UNIVERZITET U NIŠU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

MASTER RAD

Student:
Aleksandra Milovanović

Mentor:
Nebojša Dinčić

Sadržaj

Glava 1

UVOD

U prvoj glavi imamo kratak istorijski osvrt na DFT. U drugoj glavi se govori o definiciji DFT, o njenim različitim oblicima, ali i o inverznoj DFT. U trećoj glavi su izložene neke osobine DFT. U četvrtoj glavi se govori o vezama DFT sa ostalim FT. Peta glava nam opisuje neke algoritme za izračunavanje DFT. U šestoj glavi imamo primene DFT u matematici, dok u sedmoj glavi imamo primene DFT van matematike.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svom mentoru Nebojši Dinčiću na pomoći i podršci prilikom izrade ovog rada.

1.1 ISTORIJSKI OSVRT NA DFT

Rani počeci onoga što danas nazivamo *Furijeovom teorijom* mogu biti pronađeni još u 18. veku kod matematičara *Ojlera*, *Lagranža*, *Bernulija*, itd. Ipak, široko je prihvaćeno da prvi značajan doprinos ovoj teoriji može biti pripisan Žozefu Furijeu. Njegov rad su u 19. i 20. veku produbili poznati matematičari kao što su Poason, Riman, Lebeg i ostali. Kako neprekidna Furijeova transformacija ne može uvek biti izračunata analitički, razvila se diskretna Furijeova teorija, koja nudi mnogo praktičniji numerički pristup. Ojler i Lagranž su još u 18. veku koristili diskretizovan pristup, međutim, čini se da su se prve jasne formule DFT javile u materijalima Aleksisa Kloda Kleroa, objavljenim 1754. godine.

Korišćenje Furijeove teorije se tokom godina dosta proširilo i našlo mnogo polja primene. Međutim, ručno računanje se pokazalo kao težak posao. Krajem 19. veka su se sa svrhom lakšeg računanja razvile posebne računarske mašine. Prvi digitalni računari koji su se pojavili sredinom 20. veka su korišćeni za računanje DFT.

Bitno je napomenuti da, iako su nam dostupni snažni računari, direktna primena DFT pravi velike računarske troškove, jer je, na primer, broj operacija za DFT od N tačaka, približno N^2. Na primer, personalni računar koji izvodi 10^7 operacija u sekundi, će izvesti DFT od 1000 tačaka za nekoliko sekundi. Međutim, ukoliko želimo da primenimo ovakvu DFT na matricu dimenzija 2000×2000 tačaka, ili na sliku, onda će ovaj proces potrajati nekoliko minuta.

Ovo ilustruje veliki značaj naučne revolucije koju je doneo FFT algoritam, veoma značajan algoritam koji su 1965. godine objavili *J. V. Kuli* i *J. V.*

Taki. Uz pomoć ovog algoritma, broj operacija potrebnih za DFT od od N tačaka, je smanjen od N^2 na $N \log_2 N$, što je veoma značajan pomak. Na primer, za DFT od 1000 tačaka je potrebno 1000 000 operacija, dok je sa FFT taj broj smanjen na 10 000. Smanjenje broja operacija raste srazmerno sa povećanjem broja N. Dakle, FFT algoritam omogućava veliko smanjenje računarskih troškova.

Međutim, FFT algoritam, jedan od najznačajnijih računarskih oruđa 20. veka, je koristio *Karl Fridrih Gaus* u svojim materijalima iz 1805. godine, koji su se pojavili 1866. godine, nakon njegove smrti.

Gaus je razmatrao problem reprezentacije orbite asteroida pomoću konačnih Furijeovih redova. To ga je dovelo do jedne od najznačajnijih računarskih tehnika - FFT algoritma. Imao je 12 tačaka u vezi sa 'penjanjem' θ, izmerenim u stepenima, i u vezi sa 'skretanjem' (deklinacijom) X izmerenim u minutima, gde podatak X zavisi periodično od θ. Dakle, problem se sveo na interpolaciju Furijeove delimične sume kroz 12 uzoraka tj. tačaka. Gaus je razmatrao sumu sledećeg oblika:

$$X = f(\theta) = a_0 + \sum_{k=0}^{5}[a_k \cos(\frac{2\pi k\theta}{360}) + b_k \sin(\frac{2\pi k\theta}{360})] + a_6 \cos(\frac{12\pi\theta}{360}).$$

Postavlja se pitanje - Kako odrediti 12 nepoznatih baziranih na uzorcima $X_n = f(\theta_n)$? Potrebno je rešiti 12 linearnih jednačina sa 12 nepoznatih, to je Gaus mogao da radi ručno. Međutim, on je razvio šemu koja smanjuje ukupan broj koraka - rastavio je problem na lakše potprobleme, rešio ih je, a zatim je njihova rešenja ukombinovao da bi dobio konačno rešenje početnog problema.

Glava 2

DEFINICIJA DISKRETNE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

Diskretna Furijeova transformacija se može shvatiti kao operacija koja prihvata kao ulaz listu od N brojeva i vraća kao izlaz listu od N brojeva. Ima više stvari koje se mogu reći o ulaznim i izlaznim vrednostima ove operacije.

Za početak, napominjemo da ćemo koristiti vektore i 'diskretan signal' i da N-torke pišemo na sledeći način:

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1])$$

Vektore ćemo označavati boldiranim slovima. Indeksi će se kretati od 0 do $N-1$, iz razloga koji će biti objašnjeni kasnije.

Definicija 2.0.1. *Neka je data $N-$torka $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1])$. **Diskretna Furijeova transformacija (DFT)** od $\boldsymbol{f}$ je $N-$torka $\boldsymbol{F} =$*

$(\boldsymbol{F}[0], \boldsymbol{F}[1], ..., \boldsymbol{F}[N-1])$ *definisana na sledeći način:*

$$\boldsymbol{F}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi i m n}{N}},\ m = 0, 1, ..., N-1.$$

Dopušteno je da ulazne vrednosti $\boldsymbol{f}[n]$ budu i kompleksni brojevi, dok kod praktičnih primena na signale moraju biti realni brojevi. Vrednosti $\boldsymbol{F}$ su kompleksni brojevi, kao sume kompleksnih eksponenata.

2.1 DFT U VEKTORSKOM OBLIKU

2.1.1 VEKTOR KOMPLEKSNOG EKSPONENTA

Definicija Diskretne Furijeove transformacije uključuje kompleksne eksponente. Pisaćemo:

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

i ponekad ćemo ovo označavati sa:

$$\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

kada hoćemo da istaknemo N u nekoj formuli. Koristimo i sledeće oznake:

$$Re\ \omega_N = \cos\frac{2\pi}{N},\ Im\ \omega_N = \sin\frac{2\pi}{N}.$$

ω_N je N-ti koren jedinice i važi da je:

$$\omega_N^N = e^{\frac{2\pi i N}{N}} = e^{2\pi i} = 1$$

Za bilo koji cele brojeve n i k važi da je:

$$\omega_N^{N_n} = 1 \text{ i } \omega_N^{N_{n+k}} = \omega_N^k.$$

Takođe važi da je:

$$\omega_N^{\frac{N}{2}} = e^{\frac{2\pi i N}{2N}} = e^{i\pi} = -1 \text{ i } \omega_N^{\frac{kN}{2}} = (-1)^k.$$

Za diskretnu Furijeovu transformaciju, gde su vekori prirodno uključeni, od pomoći je uvesti vektor kompleksnog eksponenta. Ima N različitih N-tih korenova jedinice, odgovarajućih N-tom stepenu od ω_N:

$$1 = \omega_N^0, \omega_N^1, ..., \omega_N^{N-1}.$$

Neka je:

$$\boldsymbol{\omega} = (1, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{N-1})$$

vektor u $\mathbb{C}^N$ koji se sastoji iz N različitih stepena od ω. Vektori realnog i imaginarnog dela od ω su:

$$\begin{aligned} Re\ \boldsymbol{\omega} &= \left(1, \cos\frac{2\pi}{N}, \cos\frac{4\pi}{N}, ..., \cos\frac{2(N-1)\pi}{N}\right), \\ Im\ \boldsymbol{\omega} &= \left(1, \sin\frac{2\pi}{N}, \sin\frac{4\pi}{N}, ..., \sin\frac{2(N-1)\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

Takođe su bitni i stepeni vektora $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^k &= (1, \omega^k, \omega^{2k}, ..., \omega^{(N-1)k}) \\ \boldsymbol{\omega}^{-k} &= (1, \omega^{-k}, \omega^{-2k}, ..., \omega^{-(N-1)k}) \\ \boldsymbol{\omega}^k[m] &= \omega^{km},\ \boldsymbol{\omega}^{-k}[m] = \omega^{-km} \\ \boldsymbol{\omega}^N &= \left(1^N, \omega^{\frac{2\pi i N}{N}}, \omega^{\frac{4\pi i N}{N}}, ..., \omega^{\frac{(N-1)2\pi i N}{N}}\right) = (1, 1, ..., 1) = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Dakle:

$$\boldsymbol{\omega}^N = \mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}^{nN} = \mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}^{nN+k} = \boldsymbol{\omega}^k$$

za bilo koje cele brojeve n i k.

Definicija 2.1.1. *Diskretna Furijeova transformacija u vektorskom obliku je definisana na sledeći način:*

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}$$

Koristimo oznaku $\underline{\mathcal{F}}$ kako bismo istakli vektorski karakter. Pisaćemo $\underline{\mathcal{F}}_N$ ukoliko želimo da posebno naglasimo N. Da istaknemo prirodu DFT reći ćemo da je DFT vektora ponovo neki vektor. Elementi od $\underline{\mathcal{F}}f$ su vrednosti od $\underline{\mathcal{F}}f$ u tačkama $m = 0, 1, ..., N-1$:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-km} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]e^{\frac{-2\pi ikm}{N}}.$$

Istaknimo jednu specijalnu vrednost:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[0] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k0} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]e^{\frac{-2\pi ik0}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]$$

koja predstavlja sumu elemenata ulazne vrednosti $\boldsymbol{f}$. U nekim knjigama DFT se definiše sa brojem $\frac{1}{N}$ ispred, tako da je nulti element izlazne vrednosti jednak srednjoj vrednosti elemenata ulazne vrednosti, kao što je nulti Furijeov koeficijent periodične funkcije jednak srednjoj vrednosti te funkcije na jednom periodu.

2.2 DFT U MATRIČNOM OBLIKU

DFT pretvara vektore u vektore i to radi linearno. Dakle, važi:

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}_1 + \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}_2 \text{ i } \underline{\mathcal{F}}(\alpha\boldsymbol{f}) = \alpha\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$$

Ovo ćemo pokazati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2) &= \sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2)[k]\boldsymbol{\omega}^{-k} && (2.1)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{f}_1[k]+\boldsymbol{f}_2[k])\boldsymbol{\omega}^{-k} && (2.2)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}_1[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}+\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}_2[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}=\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}_1+\underline{F}\boldsymbol{f}_2. && (2.3)
\end{aligned}$$

Definicija 2.2.1. *Kao linearna transformacija iz* $\mathbb{C}^N$ *u* $\mathbb{C}^N$*, DFT* $\boldsymbol{F}=\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$ *je matrična jednačina:*

$$\begin{pmatrix} F[0]\\ F[1]\\ F[2]\\ \vdots\\ F[N-1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega^{-1\cdot 1} & \omega^{-1\cdot 2} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)}\\ 1 & \omega^{-2\cdot 1} & \omega^{-2\cdot 2} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \omega^{-(N-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f[0]\\ f[1]\\ f[2]\\ \vdots\\ f[N-1]\end{pmatrix}$$

Dakle, DFT je matrica dimenzije $N\times N$ *oblika:*

$$\underline{\mathcal{F}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega^{-1\cdot 1} & \omega^{-1\cdot 2} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)}\\ 1 & \omega^{-2\cdot 1} & \omega^{-2\cdot 2} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \omega^{-(N-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)}\end{pmatrix}$$

Još jednom primetimo da se indeksi za $\boldsymbol{f}$ i $\mathbf{F}$ kreću od 0 do $N-1$, umesto od 1 do N.

Za DFT, izlazne vrednosti $\mathbf{F}[m]$ su definisane za $m=\overline{0,N-1}$, ali njihova definicija:

$$\mathbf{F}[m]=\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-km}$$

naleže osobinu periodičnosti. Kako je:

$$\boldsymbol{\omega}^{-k(m+N)} = \boldsymbol{\omega}^{-km}$$

tada imamo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k(m+N)} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-km} = \mathbf{F}[m].$$

Dakle, dobijamo da je:

$$\mathbf{F}[m+N] = \mathbf{F}[m].$$

Na sličan način možemo doći do toga da je:

$$\mathbf{F}[m+nN] = \mathbf{F}[m]$$

za svaki ceo broj n.

Dakle:

$$\mathbf{F}[p] = \mathbf{F}[q], \text{ ukoliko je } p \equiv q \ mod \ N.$$

Prema tome, sledeća formula važi za svaki ceo broj n :

$$\mathbf{F}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-km}.$$

Zbog napred navedenog uvek ćemo podrazumevati da je **F periodičan sa periodom** N. Kada budemo nešto kasnije definisali inverznu DFT, to će povlačiti da i $\boldsymbol{f}$ mora biti periodična sa periodom N. Zato ćemo uvek podrazumevati da je $\boldsymbol{f}$ **periodičan sa periodom** N.

2.3 INVERZNA DFT

Prirodno je očekivati da svaka transformacija ima inverznu transformaciju, pa tako i DFT nije izuzetak. DFT ima inverznu transformaciju i njena formula je vrlo slična formuli za DFT. Ključ inverzije je 'diskretna ortogonalnost' kompleksnih eksponenata. Istražićemo problem pronalaženja Inverzne diskretne Furijeove transformacije $\mathcal{F}^{-1}$ iz vektorske i matrične tačke gledišta.

