Др ДУШАН АДНАЂЕВИЋ • Др ЗОРАН КАДЕЛБУРГ

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

II

ШЕСТО ИЗДАЊЕ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КРУГ
БЕОГРАД, 2011

Др Душан Аднађевић
Др Зоран Каделбург

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА II
Шесто издање

Издавачи: Математички факултет, Студентски трг 16, Београд,
www.matf.bg.ac.rs
„Круг“, Београд, Устаничка 244г, krugdoo@sbb.rs

За издаваче: *др Миодраг Матељевић, Маријана Милошевић*

Издавачки одбор: *др Гојко Калајџић*, председник
др Трајко Ангелов,
др Зоран Каделбург,
др Александар Липковски

Рецензенти: *др Бранислав Мирковић*
др Миодраг Матељевић

Обрада текста: *др Зоран Каделбург*

Цртежи: *Иван Бранкован*

Штампа и повез: SP Print, Нови Сад

Тираж: 500 примерака

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.22/.38(075.8)
517.51/.52(075.8)

АДНАЂЕВИЋ, Душан, 1929-
Математичка анализа II / Душан Аднађевић, Зоран Каделбург ; [цртежи Иван Бранкован]. – 6. изд. – Београд : Математички факултет : Круг, 2011 (Нови Сад : SP Print). – 320 стр. : граф. прикази ; 24 cm

Тираж 500. – Напомене уз текст. – Регистар. – Библиографија: стр. 319–320.

ISBN 978-86-7136-200-9
1. Каделбург, Зоран [аутор], 1950-
а) Математичка анализа
COBISS.SR-ID 185080588

Ранија издања: 1991. Завод за издавање уџбеника, Београд
1995, 2001. „Наука“, Београд
2006, 2008. Математички факултет, Београд

ISBN: 978-86-7136-200-9

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник писан је по важећем програму предмета Математичка анализа II за студенте Математичког факултета у Београду. Верујемо да ће моћи да га користе и студенти других факултета, посебно природних и техничких наука, на којима је математичка анализа предмет изучавања.

По својој концепцији ова књига је наставак нашег уџбеника Математичка анализа I*, тако да се све напомене дате у предговору тог уџбеника односе и на овај. Приликом позивања, поменути уџбеник је означен са М.А.І. Посебно, треба нагласити да нисмо тежили да у излагању доспемо до највиших домета савремене анализе, већ смо желели да студентима понудимо уџбеник који би им омогућио да науче основне појмове и чињенице ове фундаменталне математичке дисциплине. Верујемо да ће тако бити оспособљени да лакше усвоје неке теже и апстрактније теорије у даљем изучавању математике.

Др Бранислав Мирковић и др Миодраг Матељевић, у својству рецензената, пажљиво су прочитали рукопис и дали низ корисних примедби и сугестија. Задовољство нам је да им се захвалимо што су тиме учинили да уџбеник постане бољи. Захваљујемо се и свим колегама и студентима који су нам скренули пажњу на пропусте у ранијим издањима ове књиге.

У петом издању материјал је прилагођен новој расподели градива између Математичке анализе I и II, као и усвојеној подели тих предмета на семестралне. Тако првих пет глава ове књиге представљају градиво предмета Анализа II-А, а преостале главе одговарају Анализи II-Б.

Београд, септембра 2011. *Аутори*

---

* девето издање, Математички факултет и „Круг“, Београд 2010.

САДРЖАЈ

1. МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ. ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Ако се детаљно анализира теорија граничних вредности у скупу реалних бројева, развијена у М.А.I, може се закључити да у основи тог појма лежи чињеница да је између реалних бројева дефинисано **растојање**

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Даљи појмови, као што су околина, лимес, непрекидност итд, могу се једноставно увести помоћу појма растојања, наравно захваљујући и одређеним особинама које функција d поседује. То наводи на помисао да би се теорија граничних вредности могла развити и у неким другим скуповима – на пример, у вишедимензионим еуклидским просторима, али и много општијим – само уз претпоставку да је на таквом скупу дефинисано растојање са одговарајућим особинама. Такве структуре називају се **метричким просторима** и биће обрађене у овој глави. Посебно, као један од најједноставнијих, али истовремено и најважнијих примера биће обрађен случај коначнодимензионих еуклидских простора. Као што је детаљно обрађен случај познавање својстава скупа $\mathbf{R}$ било суштинско за касније испитивање својстава реалних функција реалне променљиве, тако ће познавање особина поменутих простора бити основа за испитивање функција више (реалних) променљивих, које ће такође бити обрађене у овој глави.

1.1. ДЕФИНИЦИЈА, ПРИМЕРИ И ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ

Следећу дефиницију дао је Фреше[1].

Дефиниција 1.1.1

Нека је X произвољан скуп и $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ функција која сваком пару елемената скупа X додељује реалан број. Ако та функција има особине:

1° $d(x,y) \geqslant 0$;

2° $d(x,y) = 0$ ако и само ако је $x = y$;

[1] M. Frechet (1878–1973), француски математичар

3° $d(x,y) = d(y,x)$;

4° $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$

(x, y, z су произвољни елементи скупа X), онда кажемо да је d **растојање (метрика)** на X, а пар (X,d) (или сâмо X ако се подразумева о којој се функцији d ради) називамо **метричким простором**.

Неједнакост 4° обично ћемо, из разумљивих разлога, називати **неједнакошћу троугла**.

Следећи списак примера метричких простора показује колико разнородни ти примери могу да буду.

Примери 1.1.1

1° Као што је већ речено у уводу, основни, инспиративни пример метричког простора је скуп реалних (или комплексних) бројева $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) са растојањем $d(x,y) = |x-y|$. Да та функција d заиста поседује особине 1°–4° или је тривијално или је доказано у М.А.I (в. крај одељка 2.5 и коментар после става 2.6.4).

2° Најједноставније уопштење простора $\mathbf{R}$ представља, читаоцу познат из линеарне алгебре, коначнодимензиони еуклидски простор $\mathbf{R}^k$ чији су елементи уређене k-торке реалних бројева

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_i)_{i=1}^k.$$

Подсетимо се укратко основних алгебарских особина овог простора.

У $\mathbf{R}^k$ су дефинисани сабирање и множење скаларом помоћу

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \qquad \lambda(x_i) = (\lambda x_i),$$

за (x_i), $(y_i) \in \mathbf{R}^k$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. У односу на те операције $\mathbf{R}^k$ има структуру **векторског простора** димензије k. Даље, дефинисан је **скаларни производ** помоћу

$$(x_i) \cdot (y_i) = \sum_{i=1}^k x_i y_i,$$

са уобичајеним особинама; издвојмо међу тим особинама Коши-Шварцову неједнакост

$$(x \cdot y)^2 \leqslant (x \cdot x)(y \cdot y),$$

или, у развијеном облику,

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k y_i^2\right).$$

Скаларни производ у $\mathbf{R}^k$ омогућава да се уведе и **норма** (интензитет) вектора $x = (x_i) \in \mathbf{R}^k$ помоћу

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{1/2}.$$

Та функција има следеће особине:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ за $x \in \mathbf{R}^k$ и $\|x\| = 0$ ако и само ако $x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ за $x \in \mathbf{R}^k$ и $\lambda \in \mathbf{R}$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ за x, $y \in \mathbf{R}^k$.

Особина (3) се лако изводи из Коши-Шварцове неједнакости; у развијеном облику она гласи

$$\left(\sum_{i=1}^k (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^k y_i^2\right)^{1/2}$$

и представља познату неједнакост Минковског (в. М.А.I, пример 6.8.3.5°).

Уведимо сада растојање између елемената $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ скупа $\mathbf{R}^k$ помоћу

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)} = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Прве три особине из дефиниције растојања су очигледно испуњене, а особина 4° се лако изводи из неједнакости Минковског, замењујући у особини (3) норме x са $x-y$, а y са $y-z$.

3° У скупу $\mathbf{R}^k$ (као, уосталом, и у било ком скупу) метрика се може увести на више начина. Једно од корисних уопштења претходног примера јесте метрика d_p за $p \geqslant 1$ која се уводи помоћу

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$

за x, $y \in \mathbf{R}^k$. Од особина растојања поново је нетривијално само четврто; оно следи опет из неједнакости Минковског (пример М.А.I.6.8.3.5°)

$$\left(\sum_{i=1}^k |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Метрички простор $(\mathbf{R}^k, d_p)$ означаваћемо са $\mathbf{R}^k_p$. Најинтересантнији посебни случајеви које ћемо посматрати биће: $p = 1$ када је

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|,$$

затим већ разматрани случај $p = 2$, односно $\mathbf{R}^k_2 = \mathbf{R}^k$ и најзад случај $p = \infty$ када ћемо по дефиницији ставити

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i - y_i|.$$

(Читаоцу препуштамо да докаже да је $\lim\limits_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$, што оправдава уведену ознаку.)

4° Од разних познатих примера метричких простора бесконачних низова поменимо простор m свих ограничених низова реалних бројева $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ у коме се растојање уводи помоћу

$$d(x,y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i - y_i|$$

за $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in m$. Особине растојања се лако проверавају.

5° У скупу $C[a,b]$ свих непрекидних реалних функција $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, дефинисаних на сегменту $[a,b]$ реалне праве, уводимо растојање формулом

$$d(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

за f, $g \in C[a,b]$. Да претходни израз има смисла за сваке две непрекидне реалне функције тврди Вајерштрасова теорема 5.3.2 из М.А.I. Особине растојања непосредно се проверавају.

6° У скупу $C[a,b]$ метрика се може увести и помоћу

$$d_p(f,g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$$

за $p \geqslant 1$. Неједнакост троугла следи из интегралне неједнакости Минковског, која се добија из обичне неједнакости Минковског, написане за интегралне суме. Специјални случајеви који су од посебног интереса су опет $p = 1$ („интегрална метрика"), $p = 2$ („метрика средњег квадратног одступања") и $p = \infty$, при чему је лако видети да је $d_\infty = d$ (из претходног примера). ▲

У преосталом делу овог одељка увешћемо неке основне појмове и термине теорије метричких простора. Многи од тих термина позајмљени су из теорије дводимензионог или тродимензионог еуклидског простора. Зато су и неки цртежи који ће послужити као илустрација израђени тако да асоцирају на такве просторе. Читаоцу препоручујемо да и сам користи сличне скице, али да ипак при томе не заборави да се својства која се доказују могу односити и на много апстрактнију ситуацију. Штавише, геометријска интуиција може понекад бити сасвим неадекватна (в. нпр. задатак 12).[2]

Дефиниција 1.1.2

Нека је (X,d) метрички простор, $a \in X$ и r позитиван реалан број. **Отворена (затворена) кугла** са центром у a, полупречника r, јесте скуп

$$K(a,r) = \{ x \in X \mid d(x,a) < r \} \qquad (\text{односно } K[a,r] = \{ x \in X \mid d(x,a) \leqslant r \}).$$

Сфера са центром a и полупречника r је скуп

$$S(a,r) = \{ x \in X \mid d(x,a) = r \}.$$

[2] С тим у вези није лоше поменути следећу Поенкареову (H. Poincaré (1854–1912), француски математичар) „дефиницију": „Математика је уметност давања истог имена различитим стварима".

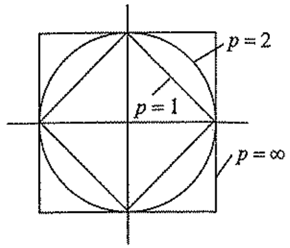
Убудуће, када кажемо само „кугла", подразумеваћемо „отворена кугла".

Примери 1.1.2

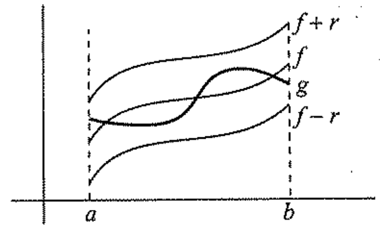
1° У метричком простору $\mathbf{R}$ кугла $K(a,r)$ јесте интервал $(a-r, a+r)$.

2° У метричком простору $\mathbf{R}^2$ затворене кугле су кругови, а у $\mathbf{R}^3$ лопте.

3° У простору $\mathbf{R}_p^k$ кугла може имати геометријски разне облике. Одређености ради, задржимо се на случају $k = 2$. Нека је a тачка са координатама $(0,0)$; тада је лако видети да је за $p = 2$ кугла $K[a,r]$ круг полупречника r, за $p = 1$ она је квадрат уписан у тај круг, а за $p = \infty$ квадрат описан око круга, сл. 1.1.1.



Сл. 1.1.1



Сл. 1.1.2

4° Нека је $f \in C[a,b]$ и $r > 0$. Куглу $K[f,r]$ сачињавају све оне функције $g \in C[a,b]$ чији график не излази из „траке" ограничене графицима функција $f(x) - r$ и $f(x) + r$, сл. 1.1.2. ▲

У вези с куглама у разним просторима $\mathbf{R}_p^k$ често ћемо касније користити следеће једноставно својство.

Став 1.1.1

1° Нека x, $y \in \mathbf{R}^k$ и нека је $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тада је

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_p(x,y) \leqslant k^{1/p} d_\infty(x,y).$$

2° Свака кугла простора $\mathbf{R}_p^k$ са центром у тачки a садржи неку куглу, са истим центром, простора $\mathbf{R}_\infty^k$ и обратно.

Доказ.

1° је непосредна последица дефиниције растојања d_p и d_∞.

2° следи из 1°. Наиме, лако се проверава да кугла $K(a,r)$ простора $\mathbf{R}_p^k$ садржи куглу $K(a, r/k^{1/p})$ простора $\mathbf{R}_\infty^k$ и, слично, кугла $K(a,r)$ простора $\mathbf{R}_\infty^k$ садржи куглу $K(a,r)$ простора $\mathbf{R}_p^k$. ■

Дефиниција 1.1.3

Подскуп метричког простора је **ограничен** ако је садржан у некој кугли (коначног полупречника).

Примери 1.1.3

1° Свака кугла је ограничен скуп.

2° Нека је X произвољан скуп и d функција дефинисана помоћу

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & \text{за } x\neq y,\\ 0, & \text{за } x=y.\end{cases}$$

Лако је проверити да је d метрика и да је цео простор X ограничен у тој метрици (у ствари је $X=K[x,1]$ за произвољну тачку $x\in X$).

3° Скуп $\{\,(x,y)\mid xy=1\,\}$ није ограничен у $\mathbf{R}^2$. ▲

Дефиниција 1.1.4

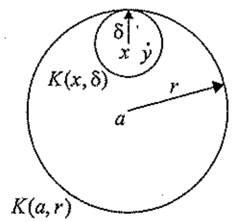
Подскуп G метричког простора (X,d) је **отворен** ако заједно са сваком својом тачком садржи и неку отворену куглу са центром у тој тачки, тј. ако

$$(\forall x\in G)(\exists\delta>0)\,K(x,\delta)\subset G.$$

Примери 1.1.4

1° Цео простор X и празан скуп $\emptyset$ су отворени скупови у произвољном метричком простору (X,d).

2° Докажимо да је свака отворена кугла $K(a,r)$ отворен скуп.



Сл. 1.1.3

Нека је $x\in K(a,r)$, тј. нека је $d(x,a)<r$. Изаберимо $\delta=r-d(x,a)>0$ и докажимо да је $K(x,\delta)\subset K(a,r)$. Заиста, ако је $y\in K(x,\delta)$, тада је $d(x,y)<\delta$, па је

$$d(a,y)\leqslant d(a,x)+d(x,y)<r-\delta+\delta=r,$$

одакле следи $y\in K(a,r)$, чиме је поменута инклузија доказана.

3° Слично се доказује да је скуп

$$\{\,x\in X\mid d(x,a)>r\,\}$$

такође отворен. ▲

Дефиниција 1.1.5

Подскуп F метричког простора (X,d) је **затворен** ако му је комплемент $X\setminus F$ отворен.

Примери 1.1.5

1° Простор X и празан скуп $\emptyset$ су затворени.

2° На основу дефиниције и претходног примера 3° непосредно следи да је свака затворена кугла $K[a,r]=\{\,x\in X\mid d(x,a)\leqslant r\,\}$ затворен скуп. Лако је видети да то важи и за $r=0$, тј. да је свака тачка (тачније, једночлан скуп) затворен скуп. ▲

Теорема 1.1.1

1° Унија произвољно много, као и пресек коначно много отворених скупова су отворени скупови.

2° Пресек произвољно много, као и унија коначно много затворених скупова су затворени скупови.

Доказ.

1° Нека су G_i, $i\in I$, отворени скупови и $G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$. Да бисмо доказали да је и G отворен скуп, уочимо произвољну тачку $x\in G$. По дефиницији уније, она припада неком од скупова G_i. Како је тај скуп G_i отворен, то је за неко $r>0$ испуњено $K(x,r)\subset G_i$. Но очигледно $G_i\subset G$, па и $K(x,r)\subset G$, чиме је доказано да је G отворен скуп.

Нека су сада G_1, G_2, … , G_n отворени скупови и $G=\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i$. Уочимо поново произвољну тачку $x\in G$. Она припада свим подскуповима G_i, те за свако $i=1$, 2, … , n постоји $r_i>0$, такво да је $K(x,r_i)\subset G_i$. Означимо $r=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}r_i$. Тада је $r>0$ и $K(x,r)\subset G_i$ за свако $i=1,2,\ldots,n$, па је и $K(x,r)\subset G$.

2° Овај део тврђења следи из дефиниције затвореног скупа и де Морганових образаца. ■

Истакнимо да је услов коначности у претходној теореми битан (в. задатак 11).

Као што знамо из М.А.I, појам околине је фундаменталан у заснивању теорије граничних вредности. У метричким просторима околине се уводе следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.1.6

Околином тачке x метричког простора називамо сваки отворен скуп који садржи ту тачку. Специјално, куглу $K(x,\delta)$ називамо **δ-околином** тачке x.

Дефиниција 1.1.7

Нека је X метрички простор и A његов подскуп. За тачку $a\in X$ кажемо да је:

1° **унутрашња тачка** скупа A ако она припада скупу A заједно са неком својом околином;

2° **спољашња тачка** скупа A ако је она унутрашња тачка скупа $X\setminus A$;

3° **гранична тачка** скупа A ако није ни његова унутрашња ни његова спољашња тачка, тј. ако свака околина те тачке садржи како тачке скупа A, тако и тачке скупа $X\setminus A$.

Пример 1.1.6

Нека је $X=\mathbf{R}^k$, $a\in X$, $r>0$ и A било који од скупова $K(a,r)$ или $K[a,r]$. Лако се проверава да је скуп унутрашњих тачака скупа A једнак $K(a,r)$, а скуп његових граничних тачака једнак $S(a,r)$. ▲

Лако се проверава да важи

Став 1.1.2

За подскуп G метричког простора следећа тврђења су еквивалентна:

1° G је отворен;

2° G је околина сваке своје тачке;

3° свака тачка скупа G је његова унутрашња тачка. ■

Дефиниција 1.1.8

Нека је X метрички простор и $A \subset X$. За тачку $a \in X$ кажемо да је **тачка нагомилавања** скупа A ако се у свакој околини тачке a налази бесконачно много тачака скупа A. Скуп свих тачака нагомилавања означаваћемо са A'. Скуп $A \cup A'$ називаћемо **адхеренцијом** скупа A и означаваћемо са $\overline{A}$.

Став 1.1.3

Подскуп F метричког простора X је затворен ако и само ако је $F = \overline{F}$, тј. ако и само ако садржи све своје тачке нагомилавања.

Доказ.

Нека је F затворен скуп и нека $x \notin F$. Докажимо да x није тачка нагомилавања скупа F. Скуп $G = X \setminus F$ је отворен и садржи тачку x, па је он околина тачке x. Дакле, x је спољашња тачка скупа F, те не може бити његова тачка нагомилавања.

Обратно, претпоставимо да је $F = \overline{F}$, тј. да F садржи све своје тачке нагомилавања. Докажимо да је $G = X \setminus F$ отворен скуп. Нека је x произвољна тачка скупа G, дакле $x \notin F$. Према претпоставци, x није тачка нагомилавања скупа F, што значи да постоји околина тачке x која садржи највише коначно много тачака $x_1, x_2, \ldots, x_n$ скупа F. Све те тачке су, наравно, различите од саме тачке x, па од коначно много позитивних бројева $d(x_i, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, постоји најмањи – означимо га са $d > 0$. Тада је $K(x, d)$ отворена кугла око тачке x која не садржи ниједну тачку скупа F, тј. која је садржана у $G = X \setminus F$; тиме је доказано да је G отворен, а F затворен скуп. ■

Пример 1.1.7

Нека су X, a, r и A као у примеру 1.1.6. Тада је $\overline{A} = K[a, r]$, а на основу претходног става је $\overline{S(a,r)} = S(a, r)$. ▲

Тачке адхеренције $\overline{A}$ скупа A још ћемо називати **адхерентним тачкама** скупа A. Јасно је из претходног да је нека тачка адхерентна за скуп A ако и само ако је она његова тачка нагомилавања или ако му припада. У последњем случају она може и да не буде његова тачка нагомилавања – такву тачку онда зовемо **изолованом тачком** скупа A. Изоловане тачке скупа A можемо још окарактерисати као оне тачке скупа A које имају бар једну околину у којој нема тачака скупа A осим ње саме. Адхерентне тачке скупа A можемо окарактерисати као оне тачке које у свакој својој околини садрже бар неку тачку скупа A.

Примери 1.1.8

1° Скуп $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ у метричком простору $\mathbf{R}$ састоји се само од изолованих тачака. Једина његова тачка нагомилавања је 0, па је $A' = \{0\}$, а $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

2° За скуп рационалних бројева $\mathbf{Q}$ у $\mathbf{R}$ је $\mathbf{Q}' = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. ▲

Задржимо се на крају још на појму потпростора метричког простора.

Дефиниција 1.1.9

Нека је (X, d) метрички простор и $X_1 \subset X$. Ако метрику d_1 на X_1 дефинишемо помоћу

$$d_1(x, y) = d(x, y) \qquad \text{за} \quad x, y \in X_1,$$

за добијени метрички простор (X_1, d_1) кажемо да је метрички потпростор простора (X, d).

Примери 1.1.9

1° За $m < n$, простор $\mathbf{R}_p^m$ је метрички потпростор простора $\mathbf{R}_p^n$. Наиме, тачка $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}_p^m$ се може идентификовати са тачком $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}_p^n$.

2° Скуп c конвергентних реалних низова је подскуп простора m свих ограничених низова, а скуп c_0 нула-низова је подскуп скупа c. Оба та скупа могу се схватити као потпростори простора m са растојањем

$$d(x, y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i - y_i| \qquad \text{за} \quad x = (x_i),\ y = (y_i). \quad ▲$$

На тај начин, сваки подскуп метричког простора је и сам један метрички простор, па у њему има смисла говорити о појмовима као што су кугле, околине, отворени и затворени скупови итд. Међутим, треба при томе стално имати на уму да су ти појмови релативни, тј. везани су за сам потпростор, јер у противном би могло доћи до неспоразума, као што показује следећи

Пример 1.1.10

Скуп $\mathbf{R}$ са уобичајеном метриком је на основу примера 1.1.9.1° метрички потпростор простора $\mathbf{R}^2$. Отворени интервал (a, b) је отворен скуп у $\mathbf{R}$; међутим, ако се тај интервал третира као подскуп простора $\mathbf{R}^2$, он очигледно није отворен, јер ниједна његова тачка нема $\mathbf{R}^2$-околину (круг!) која би била подскуп од (a, b). ▲

Однос између отворених (односно затворених) скупова простора X и његовог потпростора X_1 даје следећи

Став 1.1.4

Нека је (X, d) метрички простор и X_1 његов потпростор. Скуп $G_1 \subset X_1$ је отворен (затворен) у X_1 ако и само ако постоји отворен (затворен) скуп G у X, такав да је $G \cap X_1 = G_1$.

Доказ.

Тврђење следи непосредно из чињенице да ако је $K_1(a,r)$ отворена кугла простора X_1 око тачке $a \in X_1$, полупречника r, а $K(a,r)$ исто у простору X, онда је $K_1(a,r) = K(a,r) \cap X_1$. ∎

1.2. КОНВЕРГЕНЦИЈА

Као што смо већ поменули, увођење појма околине омогућава да се у метричким просторима уведе појам лимеса слично као у скупу реалних бројева.

Лимес низа

Дефиниција 1.2.1

За низ (x_n) тачака метричког простора (X,d) кажемо да **конвергира тачки** $x \in X$ и пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ако за сваку околину U тачке x постоји природан број n_0, такав да је $x_n \in U$ за све природне бројеве n веће од n_0.

Узимајући у обзир да су околине у метричком простору дефинисане помоћу кугли, закључујемо да је x **гранична вредност** низа (x_n) ако и само ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon),$$

односно ако и само ако

$$d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Примери 1.2.1

1° Нека је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k_p$ и $x_n = (x^n_1, x^n_2, \ldots, x^n_k)$, $n \in \mathbf{N}$, низ тачака у $\mathbf{R}^k_p$. Докажимо да низ (x_n) конвергира тачки x ако и само ако сваки од низова координата $(x^n_i)^\infty_{n=1}$ конвергира одговарајућој координати x_i тачке x, $i = 1, 2, \ldots, k$. Заиста, непосредно из става 1.1.1 следи да $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ важи у $\mathbf{R}^k_p$ ако и само ако важи у $\mathbf{R}^k_\infty$, а конвергенција у $\mathbf{R}^k_\infty$ је очигледно еквивалентна „конвергенцији по координатама"

$$\lim_{n\to\infty} x^n_i = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

2° Овако једноставан однос између конвергенције у неком простору низова и конвергенције по координатама не остаје на снази ако посматрамо неки од простора бесконачних низова. Уочимо, на пример, у простору c_0 нула-низова реалних бројева елементе

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1, \ldots), \quad \ldots .$$

Они чине низ тачака простора c_0 који очигледно има особину да је $\lim\limits_{n\to\infty} e^n_i = 0$ за свако $i = 1, 2, \ldots$. Међутим, ако са 0 означимо елемент $(0, 0, 0, \ldots)$ простора c_0, биће $d(e_n, 0) = 1$ за $n = 1, 2, \ldots$ и очигледно не важи $\lim\limits_{n\to\infty} d(e_n, 0) = 0$, па ни $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$. ▲

Најједноставније особине лимеса низова у метричким просторима изводе се потпуно аналогно као у случају реалних низова. Тако, на пример, важи

Став 1.2.1

1° Ако низ има граничну вредност, она је једнозначно одређена.

2° Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ.

Илустрације ради докажимо тврђење 1°. Претпоставимо, супротно, да постоје две различите тачке x, $y \in X$, такве да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Означимо $\varepsilon = d(x,y)$ и посматрајмо кугле $K(x, \varepsilon/2)$ и $K(y, \varepsilon/2)$. Оне су дисјунктне, јер ако би постојала тачка z која би припадала и једној и другој, важило би

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што није тачно. На тај начин, очигледно је немогуће да свака од тих кугли садржи скоро све чланове низа (x_n). ∎

Настављајући преглед особина лимеса низова у $\mathbf{R}$ које се могу пренети на случај метричких простора, уводимо појам тачке нагомилавања низа.

Дефиниција 1.2.2

За тачку x метричког простора X кажемо да је **тачка нагомилавања** низа (x_n) тачака тог простора ако постоји подниз (x_{n_k}) тог низа који тежи ка x кад $k \to \infty$.

Став 1.2.2

1° Тачка $x \in X$ је тачка нагомилавања низа (x_n) тачака простора X ако и само ако за сваку околину U тачке x и свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $r \in \mathbf{N}$, $r > n$, такво да је $x_r \in U$.

2° Тачка $x \in X$ је тачка нагомилавања скупа $A \subset X$ ако и само ако постоји низ међусобно различитих елемената $x_n \in A$ који тежи ка x.

