\}.$$

Proces super-dijagonalizacije (S.D.P.) za K je familija $\Im = \{M_r\}$ različitih potprostora M_r koji su tako uređeni da za r=1,2,...
$KM_r \subseteq M_r$ i $\dim M_r = r$. Potprostori L_k, definisani u (3), su invarijantni u

odnosu na K i konačno-dimenzionalni. Zato, za svako k, možemo posmatrati maksimalni (konačni) S.D.P. u L_k za operatore $K|_{L_k}$. Neka je $\Im_1$ taj maksimalni S.D.P. u L_1: možemo konstruisati maksimalan S.D.P. $\Im_2$ u L_2 koji sadrži $\Im_1$ kao podfamiliju. Nastavljajući postupak, možemo konstruisati, za svako k, maksimalni S.D.P. $\Im_k$ u L_k koji sadrži $\Im_1, ..., \Im_k$ kao podfamilije.

$$\overline{\Im} = \cup_{k=1}^{\infty}\{\Im_k\}$$

je S.D.P. koji sadrži svako $\Im_k$. Pisaćemo $\overline{\Im} = \{M_r\}_{r=0}^{\infty}$, gde je $\dim M_r = r$. Izabraćemo ortonormirani sistem $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ takav da

$$e_r \in M_r/M_{r-1} \qquad (r \geqslant 1)$$

Tada za svako r

$$Ke_r = \alpha_r e_r + f_{r-1} \qquad (4)$$

gde su $f_{r-1} \in M_{r-1}$ i α_r nezavisni od izbora e_r. Razmatranjem operatora $K \restriction_{M_r}$ zapažamo da $\alpha_r \in \sigma(K \restriction M_r)$. Kako je M_r konačno-dimenzionalan, α_r je sopstvena vrednost za $K \restriction_{M_r}$. Sledi $\alpha_r \in \sigma(K)$. Ako je $\lambda \in \sigma_0(K)$, definišemo *dijagonalnu višestrukost od* λ kao broj različitih potprostora M_r sa $\alpha_r = \lambda$. Činjenica da se radi o konačnoj dimenziji ukazuje da je dijagonalna višestrukost od λ jednaka njenoj algebarskoj višestrukosti kao sopstvene vrednosti od K.

Svaki vektor u H može biti napisan kao

$$x = \sum_{r=1}^{\infty}(x, e_r)e_r + y \qquad (5)$$

gde je $(y, e_r) = 0$ za r=1,2,... Jednakosti (4) i (5) daju

$$Kx = \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r(x, e_r)e_r + \sum_{r=1}^{\infty}(x, e_r)f_{r-1} + Ky.$$

Definišimo linearna preslikavanja $C, Q : H \longrightarrow H$ sa:

$$Cx = \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r(x, e_r)e_r, \qquad (x \in H)$$

$$Q = K - C.$$

Teorema 3.3.6. *Neka je H kompleksan Hilbertov prostor i neka je $K \in L(X)$ Risov operator. Tada je $K = C+Q$, gde je C kompaktan operator na H i Q kvazi-nilpotentan operator.*

Literatura

(1) Dowson H. R.; *Spectral theory of linear operators,* London, Math. Soc. Monographs, No 12, Academic Press, London and New York, 1978.

(2) Kurepa Svetozar;*Funkcionalna analiza-Elementi teorije operatora,* Školska knjiga, Zagreb, 1981.

(3) Rakočević Vladimir; *Funkcionalna analiza,* Naučna knjiga, Beograd, 1994.

4 Biografija

Jelena Jovanović je rođena 12.12.1991. godine u Prokuplju, Republika Srbija. Osnovnu školu "Miloje Zakić" je završila u Kuršumliji. Gimnaziju, prirodno-matematički smer, završila je u Kuršumliji. Prirodno-matematički fakultet u Nišu, odsek za matematiku, upisala je školske 2010/11. Osnovne akademske studije je završila školske 2012/13. sa prosečnom ocenom 8,63. Iste godine upisuje master akademske studije na smeru Matematika.
Prosečna ocena na master akademskim studijama je 8,4 (bez ocene master rada).