2.3.1 DISKRETNO $\boldsymbol{\delta}$

U matematici, Dirakova delta funkcija, ili δ funkcija, je uopštena funkcija ili distribucija. Stavimo da je $\boldsymbol{\delta}_0 = (1, 0, ..., 0)$, gde je 1 na nultoj poziciji, a nula na preostalih $N-1$ pozicija. Vektor $\boldsymbol{\delta}_0$ je upravo prvi vektor baze u $\mathbb{C}^N$, pod pretpostavljenim imenom. Vektor $\boldsymbol{\delta}_0$ definišemo na sledeći način:

$$\boldsymbol{\delta}_0[m] = \begin{cases} 1, & m \equiv 0 \; mod \; N, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za DFT od $\boldsymbol{\delta}_0$ imamo da je:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\delta}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\delta}_0[k]\boldsymbol{\omega}^{-k} = \boldsymbol{\omega}^0 = 1.$$

Za DFT u matričnom obliku, $\mathcal{F}\boldsymbol{\delta}_0$ izvlači prvu kolonu, koja je $\mathbf{1}$. Možemo koristiti oznaku $\boldsymbol{\delta}$ za $\boldsymbol{\delta}_0$. $\boldsymbol{\delta}_k$ definišemo na sledeći način:

$$\boldsymbol{\delta}_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

gde je 1 na k-toj poziciji, a nule na svim ostalim pozicijama. Sada proizvoljan vektor $\boldsymbol{f}$ možemo zapisati na sledeći način:

$$\boldsymbol{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\delta}_k$$

δ_k možemo posmatrati kao bazni vektor za $\mathbb{C}^N$ i takođe kao bazni vektor za N-periodične diskretne signale.

Za DFT od $\boldsymbol{\delta}_k$ imamo:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\delta}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{\delta}_k[n]\boldsymbol{\omega}^{-n} = \boldsymbol{\omega}^{-k}.$$

Sa matrične tačke gledišta, DFT od $\boldsymbol{\delta}_k$ izvlači k-tu kolonu matrice i to je upravo $\boldsymbol{\omega}^{-k}$.

2.3.2 ORTOGONALNOST VEKTORA KOMPLEKSNIH EKSPONENATA

Neka je $\boldsymbol{\omega}$ vektor kompleksnog eksponenta:

$$\boldsymbol{\omega} = (1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{N-1})$$

i ω^k njegov k-ti stepen:

$$\boldsymbol{\omega}^k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, ..., \omega^{(N-1)k}).$$

Za bilo koje cele brojeve k i ℓ važi:

$$< \boldsymbol{\omega}^k, \boldsymbol{\omega}^\ell >= \begin{cases} N, & k \equiv \ell \; mod \; N, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Da bismo ovo pokazali, koristićemo činjenicu da je $\boldsymbol{\omega}^{kN} = 1$, gde je k bilo koji ceo broj, i formulu za sumu konačnog geometrijskog reda:

$$1 + z + z^2 + ... + z^{N-1} = \begin{cases} N, & z = 1, \\ \frac{1-z^N}{1-z}, & z \neq 1. \end{cases}$$

Za $z = \omega$ imamo:

$$1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{N-1} = \frac{1-\omega^N}{1-\omega} = \frac{0}{1-\omega} = 0.$$

Ukoliko k nije celobrojni umnožak broja N, dakle $\omega^k \neq 1$ i $\omega^{kN} = 1$, tada imamo:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + ... + \omega^{(N-1)k} = \frac{1-\omega^N}{1-\omega} = \frac{1-\omega^{kN}}{1-\omega^k} = 0.$$

Ukoliko je k celobrojni umnožak broja N, tada je $\omega^k = 1$:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + ... + \omega^{(N-1)k} = 1 + 1 + ... + 1 = N.$$

Dakle:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + ... + \omega^{(N-1)k} = \begin{cases} N, & k \equiv 0 \ mod \ N \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz svega navedenog zaključujemo da N različitih vektora $\mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}^{-1}, \boldsymbol{\omega}^2, ..., \boldsymbol{\omega}^{-(N-1)}$ jesu bazni vektori u $\mathbb{C}^N$ (što takođe važi i za vektore $\mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}^2, ..., \boldsymbol{\omega}^{N-1}$). Koristeći raniji rezultat $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\delta}_k = \boldsymbol{\omega}^{-k}$ mi zaključujemo da je $\underline{\mathcal{F}}$ invertibilna. Međutim, ovo nam zasad ne pokazuje šta je njen inverz.

2.3.3 DFT VEKTORA KOMPLEKSNIH EKSPONENATA

Ortogonalnost vektora kompleksnih eksponenata povlači veliki broj različitih rezultata.

Na primer, sada možemo odrediti $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^k$.

Na osnovu definicije:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^k = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{\omega}^{kn}\omega^{-n}$$

imamo da je njegova ℓ-ta komponenta:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{k\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{\omega}^{kn}\omega^{-n\ell} = \langle \boldsymbol{\omega}^k, \boldsymbol{\omega}^\ell \rangle = \begin{cases} N, & k \equiv \ell \ mod \ N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zaključujemo da je diskretna Furijeova transformacija od $\boldsymbol{\omega}^k$ oblika $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{k\ell} = N\boldsymbol{\delta}_k$.

2.3.4 OBRNUTI SIGNALI I NJIHOVE DFT

Za diskretan signal $\boldsymbol{f}$, definisan uz pomoć celih brojeva, periodičan ili ne, odgovarajući obrnuti signal, $\boldsymbol{f}^-$, je definisan na sledeći način:

$$\boldsymbol{f}^-[m] = \boldsymbol{f}[-m].$$

Ako je $\boldsymbol{f}$ periodičan sa periodom N, kao što od sada pretpostavljamo, zapisujemo ga kao vektor:

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1]).$$

Tada je:

$$\boldsymbol{f}^- = (\boldsymbol{f}[N], \boldsymbol{f}[N-1], ..., \boldsymbol{f}[1]).$$

(koristili smo $\boldsymbol{f}[N] = \boldsymbol{f}[0]$). Za svaki ceo broj n, važi:

$$\boldsymbol{f}^-[n] = \boldsymbol{f}[N-n].$$

Obrnuti signal ima osobinu linearnosti i važi:

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})^- = \boldsymbol{f}^- + \mathrm{g}^- \text{ i } (\alpha\boldsymbol{f})^- = \alpha\boldsymbol{f}^-.$$

Takođe važi:

$$(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})^- = (\boldsymbol{f}^-)(\boldsymbol{g}^-).$$

Razmotrimo dva specijalna slučaja obrnutih signala:

$$\boldsymbol{\delta}_0^- = \boldsymbol{\delta}_0 \text{ i } \boldsymbol{\delta}_k^- = \boldsymbol{\delta}_{-k}.$$

Sa ovim rezultatom, možemo zapisati:

$$\boldsymbol{f}^{-} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\delta_k \right)^{-} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\delta_{-k}.$$

Može se reći da su $\boldsymbol{\delta}_k$ bazni vektori za direktne signale, a $\boldsymbol{\delta}_{-k}$ bazni vektori za obrnute signale.

Sada obratimo pažnju na $\boldsymbol{\omega}$. Za početak imamo:

$$\boldsymbol{\omega}^{-} = (\omega[N], \omega[N-1], \omega[N-2], ..., \omega[1]) = (1, \omega^{(N-1)}, \omega^{(N-2)}, ..., \omega).$$

Uočimo da je:

$$\omega^{N-1}\omega = \omega^N = 1 \Longrightarrow \omega^{N-1} = \omega^{-1},$$
$$\omega^{N-2}\omega^2 = \omega^N = 1 \Longrightarrow \omega^{N-2} = \omega^{-2}.$$

Nastavljajući postupak, zaključujemo da je:

$$\boldsymbol{\omega}^{-} = (1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, ..., \omega^{-(N-1)}) = \boldsymbol{\omega}^{-1}.$$

Na sličan način možemo zaključiti:

$$(\boldsymbol{\omega}^{k})^{-} = \boldsymbol{\omega}^{-k},\ (\boldsymbol{\omega}^{-k})^{-} = \boldsymbol{\omega}^{k}.$$

Razmotrimo sada $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}^{-}$, DFT obrnutih signala:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}^{-} &= \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}^{-}[k]\omega^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[N-k]\omega^{-k}\ (obrnuto\ \boldsymbol{f}) \\
&= \sum_{\ell=N}^{1} \boldsymbol{f}[\ell]\omega^{\ell-N}(\ell = N-k) \\
&= \sum_{\ell=N}^{1} \boldsymbol{f}[\ell]\omega^{\ell}.
\end{aligned}$$

Sada, koristeći $\boldsymbol{f}[N] = \boldsymbol{f}[0]$ i $\boldsymbol{\omega}^N = \boldsymbol{\omega}^0 = 1$, možemo zapisati:

$$\sum_{\ell=N}^{1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{\ell} = \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{-\ell}\right)^{-} = (\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})^{-}.$$

Pokazali smo da je $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}^{-} = (\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})^{-}$. Ovo nam kazuje da je:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{-k} = (\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{k})^{-} = (N\boldsymbol{\delta}_k)^{-} = N\boldsymbol{\delta}_{-k}.$$

Krenimo sada sa:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}$$

i primenimo $\underline{\mathcal{F}}$ opet:

$$\underline{\mathcal{F}}\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{-k} = N\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\delta}_{-k} = N\boldsymbol{f}^{-}.$$

Dakle, imamo sledeće dvojne relacije za DFT:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}^{-} = (\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})^{-} \text{ i } \underline{\mathcal{F}}\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} = N\boldsymbol{f}^{-}.$$

2.3.5 INVERZNA DFT

Jedina stvar koju nemamo u diskretnom slučaju je je definicija $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$. Definisaćemo $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ na sledeći način:

$$\underline{\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})^{-}$$

i takođe:

$$\underline{\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n]\boldsymbol{\omega}^{n}. \tag{2.4}$$

Pokažimo sada zašto nam ovo zaista daje inverz od $\underline{\mathcal{F}}$.

Očigledno je da je $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ definisana na ovaj način linearna. Takođe, treba znati da je:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{\omega}^{-k} &= \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{-k})^{-} && (2.5)\\
&= \frac{1}{N}\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{\omega}^{k} && (2.6)\\
&= \frac{1}{N}N\boldsymbol{\delta}_k = \boldsymbol{\delta}_k. && (2.7)
\end{aligned}
$$

Deo (2.6) važi na osnovu definicije za $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$, deo (2.7) na osnovu $(\boldsymbol{\omega}^{-k})^{-} = \boldsymbol{\omega}^{k}$.

Sa ovim dobijamo da je:

$$
\underline{\mathcal{F}}^{-1}\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} = \underline{\mathcal{F}}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\underline{\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{\omega}^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\delta}_k = \boldsymbol{f}.
$$

Na sličan način dobijamo da je:

$$
\underline{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}.
$$

Pokazali smo da je $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ zaista inverz od $\underline{\mathcal{F}}$.

Sada možemo rešiti problem periodičnosti ulaznih vrednosti DFT. Znamo da kada je $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$, tada nas DFT navodi da proširimo $\mathbf{F}$ da bude N-periodična. Međutim, kako je sada:

$$
\boldsymbol{f} = \underline{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{F},
$$

očigledno je da sada moramo voditi računa da ulazne vrednosti $\boldsymbol{f}$ budu periodične, što smo i učinili.

2.3.6 INVERZNA DFT U MATRIČNOM OBLIKU

Pokazaćemo šta se dešava sa $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ u matričnom obliku.

Najpre se moramo podsetiti nekih činjenica iz linearne algebre.

Podsetimo, kvadratna matrica A sa realnim elementima je:

- *simetrična*, ako $A = A^T$;
- *ortogonalna*, ako $A^T A = I$.

Kvadratna matrica A sa kompleksnim elementima je:

- *ermitska*, ako $A = A^*$;
- *unitarna*, ako $A^* A = I$.

Matrica je unitarna akko su njene kolone i vrste ortonormalne i formiraju ortonormalnu bazu.

DFT u matričnom obliku je:

$$\underline{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1\cdot 1} & \omega^{-1\cdot 2} & \cdots & \omega^{-1\cdot(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2\cdot 1} & \omega^{-2\cdot 2} & \cdots & \omega^{-2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)\cdot 1} & \omega^{-(N-1)\cdot 2} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}$$

i njene kolone i vrste su vektori $\boldsymbol{\omega}^k,\ k = \overline{0, N-1}$.

Znamo da su stepeni vektora kompleksnog eksponenta ortogonalni i 'skoro' ortonormalni, do na faktor N. Dakle, $\underline{\mathcal{F}}$ kao matrica je 'skoro unitarna', što znači da je:

$$\underline{\mathcal{F}}^* \underline{\mathcal{F}} = NI.$$

Dakle:

$$\underline{\mathcal{F}}^{-1} = \frac{1}{N} \underline{\mathcal{F}}^*.$$

U matričnom obliku:

$$\frac{1}{N}\underline{\mathcal{F}}^{*} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega}^{-1\cdot 1} & \overline{\omega}^{-1\cdot 2} & \cdots & \overline{\omega}^{-1\cdot(N-1)} \\ 1 & \overline{\omega}^{-2\cdot 1} & \overline{\omega}^{-2\cdot 2} & \cdots & \overline{\omega}^{-2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{-(N-1)\cdot 1} & \overline{\omega}^{-(N-1)\cdot 2} & \cdots & \overline{\omega}^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix}^{*} =$$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega}^{-1} & \overline{\omega}^{-2} & \cdots & \overline{\omega}^{-(N-1)} \\ 1 & \overline{\omega}^{-2} & \overline{\omega}^{-4} & \cdots & \overline{\omega}^{-2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{-(N-1)} & \overline{\omega}^{-2(N-1)} & \cdots & \overline{\omega}^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}^{*} =$$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{1} & \omega^{2} & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^{2} & \overline{\omega}^{-4} & \cdots & \omega^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Ukoliko pogledamo matrični oblik:

$$\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{1} & \omega^{2} & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^{2} & \overline{\omega}^{-4} & \cdots & \omega^{2\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ \vdots \\ f[N-1] \end{pmatrix}$$

dolazimo do ranije dobijene formule za inverz:

$$\boldsymbol{f}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{F}[k]\omega^{kn}.$$

2.4 RAZLIČITE DEFINICIJE DFT

U ovom odeljku, pokušaćemo da objasnimo šta se podrazumeva rečenicom:

"DFT može biti definisana nad bilo kojim nizom od N uzastopnih indeksa."

Za periodičnu neprekidnu funkciju $f(t)$ sa periodom jednakom npr. 1, n-ti Furijeov koeficijent je:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi int} f(t)\, dt.$$

Periodičnost funkcije f povlači činjenicu da $\hat{f}(n)$ može biti dobijena integraljenjem na bilo kom intervalu dužine 1, međutim, mi tražimo diskretnu verziju toga.