3° Тачка $x \in X$ је адхерентна тачка скупа $A \subset X$ ако и само ако постоји низ (x_n) елемената скупа A који тежи ка x.

Доказ.

Тврђења 1° и 2° доказују се аналогно ставовима 3.3.2 и 3.3.3 из М.А.I. Илустрације ради докажимо једну од импликација у тврђењу 2°.

Нека је $x \in X$ тачка нагомилавања скупа A. Означимо са U_n $\frac{1}{n}$-околину тачке x. Свака од тих околина (за произвољно $n \in \mathbf{N}$) садржи бесконачно много елемената скупа A, па се може формирати низ вредности $x_n \in A$ на следећи начин: $x_1 \in U_1 \cap A$ се бира произвољно; ако су већ изабрани $x_i \in U_i \cap A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, бира се $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap A$ тако да буде различит од свих x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. За тако добијени низ очигледно важи $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Тврђење 3° следи из 2° и дефиниције 1.1.8 адхеренције. ∎

Лимес функције

Дефиниција 1.2.3

Нека су (X,d) и (Y,d_1) метрички простори, $A \subset X$, $f\colon A \to Y$ и $a \in X$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је тачка $b \in Y$ **гранична вредност (лимес)** функције f у тачки a ако за сваку околину $V(b)$ тачке b постоји околина $U(a)$ тачке a, таква да

$$(\forall x \in A)(x \in U(a), x \neq a \implies f(x) \in V(b)).$$

Као и у случају реалних функција реалне променљиве, овој дефиницији можемо дати и следеће еквивалентне облике:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff (\forall V(b))(\exists U(a))\, f(\mathring{U}(a)) \subset V(b),$$

где смо са $\mathring{U}(a)$ означили скуп $U(a) \setminus \{a\}$ (прецизније $(U(a) \setminus \{a\}) \cap A$), односно

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow d_1(f(x),b) < \varepsilon)$$

и најзад

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} d_1(f(x),b) = 0.$$

Слично теореми 4.2.1 и ставовима 4.2.1 и 4.2.2 из М.А.I доказују се следећа својства лимеса функција у метричким просторима.

Теорема 1.2.1

Нека су X и Y метрички простори, $A \subset X$, $f\colon A \to Y$ и $a \in X$ тачка нагомилавања скупа A. Гранична вредност функције f у тачки a једнака је $b \in Y$ ако и само ако за сваки низ (x_n), такав да $x_n \in A \setminus \{a\}$, $n \in \mathbf{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Доказ.

Нека је најпре $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и нека је (x_n) произвољан низ за који је $x_n \in A \setminus \{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Нека је $V(b)$ произвољна околина тачке b. Тада по претпоставци постоји околина $U(a)$ тачке a, таква да је $f(\mathring{U}(a)) \subset V(b)$. Изаберимо број $n_0 \in \mathbf{N}$, такав да је $x_n \in U(a)$ за $n > n_0$. По претпоставци је тада и $x_n \in \mathring{U}(a)$ (јер је $x_n \neq a$), па добијамо $f(x_n) \in V(b)$ за $n > n_0$, што значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Обратно, претпоставимо да није $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. То значи да се може наћи околина $V(b)$ тачке b, таква да за сваку околину $U(a)$ тачке a важи $f(\mathring{U}(a)) \not\subset V(b)$. Изаберимо низ $\frac{1}{n}$-околина тачке a, $U_{1/n}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$. Како је $f(\mathring{U}_{1/n}(a)) \not\subset V(b)$, то се за свако n може изабрати $x_n \in \mathring{U}_{1/n}(a)$ тако да $f(x_n) \notin V(b)$. Конструисани низ (x_n) испуњава очигледно услове $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$ $(n \in \mathbf{N})$, али $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Дакле, ако није $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, онда није испуњен услов дат у теореми. Тиме је теорема доказана. ∎

Став 1.2.3

1° Ако функција f има граничну вредност у тачки a, та вредност је једнозначно одређена.

2° Ако функција f има граничну вредност у тачки a, онда постоји околина $U(a)$ тачке a, таква да је функција f ограничена на скупу $\mathring{U}(a)$, тј. да је скуп $f(\mathring{U}(a)) = \{\, f(x) \mid x \in \mathring{U}(a) \,\}$ ограничен. ∎

Такође, теорема 4.6.1 из М.А.I о лимесу сложене функције има свој аналогон у произвољним метричким просторима.

Теорема 1.2.2

Нека су X, Y и Z метрички простори; нека је даље:

1° $B \subset Y$, $b \in Y$ тачка нагомилавања скупа B, $g\colon B \to Z$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$;

2° $A \subset X$, $a \in X$ тачка нагомилавања скупа A, $f\colon A \to B$ и за сваку околину V тачке b постоји околина U тачке a, таква да је $f(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$.

Тада је $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$. ∎

Пример 1.2.2

Нека је (X,d) произвољни метрички простор, $A \subset X$ и $Y = \mathbf{R}^n_p$. Нека је $f\colon A \to Y$. Тада је за свако $x \in A$, $f(x)$ тачка n-димензионог простора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; другим речима, дефинисане су функције $y_j = f_j(x)$, $j = 1$, $2, \ldots, n$, где $f_j\colon A \to \mathbf{R}$. Ове функције зваћемо *координатним функцијама* функције f. Логично је поставити питање о вези граничне вредности функције f и функција f_j у тачки $a \in X$ која је тачка нагомилавања скупа A. Слично као и код низова (пример 1.2.1.1°), лако се изводи (поново коришћењем става 1.1.1) да важи

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff \lim_{x\to a} f_j(x) = b_j \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad \blacktriangle$$

Посматрајмо сада случај када је *домен* функције f подскуп m-димензионог простора, тј. $f\colon A \to Y$, $A \subset \mathbf{R}^m_p$. Такве функције зваћемо **функцијама више (реалних) променљивих**. Поново применом става 1.1.1 лако је проверити да вредност лимеса те функције (ако постоји) у некој тачки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m_p$, која је тачка нагомилавања скупа A, не зависи од p, тј. следећи искази су еквивалентни:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < d_p(x,a) < \delta \implies d(f(x),b) < \varepsilon)$ (са d је означена метрика простора Y);

(3) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x_i - a_i| < \delta$ за $i = 1, 2, \ldots, m \implies d(f(x),b) < \varepsilon)$.

Питање које се намеће у овој ситуацији јесте да ли се такав лимес може одређивати „покоординатно“, тј. да ли се могу (задржимо се, једноставности ради, на случају $m = 2$) уместо граничне вредности $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, схваћене у смислу дефиниције 1.2.3, односно малопре наведених услова (2) и (3), тражити **узастопне** граничне вредности $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, односно $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. С тим у вези наведимо најпре неколико примера.

Примери 1.2.3

1° Нека је $f\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$, дефинисана са $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Тада је $f(x,0) = 1$ за $x \neq 0$ и $f(0,y) = -1$ за $y \neq 0$, па је $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 1$, а $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = -1$. Дакле, узастопни лимеси постоје, али су међусобно различити, одакле следи да $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не постоји. На други начин, у то се можемо уверити применом теореме 1.2.1, посматрајући низове $(1/n, 0)$ и $(0, 1/n)$ који теже $(0,0)$, при чему одговарајући низови $f(1/n,0) = 1$ и $f(0,1/n) = -1$ имају различите лимесе.

2° Чак и ако су узастопни лимеси међусобно једнаки, не значи да мора да постоји „права“ гранична вредност. На пример, нека је $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Тада је $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, међутим, $f(x,x) = 1/2$ за $x \neq 0$, те је јасно да опет не постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3° Не треба мислити, међутим, да постојање „правог“ лимеса $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ обезбеђује постојање и једнакост узастопних. Заиста, функција $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$ има особину да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (доказати!), али не постоји узастопни лимес $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ јер не постоји већ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ за $y \neq 0$. ▲

У вези са овим примерима је и следеће тврђење које даје везу између „узастопних“ и „правих“ лимеса функција више променљивих.

Став 1.2.4

Нека је $f\colon A \to Y$, $A \subset \mathbf{R}^2$, Y метрички простор и $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ тачка нагомилавања скупа A. Ако

1° постоји $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$;

2° постоји околина $V(b)$ тачке b, таква да за свако $y \in V(b)$ постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \varphi(y)$,

тада постоји $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ и једнак је такође c.

Доказ.

Према претпоставци 1°, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |y-b| < \delta$ повлачи

$$d(f(x,y),c) < \varepsilon \tag{4}$$

(са d је означена метрика простора Y). Фиксирајмо неко такво y и претпоставимо при томе да је δ довољно мало да је уједно и $y \in V(b)$. Прелазом на лимес кад $x \to a$ у (4) (и користећи при томе непрекидност функције растојања – в. задатак 13), добијамо $d(\varphi(y), c) \leqslant \varepsilon$, што и значи да је $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = c$. ■

Последица 1.2.1

Ако уз претпоставке претходног става важи још и

3° постоји околина $U(a)$ тачке a, таква да за свако $x \in U(a)$ постоји $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$,

тада постоји и $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ и важи

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y). \quad ■$$

1.3. КОМПЛЕТНОСТ

Развијајући теорију конвергенције у скупу $\mathbf{R}$ у М.А.I видели смо да важну улогу у тој теорији има Кошијев принцип конвергенције (теореме 3.4.1 и 4.5.1). Појам Кошијевог низа може се увести и у произвољном метричком простору, но како ћемо видети, сам принцип конвергенције неће увек бити на снази.

Дефиниција 1.3.1

За низ (x_n) тачака метричког простора (X,d) кажемо да је **Кошијев** ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, такав да је $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ чим су индекси m и n већи од n_0. Симболички,

$$(x_n) \text{ је Кошијев} \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m,n \in \mathbf{N})(m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon).$$

Став 1.3.1

1° Сваки конвергентан низ је Кошијев.

2° Сваки Кошијев низ је ограничен.

3° Ако Кошијев низ има конвергентан подниз, он је и сам конвергентан.

Доказ.

Овај став доказује се потпуно аналогно ставу 3.4.1 из М.А.I. Илустрације ради докажимо тврђење под 1°.

Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ и $\varepsilon > 0$ је произвољно. Нека је $n_0 \in \mathbf{N}$ изабрано тако да је $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ за $n > n_0$. Тада је за све m, $n > n_0$

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

па је низ (x_n) Кошијев. ■

Обрат доказаног тврђења под 1° не мора да важи у произвољном метричком простору.

Пример 1.3.1

Потпростор $\mathbf{Q}$ простора $\mathbf{R}$ је метрички простор у којем постоји Кошијев низ који не конвергира. Заиста, нека је низ (a_n) задат као

$$a_1 = 0{,}\alpha_1; \quad a_2 = 0{,}\alpha_1\alpha_2; \quad \dots; \quad a_n = 0{,}\alpha_1\alpha_2\dots a_n; \quad \dots,$$

где су α_i цифре. Лако се проверава да је (a_n) Кошијев низ који конвергира реалном броју $a = 0{,}\alpha_1\alpha_2\dots$. Међутим, ако је број a ирационалан (на пример, $a = \sqrt{2} - 1$), онда низ (a_n) нема лимеса у простору $\mathbf{Q}$. ▲

Дефиниција 1.3.2

Метрички простор је **комплетан** ако је у њему сваки Кошијев низ конвергентан.

Примери 1.3.2

1° Према теореми 3.4.1 из М.А.I, простор $\mathbf{R}$ је комплетан.

2° Простор $\mathbf{R}_p^k$ је комплетан. Да би се то доказало, довољно је: (а) уочити да је низ тачака $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$, $n \in \mathbf{N}$, Кошијев у $\mathbf{R}_p^k$ ако и само ако је сваки од низова координата $(x_i^n)_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2, \dots, k$, Кошијев у $\mathbf{R}$; (б) искористити комплетност простора $\mathbf{R}$; (в) искористити чињеницу да је конвергенција у $\mathbf{R}_p^k$ координатна (в. пример 1.2.1.1°).

3° Простор m ограничених низова је комплетан. Доказ препуштамо читаоцу.

4° Да је простор $C[a,b]$ непрекидних функција комплетан доказаћемо у седмој глави.

5° Простор $C_1[a,b]$, дефинисан такође на скупу $C[a,b]$ непрекидних функција интегралном метриком

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

(в. пример 1.1.1.6°) није комплетан. Одређености ради, ставимо $[a,b] = [-1,1]$ и посматрајмо низ (f_n) функција из $C[-1,1]$ дефинисаних помоћу

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, & \text{за } -1/n < x < 1/n, \\ 1, & \text{за } 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Непосредно се проверава да је тај низ Кошијев у $C_1[-1,1]$. Међутим, он није конвергентан, јер ако би непрекидна функција f била његов лимес у метрици d_1, тада би она морала бити идентички једнака -1 на $[-1,0)$ и идентички једнака 1 на $(0,1]$, што је контрадикција са њеном непрекидношћу у нули. ▲

Важност комплетних простора огледа се у могућности да се у њима примењује Кошијев принцип егзистенције граничне вредности функције. Наиме, важи следеће уопштење теореме 4.5.1 из М.А.I, које се и доказује на аналоган начин.

Теорема 1.3.1

Нека су X и Y метрички простори, $A \subset X$, $f\colon A \to Y$ и $a \in X$ тачка нагомилавања скупа A. Ако је простор Y комплетан, тада је за постојање граничне вредности функције f у тачки a неопходно и довољно да за свако $\varepsilon > 0$ постоји околина U тачке a, таква да

$$(\forall x', x'' \in A)(x', x'' \in \mathring{U} \implies d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon). \quad ■$$

Теорема о непокретној тачки

Дефиниција 1.3.3

Нека је X скуп и $f\colon X \to X$. За тачку $x \in X$ кажемо да је **непокретна тачка** пресликавања f ако је $f(x) = x$.

У многим проблемима анализе и њених примена важно је доказати егзистенцију непокретне тачке одређеног пресликавања. Једно од тврђења која се најчешће користе у том циљу је **Банахова**[3] **теорема о непокретној тачки**.

Дефиниција 1.3.4

Нека је X метрички простор и $f\colon X \to X$. Пресликавање f је **контракција** ако постоји реалан број q, $0 < q < 1$, такав да је

$$d(f(x), f(y)) \leqslant q \cdot d(x,y) \qquad \text{за све } x,\ y \in X.$$

Теорема 1.3.2

Свака контракција f комплетног метричког простора X у самог себе има тачно једну непокретну тачку.

Доказ.

Нека је x_0 произвољна тачка простора X. Формирајмо низ (x_n) тачака тог простора помоћу $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. Докажимо да је тај низ конвергентан; с обзиром на претпостављену комплетност простора X, довољно је доказати да је тај низ Кошијев. Означимо $a = d(x_0, x_1)$. Важи

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant \dots \leqslant q^n \cdot d(x_0, x_1) = a \cdot q^n, \end{aligned}$$

[3] S. Banach (1892–1945), пољски математичар

одакле, користећи неједнакост многоугла (в. задатак 13), имамо за $n > m$

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$
$$\leqslant a \cdot q^m + \cdots + a \cdot q^{n-1} \leqslant a \cdot q^m + a \cdot q^{m+1} + \cdots = a \cdot \frac{q^m}{1-q}.$$

Како последњи израз (због $0 < q < 1$) тежи нули кад $m \to \infty$, то је доказано да је $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велике m, n.

Означимо са x' граничну вредност низа (x_n). Докажимо да је то тражена непокретна тачка пресликавања f. Приметимо да важи

$$d(x_n, f(x')) = d(f(x_{n-1}), f(x')) \leqslant q \cdot d(x_{n-1}, x') \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

одакле следи да $x_n \to f(x')$ $(n \to \infty)$. Како такође $x_n \to x'$ $(n \to \infty)$, то је $f(x') = x'$, што је и требало доказати.

Докажимо најзад јединственост непокретне тачке x'. Ако би постојала још једна тачка x'', таква да је $x'' = f(x'')$, било би

$$d(x', x'') = d(f(x'), f(x'')) \leqslant q \cdot d(x', x''),$$

што је, због $0 < q < 1$, могуће једино ако је $d(x', x'') = 0$, тј. $x' = x''$. ■

Приметимо да наведени доказ Банахове теореме даје нешто више од самог њеног тврђења. Наиме, он показује да се за налажење непокретне тачке x' контракције f може добити ефективан метод – он се обично зове **метод сукцесивних апроксимација** – који се састоји у томе да се полазећи од произвољне тачке $x_0 \in X$ („нулте апроксимације“) формира низ $x_n = f(x_{n-1})$ који конвергира тачки x'. Друго, добија се и процена грешке која се чини ако се тачно решење x' једначине $f(x) = x$ замени приближном вредношћу x_n. Она гласи

$$d(x_n, x') \leqslant a \cdot \frac{q^n}{1-q}, \quad \text{где је } a = d(x_0, x_1).$$

Наведимо сада неколико примера примене Банахове теореме. У тим примерима користићемо и једноставну чињеницу (њен доказ препуштамо читаоцу) да је затворен подскуп комплетног метричког простора и сам комплетан.

Примери 1.3.3

1° Нека је $[a, b]$ произвољан сегмент реалне праве и $f\colon [a, b] \to [a, b]$. Претпоставимо још да је f диференцијабилна функција и да је $|f'(x)| \leqslant q < 1$ за $x \in (a, b)$. На основу теореме о средњој вредности одмах добијамо да је

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant q|x_1 - x_2|$$

за све x_1, $x_2 \in [a, b]$, што значи да је f контракција. Према Банаховој теореми, једначина $f(x) = x$ има тада у $[a, b]$ тачно једно решење и оно се може одредити методом сукцесивних апроксимација.

2° Посматрајмо сада систем од k линеарних једначина са k непознатих $\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Напишимо га у облику

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1k}x_k + b_1\\
x_2 &= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2k}x_k + b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_k &= -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots + (1 - a_{kk})x_k + b_k,
\end{aligned}$$

односно $x_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где је

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j,\\ 0, & \text{за } i \neq j.\end{cases}$$

Дефинишимо пресликавање $f\colon \mathbf{R}_p^k \to \mathbf{R}_p^k$ помоћу $y = f(x)$, где је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ и

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Непокретна тачка тог пресликавања биће очигледно решење нашег система. Остаје да се провери под којим условима је f контракција. Довољни услови зависиће од тога који од простора $\mathbf{R}_p^k$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, посматрамо. На пример, ако узмемо $p = 2$, тј. посматрамо обичан еуклидски простор $\mathbf{R}^k$, имаћемо, за $x_1 = (x_j^{(1)})$, $x_2 = (x_j^{(2)}) \in \mathbf{R}^k$ и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,

$$d(y_1, y_2)^2 = \sum_{i=1}^{k}\Big[\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^{(2)}\Big]^2 = \sum_{i=1}^{k}\Big[\sum_{j=1}^{k} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})\Big]^2$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\Big[\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \sum_{j=1}^{k}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2\Big] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 d(x_1, x_2)^2,$$

тј.

$$d(y_1, y_2) \leqslant \Big[\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2\Big]^{1/2} d(x_1, x_2),$$

па је довољан услов да f буде контракција у овом случају $\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2 < 1$. Читаоцу препуштамо да провери да ће у случају $p = 1$ довољан услов за контракцију бити

$$\sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \qquad \text{за} \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

а у случају $p = \infty$, $\sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| < 1$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. ▲

1.4. НЕПРЕКИДНОСТ

Као и појам граничне вредности, и појам непрекидности се може увести у метричким просторима захваљујући постојању околина.

Дефиниција 1.4.1

Нека су X и Y метрички простори и $f\colon X \to Y$. За функцију f кажемо да је **непрекидна у тачки** $a \in X$ ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a, таква да је $f(U) \subset V$.

Узимајући у обзир начин на који су уведене околине у метричком простору, видимо да се овој дефиницији може дати следећа еквивалентна форма: функција f је непрекидна у $a \in X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ чим је $d(x,a) < \delta$; симболички записано:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Као и код реалних функција реалне променљиве, свака функција је непрекидна у изолованој тачки свог домена. Када су у питању тачке нагомилавања домена, слично ставу 5.1.1 из М.А.I, коришћењем теореме 1.2.1, доказује се следећа карактеризација непрекидности.

Став 1.4.1

Нека је $f\colon X \to Y$ пресликавање из метричког простора X у метрички простор Y и $a \in X$ тачка нагомилавања скупа X. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

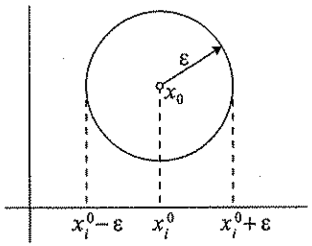
1° функција f је непрекидна у тачки a;

2° $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

3° за сваки низ (x_n), $x_n \in X$, за који је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. ■

Примери 1.4.1

1° Нека је $X = \mathbf{R}_p^k$ и $p_i\colon X \to \mathbf{R}$ функција која тачки $x = (x_1, \dots, x_k) \in X$ додељује њену i-ту координату x_i („i-та пројекција“). Докажимо да је она непрекидна у свакој фиксираној тачки $x_0 \in X$. Заиста, ако је $x_i^0 = p_i(x_0)$ и $\varepsilon > 0$ произвољно, довољно је узети $\delta = \varepsilon$ и уочити куглу $K(x_0, \delta)$ која се пројекцијом p_i очигледно пресликава у околину $(x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ тачке x_i^0 (в. слику 1.4.1, где је узето $k = 2$ и $p = 2$).



Сл. 1.4.1

2° Посматрајмо сада функцију $f\colon X \to \mathbf{R}_p^n$ из произвољног метричког простора X у простор $\mathbf{R}_p^n$. Као што смо видели у примеру 1.2.2, за сваку такву функцију дефинисане су функције $f_j = p_j \circ f\colon X \to \mathbf{R}$ које свакој тачки $x \in X$ додељују j-ту координату y_j тачке $y = f(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Користећи резултат поменутог примера лако је видети да је функција f непрекидна у некој тачки $a \in X$ ако и само ако су све функције f_j, $j = 1, 2, \dots, n$, непрекидне у тој тачки.

3° Нека је сада $f\colon A \to Y$, где је $A \subset \mathbf{R}_p^m$, а Y произвољан метрички простор, тј. нека је f функција више променљивих. За такву функцију се осим питања о непрекидности у смислу дефиниције 1.4.1 може поставити и питање о непрекидности по појединим променљивим – за функцију f се каже да је **непрекидна по променљивој** x_i у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$ ако је она непрекидна у тачки a_i, схваћена као функција од x_i при фиксираним осталим променљивим $x_j = a_j$, $j \neq i$. Лако је видети, међутим, да функција f може бити непрекидна по свакој од променљивих понаособ, али да при томе не буде непрекидна у смислу дефиниције 1.4.1 – узимајући у обзир резултат примера 1.2.3.1°, довољно је посматрати функцију $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дефинисану са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{за } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{за } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

она је непрекидна и по променљивој x и по променљивој y у тачки $(0,0)$, али није непрекидна у $(0,0)$. ▲

Прелазећи на испитивање особина непрекидних функција у метричким просторима, наводимо најпре оне које су директна уопштења одговарајућих особина непрекидних функција реалне променљиве и која се на потпуно аналоган начин доказују.

Став 1.4.2

Ако је функција $f\colon X \to Y$ непрекидна у тачки $a \in X$, онда постоји околина U тачке a, таква да је f ограничена на U, тј. да је скуп $f(U)$ ограничен у Y. ■

Став 1.4.3

Нека су X, Y и Z метрички простори, $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Ако је f непрекидна у тачки $a \in X$ и g непрекидна у тачки $f(a)$, тада је сложена функција $h = g \circ f$ непрекидна у тачки a. ■

Доказ.

За произвољну околину W тачке $h(a) = g(f(a))$ постоји околина V тачке $f(a)$, таква да је $g(V) \subset W$. Даље, за ту околину V изаберимо околину U тачке a, такву да је $f(U) \subset V$. Тада је очигледно

$$h(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

па је функција h непрекидна у тачки a. ■

Својства непрекидних функција која зависе од алгебарске структуре скупа $\mathbf{R}$, наравно, не могу се пренети на произвољне метричке просторе. Но, ако је кодомен таквих функција еуклидски простор $\mathbf{R}_p^n$ или чак скуп $\mathbf{R}$, одговарајућа својства могу се извести и то поново на потпуно аналоган начин.

Став 1.4.4

Нека је X метрички простор. Нека су функције $f,\,g\colon X\to\mathbf{R}^n_p$ непрекидне у тачки $a\in X$ и $\alpha\colon X\to\mathbf{R}$ такође непрекидна у тачки a. Тада су следеће функције непрекидне у тачки a: $f+g$, αf и $\|f\|$.

Доказ.

Докажимо само непрекидност функције $\|f\|$ у тачки a. Она следи из непрекидности функције f и неједнакости

$$\big|\,\|f(x)\|-\|f(a)\|\,\big|\leqslant\|f(x)-f(a)\|.\quad\blacksquare$$

Став 1.4.5

Нека је X метрички простор и $f,\,g\colon X\to\mathbf{R}$ непрекидне функције у тачки $a\in X$. Тада су и функције fg и f/g непрекидне у тачки a (последња ако је $g(a)\neq 0$). $\blacksquare$

Пример 1.4.2

Реална функција m променљивих $f\colon\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, дата формулом

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum a_{i_1i_2\dots i_m}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m},$$

где сумирање иде по свим индексима i_1, i_2, … , i_m из скупа $\{0,1,\dots,n\}$ за које је $i_1+i_2+\cdots+i_m\leqslant n$ и постоје i_1^0, i_2^0, … , i_m^0, за које је $i_1^0+i_2^0+\cdots+i_m^0=n$, зове се **полином од m променљивих степена n**. Полиноми су збирови функција $(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto a_{i_1i_2\dots i_m}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}$ које су непрекидне, јер су производи константних функција $(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto c$ и пројекција $(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto x_i$. На основу претходних ставова, полиноми су такође непрекидне функције. ▲

Став 1.4.6

Нека је X метрички простор и $f\colon X\to\mathbf{R}$ непрекидна у тачки $a\in X$. Ако је $f(a)\neq 0$, тада постоји околина U тачке a, таква да је за све $x\in U$, $f(x)$ истог знака као $f(a)$. $\blacksquare$

Као и код реалних функција, за функцију $f\colon X\to Y$ кажемо да је **непрекидна на скупу** $A\subset X$ ако је она непрекидна у свакој тачки тог скупа. Непрекидним функцијама на метричким просторима можемо дати следећу важну карактеризацију помоћу појмова отворених и затворених скупова.

Теорема 1.4.1

Нека су X и Y метрички простори и $f\colon X\to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна:

1° f је непрекидна на X;

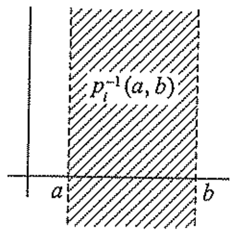
2° инверзна слика $f^{-1}(G)$ произвољног отвореног скупа $G\subset Y$ је отворен скуп у X;

3° инверзна слика $f^{-1}(F)$ произвољног затвореног скупа $F\subset Y$ је затворен скуп у X.

Доказ.

1° $\Longrightarrow$ 2°. Нека је f непрекидна и G отворен скуп у Y. Да бисмо доказали да је скуп $f^{-1}(G)$ отворен у X, уочимо произвољну тачку $a\in f^{-1}(G)$ (ако би скуп $f^{-1}(G)$ био празан, тврђење би било тривијално). Тачка $f(a)$ припада скупу G, а како је он отворен, то постоји кугла $V=K(f(a),\varepsilon)$ која је такође садржана у G. По дефиницији непрекидности, постоји кугла $U=K(a,\delta)$, таква да је $f(U)\subset V\subset G$, што значи да је $U\subset f^{-1}(G)$. Дакле, тачка a припада скупу $f^{-1}(G)$ заједно са неком својом δ-околином, што доказује да је скуп $f^{-1}(G)$ отворен.