Daćemo sada opštu verziju definicije DFT:

Definicija 2.4.1. *Neka su diskretni signali $\boldsymbol{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ periodični sa periodom N. Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ indeksni skupovi od nekih N uzastopnih celih brojeva:*

$$\mathcal{P} = (p, p+1, ..., p+N-1),\ \mathcal{Q} = (q, q+1, ..., q+N-1).$$

DFT bazirana na $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ (tj. $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$-DFT) je definisana na sledeći način:

$$\underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[m] = \sum_{k\in\mathcal{P}} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} = \sum_{k=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km},\ m \in \mathcal{Q}.$$

Označili smo tu transformaciju sa $\underline{\mathcal{G}}$ da bismo je razlikovali od $\underline{\mathcal{F}}$ koja je određena posebnim izborom indeksinh skupova $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = (0, 1, ..., N-1)$. Odgovarajuća inverzna transformacija je definisana na sličan način.

Kako je $\boldsymbol{f}$ periodična funkcija sa periodom N, kada znamo $\boldsymbol{f}$ za bilo koji niz od N uzastopnih brojeva, tada znamo i njenu vrednost svuda i isto važi i za njenu transformaciju. Ovo potrvrđuje da je definicija od $\underline{\mathcal{G}}$ nezavisna od izbora $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$. Moramo objasniti šta znači "nezavisna od izbora $\mathcal{P}$".

Za početak, kao prvi korak, proširimo $\underline{\mathcal{G}}f$ da bude periodična sa periodom N. Kako su eksponenti u definiciji $(\mathcal{P},\mathcal{Q})-$transformacije periodični sa periodom N, to je proširenje $\underline{\mathcal{G}}f$ definisano za svaki ceo broj m. Pokažimo to: neka je m ceo broj i neka je $m = n + kN$:

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{-m\ell} &= \sum_{\ell=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{-(n+kN)\ell} \\ &= \sum_{\ell=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\boldsymbol{\omega}^{-n\ell} \\ &= \underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[n] \\ &= \underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[n+kN] \\ &= \underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[m].\end{aligned}$$

Pretposlednja jednakost važi zato što smo proširili $\underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}$ da bude periodična. Dakle, imamo da je:

$$\underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[m] = \sum_{\ell=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[\ell]\omega^{-m\ell}$$

za svaki ceo broj m. Sada hoćemo da pokažemo da je:

$$\underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[m] = \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[m]$$

za svaki ceo broj m. Drugim rečima, svaka DFT je upravo DFT data sa $\underline{\mathcal{F}}$, definisana korišćenjem indeksnog skupa $(0, 1, ..., N-1)$.

Ovo je, konačno, precizno značenje rečenice *"DFT može biti definisana nad bilo kojim nizom N uzastopnih indeksa."*.

Još nismo iskoristili činjenicu da je $\boldsymbol{f}$ periodična. To ćemo učiniti sada. Neka je $p = rN + s$, gde su p i r celi brojevi, a s pripada $(0, 1, ..., N-1)$. Za svaki ceo broj m je:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{G}}\boldsymbol{f}[m] &= \sum_{k=p}^{p+N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k+p]\omega^{-(k+p)m} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k+s]\omega^{-(k+s)m} \\
&= \sum_{k=s}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} + \sum_{k=N}^{N-1+s} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} \\
&= \sum_{k=s}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} + \sum_{k=0}^{s-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-km} \\
&= \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[m].
\end{aligned}
$$

Prilikom dokazivanja koristili smo periodičnost i $p = rN + s$.

Glava 3

OSOBINE DFT

3.1 NEKE OSOBINE DFT

Teorema 3.1.1. *Neka su $g[\boldsymbol{n}]$ i $h[\boldsymbol{n}]$ nizovi koji imaju diskretne Furijeove transformacije $G[\boldsymbol{k}]$ i $H[\boldsymbol{k}]$:*

$$G[\boldsymbol{k}] \equiv \underline{\mathcal{F}} g[\boldsymbol{n}] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{-2\pi i k n}{N}},\ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{3.1}$$

$$H[\boldsymbol{k}] \equiv \underline{\mathcal{F}} h[\boldsymbol{n}] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{-2\pi i k n}{N}},\ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{3.2}$$

i pri čemu važi:

$$g[\boldsymbol{n}] = \underline{\mathcal{F}}^{-1} G[\boldsymbol{k}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G[k] e^{\frac{2\pi i k n}{N}},\ n = 0, 1, ..., N-1, \tag{3.3}$$

$$h[\boldsymbol{n}] = \underline{\mathcal{F}}^{-1} h[\boldsymbol{k}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{\frac{2\pi i k n}{N}},\ n = 0, 1, ..., N-1, \tag{3.4}$$

gde je $\boldsymbol{n} = (n_0, n_1, ..., n_{N-1})$, $\boldsymbol{k} = (k_0, k_1, ..., k_{N-1}) \in \mathbb{Z}^N$, a i b realni brojevi.

Tada važe sledeće osobine:

1. **(Linearnost:)** $\underline{\mathcal{F}}\{ag[n]+bh[n]\} = aG[k]+bH[k]$

2. **(Periodičnost:)** $g[n+N] = g[n]$, *za svako* n; $G[k+N] = G[k]$, *za svako* k

3. **(Simetričnost:)** $G[N-k] = \overline{G}[k], k = 0,1,...,N-1$

4. **(Parsevalova jednakost:)** $< \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}, \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{g} >= N < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >$.

Dokaz:

1. Linearnost ćemo dokazati primenom (3.2), (3.2) i linearnosti sume:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}\{ag[n]+bh[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1}\{ag[n]+bh[n]\}e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= a\sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} + b\sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= aG[k]+bH[k].
\end{aligned}$$

2. Periodičnost ćemo dokazati primenom (3.2), (3.2):

$$\begin{aligned}
G[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{\frac{-2\pi in(k+N)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} e^{\frac{-2\pi inN}{N}} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} e^{-2\pi in} = \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} = G[k], \\
g[n+N] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G[k]e^{\frac{2\pi ik(n+N)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G[k]e^{\frac{2\pi ink}{N}} e^{\frac{2\pi inN}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G[k]e^{\frac{2\pi ink}{N}} e^{2\pi ik} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G[k]e^{\frac{2\pi ink}{N}} = g[n].
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} G[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{-2\pi i n(N-k)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{2\pi i n k}{N}} e^{\frac{-2\pi i n N}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{2\pi i n k}{N}} e^{-2\pi i n} = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{g[n] e^{\frac{-2\pi i n k}{N}}} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{\frac{-2\pi i n k}{N}}} = \\ &= \overline{G[k]} = \overline{G}[k]. \end{aligned}$$

4. Za dokaz koristimo osobine kompleksnog skalarnog proizvoda i ortogonalnost eksponenata vektora:

$$\begin{aligned} < \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}, \underline{\mathcal{F}}\mathbf{g} > &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k] \boldsymbol{\omega}^{-k} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{g}[\ell] \boldsymbol{\omega}^{-\ell} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k] \overline{\mathbf{g}[\ell]} \langle \boldsymbol{\omega}^{-k} \cdot \boldsymbol{\omega}^{-\ell} \rangle \\ &= N \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k] \overline{\mathbf{g}[k]} \\ &= N < \boldsymbol{f}, \mathbf{g} > . \end{aligned}$$

Ukoliko je $\boldsymbol{f} = \mathbf{g}$, tada jednakost postaje:

$$\|\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}\|^2 = N\|\boldsymbol{f}\|^2.$$

Parsevalova jednakost je drugačiji način da se kaže da je $\underline{\mathcal{F}}$ "skoro unitarna" kao matrica. Podsećamo, unitarna matrica A ima osobinu: $< A\boldsymbol{f}, A\mathbf{g} >=< \boldsymbol{f}, \mathbf{g} >$. $\square$

3.2 POMERANJA I TEOREMA O POMERANJU

Prilikom formulacije teoreme o pomeranju, korisno je uvesti operator kašnjenja za diskretan signal $\boldsymbol{f}$. Za svaki ceo broj p, definišemo signal $\tau_p \boldsymbol{f}$ na sledeći način:

$$\tau_p \boldsymbol{f}[n] = \boldsymbol{f}[n-p].$$

Teorema o pomeranju za DFT je sledećeg oblika:

$$\underline{\mathcal{F}}(\tau_p \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\omega}^{-p} \underline{\mathcal{F}} \boldsymbol{f}.$$

Da bi ova teorema imala smisla, $\boldsymbol{f}$ mora biti periodičan.

Neka je $\boldsymbol{f}$ periodičan sa periodom N, tj. neka važi:

$$\boldsymbol{f}[N] = \boldsymbol{f}[0],\ \boldsymbol{f}[N+1] = \boldsymbol{f}[1],\ \boldsymbol{f}[N+p-1] = \boldsymbol{f}[p-1].$$

Posmatrajmo:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}} \boldsymbol{f}[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} + \sum_{n=p}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n+N] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} + \sum_{n=p}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n+N] e^{\frac{-2\pi ik(n+N)}{N}} + \sum_{n=p}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= \sum_{n=N}^{N+p-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} + \sum_{n=p}^{N-1} \boldsymbol{f}[n] e^{\frac{-2\pi ikn}{N}}.
\end{aligned}$$

Dakle:

$$\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[n] = \sum_{n=p}^{N+p-1} \boldsymbol{f}[n]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}}.$$

Odredimo sada:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\tau}_p\boldsymbol{f})[n] &= \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}[n-p] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n-p]e^{\frac{-2\pi ikn}{N}} \\
&= e^{2\pi ikp}\sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n-p]e^{\frac{-2\pi ik(n-p)}{N}} \\
&= e^{2\pi inp}\sum_{n=p}^{N+p-1} \boldsymbol{f}[n]e^{\frac{-2\pi inpN}{N}} \\
&= \omega^{-p}\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}.
\end{aligned}$$

3.3 MODULACIONA TEOREMA

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f}) = \tau_n(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}).$$

Modulacija diskretnog signala $\boldsymbol{f}$, je signal sledećeg oblika:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f} &= (1, \omega^n, \omega^{2n}, ..., \omega^{(N-1)n}) \times (\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], \boldsymbol{f}[2], ..., \boldsymbol{f}[N-1]) \\
&= (\boldsymbol{f}[0], \omega^n\boldsymbol{f}[1], \omega^{2n}\boldsymbol{f}[2], ..., \omega^{(N-1)n}\boldsymbol{f}[N-1]),
\end{aligned}$$

gde je sa $\times$ označen proizvod po komponentama.

Možemo pronaći $\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f})$ direktno po definiciji:

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f}) = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{kn}\boldsymbol{\omega}^{-k}$$

gde je m-ta komponenta sledećeg oblika:

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f})[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{kn}\boldsymbol{\omega}^{-km} = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\omega^{-k(m-n)}.$$

Ukoliko pomerimo $\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$ za n, dobijamo:

$$\tau_n(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}) = \tau_n\left(\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\boldsymbol{\omega}^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\tau_n\boldsymbol{\omega}^{-k},$$

i m-ta komponenta desne strane poslednje jednakosti je sledećeg oblika:

$$(\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\tau_n\omega^{-k})[m] = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k](\tau_n\boldsymbol{\omega}^{-k})[m] = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\omega^{-k(m-n)}.$$

Zaključujemo da je $\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\omega}^n\boldsymbol{f}) = \tau_n(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})$.

3.4 KONVOLUCIJA

Konvolucija i njena primena u DFT su osnove digitalnog filtriranja. Postavlja se pitanje: Kako možemo iskoristiti jedan signal za modifikaciju drugog? Neka su date $\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$, i razmatrajmo njihov proizvod po komponentama $\mathbf{FG}$. Postavlja se pitanje: Ako je $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$ i $\mathbf{G} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{g}$, da li postoji $\mathbf{h}$, takvo da je $\mathbf{FG} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{h}$?

Koristićemo promenu redosleda sumiranja, da bismo ovo pokazali.

$$\begin{aligned}
(\underline{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbf{FG}))[m] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{F}[n]\mathbf{G}[n]\omega^{mn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\omega^{-kn}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N-1}\boldsymbol{g}[\ell]\omega^{-\ell n}\right)\omega^{mn} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\sum_{\ell=0}^{N-1}\boldsymbol{g}[\ell]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{-kn}\omega^{-\ell n}\omega^{mn}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{f}[k]\sum_{\ell=0}^{N-1}\boldsymbol{g}[\ell]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{n(m-k-\ell)}\right).
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada poslednju sumu u zagradama. Ovo je konačan geometrijski niz čija je suma jednaka N, kada je $m - k - l \equiv 0 \; mod \; N$, odnosno 0, u suprotnom. Poslednji red iznad postaje:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\mathbf{g}[m-k].$$

Dakle, ako je:

$$\mathbf{h}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\mathbf{g}[m-k], \; m = 0, 1, ..., N-1.$$

tada je $\mathbf{FG} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{h}$. Uočimo da periodičnost od $\mathbf{g}$ mora biti uzeta u obzir pri definisanju $\mathbf{h}$, zato što će indeks uz $\mathbf{g}$ biti negativan za $m < k$. Takođe, uočimo da je $\mathbf{h}$ periodična.