2° $\Longrightarrow$ 1°. Нека је услов 2° испуњен и нека је a произвољна тачка простора X. Да бисмо доказали да је f непрекидна у a, уочимо произвољну отворену околину V тачке $f(a)$. Према претпоставци, $U=f^{-1}(V)$ је отворен скуп који очигледно садржи тачку a; дакле, U је околина тачке a која има особину да је $f(U)\subset V$. Зато је f непрекидна у тачки a, па и на целом скупу X.



Сл. 1.4.2

2° $\Longleftrightarrow$ 3°. Ово тврђење следи на основу дефиниције затворених скупова као комплемената отворених и на основу својства да је инверзна слика комплемента комплемент инверзне слике (задатак 1.18 из М.А.I). $\blacksquare$

Пример 1.4.3

Посматрајмо поново пример пројекција $p_i\colon\mathbf{R}^k_p\to\mathbf{R}$. Ако је (a,b) произвољан отворени интервал на $\mathbf{R}$, очигледно је $p_i^{-1}(a,b)$ отворен скуп у $\mathbf{R}^k_p$, сл. 1.4.2, што поново доказује да је p_i непрекидна функција на $\mathbf{R}^k_p$. ▲

1.5. КОМПАКТНОСТ

У неким важним теоремама реалне анализе, као што су, на пример, Вајерштрасова теорема 5.3.2 (М.А.I) о ограничености непрекидне функције или Канторова теорема 5.4.1 (М.А.I) о равномерној непрекидности, пресудну улогу има одређено својство сегмената реалне праве које се изражава неком од основних лема – Болцано-Вајерштрасовом лемом 3.3.2 (М.А.I) о тачкама нагомилавања или Борел-Лебеговом лемом 5.4.1 (М.А.I) о покривачима. Ако желимо да сличне теореме изведемо за функције у произвољним метричким просторима, потребно је прво уочити у њима оне скупове који имају одговарајуће својство да би могли да послуже као домени таквих функција. На тај начин долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 1.5.1

За подскуп K метричког простора X кажемо да је **компактан** ако се из сваког покривача скупа K отвореним подскуповима простора X може издвојити коначан потпокривач.

Примери 1.5.1

1° Сваки коначан подскуп метричког простора је очигледно компактан.

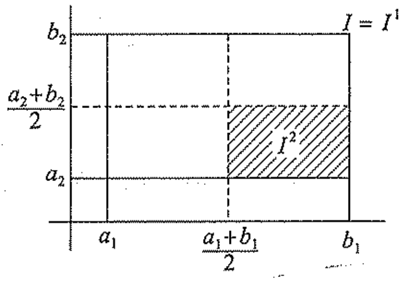
2° Сваки сегмент $I = [a,b]$ реалне праве је компактан према Борел-Лебеговој леми 5.4.1 (М.А.I).

3° Уочимо у простору $\mathbf{R}^k$ k-димензиони сегмент (паралелопипед)

$$\begin{aligned} I &= [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_k,b_k] \\ &= \{\, x = (x_i) \in \mathbf{R}^k \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,2,\dots,k \,\} = [a,b], \end{aligned}$$

где су $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in \mathbf{R}^k$. Докажимо да је тај скуп компактан у $\mathbf{R}^k$.

Нека је $\{\, U_\alpha \mid \alpha \in A \,\}$ произвољан покривач скупа I отвореним подскуповима U_α простора $\mathbf{R}^k$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да се из њега не може издвојити коначан потпокривач. Поделимо сваки од одсечака $[a_i,b_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, тачком $\dfrac{a_i+b_i}{2}$ на два једнака дела – самим тим поделимо скуп $I = I^1$ на 2^k делова (в. слику 1.5.1 за $k = 2$). Према претпоставци, бар један од тих делова је такав да се не може прекрити са коначно много скупова U_α – означимо тај сегмент са I^2.



Сл. 1.5.1

Понављајући овај поступак добићемо низ сегмената

$$I^1 \supset I^2 \supset \cdots \supset I^n \supset \cdots,$$

од којих ниједан не може бити покривен са коначно много скупова U_α. Означимо са $a^n = (a_1^n,\dots,a_k^n)$, $b^n = (b_1^n,\dots,b_k^n)$ крајеве сегмента I^n. Тада за свако $i = 1, 2, \dots, k$ сегменти $I_i^n = [a_i^n, b_i^n]$ чине низ уметнутих одсечака, при чему је дужина n-тог одсечка једнака $(b_i - a_i)/2^{n-1}$ и тежи нули кад $n \to \infty$. Према Канторовом ставу 3.3.4 (М.А.I) постоји (и јединствена је) тачка ξ_i која припада свим сегментима $[a_i^n, b_i^n]$ за $n \in \mathbf{N}$. Очигледно је тада да тачка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ припада свим сегментима I_n, тј. $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I^n$.

Како је $\xi \in I$, то је $\xi \in U_\alpha$ за неко $\alpha \in A$. У отвореном скупу U_α постоји кугла $K(\xi,\rho)$ која је подскуп од U_α. Међутим, за неко n биће $I^n \subset K(\xi,\rho) \subset U_\alpha$, па је сегмент I^n покривен са коначно много (једним!) од скупова U_α, супротно његовој конструкцији. Ова контрадикција доказује да је сегмент I компактан у $\mathbf{R}^k$. ▲

Прелазећи на извођење особина компактних скупова, докажимо најпре да је, за разлику од отворености и затворености, компактност својство које не зависи од обухватног простора.

Став 1.5.1

Подскуп K метричког простора (X,d) је компактан ако и само ако је компактан у себи (тј. у метричком потпростору (K,d) простора (X,d)).

Доказ.

Тврђење следи из чињенице (став 1.1.4) да је сваки отворен скуп U у простору K пресек скупа K са неким отвореним скупом V простора X. ■

Став 1.5.2

1° Сваки компактан подскуп метричког простора је затворен и ограничен.

2° Ако је K компактан метрички простор и F затворен подскуп простора K, тада је F компактан скуп.

Доказ.

1° Да бисмо доказали да је компактан скуп K затворен, доказаћемо (в. став 1.1.3) да садржи све своје тачке нагомилавања. Претпоставимо, супротно, да постоји тачка нагомилавања a скупа K која му не припада. За произвољну тачку $x \in K$ конструишимо околине $U(x)$ тачке x и $V_x(a)$ тачке a, такве да је $U(x) \cap V_x(a) = \emptyset$ (то је увек могуће – в. задатак 10). Фамилија $\{\, U(x) \mid x \in K \,\}$ чини покривач скупа K отвореним скуповима $U(x)$, па се из ње може издвојити коначан потпокривач $\{U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)\}$. Ако уочимо одговарајуће околине $V_{x_1}(a)$, $V_{x_2}(a)$, ..., $V_{x_n}(a)$ и њихов пресек означимо са V, имаћемо очигледно да је V околина тачке a која нема заједничких тачака са скупом K. То је, међутим, супротно претпоставци да је a тачка нагомилавања скупа K.

Докажимо да компактан скуп K у метричком простору X не може бити неограничен. Ако би он то био, онда би за произвољно $a \in X$ и за свако $n \in \mathbf{N}$ постојала тачка скупа K која не припада кугли $K(a,n)$. Међутим, фамилија $\{\, K(a,n) \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ је очигледно отворени покривач целог простора, па и скупа K, а претходни закључак би значио да он нема коначног потпокривача.

2° Нека је $\{\, U_\alpha \mid \alpha \in A \,\}$ отворени покривач скупа F. Како је скуп F затворен, његов комплемент $K \setminus F$ је отворен, па је $\{K \setminus F\} \cup \{\, U_\alpha \mid \alpha \in A \,\}$ отворени покривач целог простора K. Зато постоји његов коначан потпокривач – он је очигледно и покривач скупа $F \subset K$; ако из тог покривача избацимо елемент $K \setminus F$ (ако му он припада), добијамо коначан потпокривач покривача $\{\, U_\alpha \mid \alpha \in A \,\}$ скупа F. Дакле, F је компактан скуп. ■

Комбинујући ово тврђење са резултатом примера 1.5.1.3°, долазимо до следеће важне последице.

Последица 1.5.1

Подскуп K простора $\mathbf{R}^k$ је компактан ако и само ако је затворен и ограничен.

Доказ.

Једна импликација је садржана у претходном ставу 1° (и важи у произвољном метричком простору).

Обратно, претпоставимо да је K ограничен и затворен скуп. Он је тада подскуп неког сегмента I простора $\mathbf{R}^k$. Тај сегмент је компактан, према примеру 1.5.1.3°, па због затворености скупа K, на основу претходног става (2°), следи да је и K компактан. ■

Приметимо да ограниченост и затвореност, који су неопходни услови за компактност у произвољном метричком простору, нису и довољни – одговарајући пример навешћемо нешто касније (пример 1.5.2).

Став 1.5.3

Нека су K_1, K_2, ... непразни компактни подскупови метричког простора X и нека важи

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots .$$

Тада је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ непразан скуп.

Доказ.

Како су K_n затворени скупови (став 1.5.2), то су скупови $G_n = X \setminus K_n$ отворени. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је скуп $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ празан. Тада је $\{ G_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ отворени покривач простора X (заиста, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus \emptyset = X$), па и скупа K_1. Зато постоји његов коначан потпокривач – како су скупови G_n растући у смислу инклузије, то је јасно да тада већ један од њих, на пример, G_m (највећи из тог потпокривача) садржи K_1. Но, то је немогуће јер је $K_1 \setminus G_m = K_m \neq \emptyset$. ■

Претходни став можемо схватити као неку врсту уопштења Канторовог својства сегмената реалне праве, израженог лемом 3.3.1 (M.A.I) о уметнутим одсечцима. Како су компактни скупови, по дефиницији, они који имају Борел-Лебегово својство, то се намеће питање да ли за њих важи и трећа основна лема из M.A.I – Болцано-Вајерштрасова. Потврдан одговор даје

Став 1.5.4

Ако је метрички простор X компактан, тада:

1° сваки његов бесконачан подскуп има бар једну тачку нагомилавања;

2° сваки бесконачан низ у X има подниз који конвергира у X.

Доказ.

Нека је A произвољан бесконачан подскуп компактног простора X. Претпоставимо, супротно тврђењу 1° става, да A нема ниједну тачку нагомилавања. То значи да за сваку тачку $x \in X$ постоји околина $U(x)$ која не садржи ниједну тачку скупа A, осим можда саме тачке x. Из отвореног покривача $\{ U(x) \mid x \in X \}$ компактног простора X издвојмо коначан потпокривач – он је и коначан покривач скупа A, а према конструкцији скупова $U(x)$ може садржати највише коначно много тачака скупа A. Дакле, скуп A је коначан, супротно претпоставци.

Да из својства 1° следи 2° доказује се слично као код доказа Болцано-Вајерштрасове теореме 3.3.1 (M.A.I) у реалном случају. ■

Приметимо да су својства 1° и 2° из претходног става еквивалентна, што је лако проверити. Да било које од њих повлачи компактност метричког простора X у смислу наше дефиниције 1.5.1, такође је тачно, но доказ није једноставан (в. нпр. књиге [1], [11]). Због тога се често и неко од тих својстава узима као дефиниционо за појам компактног скупа у метричком простору.

Пример 1.5.2

Посматрајмо јединичну сферу $S(0,1)$ простора m ограничених низова, где је $0 = (0, 0, \dots)$. Та сфера је ограничен и затворен скуп у m. Међутим, она није компактна у m. Заиста, низ елемената $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ припада тој сфери, али нема конвергентног подниза јер је $d(e_m, e_n) = 1$ за свако $m \neq n$. ▲

Као што смо рекли у уводу овог одељка, компактност користимо када желимо да формулишемо и докажемо уопштења неких од глобалних својстава непрекидних функција из одељака 5.3 и 5.4 (M.A.I).

Теорема 1.5.1

Непрекидна слика компактног скупа је компактан скуп.

Доказ.

Нека је K компактан скуп, Y метрички простор и $f\colon K \to Y$ непрекидна функција. Уочимо произвољни покривач $\{ G_\alpha \mid \alpha \in A \}$ скупа $f(K)$ скуповима G_α који су отворени у Y. На основу теореме 1.4.1, скупови $f^{-1}(G_\alpha)$ су отворени у K, а на основу особина инверзне слике фамилија $\{ f^{-1}(G_\alpha) \mid \alpha \in A \}$ чини покривач скупа K. Ако из тог покривача издвојимо коначан потпокривач $\{ f^{-1}(G_{\alpha_i}) \mid i = 1, 2 \dots, n \}$, лако се види да ће скупови G_{α_i}, $i = 1, 2, \dots, n$, образовати коначан покривач скупа $f(K)$ који је, према томе, компактан. ■

Последица 1.5.2

Ако је K компактан скуп у метричком простору X и $f\colon X \to Y$ непрекидна функција, тада је $f(K)$ ограничен и затворен скуп у метричком простору Y. ■

Последица 1.5.3

Ако је K компактан метрички простор и $f\colon K \to \mathbf{R}$ непрекидна реална функција, тада постоје тачке x, $y \in K$, такве да је

$$f(x) = \min_{t \in K} f(t) \quad \text{и} \quad f(y) = \max_{t \in K} f(t). \quad ■$$

Стављајући у ову последицу $K = [a, b] \subset \mathbf{R}$, добијамо поново Вајерштрасову теорему 5.3.2 (M.A.I).

Дефиниција 1.5.2

Нека су X и Y метрички простори. За функцију $f\colon X \to Y$ кажемо да је **равномерно непрекидна** на X ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(d(x_1, x_2) < \delta \implies d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Примери 1.5.3

1° Сабирање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дефинисано са $f(x,y) = x + y$, равномерно је непрекидна функција на $\mathbf{R}^2$. Заиста, за произвољно $\varepsilon > 0$ изаберимо $\delta = \varepsilon$. Тада ће за сваке две тачке (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ за које је $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$ (као и код обичне непрекидности, ирелевантно је која од метрика d_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, у $\mathbf{R}^2$ се користи) бити

$$d(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)) = |(x_1+y_1) - (x_2+y_2)| \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \varepsilon.$$

2° Множење $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дефинисано са $f(x,y) = xy$, мада непрекидна, није равномерно непрекидна функција на $\mathbf{R}^2$. То следи из чињенице да већ квадрирање, тј. рестрикција множења на скуп $\{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ није равномерно непрекидно (пример 5.4.1.5°, М.А.I). ▲

Без битних промена доказује се следеће уопштење Канторове теореме 5.4.1 (М.А.I) о равномерној непрекидности.

Теорема 1.5.2

Ако је A компактан, а (Y, d_1) произвољан метрички простор, онда је свака непрекидна функција $f\colon A \to Y$ уједно и равномерно непрекидна на A.

Доказ.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан број. За произвољну тачку $x \in A$ постоји околина $U(x) = K(x, \delta)$ за коју важи

$$x_1 \in U(x) \implies d_1(f(x_1), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако су x_1 и x_2 две тачке те околине, за њих ће важити

$$d_1(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_1(f(x_1), f(x)) + d_1(f(x), f(x_2)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Уочимо сада околину $\tilde{U}(x)$ двоструко мањег полупречника од околине $U(x)$ – $\tilde{U}(x) = K\Big(x, \dfrac{1}{2}\delta\Big)$. Ако такву околину конструишемо за сваку тачку скупа A, добићемо систем отворених скупова $\{\tilde{U}(x) \mid x \in A\}$ који очигледно образује покривач скупа A. Како је скуп A по претпоставци компактан, то постоји коначан потпокривач тог покривача, тј. постоје тачке $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, такве да кугле

$$\tilde{U}(x_i) = K\Big(x_i, \frac{1}{2}\delta_i\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

такође чине покривач скупа A. Означимо са δ најмањи од бројева $\delta_i/2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и докажимо да тај (позитиван) број задовољава услове дефиниције равномерне непрекидности за функцију f на A.

Нека су x' и x'' произвољне тачке из A за које је $d(x', x'') < \delta$. Тачка x' припада једној од околина (2), тј. за неко i важи $d(x', x_i) < \delta_i/2$. Како је $\delta \leqslant \delta_i/2$, то је због $d(x', x'') < \delta$ такође и $d(x', x'') < \delta_i/2$, па добијамо $d(x'', x_i) < \delta_i$. На тај начин, тачке x' и x'' обе припадају кугли $U(x_i) = K(x_i, \delta_i)$, па на основу (1) закључујемо да за њих важи $d_1(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$, што је и требало доказати. ■

1.6. КОНЕКСНОСТ

За разлику од Вајерштрасове и Канторове теореме, Коши-Болцанова теорема 5.3.1 (М.А.I) о међувредности такође у свом доказу користи једно својство сегмената реалне праве, али не компактност, већ оно што ћемо назвати конексношћу (повезаношћу).

Дефиниција 1.6.1

За метрички простор X кажемо да је **неповезан (дисконексан)** ако се он може представити као унија два своја непразна дисјунктна отворена подскупа,

$$X = A \cup B, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset.$$

У противном, тј. ако се X тако не може представити, кажемо да је он **повезан (конексан)**.

За подскуп A метричког простора X кажемо да је конексан ако је он конексан, схваћен као метрички потпростор од X. Као и у случају компактности, лако се види да је конексност својство које не зависи од обухватног простора.

Примери 1.6.1

1° Скуп $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$ је дисконексан подскуп простора $\mathbf{R}$.

2° Посматрајмо скуп $D = \{0, 1\}$ као потпростор метричког простора $\mathbf{R}$ са уобичајеном метриком d, тј.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \neq y, \\ 0, & \text{за } x = y. \end{cases}$$

Метрички простор (D, d) је неповезан, јер се лако види да су једночлани скупови $A = \{0\}$ и $B = \{1\}$ отворени у њему, као отворене кугле $A = K(0, 1/2)$, $B = K(1, 1/2)$. ▲

Став 1.6.1

Следећа својства метричког простора X су међусобно еквивалентна:

1° X је конексан;

2° X се не може представити као унија два своја непразна дисјунктна затворена подскупа;

3° $\emptyset$ и X су једини истовремено отворени и затворени подскупови простора X;

4° не постоји непрекидно и сурјективно пресликавање простора X на метрички простор (D, d) из претходног примера.

Доказ.

Еквивалентност тврђења 1°, 2° и 3° је непосредна последица дефиниције затворених скупова. Докажимо да је тврђење 1° еквивалентно са 4°, тако што ћемо доказати еквивалентност њихових негација.

Ако је простор X дисконексан, $X = A \cup B$, где су A и B непразни, дисјунктни и отворени подскупови од X, дефинишимо пресликавање $f\colon X \to D$ са

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \in A, \\ 1, & \text{за } x \in B. \end{cases}$$

Због $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$, видимо да је инверзна слика сваког отвореног скупа из D отворена у X, па је функција f непрекидна.

Обратно, ако функција f са описаним својствима постоји, тада су скупови $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ отворени у X, дисјунктни и непразни и њихова унија је једнака X, па је тај простор дисконексан. ■

Следеће тврђење потпуно одређује класу конексних подскупова простора $\mathbf{R}$.

Став 1.6.2

Непразан подскуп X простора $\mathbf{R}$ је конексан ако и само ако за свака два елемента x, $z \in X$ и сваки реалан број y за који је $x < y < z$ важи $y \in X$. Другим речима, у $\mathbf{R}$ су једини повезани скупови интервали (коначни или бесконачни, отворени, полуотворени или затворени).

Доказ.

Претпоставимо најпре да је X повезан подскуп у $\mathbf{R}$ и, супротно тврђењу, да постоје тачке x, y, $z \in \mathbf{R}$, такве да је $x < y < z$, $x, z \in X$, а $y \notin X$. Означимо $A = \{a \in X \mid a < y\}$, $B = \{a \in X \mid a > y\}$. Тада $x \in A$ и $z \in B$, тј. скупови A и B су непразни; они су очигледно дисјунктни и $A \cup B = X$ (јер $y \notin X$). Осим тога, они су отворени у X, као пресеци отворених скупова $(-\infty, y)$, односно $(y, +\infty)$, са X. На тај начин, скуп X је дисконексан, супротно претпоставци.

Обратно, претпоставимо да је услов става испуњен и да скуп X није повезан, тј. да постоје непразни, затворени и дисјунктни подскупови A и B скупа X за које је $A \cup B = X$. Нека су, даље, x и z произвољни елементи скупова A, односно B. Они се не могу поклопити због дисјунктности тих скупова; претпоставимо, одређености ради, да је $x < z$. Скуп $A \cap [x, z]$ је непразан и ограничен одозго, па има супремум – означимо га са y_1. Очигледно је $x \leqslant y_1 \leqslant z$, па по претпоставци важи $y_1 \in X$. Како је скуп A затворен у X, то и $y_1 \in A$.

Аналогно, означимо $y_2 = \inf(B \cap [y_1, z])$ и биће $y_2 \in B$. Због дисјунктности скупова A и B не може бити $y_1 = y_2$, па важи $x \leqslant y_1 < y_2 \leqslant z$. Изаберимо произвољну тачку y, такву да је $y_1 < y < y_2$; по дефиницији бројева y_1 и y_2, тачка y не може припадати ни скупу A ни скупу B, па ни њиховој унији X, што је контрадикција. ■

Дефиниција 1.6.2

Нека је $I = [0, 1]$ јединични сегмент реалне праве. Ако за сваке две тачке x, y метричког простора X постоји непрекидно пресликавање (пут) $\alpha\colon [0,1] \to X$, такво да је $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, кажемо да је простор X **линеарно конексан (путно повезан)**.

Став 1.6.3

Сваки линеарно конексан метрички простор је конексан.

Доказ.

Претпоставимо да је простор X линеарно конексан и, супротно тврђењу, да постоји непрекидно пресликавање $f\colon X \to D$ које је сурјективно (в. став 1.6.1). Уочимо произвољне две тачке $x \in f^{-1}(0)$ и $y \in f^{-1}(1)$. Нека је $\alpha\colon [0,1] \to X$ пут који спаја тачке x и y. Функција $f \circ \alpha\colon [0,1] \to D$ је непрекидна и сурјективна (јер је $f \circ \alpha(0) = f(x) = 0$ и $f \circ \alpha(1) = f(y) = 1$), па следи (опет према ставу 1.6.1) да је сегмент $[0, 1]$ неповезан, што је контрадикција. ■

Примери 1.6.2

1° Сфера $S(0, r)$, $r > 0$, простора $\mathbf{R}^2$ (тј. круг $x^2 + y^2 = r^2$) је путно повезан, дакле и повезан скуп. Наиме, било које две тачке тог круга могу се спојити одговарајућим луком тог круга $x = r\cos 2\pi t$, $y = r\sin 2\pi t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

2° Кугла $K(a, r)$, $a \in \mathbf{R}^k$, $r > 0$, простора $\mathbf{R}^k$ је такође линеарно конексан скуп. У ствари, она је, више од тога, **конвексан** скуп, јер се било које две њене тачке b и c могу спојити *праволинијским* путем чија је параметарска једначина

$$x(t) = tc + (1-t)b, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Заиста, очигледно је да је $x(0) = b$, $x(1) = c$, тј. тачке b и c су крајеви тог пута, а да свака његова тачка припада кугли $K(a, r)$ следи из

$$\begin{aligned} \|x(t) - a\| &= \|t(c-a) + (1-t)(b-a)\| \\ &\leqslant t\|c-a\| + (1-t)\|b-a\| < tr + (1-t)r = r. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Теорема 1.6.1

Ако је $f\colon X \to Y$ непрекидна функција и X повезан метрички простор, тада је слика $f(X)$ повезан скуп у Y.

Доказ.

Не умањујући општост можемо претпоставити да је $f(X) = Y$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је Y неповезан, тј. (в. став 1.6.1) да постоји прави непразан подскуп A простора Y који је истовремено отворен и затворен. Тада је $f^{-1}(A)$ отворено-затворен подскуп простора X, па мора бити једнак $\emptyset$ или X. У првом случају би било $A = \emptyset$, а у другом $A = Y$; но, обоје је искључено избором скупа A. Ова контрадикција доказује теорему. ■

Последица 1.6.1

Нека је X повезан метрички простор и $f\colon X \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Ако су a и b произвољни елементи скупа вредности $f(X)$ функције f и c произвољна тачка између бројева a и b, тада постоји $x \in X$, такво да је $f(x) = c$.

Доказ.

Према теореми, $f(X)$ је повезан скуп у $\mathbf{R}$, дакле интервал на основу става 1.6.2. Одатле следи тврђење. ■

Специјално, ако за X узмемо сегмент реалне праве, ова последица своди се на Коши-Болцанову теорему 5.3.1 (М.А.I) о међувредности.

Пример 1.6.3

Нека је I сегмент реалне праве и $f\colon I \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Докажимо да је тада њен график $G(f) = \{\,(x, f(x)) \mid x \in I\,\}$ повезан скуп у $\mathbf{R}^2$. Заиста, $G(f)$ се може схватити као слика сегмента I функцијом $x \mapsto (x, f(x))$, која је непрекидна јер су непрекидне функције $x \mapsto x$ и $x \mapsto f(x)$. ▲

Убудуће ћемо углавном посматрати путно повезане просторе, па ћемо их кратко називати повезаним.

ЗАДАЦИ

1. Под **дијаметром** непразног скупа A у метричком простору (X, d) подразумевамо број $\delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$. Доказати:

1° $\delta(A) = 0$ ако и само ако је A једночлан скуп; 2° $A \subset B \implies \delta(A) \leqslant \delta(B)$; 3° $A \cap B \neq \emptyset \implies \delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$; 4° скуп је ограничен ако и само ако има коначан дијаметар; 5° $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

2. Нека су A и B подскупови метричког простора (X, d). **Растојање скупова** A и B је број $d(A, B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} d(x, y)$. Специјално, растојање тачке x од скупа A је број $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$. Доказати:

1° $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$; 2° $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$; 3° функција $f(x) = d(x, A)$ је равномерно непрекидна на X; 4° $\{\,x \mid d(x, A) < \varepsilon\,\}$ је отворен; $\{\,x \mid d(x, A) \leqslant \varepsilon\,\}$ је затворен; 5° $d(A, B) \leqslant \delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$; 6° $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$; 7° навести пример дисјунктних затворених скупова A, B за које је $d(A, B) = 0$.

3. Доказати следеће особине адхеренције:

1° $\overline{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи A, тј. $\overline{A} = \bigcap\{\,F \mid F \supset A,$ F затворен$\,\}$; 2° $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; 3° $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$; 4° $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; 5° $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; 6° навести пример за $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4. Скуп свих унутрашњих тачака скупа A у метричком простору X зваћемо **унутрашњошћу** скупа A и означавати са A°. Доказати:

1° A° је највећи отворен скуп који је садржан у A, тј. $A^\circ = \bigcup\{\,G \mid G \subset A, G$ отворен$\,\}$; 2° A је отворен $\iff A = A^\circ$; 3° $A^{\circ\circ} = A^\circ$; 4° $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$; 5° $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; 6° навести пример за $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$; 7° $\complement\overline{A} = (\complement A)^\circ$, $\complement(A^\circ) = \overline{\complement A}$.

5. **Граница** скупа A у метричком простору X је скуп ∂A свих његових граничних тачака. Доказати:

1° ∂A је затворен скуп; 2° $x \in \partial A \iff (\forall\varepsilon > 0)(K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ и $K(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$; 3° $\partial A = \partial(X \setminus A)$; 4° $A \cup \partial A = \overline{A}$; 5° $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$; 6° $A \setminus \partial A = A^\circ$; 7° $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$; 8° $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$; 9° $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$; 10° $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$.