Da sumiramo:

• **Konvolucija diskretnog signala:** Neka su $\boldsymbol{f}$ i $\mathbf{g}$ periodični diskretni signali. Definišimo konvoluciju od $\boldsymbol{f}$ i $\mathbf{g}$ kao periodičan diskretan signal $\boldsymbol{f} * \mathbf{g}$, takav da važi:

$$(\boldsymbol{f} * \mathbf{g})[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[k]\mathbf{g}[m-k].$$

Tada je:

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{f} * \mathbf{g}) = (\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})(\underline{\mathcal{F}}\mathbf{g}).$$

• **DFT pretvara proizvod u konvoluciju:**

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{f}\mathbf{g}) = \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} * \underline{\mathcal{F}}\mathbf{g}).$$

Ovu osobinu možemo dobiti korišćenjem dualnosti i osobina konvolucije. Neka je $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}^{-1}\boldsymbol{f}$ i $\mathbf{G} = \underline{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{g}$. Tada je $\boldsymbol{f} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{F}$, $\mathbf{g} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{G}$ i

$$\boldsymbol{f}\mathbf{g} = (\underline{\mathcal{F}}\mathbf{F})(\underline{\mathcal{F}}\mathbf{G}) = \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{F} * \mathbf{G}).$$

$$\underline{\mathcal{F}}(\boldsymbol{f}\mathbf{g}) = \underline{\mathcal{F}}\underline{\mathcal{F}}(\mathbf{F}*\mathbf{G}) = N(\mathbf{F}*\mathbf{G})^{-} = N(\frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f})^{-} * \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\mathbf{g})^{-}) = \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f} * \underline{\mathcal{F}}\mathbf{g}).$$

3.5 POMERANJE I KONVOLUCIJA

Zabeležimo jednu osobinu kombinujući konvoluciju sa kašnjenjima:

$$
\begin{aligned}
((\tau_p \boldsymbol{f}) * \mathbf{g})[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \tau_p \boldsymbol{f}[n-k]\mathbf{g}[k] && (3.5)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n-k-p]\mathbf{g}[k] && (3.6)\\
&= (\boldsymbol{f} * \mathbf{g})[n-p] && (3.7)\\
&= \tau_p(\boldsymbol{f} * \mathbf{g})[n]. && (3.8)
\end{aligned}
$$

Kako je konvolucija komutativna, imamo da važi:

$$(\tau_p \boldsymbol{f}) * \mathbf{g} = \tau_p(\boldsymbol{f} * \mathbf{g}) = \boldsymbol{f} * (\tau_p \mathbf{g}).$$

Glava 4

VEZA DFT SA OSTALIM FT

4.1 VEZA DFT SA NEPREKIDNOM FT

Krenimo sa signalom $f(t)$ i njegovom Furijeovom transformacijom $\mathcal{F}(f(s))$, koje su funkcije neprekidne promenljive. Cilj nam je:

- Pronaći diskretan oblik od $f(t)$, koji je razumna aproksimacija od $f(t)$.
- Pronaći diskretan oblik od $\mathcal{F}f(s)$, koji je razumna aproksimacija od $\mathcal{F}f(s)$.
- Pronaći način na koji je diskretan oblik od $\mathcal{F}f(s)$ u vezi sa diskretnim oblikom od $f(t)$, koji je razumna aproksimacija načina na koji je $\mathcal{F}f(s)$ u vezi sa $f(t)$.

Neka su L i B celi brojevi. Pretpostavimo da je $f(t)$ jednako nuli izvan $0 \leq t \leq L$. Takođe, pretpostavimo da je Furijeova transformacija $\mathcal{F}f(s)$ jednaka nuli izvan $0 < s < 2B$. Dakle, pretpostavljamo da je nosač funkcije $\mathcal{F}f(s)$ segment $[0, 2B]$ a ne $[-B, B]$, radi lakšeg indeksiranja.

Prema teoremi o uzorkovanju (na osnovu dovoljnog broja vrednosti funkcije f u diskretnom skupu jednako raspodeljenih tačaka, možemo funkciju f u potpunosti rekonstruisati iz njenih vrednosti u tim tackama), možemo $f(t)$ potpuno rekonstruisati iz njenih uzoraka, ako uzorkovanje vršimo "brzinom" od $2B$ uzoraka u sekundi. Kako je $f(t)$ definisana na intervalu duzine L, a susedni uzorci su na međusobnom rastojanju $1/2B$, to znači da ćemo imati ukupno:

$$N = \frac{L}{\frac{1}{2B}} = 2BL$$

jednako raspodeljenih uzoraka, u tačkama:

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2B}, t_2 = \frac{2}{2B}, ..., t_{N-1} = \frac{N-1}{2B}.$$

Znati vrednosti $f(t_k)$, znači znati vrednost $f(t)$. Dakle, možemo zaključiti: Diskretna verzija od $f(t)$ je lista uzorkovanih vrednosti $f(t_0), f(t_1), ..., f(t_{N-1})$.

Sada, predstavimo diskretnu verziju od $f(t)$ tj. listu uzorkovanih vrednosti 'neprekidno', pomoću konačnog impulsnog voza[1] u uzorkovanim tačkama:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - t_n).$$

To je ono što smo ranije smatrali uzorkovanom formom od $f(t_0)$:

$$f_{diskretno}(t) = f(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - t_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)\delta(t - t_n).$$

[1]Impulsni voz (eng. impulse train, a finite III-function) je periodična distribucija konstruisana od Dirakove δ funkcije $\text{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T}\text{III}(\frac{t}{T})$, za neki period T. Kako je ova funkcija periodična, može biti predstavljena Furijeovim redom $\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi in\frac{t}{T}}$

Furijeova transformacija od $f_{diskretno}$ je:

$$\mathcal{F}f_{diskretno}(s) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)\mathcal{F}\delta(t-t_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i s t_n}.$$

Ovo je Furijeova transformacija uzorkovanog oblika od $f(t)$ - blizu smo onoga što želimo.

Funkcija $f(t)$ je ograničena na $0 \leq t \leq L$, i ovo određuje stopu uzorkovanja za rekonstrukciju $\mathcal{F}f(s)$ iz njenih uzoraka u domenu frekvencije. Stopa uzorkovanja je $\frac{1}{L}$. Uzorkujemo $\mathcal{F}f(s)$ duž intervala od 0 do $2B$ na domenu frekvencije u tačkama na rastojanju $\frac{1}{L}$. Broj uzorkovanih tačaka je:

$$\frac{2B}{1/L} = 2BL = N$$

jednak broju broju uzorkovanih tačaka za $f(t)$. Uzorkovane tačke za $\mathcal{F}f(s)$ su oblika $\frac{m}{L}$ i njihov broj je jednak N:

$$s_0 = 0, s_1 = \frac{1}{L}, ..., s_{N-1} = \frac{N-1}{L}.$$

Diskretan oblik od $\mathcal{F}f(s)$ koji mi imamo, nije $\mathcal{F}f(s)$ određen u uzorkovanim tačkama s_m. To je $\mathcal{F}f_{diskretno}(s)$ određen u uzorkovanim tačkama. Dakle:

- Diskretan oblik od $\mathcal{F}f(s)$ je lista vrednosti:

$$F(s_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i s_0 t_n},$$
$$F(s_1) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i s_1 t_n},$$
$$...$$
$$F(s_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i s_{N-1} t_n}.$$

Sada imamo način dobijanja diskretnog oblika od $\mathcal{F}f(s)$ iz diskretnog oblika od $f(t)$:

$$F(s_m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n}.$$

Ove sume, za svako $m = \overline{0, N-1}$, su aproksimacije Furijeove transformacije od $f(t)$, do $\mathcal{F}f(s)$. Postavlja se pitanje: u kom smislu je ovo diskretna aproksimacija Furijeove transformacije? Evo jednog načina na koji to vidimo. Kako je $f(t)$ vremenski ograničena na $0 \leq t \leq L$, mi imamo:

$$\mathcal{F}f(s) = \int_0^L e^{-2\pi i s t} f(t) dt.$$

U uzorkovanim tačkama s_m je:

$$\mathcal{F}f(s_m) = \int_0^L e^{-2\pi i s_m t} f(t) dt$$

i kada znamo vrednosti $\mathcal{F}f(s_m)$, znamo i $\mathcal{F}f(s)$. Sada iskoristimo uzorkovane tačke t_k za $f(t)$ da zapišemo Rimanovu sumu kao aproksimaciju za integral. Rastojanje Δt između tačaka je jednako $\frac{1}{2B}$, dakle imamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(s_m) &= \int_0^L e^{-2\pi i s_m t} f(t) dt \\
&\approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n} \Delta t \\
&= \frac{1}{2B} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n} \\
&= \frac{1}{2B} F(s_m).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da:

- Do na faktor $\frac{1}{2B}$, vrednosti $F(s_m)$ predstavljaju aproksimaciju od $\mathcal{F}f(s_m)$.

Zapisivanje Rimanove sume kao aproksimacije integrala koji definiše $\mathcal{F}f(s_m)$, diskretizuje integral, i ovo je jedan način dobijanja izraza za $F(s_n)$, do faktora $2B$. Mi smo skratili ovaj korak, radeći sa $\mathcal{F}f_{diskretno}(s)$.

Postoji još jedna stvar koja se mora rešiti da bi se mogla dati definicija DFT. Koristimo definiciju uzorkovanih tačaka:

$$t_n = \frac{n}{2B},\ s_m = \frac{m}{L}$$

da bismo zapisali:

$$F(s_m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i s_m t_n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{\frac{-2\pi i n m}{2BL}} = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{\frac{-2\pi i n m}{N}}.$$

Ovaj oblik eksponenta, $e^{\frac{-2\pi i n m}{N}}$, daje veći značaj indeksu ulaznih (n) i izlaznih (m) vrednosti i broju tačaka N, i 'sakriva' uzorkovane tačke. Ovo je poslednji korak do diskretnog.

4.1.1 VEZA DFT SA BRZOM FT

Brza Furijeova transformacija (engl. Fast Fourier transformation; često se označava kao FFT) je algoritam za brzo izračunavanje vrednosti diskretne Furijeove transformacije, baziran na simetričnosti koeficijenata DFT. Ubrzanje u odnosu na uobičajen postupak izračunavanja diskretne Furijeove transformacije postiže se izbegavanjem ponovnog izračunavanja izraza koji se međusobno negiraju. Algoritam se pripisuje Džejmsu V. Kuliju (James W. Cooley) i Džonu V. Takiju (John W. Tukey) koji su ga objavili 1965. godine. Međutim, Karl Fridrih Gaus ga je razvio još 1805. da bi izračunao putanju asteroida Palas i Juno. Pritom su mnoge verzije razvijene i pre Kulijeve i Takijeve varijante. Posle su se pojavila mnoga poboljšanja i varijacije.

Za brzu Furijeovu transformaciju postoji i algoritam u suprotnom smeru - inverzna brza Furijeova transformacija.

Neka su $f[0], f[1], ..., f[N-1]$ kompleksni brojevi. DFT je određena formulom:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{\frac{-2\pi i k n}{N}},\ k = 0, 1, ..., N-1.$$

Određivanje ove definicije direktno zahteva N^2 operacija: ima N izlaznih vrednosti $F[k]$ i svaka od njih je suma od N funkcija.

FFT je metod uz pomoć koga se dobija isti rezultat, ali pomoću $N \log N$ operacija.

Glava 5

ALGORITMI ZA IZRAČUNAVANJE DFT

5.1 FFT ALGORITMI

- Zasnivaju se na dekompoziciji DFT
- Koriste osobine simetričnosti i periodičnosti DFT
- Broj množenja i sabiranja je smanjen ($\sim N \log_2 N$)
- Ostvarene uštede u vremenu računanja su posebno izražene za veliko N

5.1.1 KULI-TAKI ALGORITAM

Ne možemo se naći kompaktniji način za zapisivanje DFT od matričnog oblika:

$$(\underline{\mathcal{F}})_{mn} = \omega^{-mn},\ m, n = 0, 1, ..., N-1.$$

On sadrži sve što treba da znamo. Međutim, ono što može da se poboljša jeste smanjivanje broja množenja potrebnih da se izračuna data DFT. To poboljšanje može biti veliko, i to je svrha FFT.

FFT je algoritam za određivanje DFT sa manje od N^2 množenja, gde je N^2 broj množenja potreban da se odredi $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}}\boldsymbol{f}$, množenjem $\boldsymbol{f}$ matricom dimenzija $N \times N$. Evo kako funkcioniše.

Smanjivanje računanja: spajanje i sortiranje

Pogledajmo, najpre, jedan prostilji primer.

Razmotrimo primer sortiranja N brojeva od najmanjeg do najvećeg. Neka su dati brojevi sledeći:

5	2	3	1	6	4	8	7

Hoćemo da napravimo listu na kojoj su brojevi poređani od najmanjeg do najvećeg, odnosno od 1 do 8. Potrebno je pretražiti listu, pronaći najmanji broj, ukloniti ga, i staviti ga na prvo mesto nove liste, zatim nastaviti pretraživanje ostatka originalne liste, pronaći najmanji broj, ukloniti ga, i staviti na drugo mesto nove liste, itd:

Nulti korak:

5	2	3	1	6	4	8	7

Prvi korak :

5	2	3	6	4	8	7

1

Drugi korak:

5	3	6	4	8	7

1	2

Treći korak:

5	6	4	8	7

1	2	3

Četvrti korak:

5	6	8	7

1	2	3	4

Uzastopni koraci proizvode dve liste: jednu sortiranu i jednu koja nije sortirana. Konačnu sortiranu listu dobijamo u osmom koraku.

Uopšteno, postavlja se pitanje: Koliko operacija jedan ovakav algoritam zahteva da se završi sortiranje?

Ukoliko imamo N brojeva, tada svaki korak zahteva, grubo govoreći, N poređenja - lista se smanjuje, ali je broj poređenja reda N, i moramo ponoviti ovaj postupak N puta (ima N koraka, ne računajući nulti korak, koji samo prepisuje početnu listu).

Dakle, broj operacija potrebnih za sortiranje N brojeva je reda N^2, i obeležava se sa $O(N^2)$.

Problem sa ovim jednostavnim postupkom je što se u $(n+1)$-om koraku ne uzimaju u obzir upoređivanja obavljena u n-tom koraku. Ceo taj trud je protraćen u svakom od koraka.

Jedan drugačiji pristup, koji koristi među-poređenja, sortira podliste početne liste, spaja rezultate i sortira ih opet. Evo kako on funkcioniše.

Krenimo prolazeći direktno kroz listu i razdvajajući je na podliste koje imaju po dva elementa; neka je to nulti korak.

5	2

3	1

6	4

8	7

Prvi korak je sortiranje svake od ove (četiri) 2-liste, na ovaj način dobijamo dve grupe od po dve 2-liste, koje nazivamo 'gornje' i 'donje' liste:

Gornje liste:

2	5

1	3

Donje liste:

4	6

7	8

(Ovaj korak zahteva dva poređenja).

Drugi korak spaja ove 2-liste u dve sortirane 4-liste (ponovo nazvane 'gornja' i 'donja'). Evo algoritma, primenjenog zasebno na gornje i donje 2-liste. Brojevi u prvim redovima svake 2-liste se biraju tako da budu manji od drugog broja. Uporedimo ova dva broja i pomerimo manji od njih u prvi red gornje 4-liste. Isto uradimo i za donju 4-listu. Sada imamo 1-listu i 2-listu. Uporedimo jedini element 1-liste sa prvim elementom 2-liste i pomerimo manji od njih u drugi red gornje(donje) 4-liste. Ostala su nam dva broja-uporedimo ih i stavimo ih u treći i četvrti red gornje (donje) 4-liste. Dobili smo dve 4-liste:

gornja	1	2	3	5
donja	4	6	7	8

(Ovaj korak zahteva četiri poređenja). Sledeći korak jeste spojiti gornju i donju sortiranu 4-listu u jednu sortiranu 8-listu:

1	2	3	4	5	6	7	8

(Sa ovim primerom ovaj korak zahteva pet poređenja).