6. Нека је X метрички простор и A, B његови подскупови. За скуп A кажемо да је **густ** у скупу B ако је $\overline{A} \supset B$. Специјално, ако је A густ у X (тј. $\overline{A} = X$), кажемо да је A **свуда густ**. Доказати:

1° $\mathbf{Q}$ је густ у $\mathbf{R}$; $\mathbf{Q}^k$ је густ у $\mathbf{R}^k$; 2° ако је A густ у B и B густ у C, тада је A густ у C; 3° ако су A и B свуда густи, $A \cap B$ то не мора бити.

7. Простор X је **сепарабилан** ако у њему постоји пребројив свуда густ скуп. Доказати да су простори $\mathbf{R}^k$, c_0 и c сепарабилни, а да простор m то није.

8. Нека је X скуп и d_1, d_2 две метрике на X. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

1° за сваку отворену куглу $K(a, r_1)$ простора (X, d_1) постоји отворена кугла $K(a, r_2)$ простора (X, d_2), таква да је $K(a, r_2) \subset K(a, r_1)$ и обратно;

2° подскуп од X је отворен (затворен) у (X, d_1) ако и само ако је отворен (затворен) у (X, d_2);

3° низ (x_n) тачака из X конвергира ка $x \in X$ у (X, d_1) ако и само ако конвергира ка x у (X, d_2);

4° постоје позитивни бројеви α, β, такви да је $\alpha < \dfrac{d_1(x,y)}{d_2(x,y)} < \beta$ за све $x \neq y$;

5° идентичка пресликавања из (X, d_1) у (X, d_2) и обратно су непрекидна.

За метрике d_1 и d_2 које имају неко од наведених својстава кажемо да су **еквивалентне**.

9. 1° Доказати да су све метрике d_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на $\mathbf{R}^k$ међусобно еквивалентне (в. претходни задатак).

2° Нека је (X, d) метрички простор. Доказати да су са $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ и $d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ дефинисане метрике d_1 и d_2 на X које су еквивалентне са d. При томе је цео простор X ограничен скуп у метрикама d_1 и d_2 (док то није морао бити у метрици d).

10. Доказати да у сваком метричком простору X важи:

1° ако x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, тада постоје дисјунктни отворени скупови $G_1 \ni x_1$, $G_2 \ni x_2$;

2° ако је F затворен подскуп од X и $x \notin F$, тада постоје дисјунктни отворени скупови $G_1 \ni x$ и $G_2 \supset F$;

3° ако су F_1 и F_2 дисјунктни затворени скупови у X, тада постоје дисјунктни отворени скупови $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$.

11. Навести пример: 1° бесконачне фамилије отворених скупова чији пресек није отворен скуп; 2° бесконачне фамилије затворених скупова чија унија није затворен скуп.

12. Адхеренција отворене кугле $K(a,r)$ не мора да се поклопи са затвореном куглом $K[a,r]$. Навести пример.

13. 1° Доказати неједнакост многоугла у метричком простору:

$$d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n).$$

2° Доказати да је метрика непрекидна функција у следећем смислу: за свака два низа (x_n), (y_n) за која је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ важи $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

14. У скупу $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ дефинишимо $\frac{1}{\infty} = 0$ и $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$ за m, $n \in \mathbf{N}^*$. Доказати:

1° d је метрика у $\mathbf{N}^*$; 2° тачка ∞ је тачка нагомилавања скупа $\mathbf{N}$ у $\mathbf{N}^*$; 3° низ $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ има коначну граничну вредност ако и само ако постоји $\lim_{n\to\infty} x(n)$, схваћен као гранична вредност функције x из подскупа метричког простора $(\mathbf{N}^*, d)$ у метрички простор $\mathbf{R}$ са уобичајеном метриком.

15. Ако је $f\colon X \to Y$ равномерно непрекидна функција и (x_n) Кошијев низ у X, доказати да је $(f(x_n))$ Кошијев низ у Y.

16. 1° Метрички простор је комплетан ако и само ако пресек сваког монотоно опадајућег низа затворених кугли у њему, чији низ полупречника тежи нули, садржи тачно једну тачку простора. Доказати.

2° У следећем примеру показује се да је услов конвергенције полупречника ка нули у претходном тврђењу битан чак и за егзистенцију поменуте тачке пресека. Нека је $\mathbf{N}$ скуп природних бројева и d метрика на $\mathbf{N}$ дефинисана са $d(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ за $m \neq n$, $d(m,m) = 0$. Кугле $K\left[n, 1 + \frac{1}{2n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, имају празан пресек, мада су уметнуте једна у другу, а простор $(\mathbf{N}, d)$ је комплетан.

17. Показати да Банахова теорема о непокретној тачки може да не важи ако се уместо услова да је f контракција стави услов $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1,x_2)$ за x_1, $x_2 \in X$.

18. Показати да Банахова теорема о непокретној тачки важи ако се захтева само да је нека итерација $f^{(n)}$ функције f контракција.

19. Посматрајмо Фредхолмову[4] интегралну једначину

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + g(x),$$

где је језгро $K(x,t)$ непрекидно у квадрату $P = [a,b] \times [a,b]$, функција $g(x)$ је непрекидна на $[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$, а $y(x)$ је непозната функција коју треба одредити. Примењујући Банахову теорему доказати да ако је $\lambda < 1/M(b-a)$, где је $M = \max_{(x,t)\in P} |K(x,t)|$, тада дата једначина има јединствено решење $y(x)$.

[4] I. Fredholm (1866–1927), шведски математичар

20. Доказати да су за функцију $f\colon X \to Y$ између метричких простора X и Y следећа својства еквивалентна: 1° f је непрекидна на X; 2° $(\forall A \subset X)\, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; 3° $(\forall B \subset Y)\, f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ$.

21. Нека је $f\colon X \to \mathbf{R}$ непрекидна функција на метричком простору X и $c > 0$. Доказати да је скуп $\{\, x \mid f(x) < c \,\}$ отворен, а да су скупови $\{\, x \mid f(x) \leqslant c \,\}$ и $\{\, x \mid f(x) = c \,\}$ затворени.

22. Нека су f и g непрекидне функције из метричког простора X у метрички простор Y. Доказати:

1° $\{\, x \mid f(x) = g(x) \,\}$ је затворен; 2° ако је $f(x) = g(x)$ за $x \in A \subset X$, онда је и $f(x) = g(x)$ за $x \in \overline{A}$; 3° ако је $f(x) = g(x)$ у тачкама неког свуда густог скупа A, онда је $f(x) = g(x)$ на X.

23. Слика отвореног (затвореног) скупа непрекидном функцијом не мора бити отворен (затворен) скуп. Навести пример.

24. Нека је X метрички простор и $A \subset X$. Карактеристична функција $\chi_A\colon X \to \mathbf{R}$ скупа A је непрекидна ако и само ако је A отворено-затворен скуп у X. Доказати.

25. Доказати да функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дата са $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, за $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, није непрекидна у $(0,0)$, мада је њена рестрикција на произвољну праву $y = tx$ кроз координатни почетак непрекидна у њему.

26. Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, где је $A \subset \mathbf{R}^m$ и нека је $G(f) \subset \mathbf{R}^{m+n}$ њен график. Доказати:

1° ако је f непрекидна, тада је $G(f)$ затворен скуп;

2° ако је A компактан, тада је f непрекидна ако и само ако је $G(f)$ компактан;

3° нека је $x_0 \in \overline{A}$; важи $y = \lim_{x\to x_0} f(x)$ ако и само ако је (x_0, y) јединa тачка у $\mathbf{R}^{m+n}$ са првом координатом x_0 која је адхерентна за скуп $G(f)$;

4° ако је A повезан и f непрекидна, тада је $G(f)$ повезан; обратно не важи: $G(f)$ може бити повезан и ако f није непрекидна (пример: $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 1/x$, $f(0) = 0$).

27. Нека је $f\colon X \to Y$ непрекидна бијекција. Ако је X компактан, тада је и $f^{-1}\colon Y \to X$ такође непрекидна. Доказати.

28. Доказати да је сваки компактан метрички простор комплетан, а да обратно не мора да важи.

29. Нека је (X,d) метрички простор и A, B непразни подскупови од X. Доказати:

1° ако је A компактан, тада постоји $a \in A$ тако да је $d(a,B) = d(A,B)$;

2° ако су A и B компактни, тада је $d(a,b) = d(A,B)$ за неке $a \in A$, $b \in B$;

3° ако су A и B дисјунктни компактни, тада је $d(A,B) > 0$;

4° ако је A компактан, тада је $\delta(A) = d(a_1,a_2)$ за неке a_1, $a_2 \in A$.

30. Доказати: 1° унија недисјунктних конексних скупова је конексан скуп; 2° пресек конексних скупова не мора бити конексан скуп; 3° ако је A конексан, тада је конексан и сваки скуп B за који је $A \subset B \subset \overline{A}$; специјално, адхеренција конексног скупа је конексан скуп.

31. Нека је X метрички простор, $f\colon X \to \mathbf{R}$ и $\omega(f, A)$ осцилација функције f на скупу $A \subset X$ (в. дефиницију 4.5.1, М.А.I). Доказати:

1° За $a \in X$ и $\delta > 0$, функција $\delta \mapsto \omega(f, K[a,\delta])$ је растућа и ограничена одоздо функција од δ. На тај начин, постоји $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(f, K[a,\delta]) = \omega(f, a)$ који се назива **осцилацијом функције f у тачки** a.

2° Функција f је непрекидна у тачки $a \in X$ ако и само ако је $\omega(f, a) = 0$.

3° За свако $\lambda > 0$ скуп $X_\lambda = \{\, x \in X \mid \omega(f, x) \geqslant \lambda \,\}$ је затворен.

4° Нека је X компактан, f ограничена и нека постоји $\omega_0 > 0$, тако да је $\omega(f, a) \leqslant \omega_0$ за свако $a \in X$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је $\omega(f, D) < \omega_0 + \varepsilon$ чим је $D \subset X$ такав да је $\delta(D) < \delta$.

32. Нека је X метрички простор, $f\colon X \to \mathbf{R}$ и $\delta > 0$. **Модул непрекидности** функције f је број $\omega_f(\delta) = \sup\{\, |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in X,\ d(x_1, x_2) < \delta \,\}$. Доказати:

1° $\delta_1 < \delta_2 \implies \omega_f(\delta_1) \leqslant \omega_f(\delta_2)$; 2° $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$; 3° $\omega_f(c\delta) \leqslant c\omega_f(\delta)$ за $c > 0$; 4° функција f је равномерно непрекидна на X ако и само ако је $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$.

33. 1° Доказати да је функција

$$d(a, b) = \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p\Bigr)^{1/p}, \qquad a = (a_n),\ b = (b_n) \in l^p, \quad p \geqslant 1,$$

метрика у скупу l^p свих реалних низова $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, таквих да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ конвергира.

2° Доказати да у тако дефинисаном метричком простору l^p конвергенција низова повлачи конвергенцију одговарајућих низова координата, али да обратно није тачно.

3° Доказати да је у метричком простору l^p јединична кугла $K[0, 1]$, где је $0 = (0, 0, \dots)$, ограничен и затворен скуп који није компактан.

34. Доказати да функција

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \qquad x = (x_n),\ y = (y_n),$$

дефинише метрику у скупу s свих реалних низова.

35. Доказати да је у скупу функција ограничене варијације на $[a, b]$ са

$$d(f, g) = |f(a) - g(a)| + V_{f-g}(a, b)$$

дефинисана метрика.

2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

У овој глави наставићемо проучавање, започето у првој глави, функција више (реалних) променљивих. Разматраћемо, дакле, функције дефинисане на неком подскупу m-димензионалног простора $\mathbf{R}^m$, са вредностима у $\mathbf{R}$ (реалне функције више променљивих), као и у $\mathbf{R}^n$ (векторске функције више променљивих). Ако је $A \subset \mathbf{R}^m$ домен такве функције f, њена вредност у некој тачки $x = (x_1, \dots, x_m) \in A$ записује се као $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$. У случају да је кодомен вишедимензиони простор $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, та вредност је n-торка $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, па су дефинисане реалне функције $y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ $(j = 1, \dots, n)$ које називамо координатним функцијама функције f.

Појмови као што су лимес и непрекидност оваквих функција описани су у првој глави. Овде ћемо говорити углавном о функцијама које су диференцијабилне. За такве функције се обично претпоставља да свака тачка њиховог домена A има особину да припада том скупу заједно са неком својом околином – другим речима, претпоставља се да је скуп A отворен. За нека разматрања биће неопходно и да се претпостави да је скуп A конексан (повезан). За такав (отворен и повезан) скуп A казаћемо да је **област** у простору $\mathbf{R}^m$.

2.1. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\colon A \to \mathbf{R}$ реална функција m реалних променљивих и $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$ фиксирана тачка. Посматрајмо елемент $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$ простора $\mathbf{R}^m$ код којег су све координате једнаке нули осим i-те, са особином да је $\|h\| = |h_i|$ довољно мало да $a + h \in A$. Формирајмо израз

$$f(a + h) - f(a) = f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m).$$

Њега ћемо називати **парцијалним прираштајем по i-тој променљивој** функције f у тачки a.

Дефиниција 2.1.1

Ако постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)}{h_i},$$

називаћемо је **парцијалним изводом по i-тој промењивој** функције f у тачки a и означавати са $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ или $f'_{x_i}(a)$.

Из ове дефиниције непосредно следи да је парцијални извод по i-тој промењивој функције више промењивих уствари обичан извод те функције, схваћене као функције једне (i-те) промењиве, при чему остале имају фиксиране вредности $x_j = a_j$ ($j \neq i$). Зато за његово практично налажење могу да се користе уобичајена правила за налажење извода функција једне промењиве.

Пример 2.1.1

За $y \neq 0$ нека је $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}. \quad \blacktriangle$$

Дефиниција парцијалног извода функције f не узима у обзир вредности те функције у свим тачкама неке околине тачке a, већ само оне које та функција узима у тачкама које припадају правој паралелној i-тој координатној оси, а која пролази кроз a. Зато и није неочекивана чињеница коју демонстрира наредни пример, да нека функција у датој тачки може имати парцијалне изводе по свакој од промењивих, а да при томе не буде непрекидна у тој тачки.

Пример 2.1.2

Посматрајмо функцију $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дату са

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{за } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{за } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

која, према примеру 1.4.1.3°, није непрекидна у тачки $(0, 0)$. Међутим, она има парцијалне изводе

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0. \quad \blacktriangle$$

Јасно је, зато, да, за разлику од функција једне промењиве, одређену „правилност" функцијама више промењивих не може гарантовати само постојање (парцијалних) извода, већ се мора посматрати неко својство које узима у обзир понашање те функције у читавој околини посматране тачке. Да бисмо такво својство увели, сетимо се да смо за реалну функцију једне промењиве f казали да је диференцијабилна у некој тачки a ако се њен прираштај $\Delta f(a, h) = f(a + h) - f(a)$ могао представити у облику

$$\Delta f(a, h) = Lh + \alpha(h)h,$$

где је L константа, а функција $\alpha(h)$ је бесконачно мала кад $h \to 0$. Другим речима, прираштај те функције, посматран као функција прираштаја h аргумента, има главни део који је линеарна функција од h,

$$\Delta f(a, h) = df(a)(h) + o(h) \quad (h \to 0),$$

где је $df(a)(h) = Lh$ вредност диференцијала $df(a)$ те функције (у тачки a), рачунатог за вредност h прираштаја аргумента. Преносећи ову дефиницију на случај функције више промењивих долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 2.1.2

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\colon A \to \mathbf{R}$ и $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ фиксирана тачка. За $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ за које је $\|h\|$ довољно мало, тако да $a + h \in A$, означимо са

$$\Delta f(a, h) = f(a + h) - f(a) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m)$$

прираштај функције f у тачки a, генерисан прираштајем h аргумента. Ако се тај прираштај може написати у облику

$$\Delta f(a, h) = L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m + o(h) \quad (h \to 0), \tag{1}$$

где су $L_1, \ldots, L_m$ константе, а са $o(h)$ је означена реална функција промењиве h која има особину да је $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{\|h\|} = 0$, кажемо да је функција f **диференцијабилна** у тачки a, а линеарну функцију $h \mapsto L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m$ зовемо **диференцијалом** функције f у тачки a и пишемо

$$df(a)(h) = L_1 h_1 + \cdots + L_m h_m. \tag{2}$$

Дакле, као и код функција једне промењиве, диференцијабилне су оне функције код којих прираштај, схваћен као функција прираштаја h аргумента, има „главни" део који је линеарна функција од h,

$$\Delta f(a, h) = df(a)(h) + o(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

Лако се изводе следеће особине диференцијабилне функције.

Став 2.1.1

Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција у тачки $a \in A$. Тада:

1° функција f је непрекидна у тачки a;

2° постоје парцијални изводи $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $(i = 1, \ldots, m)$, а диференцијал $df(a)$ има облик

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)h_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i, \quad h = (h_1, \ldots, h_m).$$

Доказ.

1° Непосредно из дефиниције диференцијабилности следи да је $\lim\limits_{h\to 0} \Delta f(a,h) = 0$, тј. $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, па је функција f непрекидна у тачки a.

2° Стављајући $h_j = 0$ за $j \neq i$ у релацију (1), добијамо

$$f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = L_i h_i + o(h) \quad (h \to 0),$$

одакле је

$$L_i = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m)}{h_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad \blacksquare$$

Приметимо да из доказаног става следи да је приказ диференцијала $df(a)$ диференцијабилне функције f у тачки a у облику (2) једнозначно одређен. Иначе, ниједан од услова 1°, 2° овог става (непрекидност, постојање парцијалних извода), чак ни оба заједно, не гарантују диференцијабилност функције.

Пример 2.1.3

Функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дата са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{за } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{за } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

непрекидна је у тачки $(0,0)$ (што се лако проверава) и има у тој тачки парцијалне изводе $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Она, међутим, није диференцијабилна у тој тачки. Наиме, ако би она то била, њен прираштај би могао да се напише у облику

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} = 0 \cdot h + 0 \cdot k + o(h,k), \quad (h,k) \to (0,0),$$

одакле би следило

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0,$$

што није тачно, јер је за $h = k > 0$:

$$\frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\to 0, \quad (h,k) \to (0,0). \quad \blacktriangle$$

Наведимо сада један довољан услов диференцијабилности.

Став 2.1.2

Нека у некој околини U тачке $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A \subset \mathbf{R}^m$ функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ има све парцијалне изводе $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и нека су они непрекидни у тачки a. Тада је f диференцијабилна у тачки a.

Доказ.

Можемо претпоставити да је U кугла $K(a,\varepsilon)$. Нека је $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ такав да је $\|h\| < \varepsilon$. Тада прираштај $f(a+h) - f(a)$ можемо написати у облику

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m) \\ &= f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_m + h_m) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_m + h_m) \\ &\quad + \cdots + f(a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m). \end{aligned}$$

Свака од добијених m разлика представља прираштај на одговарајућем одсечку неке функције од *једне* променљиве, која, на том одсечку, задовољава услове Лагранжове теореме о средњој вредности. Зато се прираштај $f(a+h) - f(a)$ даље представља као

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_m + h_m)h_1 \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \theta_m h_m)h_m, \end{aligned}$$

где је $0 < \theta_i < 1$ за $i = 1, \ldots, m$. Због претпостављене непрекидности парцијалних извода $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ у тачки a, сваки од коефицијената последње линеарне комбинације може се написати у облику $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \alpha_i$, где $\alpha_i \to 0$ $(h \to 0)$, $i = 1, \ldots, m$. На тај начин је

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i,$$

при чему

$$\left| \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \frac{|h_i|}{\|h\|} \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Дакле, функција f је диференцијабилна у тачки a. $\blacksquare$

Приметимо да услов за диференцијабилност дат у овом ставу није неопходан (за одговарајући пример в. задатак 2). За функцију која у некој тачки има непрекидне парцијалне изводе казаћемо да је **непрекидно диференцијабилна** у тој тачки. Ако функција f испуњава тај услов у свим тачкама скупа A, казаћемо да је непрекидно диференцијабилна на A. Скуп свих таквих функција означаваћемо са $C^1(A, \mathbf{R})$, а кад је јасно да је реч о реалним функцијама, онда и са $C^1(A)$.

Извод у правцу. Градијент

Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}$ функција дефинисана на отвореном подскупу A простора $\mathbf{R}^m$. Као што смо видели, њен парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ у некој тачки $a \in A$ (ако постоји) одређује брзину промене те функције дуж праве паралелне i-тој координатној оси. Увешћемо сада величину која ће одређивати брзину промене те функције у неком правцу који не мора бити паралелан ниједној координатној оси.

У том циљу уочимо произвољан јединични вектор $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$. За довољно мало $|t|$ $(t \in \mathbf{R})$, због отворености скупа A, важиће $a + tl \in A$, па ће бити дефинисано $f(a+tl)$.

Дефиниција 2.1.3

Коначна гранична вредност (ако постоји)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{t}$$

зове се **извод функције** f **у тачки** a **у правцу вектора** l и означава са $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = f_l'(a)$.

Примери 2.1.4

1° Ако је $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ јединични вектор i-те осе, јасно је да је $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, тј. извод у правцу вектора e_i је једноставно парцијални извод те функције у тачки a по i-тој променљивој.

2° Нека је $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \neq 0\}$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ дата са $f(x,y,z) = e^{z/x}\sin y$ и нека је $a = (3,0,-1)$, $l = (2/3, -1/3, 2/3)$. Тада је

$$\begin{aligned}\frac{f(a+tl)-f(a)}{t} &= \frac{f\left(3+\frac{2}{3}t, -\frac{1}{3}t, -1+\frac{2}{3}t\right) - f(3,0,-1)}{t} \\ &= e^{(-3+2t)/(9+2t)} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{1}{3}t\right)}{t} \to -\frac{1}{3}e^{-1/3} \quad (t \to 0),\end{aligned}$$

па је добијена вредност једнака $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a)$. ▲

У општем случају, постојање парцијалних извода функције f у некој тачки a по свакој од променљивих није довољно за постојање њеног извода у произвољном правцу. Наредни став даје довољан услов за то.

Став 2.1.3

Ако је функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ диференцијабилна у тачки $a \in A$ и $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ произвољан јединични вектор, тада функција f има у тачки a извод у правцу вектора l и важи

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) l_i.$$

Доказ.

Како је функција f диференцијабилна у тачки a, то постоје њени парцијални изводи $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L_i$. Такође, њен прираштај, генерисан прираштајем $h = tl$ независно променљиве, може се написати у облику

$$\begin{aligned} f(a+tl) - f(a) &= df(a)h + o(h) \quad (h \to 0) \\ &= t\sum_{i=1}^{m} L_i l_i + o(t) \quad (t \to 0).\end{aligned}$$

(Користили смо да $t \to 0$ ако и само ако $h \to 0$, што је очигледно.) Другим речима,

$$\frac{f(a+tl)-f(a)}{t} = \sum_{i=1}^{m} L_i l_i + \frac{o(t)}{t} \to \sum_{i=1}^{m} L_i l_i \quad (t \to 0),$$

што је и требало доказати. ■

Збир помоћу којег се у овој теореми изражава извод у правцу је у ствари вредност диференцијала функције f у тачки a на вектору l. Он се може схватити и као скаларни производ вектора $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)$ и вектора $l = (l_1, \dots, l_m)$. Први од тих вектора још ћемо звати **градијентом** функције f у тачки a и означавати са $\operatorname{grad} f(a)$. Дакле, за диференцијабилну функцију f је

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \operatorname{grad} f(a) \cdot l. \tag{3}$$

Пример 2.1.5

Како је функција из примера 2.1.4.2° очигледно диференцијабилна у тачки a (парцијални изводи су јој непрекидни) и како је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = e^{-1/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0,$$

то је

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = (0, e^{-1/3}, 0) \cdot (2/3, -1/3, 2/3) = -\frac{1}{3}e^{-1/3}. \quad ▲$$

Примењујући Коши-Шварцову неједнакост на десну страну релације (3) добијамо

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}(a)\right| \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\| \cdot \|l\| = \|\operatorname{grad} f(a)\|,$$

при чему једнакост важи ако и само ако су вектори $\operatorname{grad} f(a)$ и l истог правца. На тај начин, извод $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a)$ ће по апсолутној вредности бити највећи ако је вектор l колинеаран са $\operatorname{grad} f(a)$ и та максимална вредност износи $\|\operatorname{grad} f(a)\|$. Он ће бити једнак нули ако је вектор l нормалан на вектору $\operatorname{grad} f(a)$.

Са даљим особинама градијента реалне функције векторског аргумента упознаћемо се касније.

2.2. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ ВЕКТОРСКИХ ФУНКЦИЈА

Да бисмо могли да појам диференцијабилности уведемо и за векторске функције више променљивих, подсетимо се најпре неких чињеница из линеарне алгебре, везаних за особине линеарних функција („оператора“) које делују из $\mathbf{R}^m$ у $\mathbf{R}^n$.

Као што је познато, за функцију $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ кажемо да је **линеарна** ако за свака два елемента $x,\ y \in \mathbf{R}^m$ и свака два реална броја $\lambda,\ \mu$ важи

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

Свакој линеарној функцији $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ одговара јединствено одређена матрица $[a_{ij}]$ формата $n\times m$. Наиме, ако су $e_1, \ldots, e_m$ елементи стандардне базе простора $\mathbf{R}^m$, $e_1^*, \ldots, e_n^*$ елементи стандардне базе простора $\mathbf{R}^n$ и ако за $i = 1, \ldots, m$ са a_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ означимо координате слике вектора e_i функцијом L:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^* \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

онда се вредност функције L у произвољној тачки $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \in \mathbf{R}^m$ може изразити као

$$L(x) = L\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*\Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\Big) e_j^*,$$

или, у уобичајеном матричном запису,

$$L(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

где смо векторе $x \in \mathbf{R}^m$ и $L(x) \in \mathbf{R}^n$ записали као векторе-колоне. У матрици функције L су, дакле, у i-тој колони записане координате слике $L(e_i)$ i-тог координатног вектора простора $\mathbf{R}^m$ функцијом L. У даљем нећемо правити разлику између линеарне функције и њене матрице, па ћемо их означавати истим словом. Зато ћемо и писати Lx уместо $L(x)$ за вредност функције L на вектору x. Та кореспонденција између линеарних функција и матрица је, као што знамо, не само бијекција (при фиксираним базама), већ и изоморфизам одговарајућих структура, у смислу да линеарној комбинацији функција одговара линеарна комбинација одговарајућих матрица, а композицији функција производ њихових матрица.

За линеарну функцију, односно матрицу, $L = [a_{ij}]_{n\times m}$ дефинишимо **норму** помоћу

$$\|L\| = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

На основу Коши-Шварцове неједнакости изводи се да за сваки вектор $x \in \mathbf{R}^m$ важи

$$\|Lx\|_n^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\Big)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\Big)\|x\|_m^2,$$

односно

(1) $$\|Lx\|_n \leqslant \|L\| \cdot \|x\|_m.$$

Овде смо индексима m, односно n, означили норме простора $\mathbf{R}^m$, односно $\mathbf{R}^n$, што ћемо убудуће чинити само ако постоји могућност забуне.

Сада дајемо најављену дефиницију диференцијабилности векторске функције више (реалних) променљивих.

Дефиниција 2.2.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ и $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ фиксирана тачка. За функцију f кажемо да је **диференцијабилна у тачки** a ако се њен прираштај $\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a)$, за $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ за које је $a + h \in A$, може приказати у облику

$$\Delta f(a,h) = Lh + o(h) \quad (h \to 0),$$

где је L линеарна функција прираштаја h аргумента, која се назива **диференцијалом** функције f у тачки a и означава са $df(a)$.