U ovom procesu nismo mnogo smanjili broj poređenja koje moramo izvršiti u svakom koraku, ali smo smanjili broj koraka od osam na tri. Postavlja se pitanje - Koliko operacija je potrebno za dobijanje konačne liste sortiranih brojeva? Nije tesko uočiti da je broj poređenja potrebnih za spajanje dve podliste reda ukupne dužine podlista. Sa N brojeva, ukupan broj poređenja u svakom spajanju-sortiranju je $O(N)$:

$$\text{broj poređenja u spajanju-sortiranju} = O(N)$$

Postavlja se pitanje - Koliko spajanja-sortiranja ima ukupno? U svakoj fazi prepolovimo broj podlista, ili, radeći na drugačiji način, polazeći od konačne sortirane liste, svaki korak na gore, duplira broj podlista.
Ukoliko ima n dupliranja (n koraka), tada je $2^n = N$, ili:

$$\text{broj koraka spajanja-sortiranja} = \log_2 N.$$

Zaključujemo da je:

$$\text{broj koraka sortiranje za sortiranje } N \text{ brojeva} = O(N \log N).$$

Ukoliko je N veliko, tada je velika ušteda u koracima. Na primer, ukoliko je N milion, tada je $O(N^2)$ jednako milion miliona, ili 10^{12} koraka, dok je $N \log_{10} N = 10^6 \times 6$, odnosno 6 miliona operacija.

To je tačno računanje operacija koje su uključene, ali zašto je ušteda u korišćenju spajanja-sortiranja, pre nego u koršćenju poređenja?

Pomoću sortiranja podlista mi samo treba da poredimo prve elemente podlista u delu spajanja kod algoritma. Na ovaj način, $(n+1)$-i korak ima prednost u odnosu na poređenja učinjena u n-tom koraku, što nije učinjeno prilikom korišćenja metoda direktnog poređenja.

Jednostavno računanje DFT

Razmatrajući kako možemo da izračunamo DFT efikasnije nego direktnim množenjem matrica, uradimo jednostavan proračun za $N = 4$. DFT matrica je:

$$\underline{\mathcal{F}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix}$$

Hoćemo ovo da redukujemo što je više moguće. Koristeći $\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}}$ i $\omega_4^{-4} = 1$ dobijamo:

$$\omega_4^{-6} = \omega_4^{-4}\omega_4^{-2} = \omega_4^{-2} \text{ i } \omega_4^{-9} = \omega_4^{-8}\omega_4^{-1} = \omega_4^{-1}.$$

Sada $\underline{\mathcal{F}}_4$ postaje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & 1 & \omega_4^{-2} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-1} \end{pmatrix}$$

Ne stajemo ovde. Kako je:

$$\omega_4^{-2} = (e^{\frac{2\pi i}{4}})^{-2} = e^{-\pi i} = -1$$

dobijamo:

$$\underline{\mathcal{F}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \end{pmatrix}$$

Dakle, nalazimo:

$$\underline{\mathcal{F}}_4 \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[3] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}(2) + \boldsymbol{f}(3) \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} - \boldsymbol{f}[2] - \boldsymbol{f}(3)\omega_4^{-1} \\ \boldsymbol{f}[0] - \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[2] - \boldsymbol{f}(3) \\ \boldsymbol{f}[0] - \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} - \boldsymbol{f}[2] + \boldsymbol{f}(3)\omega_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Matrica izgleda jednostavnije, ali je i dalje potrebno 16 množenja da bi se došlo do konačnog rešenja.

BRZA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA - FFT

DFT ima složenu strukturu. Trik za brže računanje DFT reda N je korišćenje te strukture za preuređivanje proizvoda da bi se dobila DFT reda $\frac{N}{2}$. Da bi algoritam bio što efikasniji u ubrzanoj primeni, potrebno je pretpostaviti da je N stepen broja 2.

Koristićemo sledeću oznaku za stepene od ω:

$$\omega[p, g] = \omega_p^q.$$

Za naše potrebe p će biti jednako $N, \frac{N}{2}$, itd.

Najpre uočimo da je:

$$\omega[\frac{N}{2}, -1] = e^{\frac{-2\pi i}{\frac{N}{2}}} = e^{\frac{-4\pi i}{N}} = \omega[N, -2].$$

Dakle, stepeni od $\omega[\frac{N}{2}, -1]$ su parni stepeni od $\omega[N, -1] = \omega_N^{-1}$:

$$\omega[\frac{N}{2}, -n] = \omega[N, -2n]$$

i uopšteno:

$$\omega[\frac{N}{2}, -nm] = \omega[N, -2nm].$$

Postavlja se pitanje - Kakvog su oblika neparni stepeni od $\omega[N, -1] = \omega_N^{-1}$?

Neparni stepen je oblika $\omega[N, -2(n+1)]$ i važi:

$$\omega[N, -2(n+1)] = \omega[N, -1]\omega[N, -2n] = \omega[N, -1]\omega[\frac{N}{2}, -n].$$

Važi i:

$$\omega[N, -2(n+1)m] = \omega[N, -m]\omega[\frac{N}{2}, -nm].$$

Konačno je:

$$\omega[N, -\frac{N}{2}] = e^{(\frac{-2\pi i}{N})(\frac{N}{2})} = e^{-\pi i} = -1.$$

Podela suma

Za svako m, hoćemo da podelimo sumu definisanjem $\mathbf{F}$[m] preko dve sume, jedne sa parnim i jedne sa neparnim indeksima:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} \boldsymbol{f}[n]\omega[N, -nm] = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n]\omega[N, -(2n)m] + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n+1]\omega[N, -(2n+1)m].\end{aligned}$$

Kako obe sume idu od 0 do $\frac{N}{2} - 1$, uočimo da su u prvoj sumi prvi i poslednji članovi $\boldsymbol{f}[0]$ i $\boldsymbol{f}[N-2]\omega[N, -(N-2)m]$, a u drugoj sumi su to $\boldsymbol{f}[1]\omega[N, -m]$ i $\boldsymbol{f}[N-1]\omega[N, -(N-1)m]$.

Dalje, u skladu sa našim opaskama u vezi sa stepenima od ω, $\mathbf{F}[m]$

možemo zapisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}[m] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n]\omega[\frac{N}{2}, -nm] + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n+1]\omega[\frac{N}{2}, -nm]\omega[N, -m] = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n]\omega[\frac{N}{2}, -nm] + \omega[N, -m] \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n+1]\omega[\frac{N}{2}, -nm].\end{aligned}$$

Proučimo ove sume malo detaljnije.

Ima $\frac{N}{2}$ parnih i $\frac{N}{2}$ neparnih ideksa, i zapažamo da u svakoj sumi skoro pa da dobijamo DFT reda $\frac{N}{2}$ od $\frac{N}{2}$-torki $f[parno]$ i $f[neparno]$. Postavlja se pitanje - Zašto 'skoro'?

DFT reda $\frac{N}{2}$ prihvata kao ulaz $\frac{N}{2}$-torku i vraća kao izlaz $\frac{N}{2}$-torku. Međutim, sume iznad, daju svih N ulaznih vrednosti N-torke $\mathbf{F}$, kada m ide od 0 do $N-1$.

Uradićemo dve stvari da bismo dobili $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}$:

• Prvo, ukoliko pretpostavimo da m ide od 0 do $\frac{N}{2}-1$, tada dobijamo prvih $\frac{N}{2}$ izlaznih vrednosti $\mathbf{F}$[m], i zapisujemo neformalno:

$$\mathbf{F}[m] = (\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{parno})[m] + \omega[N, -m](\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{neparno})[m], m = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1.$$

To ima smisla, $\frac{N}{2}$-torke ulaze i $\frac{N}{2}$-izlaze.

• Drugo, postavlja se pitanje - Šta se dešava sa sa indeksom m u drugoj polovini opsega, od $\frac{N}{2}$ do $N-1$? Umesto da pustimo da m ide od $\frac{N}{2}$ do $N-1$, možemo zapisati ove indekse u obliku $m+\frac{N}{2}$, gde se m kreće od 0 do $\frac{N}{2}-1$ i pitamo se koje oblike imaju sume za $\mathbf{F}[m+\frac{N}{2}]$.

Posmatrajmo stepene od $\omega_{\frac{N}{2}}$. U obema sumama , sa parnim i sa neparnim indeksima, imamo stepene $\omega[\frac{N}{2}, -mn]$, i ukoliko umesto m stavimo $m+\frac{N}{2}$, dobijamo:

$$\omega[\frac{N}{2}, -(m+\frac{N}{2})n] = \omega[\frac{N}{2}, -mn]\omega[\frac{N}{2}, -n\frac{N}{2}] = \omega[\frac{N}{2}, -mn],$$

jer je $\omega[\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}] = 1$.

Međutim, za sume sa parnim indeksima, postoji takođe faktor $\omega[N, -m]$ ispred, i ovo postaje:

$$\omega[\tfrac{N}{2}, -(m+\tfrac{N}{2})] = \omega[N, -m]\omega[N, -\tfrac{N}{2}] = -\omega[N, -m].$$

Sastavljajući ova opažanja, dobijamo drugu polovinu izlaznih vrednosti $\mathbf{F}[m]$, od $\mathbf{F}[\frac{N}{2}]$, do $\mathbf{F}[N-1]$:

$$\mathbf{F}[m+\frac{N}{2}] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n]\omega[\frac{N}{2}, -nm] - \omega[N, -m]\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{f}[2n+1]\omega[\frac{N}{2}, -nm]$$

$$\mathbf{F}[m+\frac{N}{2}] = (\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}\boldsymbol{f}_{parno})[m] + \omega[N, -m](\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}\boldsymbol{f}_{neparno})[m], m = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1.$$

Opis FFT algoritma

Sve što smo do sada uradili je veoma značajno. Sumirajmo sve to:

• Krenuli smo sa ulaznom N-torkom $\boldsymbol{f}$, i želimo da odredimo njenu izlaznu N-torku $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_N\boldsymbol{f}$.

• Koraci koje smo preduzeli za izračunavanje izlaznih komponenata $\mathbf{F}[m]$, za $m = 0, 1, ..., N-1$:

1. Podela $\boldsymbol{f}[n]$ na dva dela, sa parnim i neparnim indeksima (0 je paran), svaki dužine $\frac{N}{2}$.

2. Izračunavanje $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}\boldsymbol{f}_{parno}$ i $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}\boldsymbol{f}_{neparno}$.

3. Dobijanje izlaznih vrednosti $\mathbf{F}[m]$ uređivanjem rezultata ovog računanja

po:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}[m] &= (\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{parno})[m] + \omega[N, -m](\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{neparno})[m] \\
\mathbf{F}[m + \frac{N}{2}] &= (\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{parno})[m] - \omega[N, -m](\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \boldsymbol{f}_{neparno})[m] \\
m &= 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Još jedan pogled na $\underline{\mathcal{F}}_4$

Uradimo slučaj za $N = 4$, kao primer, upoređujući ga sa ranijim računanjem. Prvi korak je preuređivanje ulaznih vrednosti da bismo grupisali parne i neparne indekse. Ovo je urađeno *matricom permutacije*:

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

čiji efekat je sledeći:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[3] \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[3] \end{pmatrix}.
$$

Matrica M je definisana na osnovu dejstva na vektore standardne baze e_0, e_1, e_2, e_3 od $\mathbb{R}^4$, odnosno na bazu: $Me_0 = e_0, Me_1 = e_1, Me_2 = e_2, Me_3 = e_3$.

Sledeće, parni i neparni indeksi su uvedeni redom u dve DFT reda $\frac{4}{2} = 2$.

Ovo je presudno smanjenje u FFT algoritmu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \omega_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2]\omega_2^{-1} \\ \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3]\omega_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sa leve strane imamo blok-dijagonalnu matricu dimenzija 4×4, sa 2×2 $\underline{\mathcal{F}}_2$ matricama sa obe strane dijagonale, i sa nulama na ostalim mestima. Dakle, dobijamo da je:

$$\underline{\mathcal{F}}_2 \boldsymbol{f}_{parno} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}[2]\omega_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathcal{F}}_2 \boldsymbol{f}_{neparno} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3]\omega_2^{-1} \end{pmatrix}$$

i za svaki slučaj indeksiranje je $m = 0$ za prvi ulaz, i $m = 1$ za drugi ulaz.

Poslednji korak za dobijanje $\mathbf{F}[m]$-ova je kombinovanje ovih diskretnih Furijeovih transformacija, u skladu sa parnim i neparnim sumama koje smo ranije zapisali. Prilikom spajanja delova, želimo da ostavimo parne indekse zasebno, stavimo ω_4^{-m} ispred m-te komponente prve polovine neparnih indeksa od $\underline{\mathcal{F}}_2$, i $-\omega_4^{-m}$ ispred m-te komponente druge polovine neparnih indeksa od $\underline{\mathcal{F}}_2$. Ove radimo pomoću sledeće matrice:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_4^{-1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

To funkcioniše na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_4^{-1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2]\omega_2^{-1} \\ \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3]\omega_2^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2] + \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2]\omega_2^{-1} + \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} + \boldsymbol{f}[3]\omega_2^{-1}\omega_4^{-1} \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2] - \boldsymbol{f}(1) - \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2]\omega_2^{-1} - \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} - \boldsymbol{f}[3]\omega_2^{-1}\omega_4^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[2] + \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[0] + \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} - \boldsymbol{f}[2] - \boldsymbol{f}[3]\omega_4^{-1} \\ \boldsymbol{f}[0] - \boldsymbol{f}[1] + \boldsymbol{f}[2] - \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[0] - \boldsymbol{f}[1]\omega_4^{-1} - \boldsymbol{f}[2] + \boldsymbol{f}[3]\omega_4^{-1} \end{pmatrix}$$

pri čemu smo koristili $\omega_2^{-1} = e^{\frac{-2\pi i}{2}} = -1$. Ovo proveravamo sa onim što smo ranije dobili.

Jedan način da vidimo ovaj proces je faktorizacija $\underline{\mathcal{F}}_4$ na jednostavnije matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega_4^{-1} & -1 & \omega_4^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_4^{-1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\omega_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_4^{-1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ima 48 ulaznih vrednosti u ovim trima matricama čijim množenjem dobijamo $\underline{\mathcal{F}}_4$, od tih 48 ulaznih vrednosti, 20 su nule.