Дакле, за диференцијабилну функцију је

(2) $$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0).$$

На други начин записано, то значи да је

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Нађимо координатни запис релације (2). У том циљу означимо са f_j координатне функције функције f, дакле функције $f_j\colon A \to \mathbf{R}$, такве да је за $x \in A$

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big);$$

даље, са $[a_{ij}]_{n\times m}$ означимо матрицу $L = df(a)$, а са $\alpha_j(h)$ $(j = 1, \ldots, n)$ означимо координатне функције пресликавања означеног са $o(h)$ у поменутој релацији. Тада је, за $j = 1, \ldots, n$,

$$\Delta f_j(a,h) = f_j(a+h) - f_j(a) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} h_i + \alpha_j(h),$$

где $\alpha_j(h)/\|h\| \to 0$ $(h \to 0)$. На основу дефиниције 2.1.2 и става 2.1.1 закључујемо да је свака од реалних функција f_j диференцијабилна у тачки a и да је $a_{ij} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. Лако је видети да и обратно, диференцијабилност свих функција f_j повлачи диференцијабилност функције f, при чему диференцијал (као линеарна функција прираштаја h аргумента) има матрицу

(3) $$df(a) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]_{n\times m};$$

другим речима, он дејствује по правилу

$$df(a)h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)h_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)h_i \end{bmatrix},$$

где смо векторе h и $df(a)h$ записали као векторе-колоне (што ћемо и даље обично чинити).

Претходним разматрањима, узимајући у обзир и став 2.1.1, као и познату везу између непрекидности векторске функције и њених координатних функција, доказали смо следећи

Став 2.2.1

Диференцијабилна у тачки $a \in A$ функција $f: A \to \mathbf{R}^n$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ непрекидна је у тој тачки и има у њој једнозначно одређен диференцијал $df(a)$ са матрицом (3). ■

Матрица (3) диференцијала $df(a)$ назива се **Јакобијевом**[1] **матрицом** функције f у тачки a. У случају $m = n$, њена детерминанта $\det df(a)$ назива се **јакобијаном** функције f у тачки a. Јакобијан пресликавања игра важну улогу у многим проблемима везаним за особине тог пресликавања. Ако је пресликавање f дато помоћу својих координатних пресликавања $f_j = f_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, m$, јакобијан $\det df(a)$ означаваћемо још и са

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{vmatrix}$$

Примери 2.2.1

1° Нека је $A = \{(r, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbf{R}^2$ и $f: A \to \mathbf{R}^2$ функција дата са

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Тада је f диференцијабилна у свакој тачки $(r, \theta) \in A$ и важи

$$df(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \det df(r, \theta) = r.$$

2° Слично, функција

$$f(r, \varphi, \theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi),$$

[1] K. G. J. Jacobi (1804–1851), немачки математичар

дефинисана на скупу $A = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}$, диференцијабилна је у свакој његовој тачки, при чему је

$$df(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det df(r, \varphi, \theta) = r^2\sin\varphi. \quad ▲$$

Кажемо да је функција $f: A \to \mathbf{R}^n$ **непрекидно диференцијабилна** у некој тачки $a \in A$ ако су све њене координатне функције $f_j: A \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилне у a. Скуп свих функција из A у $\mathbf{R}^n$, непрекидно диференцијабилних у свакој тачки $a \in A$, означаваћемо са $C^1(A, \mathbf{R}^n)$.

2.3. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИРАЊА

Правила налажења диференцијала векторских (специјално, реалних) функција више променљивих у основи су иста као код реалних функција реалне променљиве. Наводимо најпре правило о линеарности операције диференцирања.

Теорема 2.3.1

Нека су функције $f, g: A \to \mathbf{R}^n$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ диференцијабилне у тачки $a \in A$ и нека су λ и μ реални бројеви. Тада је функција $\lambda f + \mu g$ диференцијабилна у тачки a и важи

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Доказ.

Нека је $h \in \mathbf{R}^m$, такво да $a + h \in A$. По дефиницији је

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= df(a)h + o(h) \quad (h \to 0), \\ g(a+h) - g(a) &= dg(a)h + o(h) \quad (h \to 0). \end{aligned}$$

Одатле је

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(a+h) - (\lambda f + \mu g)(a) &= \lambda[f(a+h) - f(a)] + \mu[g(a+h) - g(a)] \\ &= \lambda[df(a)h + o(h)] + \mu[dg(a)h + o(h)] \\ &= \big(\lambda df(a) + \mu dg(a)\big)h + o(h) \quad (h \to 0), \end{aligned}$$

што значи да је функција $\lambda f + \mu g$ диференцијабилна у тачки a и да јој је диференцијал у тој тачки једнак $\lambda df(a) + \mu dg(a)$. ■

За произвољне функције са векторским вредностима немају смисла операције множења и дељења. Међутим, у случају реалних функција оне су дефинисане и важе аналогна правила (са аналогним доказима) за њихово диференцирање као у случају функција једне променљиве.

Теорема 2.3.2

Нека су функције $f, g\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ диференцијабилне у тачки $a \in A$. Тада су и функције fg и f/g (последња ако је $g(a) \neq 0$) диференцијабилне у a и важе једнакости

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a),$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{[g(a)]^2}. \quad \blacksquare$$

Диференцијабилност сложене функције

Теорема 2.3.3

Нека су $A \subset \mathbf{R}^m$ и $B \subset \mathbf{R}^n$ отворени скупови, $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to \mathbf{R}^p$. Ако је функција f диференцијабилна у тачки $a \in A$, а функција g диференцијабилна у тачки $b = f(a)$, тада је сложена функција $g\circ f$ диференцијабилна у тачки a и важи

$$d(g\circ f)(a) = dg(b)\circ df(a) \tag{1}$$

(на десној страни је композиција две линеарне функције).

Доказ.

Нека је $h \in \mathbf{R}^m$ прираштај аргумента функције f, такав да је $a + h \in A$. Означимо $k = f(a+h) - f(a)$, па је $g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = g(b+k) - g(b)$. Због непрекидности функције f у тачки a важи $k \to 0$ чим $h \to 0$. На основу диференцијабилности функција f и g у одговарајућим тачкама имамо:

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h) \quad (h \to 0),$$
$$g(b+k) - g(b) = dg(b)k + o(k) \quad (k \to 0).$$

Дакле,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) &= g(b+k) - g(b) = dg(b)k + o(k)\\ &= dg(b)\big(f(a+h) - f(a)\big) + o(k)\\ &= dg(b)\big(df(a)h + o(h)\big) + o(k)\\ &= \big(dg(b)\circ df(a)\big)h + dg(b)\big(o(h)\big) + o(k) \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

Докажимо да је

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|dg(b)\big(o(h)\big)\|}{\|h\|} = 0. \tag{2}$$

Нека је $\varepsilon(h)$ векторска функција (са вредностима у $\mathbf{R}^n$) која је означена са $o(h)$ и за коју је, дакле, $\lim\limits_{h\to 0} \|\varepsilon(h)\|/\|h\| = 0$. Вредност линеарне функције $dg(b)$ на том вектору може се, применом неједнакости (1) одељка 2.2, оценити као

$$\|dg(b)\big(\varepsilon(h)\big)\|_p \leqslant \|dg(b)\| \cdot \|\varepsilon(h)\|_n.$$

Сада је

$$\frac{\|dg(b)\big(\varepsilon(h)\big)\|_p}{\|h\|_m} \leqslant \|dg(b)\| \frac{\|\varepsilon(h)\|_n}{\|h\|_m} \to 0 \quad (h \to 0),$$

чиме је доказана релација (2). Дакле је $dg(b)\big(o(h)\big) = o(h)$ $(h \to 0)$. Још једноставније се доказује и да је $\lim\limits_{h\to 0} \|o(k)\|/\|h\| = 0$, тј. $o(k) = o(h)$ $(h \to 0)$. Зато је

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = \big(dg(b)\circ df(a)\big)h + o(h) \quad (h \to 0),$$

што и доказује теорему. $\blacksquare$

Напишимо експлицитно, помоћу одговарајућих Јакобијевих матрица, релацију (1). Као што знамо, матрица линеарне функције $df(a)$ је облика $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$, а матрица линеарне функције $dg(b)$ је облика $\left[\dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\right]$ $(j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, p)$, где су са $y = (y_1, \dots, y_n)$ означени елементи простора $\mathbf{R}^n$. Релација (1) сада гласи

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(g_1\circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial(g_1\circ f)}{\partial x_m}(a)\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial(g_p\circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial(g_p\circ f)}{\partial x_m}(a)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n}(b)\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(b) & \dots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_n}(b)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a)\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a)\end{bmatrix}.$$

Изједначавањем одговарајућих елемената у овој матричној једнакости добијамо следеће правило налажења парцијалних извода сложене функције више променљивих:

$$\frac{\partial(g_k\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, p). \tag{3}$$

Нагласимо, међутим, да доказана теорема 2.3.3 говори нешто више од самих једнакости (3) – она тврди и да је сложена векторска функција диференцијабилна.

Специјално, ако је $p = 1$, тј. ако је g реална функција, једнакости (3) добијају облик

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m),$$

где се подразумева да се изводи $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ рачунају у тачки a, а изводи $\dfrac{\partial g}{\partial y_j}$ у тачки $b = f(a)$, и где је стављено $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Последица 2.3.1

Нека су испуњени услови теореме 2.3.3, при чему је $m = n = p$. Тада за јакобијане одговарајућих пресликавања важи

$$\det d(g \circ f)(a) = \det dg(b) \det df(a),$$

тј.

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}(a) = \frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(b) \cdot \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}(a),$$

где су $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j = 1, \ldots, m$ координатне функције пресликавања f, а $z_k = g_k(y_1, \ldots, y_m)$ координатне функције пресликавања g, $k = 1, \ldots, m$.

Доказ.

Ово тврђење следи из претходне теореме и познатог правила о рачунању детерминанте производа двеју квадратних матрица. ∎

2.4. ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

Приликом извођења теореме о средњој вредности за функције више променљивих мораћемо да битно разликујемо случајеве реалне и векторске функције. За реалну функцију више променљивих теорема о средњој вредности представља једноставно уопштење Лагранжове теореме за функције једне променљиве.

Теорема 2.4.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in A$ и $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^m$, такав да сегмент

$$[a, a+h] = \{\, x \mid x = a + th,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \,\}$$

лежи у A. Ако је функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидна у свим тачкама тог сегмента и диференцијабилна у свим тачкама интервала

$$(a, a+h) = \{\, x \mid x = a + th,\ 0 < t < 1 \,\},$$

онда постоји тачка $c = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$, тог интервала, таква да важи

$$f(a+h) - f(a) = df(c)h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + \theta h_1, \ldots, a_m + \theta h_m) h_i.$$

Доказ.

Нека је $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ функција дефинисана са $\varphi(t) = f(a+th)$ за $0 \leqslant t \leqslant 1$. Она се може схватити као сложена функција $\varphi = f \circ \psi$, где је $\psi\colon [0,1] \to [a, a+h]$ линеарна функција дата са $\psi(t) = a + th$. Функција φ је непрекидна на $[0,1]$, као композиција непрекидних функција; она је и диференцијабилна на $(0,1)$ и њен диференцијал је, према теореми 2.3.3, једнак

$$d\varphi(t) = df(a+th) \circ d\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i.$$

Примењујући на ту функцију Лагранжову теорему, с обзиром да је $\varphi(1) = f(a+h)$, $\varphi(0) = f(a)$, закључујемо да постоји број θ, $0 < \theta < 1$, односно вектор $c = a + \theta h \in (a, a+h)$, такав да важи

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) h_i = df(c)h. \quad ∎$$

У наведеном облику теорема о средњој вредности не може се пренети на случај векторских функција (в. задатак 10). Да бисмо дошли до одговарајућег исказа у векторском случају, даћемо прво нови облик Лагранжовој теореми за реалне функције реалне променљиве. Наиме, из

$$f(a+h) - f(a) = f'(c)h, \qquad a < c < a+h,$$

следи да је

$$|f(a+h) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |h| \leqslant |h| \sup_{c \in (a, a+h)} |f'(c)| = |h| \sup_{0<t<1} |f'(a+th)|.$$

Специјално, ако је функција f непрекидно диференцијабилна на $[a, a+h]$, имаћемо

$$|f(a+h) - f(a)| \leqslant |h| \sup_{c \in [a, a+h]} |f'(c)| = |h| \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f'(a+th)|.$$

У случају векторске функције више променљивих апсолутне вредности заменићемо одговарајућим нормама, а извод диференцијалом, па долазимо до следеће формулације.

Теорема 2.4.2

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ непрекидно диференцијабилна функција и тачке a, $h \in \mathbf{R}^m$ такве да $[a, a+h] \subset A$. Тада је

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \|h\| \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|df(a+th)\|.$$

Доказ.

За произвољно фиксирано $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ посматрајмо реалну функцију

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j f_j(a+th), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где су f_j координатне функције функције f. Она је непрекидна на $[0,1]$, а њен извод на $[0,1]$ износи

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j df_j(a+th)h$$

и он је непрекидан: $\varphi' \in C[0,1]$. Примењујући Лагранжову теорему на функцију φ, а затим Коши-Шварцову неједнакост и релацију (1) одељка 2.2, добијамо

$$\begin{aligned}|\varphi(1)-\varphi(0)| &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\varphi'(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|z\|\cdot\|df(a+th)h\| \\ &\leqslant \|z\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\|\cdot\|h\|.\end{aligned}$$

Зато је

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j(f_j(a+h)-f_j(a))\right| \leqslant \|z\|\cdot\|h\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\|.$$

Ставимо у ову неједнакост $z = f(a+h)-f(a)$, тј. $z_j = f_j(a+h)-f_j(a)$. Добијамо

$$\|f(a+h)-f(a)\|^2 \leqslant \|f(a+h)-f(a)\|\cdot\|h\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|df(a+th)\|.$$

Ако је $f(a+h)-f(a)=0$, тврђење теореме је тривијално. У противном, скраћивањем последње неједнакости добијамо неједнакост коју доказујемо. ∎

Поменимо да ова теорема важи под слабијим претпоставкама да је f непрекидна на $[a,a+h]$, а диференцијабилна само на $(a,a+h)$, при чему се супремум узима по t за које је $0<t<1$ (за доказ в. нпр. [27]).

Једна од једноставних последица Лагранжове теореме је да само константне функције на интервалу имају извод једнак нули. За векторске функције више променљивих то тврђење се формулише на следећи начин.

Став 2.4.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ област (дакле, отворен и повезан скуп) и $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ диференцијабилна функција. Ако је за свако $x \in A$, $df(x) = 0$ (тј. ако f у свакој тачки x има Јакобијеву матрицу чији су сви елементи једнаки нули), онда је функција f константна.

Доказ.

1° Размотримо најпре случај када је скуп A конвексан. Уочимо произвољне тачке a, $a+h \in A$ и на сегмент $[a,a+h]$ (који је цео садржан у A) применимо претходну теорему. Добијамо $\|f(a+h)-f(a)\| = 0$, тј. $f(a+h) = f(a)$. Дакле, функција f је константна на скупу A.

2° Претпоставимо сада да је A произвољан отворен и повезан скуп. За сваку његову тачку a постоји кугла $K(a,r) \subset A$. Како је кугла конвексан скуп, према првом делу доказа, функција f је константна на свакој од тих кугли.

Означимо $B = f(A) \subset \mathbf{R}^n$; циљ нам је да докажемо да је B једночлан скуп. Уочимо произвољан вектор $b \in B$. Како је f непрекидна функција, а једночлани

скуп $\{b\}$ је затворен, то је и скуп $f^{-1}(\{b\})$ затворен (в. теорему 1.4.1). Међутим, тај скуп мора бити и отворен. Наиме, за сваку тачку $a \in f^{-1}(\{b\})$ (тј. за коју је $f(a) = b$), према реченом постоји околина на којој је функција f константна, тј. такође има вредност b. Како је скуп A повезан, он не може имати отворено-затворен подскуп, различит од $\emptyset$ и A (в. став 1.6.1). Како скуп $f^{-1}(\{b\})$ није празан, то је $f^{-1}(\{b\}) = A$. Другим речима, за свако $x \in A$ је $f(x) = b$, што и значи да је функција f константна на A. ∎

2.5. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ВИШЕГ РЕДА. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Нека је $f\colon A \to \mathbf{R}$ реална функција, дефинисана на отвореном скупу $A \subset \mathbf{R}^m$ и нека за неко $i \in \{1,\dots,m\}$ постоји парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ у свим тачкама тога скупа. Тада је и он реална функција, дефинисана на A, тј. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon A \to \mathbf{R}$, па се за неко $j \in \{1,\dots,m\}$ може поставити питање о постојању парцијалног извода те функције по променљивој x_j у некој тачки $a \in A$.

Дефиниција 2.5.1

Ако постоји парцијални извод $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, њега зовемо **другим парцијалним изводом** функције f у тачки a, по променљивим x_i, x_j (тим редом) и означавамо са

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

У случају када је $i=j$, одговарајући парцијални извод означавамо са $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Ако је $i \neq j$, тај парцијални извод зовемо **мешовитим**. У општем случају, мешовити парцијални изводи

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

могу имати различите вредности.

Пример 2.5.1

Нека је функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ дата са

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 0$. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

за $(x,y) \neq (0,0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, па је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

На сличан начин се добија $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$, па је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0). \quad \blacktriangle$$

Под одређеним додатним претпоставкама које су описане у наредној теореми, једнакост мешовитих парцијалних извода је обезбеђена.

Теорема 2.5.1

Нека функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ (A је отворен подскуп $\mathbf{R}^m$) има друге мешовите парцијалне изводе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

за све $x \in A$ и нека су у датој тачки $a \in A$ ти изводи непрекидни. Тада су они у тој тачки и једнаки.

Доказ.

Како се приликом одређивања извода који се помињу у овој теореми мењају само i-та и j-та координата аргумента, док остале остају фиксиране, то, без ограничења општости, можемо претпоставити да је $m = 2$, тј. да је f функција двеју променљивих $f(x,y)$, а да је тачка у којој се изводи траже (a,b). Треба да докажемо да је под датим претпоставкама

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b). \tag{1}$$

Због отворености скупа A, за довољно мале (по апсолутној вредности) прираштаје h, $k \in \mathbf{R}$, правоугаоник са теменима (a,b), $(a+h,b)$, $(a,b+k)$ и $(a+h,b+k)$ биће подскуп скупа A. Посматрајмо помоћне функције $g(t) = f(a+th, b+k) - f(a+th, b)$ и $h(t) = f(a+h, b+tk) - f(a, b+tk)$, дефинисане за $t \in [0,1]$. Примењујући на њих по два пута Лагранжову теорему о средњој вредности, добијамо да је за неке θ_1, θ_2, η_1, $\eta_2 \in (0,1)$ испуњено

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) = g'(\theta_1) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)\right] h \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) hk, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) = h'(\eta_1) &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\eta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\eta_1 k)\right] k \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\eta_2 h, b+\eta_1 k) hk. \end{aligned}$$

Међутим, разлике $g(1) - g(0)$ и $h(1) - h(0)$ су међу собом једнаке. Наиме, свака од њих има вредност

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b).$$

Дакле је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\eta_2 h, b+\eta_1 k).$$

Због претпостављене непрекидности ових мешовитих извода у тачки (a,b), прелазећи на лимес кад $h \to 0$ и $k \to 0$, добијамо да заиста важи релација (1). ∎

Парцијални изводи вишег реда дефинишу се индуктивно. **Парцијални извод реда n** функције f у тачки a по променљивим x_{i_1}, …, x_{i_n} (тим редом) означава се са

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}(a), \tag{2}$$

при чему неки од индекса i_1, …, $i_n \in \{1, \ldots, m\}$ могу бити и једнаки међу собом. Као и код других парцијалних извода, поредак диференцирања у општем случају утиче на вредност тог извода. Но, у случају да су ти изводи непрекидне функције у некој тачки, тај поредак више неће бити битан, на основу теореме 2.5.1. Специјално, ако су сви парцијални изводи n-тог реда неке функције f непрекидни у свим тачкама скупа A – скуп свих таквих функција означаваћемо са $C^n(A, \mathbf{R})$ или само са $C^n(A)$ – важиће

Последица 2.5.1

Ако $f \in C^n(A, \mathbf{R})$, тада се вредност извода (2) не мења при произвољној пермутацији индекса i_1, …, i_n. ∎

За функције класе $C^n(A, \mathbf{R})$ још ћемо рећи да су **n пута непрекидно диференцијабилне**. За n-ти парцијални извод такве функције користићемо ознаку

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

где су α_1, …, α_m цели бројеви, такви да је $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$.

Тејлорова формула

Тејлорова формула, са остатком у Лагранжовом облику, за реалну функцију једне променљиве може да се напише у облику

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} h^k \frac{d^k}{dx^k} f(a) + R_n(a,h),$$

где је

$$R_n(a,h) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Код преношења те формуле на случај функције више променљивих, изрази који у њој учествују се прилично компликују. Да бисмо их ипак релативно кратко записали, прихватимо најпре неке конвенције.

Најпре, вредност диференцијала $df(x)h$ функције $f\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R}^m)$ у тачки $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$, рачунатог за вредност прираштаја $h = (h_1, \dots, h_m)$, може се формално записати као

$$df(a)h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) f(a).$$

Уведимо затим формални „квадрат" последње заграде помоћу

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a) = \sum_{i_1, i_2} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a),$$

где се сумирање врши по свим индексима i_1, i_2 од 1 до m. Слично, за произвољно $k \in \mathbf{N}$, под претпоставком да $f \in C^k(A)$, дефинишимо

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a) = \sum_{i_1, \dots, i_k} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a),$$

где сви индекси $i_1, \dots, i_k$ узимају све вредности од 1 до m. Приметимо да се последња сума, применом полиномне формуле, може написати и у облику

$$\sum \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(a),$$

где се сад сумирање врши по свим могућим ненегативним целим бројевима $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, таквим да је $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k$.

Наведимо сада Тејлорову формулу за реалну функцију m променљивих са остатком у Лагранжовом облику.

Теорема 2.5.2

Нека је $f \in C^{n+1}(A, \mathbf{R})$, где је A отворен подскуп $\mathbf{R}^m$ и нека сегмент $[a, a+h]$ цео припада скупу A. Тада постоји реалан број $\theta \in (0,1)$, такав да је

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a) + R_n(a,h), \tag{3}$$

где је

$$R_n(a,h) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(a + \theta h). \tag{4}$$

Доказ.

Посматрајмо функцију $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, дефинисану са $\varphi(t) = f(a + th)$, већ коришћену у доказу теореме 2.4.1. Према правилима за налажење извода сложене функције, добијамо да $\varphi \in C^{n+1}[0,1]$ и да је

$$\varphi'(t) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + th) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a + th)$$

(видети и доказ теореме 2.4.1); затим,

$$\varphi''(t) = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{m} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a + th) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a + th)$$

и, уопште, за произвољно $k \in \{1, \dots, n+1\}$:

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a + th).$$

Примењујући на функцију φ на сегменту $[0,1]$ Тејлорову формулу са Лагранжовим остатком за функције једне променљиве, закључујемо да постоји број $\theta \in (0,1)$, такав да важе формуле (3) и (4). ■

Ако се у доказу претходне теореме користи Тејлорова формула са остатком у неком другом облику, добиће се Тејлорова формула за функције више променљивих са одговарајућим остатком. Тако, на пример, ако је $f \in C^n(A, \mathbf{R})$ и $a \in A$, важи формула (3) са остатком $R_n(a,h)$ у Пеановом облику,

$$R_n(a,h) = o(\|h\|^n) \quad (h \to 0). \tag{5}$$

Пример 2.5.2

Напишимо у развијеном облику формулу (3) са остатком (5) за $n = 3$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a,b) &= \left[h \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] \\ &+ \frac{1}{6}\left[h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b) + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b) + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\right] \\ &+ o\big((h^2 + k^2)^{3/2}\big), \qquad (h,k) \to (0,0). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

2.6. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ

Појам локалног екстремума се за реалне функције више променљивих дефинише аналогно случају функција једне променљиве.

Дефиниција 2.6.1

Нека је функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ дефинисана у некој околини $U(a)$ тачке $a \in A \subset \mathbf{R}^m$. Ако је за свако $x \in U(a)$ испуњено

$$f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{односно } f(x) < f(a) \text{ за } x \neq a),$$

кажемо да функција f има у тачки a **локални максимум** (одн. **строги локални максимум**) једнак $f(a)$. Слично се дефинише **(строги) локални минимум**. (Строге) локалне максимуме и минимуме једним именом зовемо **(строгим) локалним екстремумима**.

Приметимо да су локални екстремуми, према овој дефиницији, увек постигнути у унутрашњим тачкама домена функције. О такозваним рубним екстремумима говорићемо нешто касније.

Као и код функција једне променљиве, за диференцијабилне функције постоји једноставан неопходан услов за постојање локалног екстремума.

Став 2.6.1

Нека функција $f\colon A \to \mathbf{R}$ у тачки $a \in A \subset \mathbf{R}^m$ има све парцијалне изводе првог реда и нека у тој тачки има локални екстремум. Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0.$$

Специјално, ако је f диференцијабилна у a, онда је $df(a) = 0$.

Доказ.

Нека је $K(a,r)$ кугла у којој је дефинисана функција f и у којој важи $f(x) \leqslant f(a)$ (одн. $f(x) \geqslant f(a)$) за све x. За произвољно $i \in \{1,\dots,m\}$ посматрајмо функцију $g\colon (a_i - r, a_i + r) \to \mathbf{R}$, дефинисану са

$$g(x_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_m)$$

за $x_i \in (a_i - r, a_i + r)$. Та функција има локални екстремум у тачки a_i, па је $g'(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. ∎

Унутрашње тачке домена функције f у којима су сви парцијални изводи једнаки нули називаћемо **стационарним**. Преостали део овог одељка посвећен је испитивању природе стационарних тачака, тј. налажењу довољних услова под којима функција више променљивих у својој стационарној тачки заиста има локални екстремум. За формулисање таквих услова биће нам потребни неки појмови из линеарне алгебре које ћемо сада навести.

Дефинитне квадратне форме

Реална функција m променљивих облика

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$$

зове се **квадратна форма** променљивих $h_1, \dots, h_m$. Матрица $A(\Phi) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ зове се **матрица квадратне форме** Φ. За ту матрицу увек можемо претпоставити да је **симетрична**, тј. да је $a_{ij} = a_{ji}$ за све i, j. За форму Φ се каже да је **позитивно (негативно) полудефинитна** ако за све $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbf{R}^m$ важи

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) \geqslant 0 \qquad (\text{одн. } \Phi(h_1,\dots,h_m) \leqslant 0).$$

Она је **позитивно (негативно) дефинитна** ако за све $h \neq 0$ важи

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) > 0 \qquad (\text{одн. } \Phi(h_1,\dots,h_m) < 0).$$

Најзад, форма Φ је **променљивог знака** ако постоје $h = (h_1,\dots,h_m)$, $k = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbf{R}^m$, такви да је

$$\Phi(h_1,\dots,h_m) > 0, \quad \Phi(k_1,\dots,k_m) < 0.$$

Пример 2.6.1

Квадратна форма

$$\begin{aligned}\Phi_1(h_1,h_2,h_3) &= 2h_1^2 + 5h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_2h_3\\ &= (h_1+h_2+h_3)^2 + (h_1 - 2h_2)^2 + h_3^2\end{aligned}$$

је позитивно дефинитна, јер је $\Phi_1(h_1,h_2,h_3) > 0$ за $(h_1,h_2,h_3) \neq (0,0,0)$. Форма

$$\Phi_2(h_1,h_2,h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3 = (h_1+h_2-h_3)^2$$

је позитивно полудефинитна, али не и дефинитна, јер може бити $\Phi_2(h_1,h_2,h_3) = 0$ и кад нису сви h_1, h_2, h_3 једнаки нули. ▲

За испитивање дефинитности квадратне форме у линеарној алгебри се доказује следећи **Силвестеров**[2] **критеријум**.