Na isti način dobijamo opšti oblik faktorizacije za dobijanje DFT_N pomoću $DFT_{N/2}$:

$$\underline{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{2}} & \Omega_{\frac{N}{2}} \\ I_{\frac{N}{2}} & -\Omega_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & sortirani & parni \\ i & neparni & indeksi \end{pmatrix}.$$

$I_{\frac{N}{2}}$ je jedinična matrica dimenzija $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. 0 je nulta matrica (dimenzija $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$). $\Omega_{\frac{N}{2}}$ je dijagonalna matrica sa vrednostima $1, \omega_N^{-1}, \omega_N^{-2}, ..., \omega_N^{-(\frac{N}{2}-1)}$ duž dijagonale. $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}$ je DFT polovine reda, i matrica permutacije stavlja $\frac{N}{2}$ parnih indeksa prvo, a zatim $\frac{N}{2}$ neparnih indeksa.

Način na koji faktorizacija funkcioniše je sledeći:

• Ulazne vrednosti su $\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1]$.

• Matrica sa desne strane je permutaciona matrica koja stavlja parne indekse na prvih $\frac{N}{2}$ mesta, a neparne indekse na drugih $\frac{N}{2}$ mesta.

∘ Ovu operaciju možemo i ovako tumačiti: krenemo od $\boldsymbol{f}[0]$ i uzimamo svako drugo $\boldsymbol{f}[n]$ - dobićemo niz $\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[2], \boldsymbol{f}[4]$, itd., a zatim se vratimo nazad i krenemo sa $\boldsymbol{f}[1]$ uzimamo svako drugo $\boldsymbol{f}[n]$-dobićemo niz $\boldsymbol{f}[1], \boldsymbol{f}[3], \boldsymbol{f}[5]$, itd.

• Izlazne vrednosti prve matrične operacije su par $\frac{N}{2}$ vektora. Matrica u sredini ih prihvata kao ulazne vrednosti. Ona računa polovinu DFT nad ovim polovljenim ulaznim vrednostima i vraća dva $\frac{N}{2}$ - vektora, koji se dalje prosleđuju kao ulazne vrednosti trećoj matrici.

• Treća matrica, sa leva, rekonstruiše izlazne vrednosti od polovljenih DFT i vraća kao rezultat $\mathbf{F}[0], \mathbf{F}[1], ..., \mathbf{F}[N-1]$.

∘ Ovaj korak je sličan koraku 'spajanja-sortiranja' algoritma sortiranja brojeva. Operacije (poređenje u tom slučaju, DFT u ovom slučaju) su izvedene na manjim listama, koje su zatim spojene u duže liste.

• Bitna odlika je da se tokom množenja u jednom trenutku pojavljuje veliki broj nula u matricama.

Do ove poslednje tačke već možemo da smanjimo broj operacija kada koristimo parno/neparno odvajanje, nasparam direktnog određivanja DFT iz definicije.

Ukoliko računamo $\mathbf{F}=\underline{\mathcal{F}}_N \boldsymbol{f}$ kao matrični proizvod, ima N^2 množenja i N^2 sabiranja, sto ukupno daje $2N^2$ operacija.

S druge strane, podela računanja, u unutrašnjoj blok matrici od dve DFT reda $\frac{N}{2}$, zahteva $2(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$ množenja i $2(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$ sabiranja. Sortiranje i kombinovanje treće matrice zahteva $\frac{N}{2}$ množenja i N sabiranja. Metoda podele zahteva broja operacija reda N^2, dok direktna DFT zahteva $2N^2$. Prepolovili smo broj operacija na pola, ali je i dalje ostao istog reda. Vratićemo se na ovu analizu kasnije.

Podeli pa pokori (eng. Divide and conquer) Sada je očigledno šta želimo uraditi - ponavljati algoritam svaki put poloveći veličinu DFT. Faktorizacija od N do $\frac{N}{2}$ je gornji nivo:

$$\underline{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{2}} & \Omega_{\frac{N}{2}} \\ I_{\frac{N}{2}} & -\Omega_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & sortirani & parni \\ i & neparni & indeksi \end{pmatrix}.$$

U sledećem nivou 'ispod' ne radimo ništa sa matricama na krajevima, ali faktorizujemo svaku od dve $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}$ na isti način, u permutacionu matricu desno, blok matricu $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{4}}$ u sredini, i matricu okupljanja levo. Dakle:

$$\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}} = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{4}} & \Omega_{\frac{N}{4}} \\ I_{\frac{N}{4}} & -\Omega_{\frac{N}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sortirane & \frac{N}{2} - liste \\ na \quad dve & \frac{N}{4} - liste \end{pmatrix}.$$

Stavljanjem ovoga u gornji nivo, operacije postaju rekurzivne.

Uznačimo sa M sledeći proizvod:

$$M = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{4}} & \Omega_{\frac{N}{4}} \\ I_{\frac{N}{4}} & -\Omega_{\frac{N}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sortirane & \frac{N}{2} - liste \\ na \quad dve & \frac{N}{4} - liste \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$\underline{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{2}} & \Omega_{\frac{N}{2}} \\ I_{\frac{N}{2}} & -\Omega_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & sortirani & \frac{N}{2} & parni \\ i & \frac{N}{2} & neparni & indeksi \end{pmatrix}.$$

Da bismo mogli da nastavimo polovljenje veličine DFT, sada vidimo da N mora biti stepen broja 2. Konstrukcija se dalje nastavlja na niže nivoe dok od $\underline{\mathcal{F}}_N$ ne stignemo do $\underline{\mathcal{F}}_1$. Napomenimo da DFT reda 1 dobija jednu ulaznu vrednost i vraća je nepromenjenu, dakle, to je identična transformacija.

Kada je polovljenje završeno, događa se sledeće. Posao je u početnom sortiranju i ponovnom okupljanju, jer je konačna DFT u faktorizaciji jednaka $\underline{\mathcal{F}}_1$, odnosno identična transformacija. Dakle, čitajući sa desna na levo, početne ulazne vrednosti $(\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1])$ su prve sortirane, a zatim vraćene kroz matrice sakupljanja, dovodeći nas konačno do izlaznih vrednosti $(\mathbf{F}[0], \mathbf{F}[1], ..., \mathbf{F}[N-1])$.

Očigledno je da, sa mnoštvom nula u matricama, bi trebalo da ima smanjenja ukupnog broja operacija, ali se ne zna tačno koliko. *Ceo put*, od $\boldsymbol{f}$-ova do $\mathbf{F}$-ova se zove **Brza Furijeova transformacija (FFT)**. Brza je zbog smanjenja broja operacija. Zapamtimo, **FFT nije nova transformacija, to je samo iyračunavanje DFT za početne ulazne vrednosti**.

5.1.2 FAKTORIZACIJA MATRICE DFT

Umesto da detaljno opisujemo ceo proces, pogledajmo jedan primer iz matrične tačke gledišta.

Posmatrajmo slučaj za $N = 16$. Početna ulazna vrednost je 16-orka (ili vektor $\boldsymbol{f}$), a konačna izlazna vrednost je druga 16-orka , $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_{16}\boldsymbol{f}$. Na gornjem nivou ovo možemo zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_{16}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} I_8 & \Omega_8 \\ I_8 & -\Omega_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_8 & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{parno} \\ \boldsymbol{f}_{neparno} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I_8 & \Omega_8 \\ I_8 & -\Omega_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix},$$

gde su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ rezultati računanja $\underline{\mathcal{F}}_8$ za $\boldsymbol{f}_{parno}$ i $\boldsymbol{f}_{neparno}$ redom.

Zapišimo ovo na sledeći način:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_{16} \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{16} = \begin{pmatrix} I_8 & \Omega_8 \\ I_8 & -\Omega_8 \end{pmatrix}.$$

Sledeći korak pokazuje kako dolazimo do $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{G} = \underline{\mathcal{F}}_8 \boldsymbol{f}_{parno} = \begin{pmatrix} I_4 & \Omega_4 \\ I_4 & -\Omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = \mathbf{B}_8 \begin{pmatrix} \mathbf{G}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix}$$

gde su $\mathbf{G}'$ i $\mathbf{H}'$ rezultati računanja $\underline{\mathcal{F}}_4$ parnih i neparnih podnizova od $\boldsymbol{f}_{parno}$. Na sličan način dobijamo:

$$\mathbf{H} = \underline{\mathcal{F}}_8 \boldsymbol{f}_{neparno} = \begin{pmatrix} I_4 & \Omega_4 \\ I_4 & -\Omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}'' \\ \mathbf{H}'' \end{pmatrix} = \mathbf{B}_8 \begin{pmatrix} \mathbf{G}'' \\ \mathbf{H}'' \end{pmatrix},$$

gde su $\mathbf{G}''$ i $\mathbf{H}''$ rezultati računanja $\underline{\mathcal{F}}_4$ parnih i neparnih podnizova od $\boldsymbol{f}_{neparno}$.

Kombinujući ovo što smo dobili, imamo:

$$\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_{16} \boldsymbol{f} = B_{16} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_8 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}' \\ \mathbf{H}' \\ \mathbf{G}'' \\ \mathbf{H}'' \end{pmatrix}.$$

Nastavimo dalje jos dva koraka-ostaje da odredimo DFT reda 4 i reda 2.

Tada rezultat izgleda ovako:

$$\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}_{16}\boldsymbol{f} = B_{16} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_8 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Matrica \\ permutacije \\ dimenzija \\ 16 \times 16 \\ koja\ sortira \\ ulazne\ vrednosti \end{pmatrix} \boldsymbol{f}.$$

Zabeležimo da je:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svaka matrica B_2 prima par ulaznih vrednosti koje koje doalze od para DFT_1, i kako DFT_1 ne menjaju ništa, svaka matrica B_2 prima originalne ulazne vrednosti $\boldsymbol{f}[m]$, ali sa promenjenim redosledom od redosleda: $\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[15]$. Vratićemo se kasnije na pitanje sortiranja indeksa, ali vidimo najpre šta je cilj svega ovoga.

Cilj svega ovoga

U faktorizaciji DFT ima mnogo nula. Nakon početnog sortiranja indeksa, ima 4 faza spajanja. Uopšteno, za $N = 2^n$ ima $n = \log_2 N$ faza spajanja nakon početnog sortiranja. Računanje $\log_2 N$ za broj faza ponovnog spajanja, vrši se na isti način kao računanje za broj koraka spajanja-sortiranja u algoritmu sortiranja.

Razmotrimo sada *računsku kompleksnost* FFT algoritma uopšteno.

Označimo sa $C(N)$ broj elementarnih operacija potrebnih za pronalaženje DFT pomoću FFT algoritma; ovo uključuje sabiranja i množenja. Sastavimo $\underline{\mathcal{F}}_N$ od dve $\underline{\mathcal{F}}_{\frac{N}{2}}$ poću drugiog niza elementarnih operacija. Iz naših ranijih razmatranja, ili iz faktorizacije, broj operacija može lako biti prikazan kao proporcionalan sa N. Dakle, osnovna rekurziona veza je:

$$C(N) = 2C\left(\frac{N}{2}\right) + KN.$$

Možemo rešiti ovu rekurzionu jednakost na sledeći način. Neka je:

$$n = \log_2 N$$

i neka je:

$$T(n) = \frac{C(N)}{N}.$$

Tada je:

$$C(N) = NT(n).$$

. Kako je $n - 1 = \log_2(\frac{N}{2})$, tada je:

$$T(n-1) = \frac{C(\frac{N}{2})}{\frac{N}{2}} = 2\frac{C(\frac{N}{2})}{N}, \text{ ili } NT(n-1) = 2C\left(\frac{N}{2}\right)$$

ili jednostavno:

$$T(n) = T(n-1) + K.$$

Ovo nam već nagoveštava da je $T(n)$ linearan. $C(1)$ je očigledno jednako 0, jer nije potrebna nijedna operacija za računanje DFT od jedne tačke. Otuda

$T(0) = C(1) = 0,\ T(1) = K$, i uopšteno:

$$T(n) = Kn.$$

U funkciji od C, ovo ima sledeći oblik:

$$C(n) = KN \log_2 N.$$

Razna izvođenja FFT pokušavaju da smanje konstantu K što više. Najbolje do sada, smanjuje broj množenja na $N \log_2 N$, a broj sabiranja na $3 \log_2 N$. Zapamtimo da ovo važi za kompleksne ulazne vrednosti. Ograničavanje na realne ulazne vrednosti smanjuje broj operacija na pola.

Kao što smo ranije napomenuli, za veliko N, smanjenje broja računanja od N^2 na $N \log_2 N$ predstavlja ogromnu uštedu. Na primer, neka je $N = 1024 = 2^{10}$. Tada je $N^2 = 2^{20}$, što je oko milion, dok je $2^{10} \log_2 2^{10}$ oko deset hiljada, ili čak oko pet hiljada za realne signale. To je znatno smanjenje, koje je za još veće brojeve jos izraženije.