Став 2.6.2

Нека је

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{bmatrix}$$

симетрична матрица квадратне форме $\Phi\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ и нека су

(1) $$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \det A(\Phi)$$

[2] J. J. Sylvester (1814–1897), енглески математичар

њени главни минори. Да би форма Φ била позитивно дефинитна неопходно је и довољно да су ти главни минори позитивни:

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad A_m > 0.$$

Да би форма Φ била негативно дефинитна, неопходно је и довољно да ти минори наизменично мењају знак, с тим да је $A_1 < 0$:

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad \dots \quad . \blacksquare$$

Пример 2.6.2

Форма Φ_1 из примера 2.6.1 има матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

и главне миноре једнаке редом 2, 9, 9. Форма Φ_2 има матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

са детерминантом једнаком нули. ▲

Довољни услови локалног екстремума

Докажимо најпре следеће помоћно тврђење.

Лема 2.6.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп и $a_{ij}\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидне функције за $i, j = 1, \dots, m$, такве да је $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ за све $x \in A$. За $x \in A$ нека је Φ_x квадратна форма са матрицом $[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^m$. Ако је за неко $a \in A$ квадратна форма Φ_a позитивно дефинитна, тада постоји $r > 0$, тако да је за свако x из кугле $K(a,r)$ форма Φ_x позитивно дефинитна.

Доказ.

Реалне функције $A_1, \dots, A_m$, дефинисане помоћу

$$A_1(x) = a_{11}(x), \quad A_2(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m(x) = \det[a_{ij}(x)],$$

непрекидне су за $x \in A$. Према Силвестеровом критеријуму, из позитивне дефинитности форме Φ_a следи да су бројеви

$$A_1(a), \quad A_2(a), \quad \dots, \quad A_m(a)$$

позитивни. Због непрекидности функција A_i, постоји позитиван број r, такав да су бројеви

$$A_1(x), \quad A_2(x), \quad \dots, \quad A_m(x)$$

такође позитивни за $x \in K(a,r)$. То и значи да је форма Φ_x позитивно дефинитна. ■

Формулишимо сада најављено тврђење које даје довољне услове за постојање (строгог) локалног екстремума функције више променљивих.

Теорема 2.6.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $a \in A$ и $f \in C^2(A)$, при чему је a стационарна тачка функције f, тј. $df(a) = 0$; нека је Φ квадратна форма чија је матрица

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j=1}^m . \tag{2}$$

Тада:

1° ако је квадратна форма Φ позитивно дефинитна, функција f има строги локални минимум у тачки a;

2° ако је квадратна форма Φ негативно дефинитна, функција f има строги локални максимум у a;

3° ако је квадратна форма Φ промењљивог знака, функција f у тачки a нема локални екстремум.

Доказ.

1° Ако су испуњене дате претпоставке, према претходној леми, постоји број $r > 0$, такав да је за све $x \in K(a,r)$ позитивно дефинитна квадратна форма чија је матрица $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1}^m$. За произвољно такво x сегмент $[a,x]$ припада $K(a,r)$, па се на разлику $f(x) - f(a)$ може применити Тејлорова формула са Лагранжовим остатком (теорема 2.5.2) за $n = 1$. Због стационарности тачке a она има облик:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - a_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a + \theta(x-a)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m (x_i - a_i)(x_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Другим речима, та разлика је квадратна форма промењљивих $x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m$, са (симетричном) матрицом

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x-a))\right]_{i,j=1}^m .$$

Како вектор $a + \theta(x-a)$ припада такође кугли $K(a,r)$, то је и та квадратна форма позитивно дефинитна, што и значи да је $f(x) - f(a) > 0$ за све $x \in K(a,r) \setminus \{a\}$. Дакле, у тачки a је строги локални минимум функције f.

2° Довољно је применити доказано тврђење под 1° на функцију $-f$.

3° Ако је квадратна форма Φ са матрицом (2) промењљивог знака, онда постоје вектори $h = (h_1, \dots, h_m)$, $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{R}^m$, такви да је

$$\Phi(h_1, \dots, h_m) > 0, \quad \Phi(k_1, \dots, k_m) < 0. \tag{3}$$

За произвољно $\rho > 0$ одредимо тачке $x = a + \rho\dfrac{h}{\|h\|}$ и $y = a + \rho\dfrac{k}{\|k\|}$, за које је очигледно $\|x - a\| = \|y - a\| = \rho$.

Напишимо сада Тејлорову формулу за функцију f у тачки a са Пеановим остатком, за вредности аргумента x, односно y,

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(x_i-a_i)(x_j-a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+o(\|x-a\|^2)\\ &= \frac{\rho^2}{2\|h\|^2}\Big[\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j+o(1)\Big]\\ &= \frac{\rho^2}{2\|h\|^2}[\Phi(h_1,\dots,h_m)+o(1)] \qquad (\rho\to 0),\\ f(y)-f(a) &= \frac{\rho^2}{2\|k\|^2}[\Phi(k_1,\dots,k_m)+o(1)] \qquad (\rho\to 0). \end{aligned}$$

Како величине $\Phi(h_1,\dots,h_m)$ и $\Phi(k_1,\dots,k_m)$ не зависе од ρ, то је, на основу (3), за довољно мало ρ,

$$f(x)-f(a)>0, \quad f(y)-f(a)<0,$$

што и значи да у свакој околини тачке a функција f има вредности, како мање, тако и веће од $f(a)$. Тиме је доказано да та функција у тачки a нема локални екстремум. ∎

Примери 2.6.3

1° Свака од функција $f_1(x,y)=x^3+y^3$ и $f_2(x,y)=x^4+y^4$ има јединствену стационарну тачку $(0,0)$ и у тој тачки карактеристичну квадратну форму идентички једнаку нули – дакле и позитивно и негативно полудефинитну, али не и дефинитну. Прва од тих функција нема локални екстремум у $(0,0)$, јер у произвољној околини те тачке постоје вектори (x_1,y_1) и (x_2,y_2), такви да је $f_1(x_1,y_1)<0<f_1(x_2,y_2)$. Функција f_2, међутим, у тачки $(0,0)$ има локални (и апсолутни) минимум једнак 0.

2° Одредимо тачке локалних екстремума функције

$$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2+2x_3,$$

где је λ реалан параметар.

Решавајући систем једначина $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2\lambda x_1=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2+2=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=2x_3+2=0$, добијамо да је једина стационарна тачка ове функције $x=(0,-1,-1)$ (сем у случају $\lambda=0$, када су стационарне све тачке облика $(x_1,-1,-1)$, $x_1\in\mathbf{R}$). Због $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=2$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=0$ за $i\neq j$, у тој тачки карактеристична квадратна форма има облик

$$\Phi(h_1,h_2,h_3)=2\lambda h_1^2+2h_2^2+2h_3^2.$$

За $\lambda>0$ та форма је очигледно позитивно дефинитна и функција f у тачки $(0,-1,-1)$ има локални минимум. За $\lambda<0$ та форма је променљивог знака (на пример, тада је $\Phi(0,1,1)>0$, $\Phi(1,0,0)<0$), па функција f у тој тачки нема локални екстремум. Ако је $\lambda=0$, у свакој од тачака $(x_1,-1,-1)$ форма Φ је полудефинитна, но функција f ту ипак има (не само локални) минимум једнак -2, јер је $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2+1)^2+(x_3+1)^2-2\geqslant -2$ за све $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ и $f(x_1,-1,-1)=-2$. ▲

У примерима се најчешће појављују функције двеју променљивих, па ћемо навести формулацију теореме 2.6.1 за тај случај.

Последица 2.6.1

Нека је A отворен скуп у $\mathbf{R}^2$, $(a,b)\in A$, $f(x,y)$ два пута непрекидно диференцијабилна функција на A и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$. Означимо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=r$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=s$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=t$. Тада:

1° ако је $r>0$, $rt-s^2>0$, функција f у тачки (a,b) има строги локални минимум;

2° ако је $r<0$, $rt-s^2>0$, функција f у тачки (a,b) има строги локални максимум;

3° ако је $rt-s^2<0$, функција f у тачки (a,b) нема локални екстремум.

Доказ.

Тврђења 1° и 2° непосредно следе из теореме 2.6.1 и става 2.6.2. Докажимо тврђење 3°, тј. докажимо да је у случају $rt-s^2<0$ квадратна форма

$$\Phi(h,k)=rh^2+2shk+tk^2$$

променљивог знака.

Посматрајмо најпре случај $r\neq 0$. Тада је

$$\Phi(h,k)=\frac{1}{r}[(rh+sk)^2+(rt-s^2)k^2],$$

па су, због $rt-s^2<0$, бројеви $\Phi(1,0)=r$ и $\Phi(s,-r)=r(rt-s^2)$ различитог знака.

Ако је $r=0$, тада из услова $rt-s^2<0$ следи да је $s\neq 0$. Нека је $h\neq 0$ и k довољно мало тако да израз $2sh+tk$ има исти знак као израз $2sh$. Тада вредности квадратне форме $\Phi(h,k)=k(2sh+tk)$ имају различите знаке за $k>0$, односно $k<0$, те је и у овом случају та квадратна форма променљивог знака. ∎

Поновимо на крају да се све изложено односи само на тзв. унутрашње локалне екстремуме функција више променљивих. Приликом одређивања **апсолутних екстремума** таквих функција неопходно је заједно са унутрашњим стационарним тачкама испитивати и тачке границе домена. За такво испитивање је често корисна техника одређивања тзв. условног екстремума, о којој ћемо говорити у следећој глави. С друге стране, међутим, ако се траже само апсолутни екстремуми неке функције на ограниченом и затвореном (дакле компактном) скупу, применом Вајерштрасове теореме може се потпуно избећи испитивање карактера стационарних тачака.

Пример 2.6.4

Нађимо највећу и најмању вредност функције $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbf{R}$, дате са $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y^2 - 2y$.

Систем једначина $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4y - 2 = 0$ има унутар квадрата $(-1,1)^2$ два решења: $(0,1/2)$ и $(-1/2,3/8)$. Даље је $f(1,y) = 2y^2+1$, $f(-1,y) = 2y^2-1$, $f(x,1) = x^3+2x^2$, $f(x,-1) = x^3 - 2x^2 + 4$, па се као потенцијалне тачке екстремума добијају и стационарне тачке тих функција једне променљиве (које су на рубу датог квадрата): $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ и $(0,-1)$, као и темена квадрата $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ и $(-1,-1)$. Дата функција је непрекидна, а квадрат $[-1,1]^2$ је компактан скуп, па f на њему достиже своју најмању и највећу вредност. Оне могу бити само међу вредностима функције f у нађених 10 тачака. Међу њима је најмања $f(-1,0) = -1$, а највећа $f(0,-1) = 4$, па су то тражени екстремуми функције f на $[-1,1]^2$. ▲

ЗАДАЦИ

1. Показати да је функција $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, дата са $f(x) = \|x\|$, диференцијабилна свуда осим у тачки $x = 0$.

2. Доказати да функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, дата са $f(0,0) = 0$ и

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{за } (x,y) \neq (0,0),$$

има у околини тачке $(0,0)$ парцијалне изводе који су прекидни у тој тачки, али је f ипак диференцијабилна у $(0,0)$.

3. Доказати да је свака линеарна функција $L\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ равномерно непрекидна на $\mathbf{R}^m$.

4. За функцију $f\colon A \to \mathbf{R}$, где је A област у $\mathbf{R}^m$, каже се да је **хомогена и има степен хомогености** α ($\alpha \in \mathbf{R}$) ако за све $x \in A$, $t \in \mathbf{R}$, такве да $tx \in A$ важи $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Функција f је **локално хомогена са степеном хомогености** α у области A ако је она хомогена тог степена у некој околини сваке тачке области A. Доказати да је диференцијабилна функција f локално хомогена степена α у области $A \subset \mathbf{R}^m$ ако и само ако она у тој области задовољава **Ојлеров идентитет**:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_m\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \equiv \alpha f(x).$$

5. Нека је f функција дата у примеру 2.1.3 и $\varphi(t) = f(t,t)$ за $t \in \mathbf{R}$. Показати да се извод функције φ у тачки 0 не може наћи по правилу диференцирања сложене функције.

6. Доказати **Ролову теорему** за функције више променљивих: ако је непрекидна функција $f\colon K[0,r] \to \mathbf{R}$ ($K[0,r] \subset \mathbf{R}^m$) једнака нули на граници кугле K, а диференцијабилна у њеној унутрашњости $K(0,r)$, тада постоји тачка $x \in K(0,r)$ која је стационарна за функцију f.

7. Нека је $f\colon I \to \mathbf{R}^m$ непрекидно пресликавање сегмента $I = [0,1] \subset \mathbf{R}$ у $\mathbf{R}^m$, а $g\colon I \to \mathbf{R}$ непрекидна реална функција. Ако су f и g диференцијабилне у интервалу $(0,1)$ и за свако $x \in (0,1)$ важи $\|df(x)\| \leqslant g'(x)$, тада је $\|f(1)-f(0)\| \leqslant g(1) - g(0)$. Доказати.

8. Нека је A отворен и конвексан (ограничен или неограничен) скуп у $\mathbf{R}^m$ и $f\colon A \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција на A. Ако су сви парцијални изводи функције f ограничени на A:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant K \quad \text{за } i = 1, \ldots, m \text{ и } x \in A,$$

за неко $K \in \mathbf{R}$, тада је функција f равномерно непрекидна на A. Доказати.

9. 1° Нека је $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ **афино пресликавање**, дато са $f(x) = y_0 + Lx$, за $x \in \mathbf{R}^m$ (записано у облику вектора-колоне), где је y_0 фиксирани вектор из $\mathbf{R}^n$, а L дата $n \times m$ матрица. Доказати да је f диференцијабилно за свако $x \in \mathbf{R}^m$ и да је $df(x) = L$.

2° Нека је A област у $\mathbf{R}^m$ и $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ диференцијабилна функција. Ако диференцијал $df(x)$ не зависи од $x \in A$, доказати да је f збир константне функције и рестрикције на A неке линеарне функције.

10. На примеру функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, дате са $f(x) = (\cos x, \sin x)$ показати да закључак теореме 2.4.1 о средњој вредности не мора да важи за функције са векторским вредностима.

11. Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $a \in A$ и l (не обавезно јединични) вектор из $\mathbf{R}^m$. **Извод функције** f **у тачки** a **по вектору** l дефинише се као

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tl) - f(a)}{t},$$

ако тај лимес постоји и коначан је. Доказати:

1° Ако је $c \in \mathbf{R}$ и постоји $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a)$, тада је

$$\frac{\partial f}{\partial(cl)}(a) = c\frac{\partial f}{\partial l}(a).$$

2° Нека су l_1 и l_2 два вектора из $\mathbf{R}^m$ и нека: (а) $\dfrac{\partial f}{\partial l_1}(x)$ постоји за x из неке околине тачке a; (б) $\dfrac{\partial f}{\partial l_1}$ је непрекидна функција у тачки a; (в) постоји $\dfrac{\partial f}{\partial l_2}(a)$. Тада постоји извод функције f у тачки a по вектору $l_1 + l_2$ и важи

$$\frac{\partial f}{\partial(l_1+l_2)}(a) = \frac{\partial f}{\partial l_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial l_2}(a).$$

3° Примером показати да формула 2° не мора да важи без претпоставке (б).

12. Нека су f и g диференцијабилне реалне функције у тачки $a \in \mathbf{R}^m$ и нека је $c \in \mathbf{R}$. Доказати: 1° $\operatorname{grad}(cf)(a) = c \operatorname{grad} f(a)$; 2° $\operatorname{grad}(f+g)(a) = \operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} g(a)$; 3° $\operatorname{grad} fg(a) = g(a) \operatorname{grad} f(a) + f(a) \operatorname{grad} g(a)$; 4° $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}[g(a) \operatorname{grad} f(a) - f(a) \operatorname{grad} g(a)]$ за $g(a) \neq 0$.

13. Нека је $f(0,0) = 0$ и

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \text{за } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Тада је f непрекидна на $\mathbf{R}^2$ и има у свакој тачки $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ извод у произвољном правцу. Међутим, f није диференцијабилна на $\mathbf{R}^2$. Доказати.

14. Нека $f \in C^{n+1}(U(a), \mathbf{R})$, где је $U(a)$ околина тачке $a \in \mathbf{R}^m$, и нека је сегмент $[a, a+h]$ садржан у $U(a)$. Тада је

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a) + R_n(a,h),$$

$$R_n(a,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(a+th)\, dt.$$

15. За сваки полином P једне реалне променљиве важи следеће тврђење: постоји $x_0 \in \mathbf{R}$, такво да је за свако $x \in \mathbf{R}$: $|P(x_0)| \leqslant |P(x)|$. На пример полинома $P(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$ показати да аналогно тврђење не важи за полиноме више променљивих.

16. За функцију $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ се каже да је **конвексна** на $\mathbf{R}^m$ ако за сваке две тачке x, $y \in \mathbf{R}^m$ и за свако $\alpha \in [0,1]$ важи

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Доказати да је функција $f \in C^2(\mathbf{R}^m)$ конвексна на $\mathbf{R}^m$ ако и само ако је за свако $x \in \mathbf{R}^m$ матрица

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{i,j=1}^{m}$$

позитивно дефинитна.

17. Нека је $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ конвексна функција (в. претходни задатак). Доказати да за произвољне векторе $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^m$ и за позитивне бројеве $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ за које је $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, важи неједнакост

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

3. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

3.1. ПОСТАВКА ЗАДАТКА

Врло често у анализи, као и у другим областима математике, неке променљиве, рецимо x и y, везане су релацијом облика

(1) $$F(x,y) = 0.$$

По правилу, за практично проучавање те везе корисно је написати је у облику

(2) $$y = f(x),$$

тј. једну од променљивих *експлицитно* изразити помоћу друге. Међутим, искуство нам показује да је до таквог облика изражавања функционалне зависности обично тешко, а често и немогуће доћи. Специјално, најчешће не постоји елементарна функција (2) помоћу које се може изразити веза (1), тј. таква функција да је

$$F\big(x, f(x)\big) = 0.$$

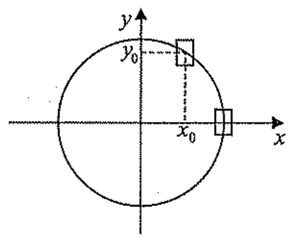
Зато се поменути проблем обично поставља у другачијем облику: уместо да се захтева да се функција (2) експлицитно одреди, тражи се да се докаже да таква функција *постоји* и да је јединствено одређена. Ако је то могуће учинити, кажемо да је функција $y = f(x)$ **имплицитно** задата релацијом (1).

Међутим, ни тако постављено питање нема увек потврдан одговор. Посматрајмо, на пример, једначину круга

(3) $$x^2 + y^2 = 1.$$

За свако x за које је $|x| < 1$ постоје две вредности за y за које важи (3) – то су

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}.$$



Сл. 3.1.1

На тај начин, постоји више функција $y = f(x)$, дефинисаних на сегменту $[-1,1]$, са вредностима у $\mathbf{R}$, за које важи $x^2 + \big(f(x)\big)^2 = 1$. Али, постоји могућност да *ограничавањем скупова у којима узимају вредности променљиве* x и y ипак добијемо само једну функцију $y = f(x)$. На пример, за $x_0 \in (-1,1)$ и (једно од) $y_0 \in [-1,1]$ за које је $x_0^2 + y_0^2 = 1$ изаберимо позитивне бројеве δ и ε тако да $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-1,1)$ и да правоугаоник $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ сече само онај полукруг круга $x^2 + y^2 = 1$ (одређен са $y > 0$, односно $y < 0$) који садржи тачку (x_0, y_0). Тада је геометријски очигледно (сл. 3.1.1) да је потпуно одређена функција $f\colon (x_0-\delta, x_0+\delta) \to (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, таква да је $x^2 + \big(f(x)\big)^2 = 1$ за све $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Поменимо, међутим, да ни овако „ублажени" захтеви неће моћи увек да буду остварени. У претходном примеру узмимо $x_0 = 1$. Очигледно је да, мада постоји само једно y_0 за које је $x_0^2 + y_0^2 = 1$, ма како малим бирали бројеве δ и ε, пресек скупа $\{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$ са правоугаоником $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ неће бити график неке реалне функције.

Ова глава биће углавном посвећена одређивању (довољних) услова који обезбеђују постојање имплицитне функције (2) која је дефинисана релацијом (1) и то, по правилу, у горе описаном „локалном" смислу. При томе, променљиве x и y у релацијама (1) и (2) неће увек узимати вредности из скупа $\mathbf{R}$. Дозвољавајући да x, односно y, узима вредности и из вишедимензионих еуклидских простора $\mathbf{R}^n$, добијамо теореме о егзистенцији како реалних, тако и векторских функција, како једне, тако и више реалних променљивих.

Осим теорема о егзистенцији поменутих функција, даћемо и неке додатне ставове који омогућавају испитивање њихових особина. Најзад, биће дате и неке од многобројних примена поменутих теорема.

3.2. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ СА РЕАЛНИМ ВРЕДНОСТИМА

Посматрајмо најпре најједноставнији случај када променљиве x и y у релацији (1) из претходног одељка узимају реалне вредности, тј. поставимо питање о егзистенцији имплицитне функције једне реалне променљиве која узима реалне вредности. Довољни услови за „локално" постојање такве функције дати су у следећој теореми.

Теорема 3.2.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^2$ отворен скуп, $(a,b) \in A$ и нека је:

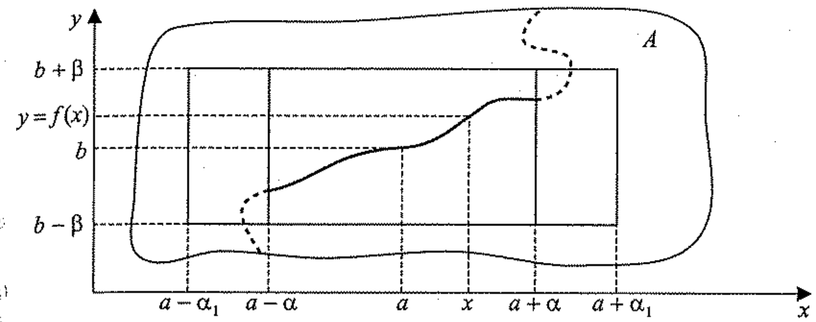
1° $F\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидна функција;

2° $F(a,b) = 0$;

3° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји и непрекидан је на A;

4° $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке (a,b) (где је $U = \{\, x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \alpha \,\}$, $V = \{\, y \in \mathbf{R} \mid |y-b| < \beta \}$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$, таква да је $f(a) = b$ и $F\big(x, f(x)\big) = 0$ за $x \in U$.



Сл. 3.2.1

Доказ.

Претпоставимо, одређености ради, да је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Због непрекидности функције $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји околина тачке (a,b) у којој је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$. За ту околину можемо узети да је правоугаоник $[a-\alpha_1, a+\alpha_1] \times [b-\beta, b+\beta]$ који лежи унутар датог отвореног скупа A. Посматрајмо функцију $F(a,y)$ једне променљиве $y \in [b-\beta, b+\beta]$. Како је $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$, то та функција строго расте, па с обзиром да је $F(a,b) = 0$, то је

$$F(a, b-\beta) < 0 \quad \text{и} \quad F(a, b+\beta) > 0.$$

Због непрекидности саме функције F закључујемо да одговарајуће релације важе и у некој околини тачке a, тј. да постоји број α, $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$, такав да је за све $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ испуњено

$$F(x, b-\beta) < 0 < F(x, b+\beta).$$

Ако сада за свако такво фиксирано x посматрамо функцију $F(x,y)$ као реалну функцију променљиве y, дефинисану на сегменту $[b-\beta, b+\beta]$, добијамо да је то строго растућа непрекидна функција која узима вредности различитог знака на крајевима тог сегмента. Дакле, постоји, јединствено одређена, вредност $y = f(x) \in (b-\beta, b+\beta)$, таква да је $F(x, f(x)) = 0$. При томе је јасно и $f(a) = b$, јер је $y = b$ једина вредност из $(b-\beta, b+\beta)$ за коју је $F(a,y) = 0$.

Докажимо да је овако дефинисана функција $f\colon U \to V$ (где је $U = (a-\alpha, a+\alpha)$, $V = (b-\beta, b+\beta)$) непрекидна. С обзиром да за сваку тачку $x \in U$ важе исти услови (за функцију F) као за тачку $x = a$, то је довољно доказати непрекидност функције f у тачки a. За дато ε, $0 < \varepsilon < \beta$, понављајући претходни поступак, изаберимо δ, $0 < \delta < \alpha$, тако да за свако x за које је $|x-a| < \delta$ постоји само једно y за које је $|y-b| < \varepsilon$ и $F(x,y) = 0$; за то y ће важити $y = f(x)$. Но, тада је $|f(x) - f(a)| = |y-b| < \varepsilon$ за $|x-a| < \delta$, што и значи да је функција f непрекидна у тачки a. ■

Допунићемо наведену теорему о егзистенцији имплицитне функције ставом који описује нека њена својства.

Став 3.2.1

Нека, осим услова 1°, 2°, 3° и 4° претходне теореме, функција F задовољава и услов

5° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ постоји и непрекидан је на A,

тј. нека $F \in C^1(A)$. Тада је функција f, описана у тој теореми, непрекидно диференцијабилна, тј. $f \in C^1(U)$ и за $x \in U$ важи

$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)). \tag{1}$$

Ако је $F \in C^p(A)$ за неко $p \in \mathbf{N}$, тада је $f \in C^p(U)$.

Доказ.

Нека је $x \in U$ и нека је $h \in \mathbf{R}$ такво да $x + h \in U$ (користимо ознаке из претходне теореме). Означимо $y = f(x)$ и $f(x+h) - f(x) = k$. У околини W функција F задовољава услове за примену теореме о средњој вредности. Дакле, постоји број θ, $0 < \theta < 1$, такав да је

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)k.$$

Но, лева страна ове једнакости једнака је нули, јер је и $F(x,y) = F(x, f(x)) = 0$ и $F(x+h, y+k) = F(x+h, f(x+h)) = 0$. Узимајући у обзир да је $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ у околини W, добијамо да је

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x+\theta h, y+\theta k).$$

Како је функција f непрекидна у тачки x, то $h \to 0$ повлачи $k \to 0$, а како су парцијални изводи $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрекидни у тачки (x,y), то преласком на лимес кад $h \to 0$ добијамо

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y),$$

где је $y = f(x)$, чиме је доказана једнакост (1).

Из непрекидности функција $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ у тачки (x,y) следи и непрекидност функције f' у тачки x.

Други део става доказује се индукцијом по p. ■

Нађимо, примера ради, израз за други извод имплицитне функције f. Ако је функција F двапут непрекидно диференцијабилна, диференцирајући једнакост (1) по x добијамо

$$f''(x) = -\frac{1}{(\partial F/\partial y)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(x)\right]\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'(x)\right]\right\},$$

при чему су сви изводи функције F рачунати у тачки $(x, f(x))$.

Примери 3.2.1

1° Посматрајмо поново пример једначине круга, односно функције $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ за $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. У овом случају је очигледно функција F бесконачно диференцијабилна (тј. има непрекидне изводе произвољног реда) и при томе је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

па је услов $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ задовољен ако је $y \neq 0$, тј. у оним тачкама криве $x^2 + y^2 = 1$ за које је $|x| < 1$. Значи, за сваку тачку (x,y) круга, осим за тачке $(1,0)$ и $(-1,0)$, постоји околина у којој је једнозначно одређена бесконачно диференцијабилна функција $y = f(x)$, таква да је $F(x, f(x)) = 0$. При томе је

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y},$$

где је $y = f(x)$. Даљим диференцирањем добијамо

$$f''(x) = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

итд. Наравно, у овом случају могуће је ове формуле проверити и директно, диференцирајући познати експлицитни израз за функцију f (приметимо да ће он бити $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ или $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, зависно од тога којег знака је ордината изабране тачке (x,y)).

2° Одредимо тангенту **Декартовог листа** $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$ у тачки $(1,1)$ (слика 3.2.2).

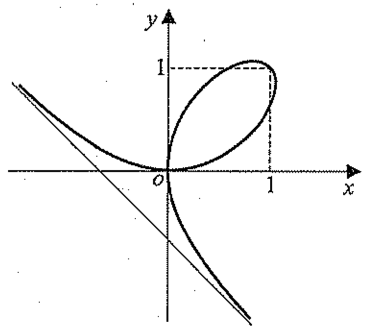
У тој тачки је $F(1,1) = 0$ и

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 3x^2 - 2y \,\Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 3y^2 - 2x \,\Big|_{(1,1)} = 1 \neq 0,$$

па је у некој њеној околини одређена функција $y = f(x)$, таква да је $f(1) = 1$ и

$$f'(1) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(1,1) = -1.$$



Сл. 3.2.2

Дакле, тражена тангента има једначину $y - 1 = -(x - 1)$. ▲

Следећа теорема даје уопштење теореме 3.2.1 и става 3.2.1 на случај имплицитно дефинисане реалне функције више променљивих. И по формулацији и по доказу она се не разликује битно од тих тврђења, па одговарајући доказ нећемо наводити.

Теорема 3.2.2

Нека је $A \subset \mathbf{R}^{m+1}$ отворен скуп, $(a_1, \dots, a_m, b) \in A$ и нека је:

1° $F\colon A \to \mathbf{R}$ непрекидна функција (чији аргумент ћемо означавати са $(x_1, \dots, x_m, y)$),

2° $F(a_1, \dots, a_m, b) = 0$,

3° парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ постоји и непрекидан је на A,

4° $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_m, b) \neq 0$.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке $(a_1, \dots, a_m, b)$ ($U = \prod\limits_{i=1}^{m}(a_i - \alpha_i, a_i + \alpha_i)$, $V = (b - \beta, b + \beta)$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$, таква да је $f(a_1, \dots, a_m) = b$ и $F\big(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)\big) = 0$ за $(x_1, \dots, x_m) \in U$.

Ако је још

5° $F \in C^p(A)$ за неко $p \in \mathbf{N}$,

тада важи $f \in C^p(U)$. При томе је за $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}(x, f(x)). \quad \blacksquare$$

Пример 3.2.2

Претпоставимо да функција $F\colon A \to \mathbf{R}$, где је $A \subset \mathbf{R}^3$ отворен скуп, у некој околини тачке $(x, y, z) \in A$ задовољава услове који гарантују да једначина $F(x, y, z) = 0$ једнозначно дефинише диференцијабилне функције

$$x = x(y, z), \quad y = y(z, x), \quad z = z(x, y).$$

Тада је

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right) = -1.$$

Приметимо да овај резултат показује да се симболи за парцијалне изводе (за разлику од одговарајућих симбола за обичне изводе) не могу третирати као количници „диференцијала“, јер би у противном претходни производ морао бити једнак 1. ▲

3.3. ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ СА ВЕКТОРСКИМ ВРЕДНОСТИМА

Размотримо сада ситуацију када уместо једне имамо више функција које треба „имплицитно“ дефинисати помоћу више датих релација, тачније речено помоћу неког система једначина. Прецизније, претпоставимо да су на неком отвореном

скупу $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ дефинисане реалне функције $F_1, \dots, F_n$, при чему ћемо њихов аргумент означавати са $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, и посматрајмо систем једначина

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Поставља се питање под којим условима се тај систем може „решити“ по непознатим $y_1, \dots, y_n$, тј. под којим условима су „локално“ дефинисане функције

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

које задовољавају систем (1).

Да бисмо теорему која даје одговор на ово питање једноставније формулисали и доказали, уведимо следеће ознаке: уместо $(x_1, \dots, x_m)$ писаћемо x, а уместо $(y_1, \dots, y_n)$ само y; онда ће (x, y) бити ознака за уређену $(m+n)$-торку $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Такође, F ће бити ознака за $(F_1, \dots, F_n)$, а f за $(f_1, \dots, f_n)$, па ће систем (1) моћи кратко да се запише као

$$(1') \qquad F(x, y) = 0,$$

а тражено решење (2) као

$$(2') \qquad y = f(x).$$

У самој теореми и ставу који иза ње следи биће потребно да разматрамо следеће матрице (односно линеарне операторе):

$$d_yF(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}(x,y), \quad d_xF(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}(x,y),$$

које ћемо звати парцијалним диференцијалима функције F. Приметимо да је матрица $d_yF(x, y)$ квадратна, па је дефинисана њена детерминанта

$$\det d_yF(x,y) = \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$$

(јакобијан пресликавања F, схваћеног као функције променљивих $y_1, \dots, y_n$). Ако је та детерминанта у некој тачки различита од нуле, одговарајућа матрица има инверзну $[d_yF(x, y)]^{-1}$. Као што ћемо одмах видети, та инвертибилност матрице $d_yF(x, y)$ игра улогу оног „одлучујућег“ услова (који је у теоремама 3.2.1 и 3.2.2 играо услов $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$), који обезбеђује егзистенцију имплицитне функције.

Теорема 3.3.1
Нека је $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ отворен скуп, $(a,b) \in A$ и нека је:

1° $F\colon A \to \mathbf{R}^n$ непрекидна функција,

2° $F(a,b) = 0$,

3° парцијални диференцијал d_yF је дефинисан на A и сви његови елементи $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}$ су непрекидни $(j,k = 1, \ldots, n)$,

4° $\det d_yF(a,b) \neq 0$, тј. матрица $d_yF(a,b)$ је инвертибилна.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке (a,b) (где је U околина тачке a у $\mathbf{R}^m$, а V околина тачке b у $\mathbf{R}^n$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$, таква да је $f(a) = b$ и $F(x, f(x)) = 0$ за $x \in U$.

Доказ.

Ради једноставности писања претпоставимо да је $a = 0 = (0,\ldots,0)$ и $b = 0 = (0,\ldots,0)$. Јасно је да то неће ограничити општост нашег излагања.

Претпоставимо сада да је функција $y = f(x)$ која задовољава услове теореме већ нађена, тј. да за $y = f(x)$ важи

$$F(x,y) = 0.$$

Тада (и само тада) ће важити

$$y - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y) = y.$$

На тај начин, тражена вредност y може се третирати као непокретна тачка пресликавања Φ_x које је за фиксирано x дато са

$$\Phi_x(y) = y - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y) \tag{3}$$

(при томе се претпоставља да $(x,y) \in A$). Зато ћемо за доказ егзистенције и јединости вектора y користити Банахову теорему о егзистенцији непокретне тачке (теорема 1.3.2).

Приметимо најпре да је релацијом (3) пресликавање Φ_x коректно дефинисано. Заиста, за $(x,y) \in A$ је $F(x,y) \in \mathbf{R}^n$; оператор (матрица) $d_yF(0,0)$ је инвертибилан, по претпоставци теореме, и пресликава $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^n$; зато и $[d_yF(0,0)]^{-1}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, па је композиција $[d_yF(0,0)]^{-1}F(x,y)$ дефинисана и њене вредности су у $\mathbf{R}^n$. Тако је и $\Phi_x(y)$ дефинисано ако је $(x,y) \in A$ и припада $\mathbf{R}^n$.

Да бисмо могли да применимо Банахову теорему, треба да правилно одаберемо (комплетан) метрички простор који ће оператор Φ_x преводити у самог себе и на коме ће он бити контракција.

Приметимо најпре да је за свако фиксирано x пресликавање Φ_x диференцијабилно у свакој тачки y за коју је $(x,y) \in A$ и важи

$$\begin{aligned} d\Phi_x(y) &= E - [d_yF(0,0)]^{-1}d_yF(x,y) \\ &= [d_yF(0,0)]^{-1}\big(d_yF(0,0) - d_yF(x,y)\big), \end{aligned}$$

где је E јединична матрица типа $n \times n$ (тј. јединични оператор простора $\mathbf{R}^n$). Означимо са C норму оператора $[d_yF(0,0)]^{-1}$. Како је, по претпоставци, оператор $d_yF(x,y)$ непрекидан у тачки $(0,0)$, то је за (x,y) из неке околине $W' = U' \times V'$ те тачке испуњено

$$\|d_yF(0,0) - d_yF(x,y)\| < \frac{1}{2C},$$

а самим тим и

$$\|d\Phi_x(y)\| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Даље ћемо претпостављати да је услов (4) испуњен.

Према теореми о средњој вредности (теорема 2.4.2), за фиксирано $x \in U'$ и произвољне $y_1,\ y_2 \in V'$ важи

$$\begin{aligned} \|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\| &\leqslant \|y_1 - y_2\| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|d\Phi_x\big(y_1 + t(y_2 - y_1)\big)\| \\ &< \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Овде смо користили чињеницу да се околина V' увек може изабрати тако да буде конвексна (на пример, кугла), па тада за $y_1,\ y_2 \in V'$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ такође важи $y_1 + t(y_2 - y_1) \in V'$.

Фиксирајмо сада произвољан број $\varepsilon > 0$, такав да је затворена кугла $V = K[0,\varepsilon]$ простора $\mathbf{R}^n$ садржана у V'. Докажимо да постоји број $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такав да је отворена кугла $U = K(0,\delta)$ простора $\mathbf{R}^n$ садржана у U' и да за свако $x \in U$ пресликавање Φ_x преводи куглу V у саму себе.

У том циљу, користећи непрекидност функције F у тачки $(0,0)$ и чињеницу да је $F(0,0) = 0$, одаберимо позитиван број δ тако да $U = K(0,\delta) \subset U'$ и да за $x \in U$ важи

$$\|\Phi_x(0)\| = \|[d_yF(0,0)]^{-1}F(x,0)\| \leqslant \|d_yF(0,0)^{-1}\|\,\|F(x,0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затим, за $x \in U$ и $y \in V$, користећи оцену (5), добијамо

$$\|\Phi_x(y)\| \leqslant \|\Phi_x(y) - \Phi_x(0)\| + \|\Phi_x(0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

што и значи да $\Phi_x\colon V \to V$ за $x \in U$.

Кугла V је затворен подскуп комплетног метричког простора $\mathbf{R}^n$, па је и сама један комплетан метрички простор. На основу оцене (5) пресликавање Φ_x је, за свако $x \in U$, контракција тог простора. Према Банаховој теореми закључујемо да за свако $x \in U$ постоји и јединствено је одређена тачка $y = f(x) \in V$, која је непокретна за пресликавање Φ_x, тј. таква је да важи

$$f(x) = \Phi_x f(x) = f(x) - [d_yF(0,0)]^{-1}F(x, f(x)),$$

односно $F(x, f(x)) = 0$ за $x \in U$. Значи, функција $y = f(x)$ задовољава једначину $F(x,y) = 0$ за $(x,y) \in W = U \times V$. За њу је $f(0) = 0$ јер је

$$\Phi_0(0) = 0 - [d_yF(0,0)]^{-1}F(0,0) = 0,$$

а непокретна тачка пресликавања Φ_0 је јединствено одређена.

Докажимо још да је функција f непрекидна. Заиста, за дато ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, можемо узети δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, тако да за свако $x \in K(0,\delta_1) \subset U$ постоји јединствено $y \in K(0,\varepsilon_1)$ за које је $F(x,y) = 0$, при чему је баш $y = f(x)$. Но, тада је

$$\|f(x) - f(0)\| = \|f(x) - 0\| = \|y\| < \varepsilon_1$$

за $\|x\| < \delta_1$, што и значи да је f непрекидна у нули. Међутим, услови теореме су испуњени за сваку тачку околине $W = U \times V$, па је функција $f\colon U \to V$ непрекидна.

Тиме је теорема у потпуности доказана. ∎

Као и код случаја функције са реалним вредностима, допунимо ову теорему ставом који ближе описује нека својства имплицитне функције.

Став 3.3.1

Нека, осим услова 1°, 2°, 3° и 4° претходне теореме, функција F задовољава и услов

5° парцијални диференцијал d_xF је дефинисан на A и сви његови елементи $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ су непрекидни ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$),

тј. нека $F \in C^1(A, \mathbf{R}^n)$. Тада је функција f, описана у тој теореми, непрекидно диференцијабилна, тј. $f \in C^1(U, \mathbf{R}^n)$ и за свако $x \in U$ важи

$$df(x) = -\left[d_yF\big(x, f(x)\big)\right]^{-1} d_xF\big(x, f(x)\big). \tag{6}$$

Ако је $F \in C^p(A, \mathbf{R}^n)$ за неко $p \in \mathbf{N}$, тада је $f \in C^p(U, \mathbf{R}^n)$.

Доказ.

Доказаћемо само диференцијабилност функције f и формулу (6). Као и код доказа непрекидности функције f, није ограничење општости ако то урадимо само за $x = a$. Такође, опет ћемо претпоставити да је $a = 0$ и $b = 0$.

Означимо са L линеарни оператор

$$L = -[d_yF(0,0)]^{-1} d_xF(0,0).$$

Приметимо да је он добро дефинисан: као што смо раније помињали, $[d_yF(0,0)]^{-1}$ је матрица типа $n\times n$, а $d_xF(0,0)$ је матрица типа $n\times m$; значи, њихов производ (у назначеном поретку) је матрица типа $n \times m$ и пресликава m-димензионе векторе у $\mathbf{R}^n$. Докажимо да је заиста L диференцијал функције f у тачки 0. За то је довољно доказати да је

$$f(x) - f(0) = Lx + o(x) \qquad (x \to 0).$$

Стављајући $y = f(x)$ и узимајући у обзир да је $F(x,y) = F(0,0) = f(0) = 0$, на основу диференцијабилности функције F у тачки $(0,0)$, имамо

$$0 = F(x,y) - F(0,0) = d_xF(0,0)x + d_yF(0,0)y + o\big(\|x\| + \|y\|\big) \qquad (\|x\| \to 0)$$

(приметимо да $\|x\| \to 0$ повлачи $\|y\| \to 0$ због непрекидности функције $y = f(x)$ у нули). Одавде је

$$[d_yF(0,0)]^{-1} d_xF(0,0)x + y = [d_yF(0,0)]^{-1} o\big(\|x\| + \|y\|\big) \qquad (\|x\| \to 0),$$

тј.

$$\|y - Lx\| \leqslant \|[d_yF(0,0)]^{-1}\| \cdot o\big(\|x\| + \|y\|\big) \qquad (\|x\| \to 0). \tag{7}$$

Претпоставимо да је $\|x\|$, а са њим и $\|y\|$, довољно мало, тако да је десна страна релације (7) мања од $\frac{1}{2}\big(\|x\| + \|y\|\big)$. Тада из (7) добијамо

$$\|y\| - \|L\| \cdot \|x\| \leqslant \|y - Lx\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|,$$

одакле је

$$\frac{1}{2}\|y\| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \|L\|\right)\|x\|,$$

тј. $\|y\| \leqslant C\|x\|$ за неко $C > 0$. Ако сада ту оцену поново заменимо у релацију (7), добијамо

$$\|y - Lx\| \leqslant \|d_yF(0,0)\|^{-1} \cdot o\big((C+1)\|x\|\big) = o(\|x\|) \qquad (\|x\| \to 0),$$

што и значи да је

$$f(x) - f(0) - Lx = y - Lx = o(x) \qquad (x \to 0).$$

Тиме је доказано да је оператор L диференцијал функције f у тачки 0. ∎

Напишимо у развијеном облику израз за диференцијал функције f у тачки x,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

при чему су сви изводи функције F рачунати у тачки $(x,y) = \big(x, f(x)\big)$.

Пример 3.3.1

Претпоставимо да је дат систем од n једначина са $2n$ променљивих

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n),$$

тј. нека је дата функција $F\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ и једначина $F(x,y) = 0$. Претпоставимо, даље, да су „локално“ (дакле, у смислу претходне теореме и става) испуњени услови за егзистенцију диференцијабилне функције $y = f(x)$, такве да је $F(x, f(x)) = 0$ у околини неке фиксиране тачке a. Израчунајмо јакобијан функције f у тој тачки, тј. детерминанту $\det df(a) = \dfrac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$ диференцијала функције f у тачки a.

На основу формуле (6) имамо

$$\det df(a) = \det\{-[d_yF(a,f(a))]^{-1}d_xF(a,f(a))\}.$$

Као што знамо, детерминанта производа двеју матрица је производ њихових детерминаната. Што се множења са (-1) тиче, он мења матрицу тако што мења знак *свим* њеним елементима, што подразумева множење њене детерминанте са $(-1)^n$ (n је број врста, односно колона, те матрице). Најзад, детерминанта инверзне матрице је реципрочна вредност детерминанте дате матрице, па добијамо

$$\det df(a) = (-1)^n \frac{\det d_xF\big(a,f(a)\big)}{\det d_yF\big(a,f(a)\big)},$$

тј.

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a) = (-1)^n \frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a,f(a)) \Big/ \frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}(a,f(a)). \quad \blacktriangle$$

3.4. ТЕОРЕМА О ИНВЕРЗНОЈ ФУНКЦИЈИ

Као прву примену доказане теореме о имплицитној функцији навешћемо теорему која даје услове за егзистенцију и диференцијабилност инверзне функције дате векторске функције више променљивих. Као и сама теорема о имплицитној функцији, и ово тврђење ће бити „локалног" карактера, тј. биће везано за неке околине посматраних тачака у домену и кодомену.

Разматраћемо функцију $f\colon A \to \mathbf{R}^m$, где је A отворен подскуп простора $\mathbf{R}^m$, задату системом једначина

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\dots,x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1,\dots,x_m). \end{cases}$$

Грубо говорећи, теорема о инверзној функцији каже да је функција f локално инвертибилна (тј. да се систем (1) може локално решити по променљивим $x_1, \dots, x_m$) ако је инвертибилан њен диференцијал df у датој тачки $a \in A$, тј. ако постоји инверзна матрица $[df(a)]^{-1}$. Прецизније, важи

Теорема 3.4.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $a \in A$ и $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ непрекидно диференцијабилна функција, таква да је $\det df(a) \neq 0$. Тада постоје околине U тачке a и V тачке $b = f(a)$, такве да је рестрикција $f\colon U \to V$ бијекција. При томе је инверзна функција $f^{-1}\colon V \to U$ непрекидно диференцијабилна и важи

$$(2) \qquad df^{-1}(y) = [df(x)]^{-1}$$

за све $x \in U$ и $y = f(x) \in V$.

Доказ.

Уведимо функцију $F\colon A \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ помоћу $F(x,y) = f(x) - y$ за $x \in A$, $y \in \mathbf{R}^m$. Проверимо да та функција задовољава услове теореме 3.3.1 у тачки $(a,b) \in \mathbf{R}^{2m}$ да би се једначина $F(x,y) = 0$ могла „локално решити" по x.

Као прво, због $b = f(a)$ је $F(a,b) = 0$. Затим, парцијални диференцијал d_xF је дефинисан и непрекидан на $A \times \mathbf{R}^m$, јер је

$$d_xF(x,y) = df(x).$$

Најзад, по претпоставци је $d_xF(a,b) = df(a)$ инвертибилна матрица. Дакле, на основу теореме о имплицитној функцији и става 3.3.1, постоје околина $W = U_1 \times V$ тачке (a,b) и непрекидно диференцијабилна функција $g\colon V \to U_1$, такви да је $g(b) = a$ и $F\big(g(y),y\big) = 0$, тј. $f(g(y)) = y$ за све $y \in V$. Ако још ставимо $U = g(V)$, функције f и g ће бити узајамно инверзне између U и V, тј. биће $g = f^{-1}$. Доказ чињенице да је U околина тачке a може се наћи, на пример, у књизи [27].

На основу става 3.3.1, за све $x \in U$ и $y = f(x) \in V$, важи

$$dg(y) = -[d_xF(x,y)]^{-1}d_yF(x,y) = -[df(x)]^{-1}(-E) = [df(x)]^{-1},$$

где је са E означена јединична матрица типа $m \times m$. ∎

За функцију f која има својства описана у овој теореми, дакле која је бијективно пресликавање отворених подскупова простора $\mathbf{R}^m$, при чему су и f и f^{-1} диференцијабилне функције, каже се да је **дифеоморфизам**. Ако су, осим тога, функције f и f^{-1} класе C^k за неко $k \in \mathbf{N}$ (тј. ако су k пута непрекидно диференцијабилне), каже се да је f C^k-дифеоморфизам или дифеоморфизам глаткости k. На основу става 3.3.1, као допуну претходне теореме, можемо извести следеће тврђење.

Став 3.4.1

Ако је, осим услова у претходној теореми, $f \in C^k(A,\mathbf{R}^m)$, тада се околине U и V могу тако изабрати да је f C^k-дифеоморфизам између тих околина. ∎

Пример 3.4.1

Нека је дато пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ са $f(x,y) = (u,v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = (x+y)^2$. Тада је

$$df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix},$$

па је $\det df(x,y) = 4(x+y)(x-y)$. Значи, услов за локалну инвертибилност ове функције биће испуњен у оним тачкама (x,y) за које је $|x| \neq |y|$. Свака од одговарајућих тачака (u,v) има околину у којој је дефинисана инверзна функција f^{-1}, при чему је

$$\begin{aligned} df^{-1}(x^2+y^2,(x+y)^2) &= \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2(x+y)(x-y)} \begin{bmatrix} x+y & -y \\ -(x+y) & x \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

3.5. ЗАВИСНОСТ ФУНКЦИЈА

Дефиниција 3.5.1

За систем диференцијабилних реалних функција

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\dots,x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1,\dots,x_m), \end{cases}$$

дефинисаних у некој околини U тачке $a \in \mathbf{R}^m$, кажемо да је **функционално зависан** у тој околини ако постоји диференцијабилна реална функција F, дефинисана у некој околини V тачке $b = (f_1(a),\dots,f_n(a)) \in \mathbf{R}^n$, која није идентички једнака нули у V, таква да је

$$F\big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big) = 0$$

за све $x = (x_1,\dots,x_m) \in U$. У супротном, тј. ако таква функција не постоји, кажемо да су функције (1) **функционално независне**.

Појам *линеарне зависности* функција, познат из линеарне алгебре, очигледно је специјалан у односу на управо уведени појам функционалне зависности – линеарна зависност повлачи функционалну, али обратно не важи.

Пример 3.5.1

Посматрајмо функције

$$y_1 = x_1 + \dots + x_m,\quad y_2 = x_1^2 + \dots + x_m^2,\quad y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{m-1}x_m,$$

дефинисане на $\mathbf{R}^m$. Очигледно за све $(x_1,\dots,x_m) \in \mathbf{R}^m$ важи $y_1^2 - y_2 - 2y_3 = 0$, па су ове функције функционално (али не и линеарно) зависне. ▲

Зависност, односно независност, функција није увек лако проверити. У линеарној алгебри знамо да се то ради испитивањем ранга матрице формиране од коефицијената одговарајућих линеарних функција. Аналоган поступак може се спровести и за испитивање функционалне зависности – наравно, у локалном смислу – посматрањем Јакобијеве матрице функције $y = f(x)$, дате са

$$(2)\qquad y = (y_1,\dots,y_n) = \big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big).$$

Теорема 3.5.1

Нека је (1) систем глатких функција, дефинисаних у околини U тачке $a \in \mathbf{R}^m$ такав да Јакобијева матрица

$$df(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}$$

функције (2) има ранг једнак k за свако $x \in U$. Тада:

1° ако је $k = n$, систем (1) је функционално независан у околини U;

2° ако је $k < n$, постоји околина U' тачке a и k функционално независних функција датог система – нека су то функције $f_1,\dots,f_k$ – тако да за неке функције $g_i(y_1,\dots,y_k)$, дефинисане и глатке у околини тачке $\big(f_1(a),\dots,f_k(a)\big)$, за $x \in U'$ важи

$$(3)\qquad f_i(x_1,\dots,x_m) = g_i\big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_k(x_1,\dots,x_m)\big),\quad i = k+1,\dots,n.$$

Доказ.

1° Нека је $\operatorname{rang} df(x) = k = n$ и, самим тим, $n \leqslant m$. Не ограничавајући општост, можемо претпоставити да је

$$(4)\qquad \frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

за све $x \in U$. Може се доказати (в. нпр. [27]) да је тада слика $f(U)$ околина тачке $b = f(a)$. Претпоставимо, супротно од оног што доказујемо, да постоји диференцијабилна функција $F(y_1,\dots,y_n)$ која није идентички једнака нули у тој околини тачке b, таква да је

$$F\big(f_1(x),\dots,f_n(x)\big) = 0 \quad \text{за } x \in U.$$

По правилу диференцирања сложене функције налазимо

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0,$$

за $i = 1,\dots,n$. Но, то значи да су врсте детерминанте (4) линеарно зависне (коефицијенти $\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ нису сви једнаки нули, јер F није идентички једнака константи), па је та детерминанта једнака нули. Ова контрадикција доказује први део теореме.

2° Нека је $\operatorname{rang} df(x) = k < n$ и нека је, на пример, различит од нуле минор реда k те матрице који стоји у њеном горњем левом углу,

$$(5)\qquad \frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_1,\dots,x_k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

за све $x \in U$, док су сви минори реда $k+1$ једнаки нули. Тада независност функција $f_1,\dots,f_k$ следи из доказаног дела теореме, па је остало да се докаже да се свака од преосталих функција $f_{k+1},\dots,f_n$ може изразити у облику (3). Наравно, довољно је то доказати за једну од тих функција, на пример, за функцију f_{k+1}.

Посматрајмо систем једначина

$$f_i(x_1,\dots,x_m)-y_i=0 \qquad (i=1,\dots,k). \tag{6}$$

Због претпоставке (5), на основу теореме о имплицитној функцији, тај систем се може „локално" решити по променљивим $x_1,\dots,x_k$, тј. постоје глатке функције $\varphi_1,\dots,\varphi_k$, тако да у одговарајућим околинама важи

$$x_i=\varphi_i(y_1,\dots,y_k,x_{k+1},\dots,x_m) \qquad (i=1,\dots,k). \tag{7}$$

Сада је

$$\begin{aligned} y_{k+1}&=f_{k+1}\big(\varphi_1(\cdots),\dots,\varphi_k(\cdots),x_{k+1},\dots,x_m\big)\\ &=\Phi_{k+1}(y_1,\dots,y_k,x_{k+1},\dots,x_m). \end{aligned}$$

Остало је да се докаже да функција Φ_{k+1} не зависи (у погодно одабраној околини) непосредно од променљивих $x_{k+1},\dots,x_m$, а за то је довољно доказати да су парцијални изводи $\dfrac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial x_r}$ једнаки нули у тој околини (за $r=k+1,\dots,m$). Учинићемо то за $r=k+1$ – за остале вредности r доказ је аналоган.