5.1.3 SORTIRANJE INDEKSA

Ukoliko razmišljmo o rekurzivnoj faktorizaciji unutrašnje matrice DFT, tada prilikom sprovođenja cele FFT, prva stvar koja se radi je sortiranje i mešanje ulaznih vrednosti. Uobičajeno je prikazati dijagram toka FFT, i većina grafičkih prikaza FFT prikazuju kako se $\boldsymbol{f}[m]$-ovi mešaju i kreću iz jedne faze u drugu. Grafik toka kompletnog FFT algoritma se naziva *leptir dijagram.*

Princip sortiranja ulaznih vrednosti je isti kao što je ranije ustanovljeno. Krenimo sa prvom ulaznom vrednošću $\boldsymbol{f}[0]$ i uzmimo svaku drugu. Zatim krenimo sa drugom ulaznom vrednošću $\boldsymbol{f}[1]$ i uzmimo svaku drugu. Na ovaj način dobijamo $\boldsymbol{f}_{parno}$ i $\boldsymbol{f}_{neparno}$. Sledeće sortiranje ponavlja proces na podnizovima od $\boldsymbol{f}_{parno}$ i $\boldsymbol{f}_{neparno}$ itd. Za $N = 8$, imamo:

$\boldsymbol{f}[0]$	$\boldsymbol{f}[0]$	$\boldsymbol{f}[0]$	$\boldsymbol{f}[0]$
$\boldsymbol{f}[1]$	$\boldsymbol{f}[2]$	$\boldsymbol{f}[4]$	$\boldsymbol{f}[4]$
$\boldsymbol{f}[2]$	$\boldsymbol{f}[4]$	$\boldsymbol{f}[2]$	$\boldsymbol{f}[2]$
$\boldsymbol{f}[3]$	$\boldsymbol{f}[6]$	$\boldsymbol{f}[6]$	$\boldsymbol{f}[6]$
$\boldsymbol{f}[4]$	$\boldsymbol{f}[1]$	$\boldsymbol{f}[1]$	$\boldsymbol{f}[1]$
$\boldsymbol{f}[5]$	$\boldsymbol{f}[3]$	$\boldsymbol{f}[5]$	$\boldsymbol{f}[5]$
$\boldsymbol{f}[6]$	$\boldsymbol{f}[5]$	$\boldsymbol{f}[3]$	$\boldsymbol{f}[3]$
$\boldsymbol{f}[7]$	$\boldsymbol{f}[7]$	$\boldsymbol{f}[7]$	$\boldsymbol{f}[7]$

FFT algoritam, za $N = 8$ je:

$$\mathbf{F} = B_8 \begin{pmatrix} \mathbf{B}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[4] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[6] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[5] \\ \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[7] \end{pmatrix}$$

Sortiranje može biti opisano pomoću binarnih brojeva. Svako sortiranje razvrstava ulazne vrednosti u 'gornje' binarne ili donje 'binarne'. Koristimo 0 za gornje ($\uparrow$), a 1 za donje ($\downarrow$) (kao 0 za parno i 1 za neparno). Dodeljujući cifre sa desna na levo, najmanje značajan bit je prvi sortiran, sledeći bit po značaju je drugi sortiran, a najznačajniji bit je poslednji sortiran. Povećavamo prethodnu tabelu na sledeći način:

$\boldsymbol{f}[0]$	$\boldsymbol{f}[0]$	0	$\uparrow$	$\boldsymbol{f}[0]$	00	$\uparrow\uparrow$	$\boldsymbol{f}[0]$	000	$\uparrow\uparrow\uparrow$
$\boldsymbol{f}[1]$	$\boldsymbol{f}[2]$	0	$\uparrow$	$\boldsymbol{f}[4]$	00	$\uparrow\uparrow$	$\boldsymbol{f}[4]$	100	$\downarrow\uparrow\uparrow$
$\boldsymbol{f}[2]$	$\boldsymbol{f}[4]$	0	$\uparrow$	$\boldsymbol{f}[2]$	10	$\downarrow\uparrow$	$\boldsymbol{f}[2]$	010	$\uparrow\downarrow\uparrow$
$\boldsymbol{f}[3]$	$\boldsymbol{f}[6]$	0	$\uparrow$	$\boldsymbol{f}[6]$	10	$\downarrow\uparrow$	$\boldsymbol{f}[6]$	110	$\downarrow\downarrow\uparrow$
$\boldsymbol{f}[4]$	$\boldsymbol{f}[1]$	1	$\uparrow$	$\boldsymbol{f}[1]$	01	$\uparrow\downarrow$	$\boldsymbol{f}[1]$	001	$\uparrow\uparrow\downarrow$
$\boldsymbol{f}[5]$	$\boldsymbol{f}[3]$	1	$\downarrow$	$\boldsymbol{f}[5]$	01	$\uparrow\downarrow$	$\boldsymbol{f}[5]$	101	$\downarrow\uparrow\downarrow$
$\boldsymbol{f}[6]$	$\boldsymbol{f}[5]$	1	$\downarrow$	$\boldsymbol{f}[3]$	11	$\downarrow\downarrow$	$\boldsymbol{f}[3]$	011	$\uparrow\downarrow\downarrow$
$\boldsymbol{f}[7]$	$\boldsymbol{f}[7]$	1	$\downarrow$	$\boldsymbol{f}[7]$	11	$\downarrow\downarrow$	$\boldsymbol{f}[7]$	111	$\downarrow\downarrow\downarrow$

Brojevi u poslednjoj koloni su tačna binarna reprezentacija za 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.

Zabeležimo da iz početnog prirodnog redosleda:

$\boldsymbol{f}[0]$	000
$\boldsymbol{f}[1]$	001
$\boldsymbol{f}[2]$	010
$\boldsymbol{f}[3]$	011
$\boldsymbol{f}[4]$	100
$\boldsymbol{f}[5]$	101
$\boldsymbol{f}[6]$	110
$\boldsymbol{f}[7]$	111

dobijamo :

$\boldsymbol{f}[0]$	000
$\boldsymbol{f}[4]$	100
$\boldsymbol{f}[2]$	010
$\boldsymbol{f}[6]$	110
$\boldsymbol{f}[1]$	001
$\boldsymbol{f}[5]$	101
$\boldsymbol{f}[3]$	011
$\boldsymbol{f}[7]$	111

obrtanjem binarne reprezentacije brojeva u prvoj tabeli.

Šta se desava sa $\boldsymbol{f}[6]$ na primer? Dekadni broj 6 u binarnom obliku je 110. To je donje-donje-gornje ($\downarrow\downarrow\uparrow$). Prvo sortiranje postavlja $\boldsymbol{f}[6]$ na vrh 4-liste, drugo sortiranje generiše četiri 2-liste, dve gornje 2-liste i dve donje 2-liste, i postavlja $\boldsymbol{f}[6]$ u dno dve 2-liste. Konačno sortiranje postavlja $\boldsymbol{f}[6]$ tačno ispod $\boldsymbol{f}[2]$. Mesto za $\boldsymbol{f}[6]$ u konačnom sortiranju, koje odgovara 'donjem-donjem-gornjem', to je četvrto dole, dakle 110, inverzno binarno je 011 (četvrto mesto u originalnom redosledu). Isti proces za sortiranje se koristi za svako N:

1. Zapisati $0, 1, ..., N-1$ u binarnom obliku. To numeriše mesta od $0, ..., N-1$.

2. Obrnuti binarne cifre za svaki broj mesta. Za binarni broj m, označimo sa $\overleftarrow{m}$ njegov obrnuti.

3. Ulazna vrednost $f_{\overleftarrow{m}}$ ide na mesto m.

Ovaj korak u FFT algoritmu se naziva *okretanje bitova*, iz očiglednih razloga. Prilikom izvršavanja FFT algoritma, mi ne radimo sortiranje, već to radi sam program. Ukoliko se desi da nemamo 2^n uzoraka, tada se dodaju nule, dok se ne dobije broj približan stepenu broja 2. Ovo se zove '*popunjavanje nulama*', i neki FFT algoritmi rade to automatski.

Okretanje bitova pomoću matrice permutacije Da bismo zapisiali permutacionu matricu koja vrši sortiranje, primenimo algoritam 'svaki drugi' na vrste (kolone) jedinične matrice dimnzija $N \times N$, preuredimo vrste (kolone) u skladu sa time, i ponovimo postupak. Za $N = 2$ imamo dva koraka:

Sortiranje i preuređivanje vrsta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Sortiranje\ i \\ preuređivanje \\ vrsta \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} Sortiranje \quad i \\ preuređivanje \\ gornjih \quad i \quad donjih \\ polovina \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I konačno:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[4] \\ \boldsymbol{f}[5] \\ \boldsymbol{f}[6] \\ \boldsymbol{f}[7] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}[0] \\ \boldsymbol{f}[4] \\ \boldsymbol{f}[2] \\ \boldsymbol{f}[6] \\ \boldsymbol{f}[1] \\ \boldsymbol{f}[5] \\ \boldsymbol{f}[3] \\ \boldsymbol{f}[7] \end{pmatrix}.$$

Nerešeni problem u računarskoj nauci: *Koja je donja granica složenosti FFT algoritama? Mogu li da budu brži od $O(N \log N)$?*

5.2 DOPUNJAVANJE NULAMA

Kao što smo ranije videli, FFT algoritam za računanje DFT je podešen da radi sa ulaznim vrednostima čija je dužina jednaka stepenu broja 2. Ne zahtevaju sva izvođenja FFT ulazne vrednosti te dužine, mnogi programi prihvataju ulazne vrednosti određene dužine, a ulaznim vrednostima koje nisu odgovatajuće dužine, dodaju se nule na kraju signala da bi se postigla odgovarajuća dužina. Ovaj proces se naziva *dopunjavanje nulama* i mnogi programi ga izvšavaju automatski kada se koristi FFT.

Neka je $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}[0], \boldsymbol{f}[1], ..., \boldsymbol{f}[N-1])$ originalna ulazna vrednost. Za ceo broj $M > N$ definišemo:

$$\mathbf{g}[n] = \begin{cases} \boldsymbol{f}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

Tada:

$$\mathbf{G}[m] = \underline{\mathcal{F}}_M \mathbf{g}[m] = \sum_{n=0}^{M-1} \omega_M^{-nm} \mathbf{g}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_M^{-nm} \boldsymbol{f}[n].$$

Poradimo malo sa ω_M^{-nm}:

$$\omega_M^{-nm} = e^{\frac{-2\pi imn}{M}} = e^{\frac{-2\pi imnN}{MN}} = e^{-2\pi in \frac{\frac{mN}{M}}{N}} = \omega_N^{n\frac{mN}{M}}.$$

Kad god je $\frac{mN}{M}$ ceo broj, imamo:

$$\mathbf{G}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{-n\frac{mN}{M}} \boldsymbol{f}[n] = \mathbf{F}\left[\frac{mN}{M}\right].$$

Možemo zapisati ovu jednačinu i za $\mathbf{F}$ u svojstvu od $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{F}[m] = \mathbf{G}\left[\frac{mM}{N}\right],$$

kada god je $\frac{mM}{N}$ ceo broj.

Ovo nas najviše interesuje: Program računa transformaciju $\mathbf{G}[m] = \underline{\mathcal{F}}_M \mathbf{g}$ dopunjenu nulama i želimo da znamo šta su izlazne vrednosti $\mathbf{F}[m]$ originalnog signala u svojstvu od $\mathbf{G}$. Odgovor je: m-ta komponenta od $\mathbf{F}$, je $\frac{mM}{N}$-ta komponenta od $\mathbf{G}$, kad god je $\frac{mM}{N}$ ceo broj. M možemo da izaberemo na sledeći način:

$$M = kN,$$

gde je k ceo broj. Dakle, M je 2 puta veće od N, ili 3 puta veće od N itd. Tada je $\frac{mM}{N} = km$ uvek ceo broj i:

$$\mathbf{F}[m] = \mathbf{G}[km],$$

što je lakše iskazati rečima:

- Ukoliko je signal $\boldsymbol{f}$ dopunjen nulama do signala $\mathbf{g}$ dužine M, gde je $M = kN$, tada je m-ta komponenta od $\mathbf{F} = \underline{\mathcal{F}}\boldsymbol{f}$ u stvari km-ta komponenta od $\mathbf{G} = \underline{\mathcal{F}}\mathbf{g}$.

Glava 6

NEKE PRIMENE DFT U MATEMATICI

DFT ima veliku primenu na raznim poljima. Sve primene zavise uglavnom od mogućnosti Brzog Furijeovog algoritma FFT da računa DFT i njene inverze.

6.1 IDENTIFIKACIJA PARAMETARA

Jedna od primena DFT jeste predviđanje ljuljanja građevina pod uticajem vetra i ostalih spoljašnjih faktora. Građevine, pogotovo one veoma visoke, se ljuljaju i vibriraju pod uticajem vetra. Ovo je nešto što je uobičajeno i veoma teško da se izbegne. Previše ljuljanja i vibracija mogu izazvati oštećenje strukture građevina. Postavlja se pitanje - kako odrediti kako će se struktura ponašati pod uticajem jakog vetra?

Približan model za horizontalno pomerenje u prouzrokovano vetrom snage

f je:

$$au'' + bu' + cu = f(t)$$

gde su a, b, c pozitivne konstante takve da je $b^2 - 4ac < 0$. Ovo je standardan problem u uobičajenim diferencijalnim jednačinama. Problem ovde je što ne znamo šta su konstante a, b, c. Moramo da ih odredimo eksperimentalno. Jedan od načina je udaranje zida pneumatskim čekićem i beleženje odgovora. Snaga impulsa uzrokovanog pneumatskim čekićem je data na sledeći način:

$$f(t) = f_0 \delta(t)$$

gde je $\delta(t)$ Dirakova δ-funkcija, a f_0 jačina impulsa. Razmišljajmo o δ-funkciji kao o signalu ukupne snage[1] jednake jedan, veoma kratkog trajanja. Neka je funkcija f_h definisana na sledeći način:

$$f_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & -h \leq t \leq h, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Tehnički govoreći, δ-funkcija je granična vrednost od f_h kada $h \longrightarrow 0$. Odgovarajući impulsni odgovor u ima sledeći oblik:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{f_0}{\omega a} \sin(\omega t) e^{-\mu t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

gde je $\omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ i $\mu = \frac{b}{2a}$.

Ideja je merenje pomeranja (ili ljuljanja) u razlicitim intervalima posto je ta zgrada udarena pneumatskim čekićem. Ovo će dati diskretizovan grafik funkcije u. Teorijski, frekvencija ω može biti određena iz ovog grafika uporedo sa konstantom propadanja μ i amplitudom $\frac{f_0}{\omega a}$. Kako je f_0 poznato (snaga

[1]Snaga signala $f(t)$ definiše se kao $\lim\limits_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$, a energija kao $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

pneumatskog čekića), parametar a može biti određen iz amplitude $\frac{f_0}{\omega a}$ i ω. Parametri b i c mogu biti određeni iz jednačina $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ i $\mu = \frac{b}{2a}$ (dve jednačine sa dve nepoznate).

Problem sa ovim pristupom je da će stvarni podaci(vrednosti pomeranja) izgledati drugačije od teorijskih odgovora u. Izmereni podaci će sadržati šum koja dodaje visoku frekvenciju odgovoru. Linearna diferencijalna jednačina i δ-funkcija korišćene u prethodnom modelu su samo grube aproksimacije odgovarajućeg fizičkog sistema i stvarne primenjene sile pneumatskog čekića. Male nelinearnosti i impuls konačnog trajanja će dodati oscilacije odgovoru. Dakle, može biti teško odrediti frekvenciju ω direktno sa grafika podataka. Uprkos svim dodatnim faktorima pomenutim do sada, frekvenicja ω može biti određena. Ovde DFT ima ključnu ulogu. Frekvencija ω će biti najveća frekvencijska komponenta predstavljena u podacima, i ona može biti lako određena izračunavanjem DFT podataka. Približna vrednost konstante rušenja može takođe biti određena analiziranjem amplitude podataka. Približne vrednosti parametara a, b, c mogu biti određene kao što je ranije navedeno.

6.2 DISKRETIZACIJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Kao još jednu primenu DFT razmatramo diferencijalnu jednačinu:

$$au" + bu' + cu = f(t)$$

gde je f neprekidna, 2π-periodična funkcija od t. Postoji dobro poznata analitička metoda za određivanje jedinstvenog rešenja ove jednačine, pod uslovom da je f poznata za svako t.

Sa druge strane, ukoliko nam je f poznata samo u tačkama $t_j = \frac{2\pi j}{n}$, za neki ceo broj $n \geq 1$, ovaj metod nije primenjiv.

Umesto direktnog rešavanja diferencijalne jednačine, pokušaćemo da radimo sa njenom diskretizovanom verzijom. Ima mnogo načina za diskretizaciju.

Za $h = \frac{2\pi}{n}$ imamo sledeće aproksimacije:

$$\begin{aligned} u'(t) &\approx \frac{u(t) - u(t-h)}{h}, \\ u''(t) &\approx \frac{u(t+h) + u(t-h) - 2u(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Neka je $t_k = \frac{2\pi k}{n}$ i $u_k = u(t_k)$ za $1 \leq k \leq n$. Kako je u periodična, imamo da je $u_n = u_0$. Za $t = t_k$ prethodne diferencne formule postaju:

$$\begin{aligned} u'(t_k) &\approx \frac{u_k - u_{k-1}}{h}, \\ u''(t) &\approx \frac{u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k}{h^2}. \end{aligned}$$

za $1 \leq k \leq n-1$. Zamenjujući ove vrednosti u početnu diferencijalnu jednačinu, i prikupljajući izraze, dobijamo sledću diferencnu jednačinu:

$$au_{k+1} + \beta u_k + \gamma u_{k-1} = h^2 f_k, \ 1 \leq k \leq n-1,$$

gde je $f_k = f(\frac{2\pi k}{n})$, $\beta = ch^2 + bh - 2a$, $\gamma = a - bh$.

Neka je u rešenje ove diferencne jednačine, u je iz prostora S_n, svih n-periodičnih nizova kompleksnih brojeva. Neka je $\hat{u} = \underline{\mathcal{F}} u$ i $\hat{f} = \underline{\mathcal{F}} f$ i $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Uzimajući DFT obe strane i koristeći teoremu o pomeranju dobijamo:

$$\hat{u}_j = h^2(a\omega^j + \beta + \gamma\overline{\omega}^j)^{-1}\hat{f}_j,$$

pri čemu važi da $a\omega^j+\beta+\gamma\overline{\omega}^j$ nikada nije jedanko 0. Na ovaj način dobijamo $\hat{u}$. Primenom inverzne DFT na $\hat{u}$ dobijamo u.

6.3 MNOŽENJE POLINOMA I VELIKIH CELIH BROJEVA

6.3.1 MNOŽENJE POLINOMA

Pretpostavimo da hoćemo da izračunamo proizvod polinoma $p(x) \cdot q(x)$, gde je:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k,\ q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k x^k$$

i $\mathbf{a} = (\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})^T$ i $\mathbf{b} = (\beta_0 \beta \cdots \beta_{n-1})^T$.

Proizvod:

$$p(x) \cdot q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + ... + \gamma_{2n-2} x^{2n-2}$$

je polinom stepena $2n-2$, gde je γ_k k-ta komponenta konvolucije $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$, jer je:

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} [\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}] = \sum_{k=0}^{2n-2} [\mathbf{a} \odot \mathbf{b}]_k x^k.$$

Dakle, množenje polinoma i konvolucija su ekvivalentne operacije, pa ukoliko možemo izvesti konvoluciju, tada možemo efikasno pomnožiti dva polinoma i obrnuto.

Postoje dve činjenice potrebne za efikasno izvođenje konvolucije. Prvo je da DFT ima sposobnost da pretvori konvoluciju u proizvod i obrnuto. Drugo je da moguće izvesti brzi algoritam za računanje DFT. Ove dve činjenice su razrađene ispod.

Teorema 6.3.1 (Konvoluciona teorema)**.** *Neka je* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *proizvod:*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\beta_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

i neka su $\hat{\boldsymbol{a}}$ *i* $\hat{\boldsymbol{b}}$ *dopunjeni vektori:*

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2n\times 1} \quad \text{i } \hat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2n\times 1}.$$

Ako je $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{2n}$ *Furijeova matrica reda* $2n$*, tada je:*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{a}}) \times (\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{b}}) \text{ i } \boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}^{-1}[(\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{a}}) \times (\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{b}})].$$

Dokaz:

Uočimo da je m-ta komponenta proizvoda $\mathbf{F}_{*j} \times \mathbf{F}_{*k}$:

$$[\mathbf{F}_{*j} \times \mathbf{F}_{*k}]_m = \xi^{mj}\xi^{mk} = \xi^{m(j+k)} = [\mathbf{F}_{*j+k}]_m,$$

dakle kolone od $\mathbf{F}$ imaju sledeću osobinu:

$$\mathbf{F}_{*j} \times \mathbf{F}_{*k} = \mathbf{F}_{*j+k}, \text{ za svako } j, k = 0, 1, ..., (n-1).$$

To znači da, ukoliko su $\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}$, $\mathbf{F}\hat{\mathbf{b}}$ i $\mathbf{F}(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})$ izraženi kao kombinacija kolona od $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{F}_{*k}, \mathbf{F}\hat{\mathbf{b}} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \mathbf{F}_{*k}, \ \mathbf{F}(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{2n-2} (\mathbf{a} \odot \mathbf{b})_k \mathbf{F}_{*k},$$

tada je računanje $(\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}) \times (\mathbf{F}\hat{\mathbf{b}})$ potpuno isto kao formiranje proizvoda dva polinoma, u smislu da je:

$$(\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}) \times (\mathbf{F}\hat{\mathbf{b}}) = (\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathbf{F}_{*k})(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \mathbf{F}_{*k}) = \sum_{k=0}^{2n-2} (\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}) \mathbf{F}_{*k}.$$

Dakle:

$$(\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}) \times (\mathbf{F}\hat{\mathbf{b}}) = \sum_{k=0}^{2n-2} (\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}) \mathbf{F}_{*k} = \sum_{k=0}^{2n-2} (\mathbf{a} \odot \mathbf{b})_k \mathbf{F}_{*k} = \mathbf{F}(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}).$$

6.3.2 MNOŽENJE VELIKIH CELIH BROJEVA

Razmatrajmo dva pozitivna cela broja čije su reprezentacije u bazi b:

$$c = (\gamma_{n-1}\gamma_{n-2} \cdots \gamma_1\gamma_0)_b \text{ i } d = (\delta_{n-1}\delta_{n-2} \cdots \delta_1\delta_0)_b.$$

Koristimo konvolucionu teoremu u kombinaciji sa FFT algoritmom da odredimo proizvod cd.

Neka je:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k x^k,\ q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k x^k,\ c = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix},$$

tada je:

$$c = \gamma_{n-1} b^{n-1} + \gamma_1 b^1 + ... + \gamma_0 b^0 = p(b),$$
$$d = \delta_{n-1} b^{n-1} + \delta_1 b^1 + ... + \delta_0 b^0 = q(b),$$

i iz $p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} [\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \beta_{k-j}] = \sum_{k=0}^{2n-2} [\mathbf{a} \odot \mathbf{b}]_k x^k$ prethodnog poglavlja, zaključujemo da je proizvod cd dat na sledeći način:

$$cd = p(b)q(b) = [\mathbf{c} \odot \mathbf{d}]_{2n-2} b^{2n-2} + [\mathbf{c} \odot \mathbf{d}]_{2n-3} b^{2n-3} + ... + [\mathbf{c} \odot \mathbf{d}]_1 b^1 + [\mathbf{c} \odot \mathbf{d}]_0 b^0.$$

Izgleda kao da konvolucija omogućava b-baznu reprezentaciju proizvoda cd, ali to nije u potpunosti tačno, jer je moguće da postoji $[\mathbf{c} \odot \mathbf{d}]_k \geq b$.

Na primer, ukoliko je $c = 201_{10}$ i 425_{10}, tada je:

$$\mathbf{c} \odot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$cd = (8 \times 10^4) + (4 \times 10^3) + (14 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (5 \times 10^0).$$

Ali, kada se brojevi kao 14 (tj. veći ili jednaki od baze) pojavljuju u $\mathbf{c} \odot \mathbf{d}$, lako ih je rastaviti pišući $14 = (1 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$, pa je:

$$14 \times 10^2 = [(1 \times 10^1) + (4 \times 10^0)] \times 10^2 = (1 \times 10^3) + (4 \times 10^2).$$

Zamenjujući ovo u prethodnu jednakost, dobijamo:

$$cd = (8 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (5 \times 10^0) = 85425_{10}.$$

Računanje $\mathbf{c} \odot \mathbf{d}$ direktno zahteva n^2 množenja, ali korišćenje FFT u kombinaciji sa konvolucijonom teoremom, zahteva $3n \log_2 n$ množenja, što je značajno manje od n^2. Tako da je moguće množenje celih brojeva sa veoma dugačkim b-bazama mnogo brže nego direktnim postupkom.

Glava 7

JOŠ NEKE PRIMENE DFT

7.1 KOMPRESIJA PODATAKA

Oblast obrade digitalnih signala se dosta zaniva na operacijama u frekvencijskom domenu (odnosno na Furijeovoj transformaciji). Na primer, dosta metoda za kompresiju slika i zvukova uključuje DFT: signal se deli na manje delove, svaki od njih se transformiše, i tada se odbacuju Furijeovi koeficijenti visokih frekvencija, za koje se pretpostavlja da su neprimetni. Dekompresor računa iverznu transformaciju, baziranu na smanjenom broju Furijeovih koeficijenata (primene kompresije često koriste specijalne oblike DFT - diskretnu kosinusnu transformaciju ili diskretnu modifikovanu kosinusnu transformaciju). Neki noviji algoritmi za kompresiju koriste *talasne transformacije* (eng. wavelet transform) koje daju dosledniji kompromis između vremenskog i frekvencijskog domena od onog koji daje deljenje podataka na podsegmente i transformacija svakog podsegmenta. U slučaju JPEG2000 ovo izbegava nepravilne karakteristike slike koje se pojavljuju kada su slike visoko kompresovane sa originalnim JPEG-om. *JPEG kompresija* koristi nepovratnu formu kompresije baziranu na diskretnoj kosinusnoj transformaciji (eng. discrete cosine transform, DCT). JPEG je format koji sažima sliku, a da se ne primeti gubitak na kvalitetu slike (ukoliko je to moguće).

7.2 SPEKTRALNA ANALIZA SIGNALA

Kada se DFT koristi za spektralnu analizu signala, tada niz x_n predstavlja konačan niz uniformno raspoređenih vremenskih uzoraka nekog signala $x(t)$, gde t predstavlja vreme. Konverzija od neprekidnog vremena do uzoraka (diskretnog vremena) menja osnovnu FT od $x(t)$ u DTFT (discrete time Fourier transform, diskretna vremenska Furijeova transformacija), koja generalno zahteva vrstu izobličenja koja se naziva *preklapanje spektra*. Izbor odgovarajuće brzine uzorkovanja je ključno za smanjenje izbličenja. Konvertovanje od veoma dugih (ili beskonačnih) nizova do nizova manje veličine zahteva tip izobličenja koji se naziva *opadanje*, koji se manifstuje kao gubitak detalja u DTFT. Izbor odgovarajuće dužine podniza je jako bitan korak za smanjenje tog efekta. Kada su dostupni podaci (i vreme za njihovu obradu) veći od količine potrebne za postizanje željene frekvencijske rezolucije, standardna tehnika je izvođenje mnogobrojnih DFT, na primer kreiranje spektrograma. Određivanje aritmatičke sredine veličine komponenata više DFT je korisna procedura za smanjivanje odstupanja razlika spektra. Konačan izvor izobličenja je sama DFT, jer je to samo diskretno uzorkovanje DTFT, koja je funkcija konstantnog vremenskog domena. Ovo može biti umanjeno povećanjem rezolucije DFT. Ova procedura je ilustrovana kao *Uzorkovanje*

DTFT. Ova procedura je ponekad shvaćena kao Dopunjavanje nulama, što je posebno izvođenje korišćeno zajedno sa FFT.

Literatura

[1] Brad Osgood, *The Fourier Transform and its Applications*, Electrical Engineering Department Stanford University, https://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/book-fall-07.pdf

[2] Albert Boggess, Francis . J . Narcowich, *A First course in wavelets with Fourier analysis* , 2nd edition, John Wiley and Sons, 2009.

[3] Isaac Amidror, *Mastering the DFT in one, two or several dimensions* , Springer-Verlag London 2013

[4] Carl Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2001.

[5] Steven W.Smith, *The scientist and engineer guide to digital signal processing*, 2nd edition, California Technical Publishing, 1997-1999.

[6] David W.Kammler, *A first course in Fourier analysis*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 2007.

[7] Alexander D. Poularikas, *Transforms and applications*, 3rd edition, Taylor and Francis Group, LLC, 2010.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete Fourier transform

Прилог 5/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	мастер рад
Аутор, **АУ**:	Александра Миловановић
Ментор, **МН**:	Небојша Динчић
Наслов рада, **НР**:	ДИСКРЕТНА ФУРИЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Р. Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Р. Србија
Година, **ГО**:	2018.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	83 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	дискретна Фуријеова трансформација, брза Фуријеова трансформација
УДК	517.443
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Представљена је дискретна Фуријеова трансформација и испитиване су њене особине и везе са осталим типовима Фуријеових трансформација. Објашњен је алгоритам за брзу Фуријеову трансформацију. Наведене су и неке примене у математици, обради слика (jpeg формат) и спектралној анализи сигнала.
Датум прихватања теме, **ДП**:	23.12.2015.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**:	Председник:
	Члан:
	Члан, ментор:

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	master degree thesis
Author, **AU**:	Aleksandra Milovanović
Mentor, **MN**:	Nebojša Dinčić
Title, **TI**:	DISCRETE FOURIER TRANSFORM
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2018.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	83 p.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	
Subject/Key words, **S/KW**:	discrete Fourier transform, fast Fourier transform
UC	517.443
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The discrete Fourier transform is presented and its properties and connections with other Fourier transform types are investigated. The fast Fourier transform algorithm is explained. Some applications in mathematics, image processing (jpeg format) and spectral analysis of signals are mentioned.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	23.12.2015.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	