Диференцирајмо по x_{k+1} релације (6) и узимајући у обзир (7) добијамо

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+1}}=0 \qquad (i=1,\dots,k). \tag{8}$$

С друге стране је

$$\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}}=\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}. \tag{9}$$

Посматрајмо сада детерминанту система од $k+1$ једначине (8), (9),

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта је један од минора реда $k+1$ матрице $df(x)$, па је по претпоставци једнака нули (у датој околини U). Нека је Δ_i алгебарски кофактор који одговара i-том елементу последње колоне детерминанте Δ $(i=1,\dots,k+1)$. Помножимо i-ту једначину система (8), (9) са Δ_i и саберимо тако добијене једначине. Добијамо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{k+1}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta_1+\cdots+\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1}\Delta_{k+1}\right)+\cdots\\ &\qquad+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{k+1}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\Delta_1+\cdots+\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k}\Delta_{k+1}\right)\\ &\qquad\qquad+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}\Delta_1+\cdots+\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}\right)=\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}. \end{aligned}$$

На основу познате теореме линеарне алгебре, последња једнакост се своди на

$$0=\Delta=\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\Delta_{k+1}.$$

Међутим, Δ_{k+1} је управо минор (5) који није једнак нули, па закључујемо да је $\dfrac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial x_{k+1}}=0$, чиме је доказ теореме завршен. ■

Пример 3.5.2

Посматрајмо поново функције из примера 3.5.1. Матрица која нас интересује је облика

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_m\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_i-x_1 & \sum\limits_{i=1}^{m}x_i-x_2 & \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}x_i-x_m \end{bmatrix}.$$

Лако је проверити да су сви минори трећег реда те матрице идентички једнаки нули, док је у свакој тачки $(x_1,\dots,x_m)\in\mathbf{R}^m$, у којој нису све координате $x_1,\dots,x_m$ једнаке међу собом, бар један од минора другог реда различит од нуле. Дакле, наш систем је функционално зависан (што смо експлицитно проверили већ у примеру 1), док су у некој околини сваке од описаних тачака функције y_1 и y_2 независне, а функција y_3 се може преко њих изразити. ▲

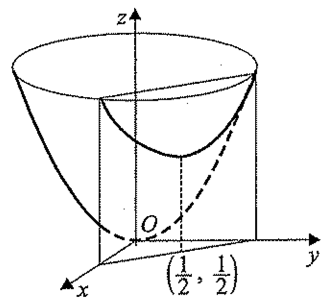
Поменимо на крају да смо у целом одељку претпостављали да матрица $df(x)$ задржава константан ранг за све $x\in U$. Наравно, то не мора увек бити случај, што значи да може да се догоди да у неким деловима области дефинисаности између функција f_i може да постоји једна, а у другим друга зависност (или да оне ту буду независне). Одговарајући пример наводимо у задатку 12.

3.6. УСЛОВНИ ЕКСТРЕМУМИ

У одељку 2.6 упознали смо се са методама одређивања екстремних вредности реалних функција више променљивих које су у доброј мери аналогне ономе што нам је познато за функције једне променљиве. Код функција више променљивих, међутим, често се срећемо и са једном новом ситуацијом – да код одређивања екстремума променљиве не могу слободно да се мењају у области дефинисаности функције, већ су оне везане неким додатним релацијама. Илуструјмо то на једном примеру.

Пример 3.6.1

Посматрајмо функцију $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, дату са $f(x,y)=x^2+y^2$. Одредимо најмању вредност те функције, под условом да су променљиве x и y везане релацијом $x+y=1$.



Сл. 3.6.1

Из дате везе следи $y = 1 - x$, па је у одговарајућим тачкама

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Минимална вредност добијеног израза се лако одређује – она износи $1/2$ и постигнута је за $x = 1/2$ (па и $y = 1/2$). Приметимо да сама функција f у свакој околини тачке $(1/2, 1/2)$ има и мањих вредности од $1/2$; иначе њена најмања вредност на $\mathbf{R}^2$ је 0. ▲

Задаци оваквог типа често се срећу приликом испитивања понашања функције више променљивих на рубу њиховог домена, што смо такође већ помињали у одељку 2.6.

Формулишимо сада у општем облику проблем одређивања условног екстремума.

Нека је дата функција $f\colon A \to \mathbf{R}$, дефинисана на отвореном скупу $A \subset \mathbf{R}^m$. Нека су, осим тога, дате функције $\varphi_i\colon A \to \mathbf{R}$, за $i = 1, \ldots, s$, где је s фиксиран природан број мањи од m. Означимо са B скуп

$$B = \{\, x \in A \mid \varphi_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, s \,\}.$$

Казаћемо да је скуп B *одређен условима* $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_s(x) = 0$.

Дефиниција 3.6.1

Кажемо да функција f у тачки $a \in B$ има **локални минимум при условима** $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_s(x) = 0$ ако постоји број $r > 0$, такав да је за свако $x \in B$ за које је $d(x, a) < r$ испуњено $f(x) \geqslant f(a)$:

$$(\exists r > 0)\big(\forall x \in B \cap K(a, r)\big)\ f(x) \geqslant f(a).$$

Слично се дефинишу строги локални минимум, као и (строги) **локални максимум** при датим условима.

У наведеном примеру имали смо $s = 1$ и $\varphi_1(x, y) = x + y - 1$, па је скуп B био одговарајућа права у $\mathbf{R}^2$ (сл. 3.6.1).

Приликом одређивања условних екстремума увек ћемо претпостављати да су функције $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ глатке и да матрица

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

у околини „сумњиве“ тачке има ранг једнак s. Наиме, ако то не би био случај, на основу теореме 3.5.1, бар једна од функција φ_i могла би се „локално“ изразити

преко осталих, па би одговарајући услов $\varphi_i(x) = 0$ био „сувишан“ (могао би се изоставити из списка услова, без промене одговарајућег скупа B).

Уз наведене претпоставке испуњени су услови теореме о имплицитној функцији, па се неких s од променљивих $x_1, \ldots, x_m$ могу из датог система $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, локално изразити помоћу осталих. На пример, то могу бити $x_1, \ldots, x_s$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(x_{s+1}, \ldots, x_m) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_s &= \psi_s(x_{s+1}, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

у некој околини дате тачке. Membership Заменом ових израза у израз за функцију f добија се

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_m) &= f\big(\psi_1(x_{s+1}, \ldots, x_m), \ldots, \psi_s(x_{s+1}, \ldots, x_m), x_{s+1}, \ldots, x_m\big) \\ &= g(x_{s+1}, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

па се проблем одређивања условног екстремума своди на одређивање обичног локалног екстремума функције g од $m - s$ променљивих на његовом домену. У примеру 3.6.1 смо управо тако и поступили: везу $x + y = 1$ смо „решили по y“: $y = 1 - x$, па смо заменом добили $f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, и даљи поступак наставили са функцијом g једне променљиве.

Описани метод одређивања условног екстремума има два недостатка: прво, без обзира на принципијелну могућност решавања система $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, који гарантује теорема о имплицитној функцији, та решења се по правилу не могу експлицитно добити; друго, оваквим поступком се у одређеном смислу нарушава равноправност међу променљивим $x_1, \ldots, x_m$ (неке остају независно променљиве, а друге се преко њих изражавају), што у неким случајевима доводи до компликовања даљих извођења. Оба ова недостатка отклањају се применом **Лагранжовог метода мултипликатора** који ћемо описати у наставку овог одељка. Најпре ћемо извести неопходне, а затим и довољне услове за егзистенцију условног екстремума Лагранжовим методом.

Теорема 3.6.1

Нека је $A \subset \mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f \in C^1(A)$ и $\varphi_i \in C^1(A)$ за $i = 1, \ldots, s$, где је $s < m$, при чему матрица (1) у некој околини тачке $a \in A$ има ранг једнак s. Ако функција f у тачки a има локални екстремум при условима $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_s(x) = 0$, онда постоје реални бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, такви да је a стационарна тачка функције

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_s\varphi_s.$$

Доказ.

Нека је, на пример,

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)}{D(x_1, \ldots, x_s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial x_s}(a) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1'}$$

Тада су једнозначно одређени реални бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, такви да је

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu}(a) + \cdots + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}(a) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

За функцију $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_s\varphi_s$ је онда испуњено $\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu}(a) = 0$ за $\nu = 1, \ldots, s$; остаје да се покаже да је и $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(a) = 0$ за $j = s+1, \ldots, m$.

Према теореми о имплицитној функцији, за систем

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in A,$$

постоји локално решење по променљивим $x_1, \ldots, x_s$,

$$x_i = \psi_i(x_{s+1}, \ldots, x_m), \quad i = 1, \ldots, s,$$

при чему $(x_{s+1}, \ldots, x_m)$ припада некој околини U тачке $(a_{s+1}, \ldots, a_m)$ (где је $a = (a_1, \ldots, a_m)$), а ψ_i су непрекидно диференцијабилне функције у тој околини. По правилу диференцирања сложене функције, у тој околини је

(3) $$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s}\frac{\partial \psi_s}{\partial x_j} = 0, \quad j = s+1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, s.$$

На скупу U функција

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f\big(\psi_1(x_{s+1}, \ldots, x_m), \ldots, \psi_s(x_{s+1}, \ldots, x_m), x_{s+1}, \ldots, x_m\big)$$

има локални екстремум у тачки $(a_{s+1}, \ldots, a_m)$. Зато је у тој тачки

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial \psi_s}{\partial x_j} = 0, \quad j = s+1, \ldots, m.$$

Комбинујући једнакости (2) и (3), из последње једнакости добијамо да је, за $j = s+1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(a) + \cdots + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(a) \\ &= -\sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j} + \lambda_1\Big(-\sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j}\Big) + \cdots + \lambda_s\Big(-\sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j}\Big) \\ &= -\sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu} + \cdots + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}\Big) = -\sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_j} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

при чему су сви изводи рачунати у одговарајућим тачкама. Дакле, тачка a је стационарна за функцију F, што је и требало доказати. ■

Приликом практичног одређивања потенцијалних тачака условног екстремума треба, дакле, наћи стационарне тачке Лагранжове функције F, тј. решења следећег система од $m+s$ једначина по непознатим $x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_s \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} = 0, & j = 1, \ldots, m, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} \equiv \varphi_i = 0, & i = 1, \ldots, s. \end{cases}$$

За проверу да ли су решења тог система заиста тачке траженог условног екстремума функције f користимо следећу теорему.

Теорема 3.6.2

Нека, уз ознаке и претпоставке претходне теореме, важи:

1° $f \in C^2(A)$, $\varphi_i \in C^2(A)$, $i = 1, \ldots, s$;

2° $a \in B$ је стационарна тачка функције $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_s\varphi_s$ за неки избор реалних бројева $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;

3° важи услов $(1')$.

За $(h_{s+1}, \ldots, h_m) \in \mathbf{R}^{m-s}$ означимо са

$$\Phi(h_{s+1}, \ldots, h_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

квадратну форму променљивих $h_{s+1}, \ldots, h_m$, где су $h_1, \ldots, h_s$ одређени системом једначина

(4) $$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m}(a)h_m = 0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Ако је форма Φ позитивно (негативно) дефинитна, тада је a тачка локалног минимума (максимума) функције f при условима $\varphi_1 = \cdots = \varphi_s = 0$.

Доказ.

Нека је $h \in \mathbf{R}^m$ такво да $a+h \in B$ (тј. $\varphi_i(a) = \varphi_i(a+h) = 0$ за $i = 1, \ldots, s$) и $[a, a+h] \subset A$. На основу Тејлорове формуле важи:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= F(a+h) - F(a) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\big(\|h\|^2\big) \qquad (h \to 0). \end{aligned}$$

Јасно је да замена променљивих $h_1, \ldots, h_s$, које се из система (4) изражавају линеарно преко променљивих $h_{s+1}, \ldots, h_m$, трансформише последњу једнакост у

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\Phi(h_{s+1}, \ldots, h_m) + o\big(\|h\|^2\big) \qquad (h \to 0),$$

па тврђење теореме следи непосредно. ■

Пример 3.6.2

Нађимо локалне екстремуме функције $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = xyz$, при услову $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Формирајмо Лагранжову функцију

$$F(x,y,z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3).$$

Из услова

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

добијамо 14 стационарних тачака функције F:

$$(5)\qquad (1,1,1),\quad (1,-1,-1),\quad (-1,1,-1),\quad (-1,-1,1)\qquad (\lambda=-1/2),$$

$$(6)\qquad (-1,-1,-1),\quad (-1,1,1),\quad (1,-1,1),\quad (1,1,-1)\qquad (\lambda=1/2),$$

$$(7)\qquad (\pm\sqrt{3},0,0),\quad (0,\pm\sqrt{3},0),\quad (0,0,\pm\sqrt{3})\qquad (\lambda=0).$$

Квадратна форма за испитивање карактера тих стационарних тачака има облик

$$\Phi = 2\lambda(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+2zh_1h_2+2yh_1h_3+2xh_2h_3,$$

при чему λ, x, y, z имају одговарајуће вредности. На пример, у тачки $(1,1,1)$ та форма постаје

$$(8)\qquad \Phi = -h_1^2-h_2^2-h_3^2+2h_1h_2+2h_1h_3+2h_2h_3.$$

При томе су прираштаји h_1, h_2, h_3 везани условом

$$(9)\qquad h_3 = -(h_1+h_2),$$

па замењујући у израз за Φ добијамо

$$\Phi = -h_1^2-h_2^2-(h_1+h_2)^2+2h_1h_2-2(h_1+h_2)^2 = -(h_1-h_2)^2-3(h_1+h_2)^2<0$$

за све $(h_1,h_2)\neq(0,0)$. На тај начин, у тачки $(1,1,1)$ функција f има локални условни максимум.

На сличан начин се доказује да функција f има такође локални условни максимум (једнак 1) у свакој од тачака (5), а локални условни минимум (једнак -1) у свакој од тачака (6). У тачкама (7) нема екстремума.

Приметимо да форма (8) без услова (9) није дефинитна. ▲

Као што смо поменули у одељку 2.6, испитивање условног екстремума је често потребно приликом одређивања апсолутног екстремума неке функције више променљивих, дефинисане у некој ограниченој затвореној области. При томе, у таквим случајевима обично нема потребе за испитивањем карактера добијених стационарних тачака. Наведимо један такав пример.

Пример 3.6.3

Нађимо највећу и најмању вредност функције $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ на скупу $A=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 25\,\}$.

Како се парцијални изводи $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не анулирају истовремено у унутрашњости скупа A, то се тражена максимална и минимална вредност функције f (које постоје по Вајерштрасовој теореми) достижу на кругу $x^2+y^2=25$. Дакле, треба одредити екстремуме функције f при томе услову. За Лагранжову функцију

$$F = x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

је

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-12+2\lambda x=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2y+16+2\lambda y=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25=0$$

за $x=3$, $y=-4$, $\lambda=1$ или $x=-3$, $y=4$, $\lambda=-3$. Како је $f(3,-4)=-75$, $f(-3,4)=125$, то је тражени максимум једнак 125, а минимум -75. ▲

ЗАДАЦИ

1. Формулисати услове, довољне да важи формула примера 3.2.2. Како гласи одговарајућа формула у случају функције F од m променљивих?

2. У равни је дата крива једначином $F(x,y)=0$, где $F\in C^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$. Ако у тачки (a,b) те криве нису оба извода $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ једнака нули, написати једначину тангенте криве у тој тачки. Доказати да ако је (a,b) превојна тачка те криве, онда важи

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right)(a,b)=0.$$

3. Доказати теорему 3.3.1 о имплицитној функцији индукцијом по n, користећи теорему 3.2.2 (за детаље доказа в. нпр. [27]).

4. Изразити у експлицитном облику формуле инверзне формулама прелаза с поларних, односно сферних, на правоугле координате (в. примере 2.2.1). Колики су јакобијани тих трансформација?

5. Нека је функција $f\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ дата са $f(0)=0$ и $f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x}$ за $x\neq 0$. Доказати да f задовољава све услове теореме о инверзној функцији осим непрекидности извода $f'(x)$ у тачки 0, а да f није инјективна ни у једној околини тачке 0.

6. Нека је функција $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ дата са $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Доказати да свака тачка $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ има околину у којој је f инвертибилна, али да $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ није инјективна.

7. Под претпоставкама става 3.4.1 за $m=k=2$ написати изразе за друге парцијалне изводе функције f^{-1}.

8. Нека је $A\subset\mathbf{R}^m$ отворен скуп, $f\in C^1(A,\mathbf{R}^m)$ и $\det df(x)\neq 0$ за $x\in A$. Доказати да је за сваки отворен скуп $B\subset A$ његова слика $f(B)$ отворен скуп у $\mathbf{R}^m$.

9. Нека је $a\in\mathbf{R}^m$ и $r>0$. Пресликавање $f\colon\mathbf{R}^m\setminus\{a\}\to\mathbf{R}^m$, дато са

$$f(x)=a+\frac{r}{\|x-a\|}(x-a),$$

назива се **инверзијом** с центром у тачки a и полупречником r. Доказати да је f дифеоморфизам и да је

$$f\bigl(\{\,x \mid 0<\|x-a\|<r\,\}\bigr)=\{\,x \mid \|x-a\|>r\,\}.$$

10. Нека су $A\subset\mathbf{R}^m$ и $B\subset\mathbf{R}^n$ отворени скупови и $f\colon A\to B$ бијекција, таква да су f и f^{-1} диференцијабилне функције на A, односно B. Доказати да је $m=n$.

11. Функција $f\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$ дата је са

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Одредити $\operatorname{rang} df(x,y)$ и слику $f\big(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$.

12. Нека је функција $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ дата са $f(x,y) = (u,v)$,

$$u = \begin{cases} x^3y^2, & \text{за } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{за } x < 0, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} x^2y^3, & \text{за } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{за } y < 0. \end{cases}$$

Доказати да је

$$\operatorname{rang} df(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{за } x,\ y > 0, \\ 1, & \text{за } xy < 0, \\ 0, & \text{за } x,\ y < 0 \end{cases}$$

и да су у области $(0,+\infty)^2$ функције u и v независне.

13. Нека је $f \in C^2(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ и $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ („Лапласов[1] оператор“). Ако су промењиве x, y, z повезане с промењивим u, v, w помоћу:

(а) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = w$ („цилиндричне координате“),

(б) $x = u\sin v\cos w$, $y = u\sin v\sin w$, $z = u\cos v$ („сферне координате“),

доказати да је:

(а) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}$,

(б) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \dfrac{\operatorname{ctg} v}{u^2}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{1}{u^2\sin^2 v}\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}$.

14. Доказати да на површи $\dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$ функција $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ има 14 тачака локалног екстремума, од којих су шест минимуми, а осам максимуми.

15. Елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ пресечен је са равни $lx + my + nz = 0$ која пролази кроз његов центар. Доказати да су полуосе пресечне елипсе позитивна решења (по r) једначине

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2} + \frac{m^2b^2}{b^2-r^2} + \frac{n^2c^2}{c^2-r^2} = 0.$$

16. Нека је $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$ симетрична реална матрица и $\Phi(x) = \sum\limits_{i,j=1}^m a_{ij}x_ix_j$ одговарајућа квадратна форма. Ако функција Φ при услову $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^m x_i^2 - 1 = 0$ постиже локални екстремум на вектору x, доказати да је x својствени вектор матрице A, тј. да важи $Ax = \lambda x$, $\det(A - \lambda E) = 0$, где је E одговарајућа јединична матрица. Вредност тог екстремума једнака је одговарајућој својственој вредности λ матрице A. Специјално, доказати да таква квадратна матрица *има* бар једну реалну својствену вредност, а њена највећа својствена вредност једнака је максимуму функције Φ на скупу $\{\, x \in \mathbf{R}^m \mid \varphi(x) = 0 \,\}$. Дати геометријску интерпретацију ових чињеница.

[1] P. S. Laplace (1749–1827), француски математичар

17. Нека је $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ квадратна матрица и $\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}^2 = A_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, где су $A_1, \ldots, A_n$ фиксирани ненегативни реални бројеви. Доказати:

1° да би функција $(\det A)^2$ имала екстремум при датим условима, неопходно је да су врсте матрице A међусобно ортогоналне;

2° $\max\limits_A (\det A)^2 = A_1A_2\cdots A_n$;

3° за сваку квадратну матрицу $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ важи **Адамарова неједнакост**:

$$(\det A)^2 \leqslant \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2\right).$$

4. НЕКЕ ПРИМЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА У ГЕОМЕТРИЈИ

У елементарној и аналитичкој геометрији детаљније се проучава само мањи број типова линија (права, кружна линија, елипса, хипербола, парабола) и површи (раван, сфера, елипсоид, хиперболоид, параболоид, конус). Методе диференцијалног и интегралног рачуна омогућавају да се испитају својства широких класа линија и површи. Користећи ове методе, могуће је дефинисати тангенте и нормале, односно нормалне равни, линија, тангентне равни и нормале површи, као и низ других појмова који дозвољавају дубље проучавање линија и површи.

4.1. КРИВЕ У ПРОСТОРУ $\mathbf{R}^n$

У одељку 8.5 из М.А.I дефинисали смо криву линију у равни. Уместо $\mathbf{R}^2$ ставимо у тој дефиницији $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, и добићемо појам криве у простору $\mathbf{R}^n$. Таква крива одређена је, дакле, непрекидном функцијом (путањом) $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, где је $\Delta \subset \mathbf{R}$ интервал, која има свој координатни приказ $\big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$. При томе ћемо сматрати да различитим вредностима параметра t одговарају различите тачке криве.

Посебно, криве у простору $\mathbf{R}^3$ обично задајемо у облику $f(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, или $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \Delta$.

Укажимо на једну механичку интерпретацију путање. Уочимо тачку M која се креће у простору $\mathbf{R}^n$. Претпоставимо да је у моменту t положај тачке M одређен координатама $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Вектор $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ назива се и **вектором положаја** тачке M. У овој глави ћемо за такве векторе користити и ознаку $\vec{r}(t)$. Ако са $\{e_1, \dots, e_n\}$ означимо стандардну векторску базу у простору $\mathbf{R}^n$, онда за вектор положаја $\vec{r}(t)$ имамо израз $\vec{r}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$. Специјално, у простору $\mathbf{R}^3$ вектор положаја $\vec{r}(t)$ писаћемо у облику $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ или $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, где је $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Крива по којој се креће тачка M с променљивим вектором положаја $\vec{r}(t)$ назива се и **ходографом** векторске функције $\vec{r}(t)$.

Посматрајмо произвољну путању $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, $\Delta \subset \mathbf{R}$. Са Γ означимо криву линију дефинисану овом путањом. Каже се и да је Γ параметризована параметром t, $t \in \Delta$. Да ли се она може параметризовати и неким другим параметром?

Нека је $u\colon \Delta' \to \Delta$, $\Delta' \subset \mathbf{R}$, непрекидна, сурјективна и строго монотона функција. Композицију $f \circ u\colon \Delta' \to \mathbf{R}^n$ означимо са g. Путање $f(t)$, $t \in \Delta$ и $g(t')$, $t' \in \Delta'$, дефинишу једну те исту криву Γ.

Две путање које одређују једну те исту криву назовимо **еквивалентним**. Дакле, нека крива може бити параметризована различитим параметрима.

Примери 4.1.1

1° Нека је $y = f(x)$, $x \in \Delta \subset \mathbf{R}$, једначина дате криве у равни. Параметризујмо ову криву стављајући $x = t$. Тада имамо векторску једначину дате криве

$$\vec{r} = t\vec{\imath} + f(t)\vec{\jmath}, \quad t \in \Delta.$$

2° Кружница у xOy равни с центром $C(a,0)$ и полупречником a има једначину $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Параметризујмо ову кружницу узимајући за параметар t коефицијент правца вектора положаја тачке на њој. Стављањем $y/x = t$ добија се векторска једначина

$$\vec{r} = \frac{2a}{1+t^2}\vec{\imath} + \frac{2at}{1+t^2}\vec{\jmath}, \quad t \in \overline{\mathbf{R}},$$

(подразумева се $\vec{r}(\pm\infty) = (0,0)$).

Ову криву можемо параметризовати и узимајући за параметар угао φ који вектор $\overrightarrow{CM}$ (M је тачка на кривој) гради с позитивним смером x-осе. Тада њене једначине гласе

$$x = a + a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

3° Крива линија одређена једначинама

$$x = 2R\sin^2 t, \quad y = 2R\sin t\cos t, \quad z = 2R\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{1}$$

налази се на пресеку сфере $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$, и цилиндра $x^2+y^2 = 2Rx$ у простору $\mathbf{R}^3$. Ово се лако увиђа елиминацијом параметра t најпре из све три једначине (1), а потом из прве две од једначина (1). Ову криву називају **Вивијанијевом**[1] **кривом**.

4° Путања $f(t) = ta + b$, $t \in \mathbf{R}$, где су $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ фиксирани, одређује праву у простору $\mathbf{R}^n$. Ову параметризовану праву представљамо још и у облику

$$x_1 = a_1 t + b_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n t + b_n, \qquad t \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangle$$

[1] V. Viviani (1622–1703), италијански математичар и физичар

Нека је крива Γ одређена путањом $f\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$. На кривој Γ сматрамо да постоји уређење $\prec$: за тачку M_{t_1} кажемо да је испред тачке M_{t_2}, $M_{t_1} \prec M_{t_2}$, ако је $t_1 < t_2$, где параметрима $t_1, t_2 \in \Delta$ одговарају тачке M_{t_1}, односно M_{t_2}. Ову чињеницу ћемо изразити још и речима: крива Γ је **оријентисана**. Узимајући у обзир и оријентацију криве Γ, ми ћемо је означавати са Γ_+. Ако криву Γ параметризујемо новим параметром $t' \in \Delta'$, при чему је $u\colon \Delta' \to \Delta$ строго опадајућа функција, а путања која одређује криву Γ је дата са $f \circ u\colon \Delta' \to \mathbf{R}^n$, онда је испуњен услов

$$t'_2 < t'_1 \implies M_{t'_1} \prec M_{t'_2}.$$

Казаћемо да је крива Γ у овом случају супротне оријентације у односу на првобитну оријентацију. Узимајући у обзир ову оријентацију, криву ћемо означавати са Γ_-. При томе ћемо оријентацију криве Γ_+ назвати **позитивном**, а оријентацију криве Γ_- **негативном**.

Напоменимо на крају очигледну чињеницу: избор оријентације неке криве је услован; ако једну од две оријентације изаберемо за позитивну, онда ће оријентација супротна њој бити негативна.

За криву Γ се каже да је **глатка** ако се може задати помоћу глатке векторске функције, дефинисане на $\Delta \subset \mathbf{R}$; она је **непрекидна, део-по-део глатка** ако се може задати помоћу непрекидне векторске функције $f(t)$, $t \in \Delta \subset \mathbf{R}$, тако да се интервал Δ може поделити на коначан број дисјунктних интервала на којима је рестрикција функције $f(t)$ глатка.

Дужина лука криве Γ, одређене функцијом $f(t)$, $t \in \Delta$, дефинише се слично као у случају кривих у равни (в. одељак 8.5 из М.А.I). Криве линије које имају дужину називају се **ректифицибилним**. Ако је крива Γ непрекидна, део-по-део глатка, може се показати да се дужина s њеног лука између тачака $\big(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\big)$ и $\big(f_1(\beta), \ldots, f_n(\beta)\big)$ израчунава по формули

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f_1'^2(t) + \cdots + f_n'^2(t)}\,dt. \tag{2}$$

Примери 4.1.2

1° Дужина сегмента праве $\vec{r}(t) = (a_1, \ldots, a_n)\,t + (b_1, \ldots, b_n)$ с крајњим тачкама $\vec{r}_1 = (b_1, \ldots, b_n)$ за $t = 0$ и $\vec{r}_2 = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ за $t = 1$, према (2) износи

$$s = \int_0^1 \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\,dt = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

2° Нађимо дужину лука **завојнице** $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ од тачке $t = 0$ до тачке $t = 2\pi$ (a, $b > 0$).

Како је $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$ и $x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2$, то ће дужина s датог лука бити

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}. \quad \blacktriangle$$

Посматрајмо произвољну непрекидну, део-по-део глатку криву Γ дату једначином $\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$, $t \in \Delta$, и уочимо произвољну тачку M_0 на њој; при томе је $\vec{r}(t_0)$ вектор положаја тачке M_0. Са $s(t)$ означимо дужину лука те криве од тачке M_0 до тачке M којој одговара параметар t; нека је $s(t_0) = 0$. Дакле је

(3) $$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t)}\, dt.$$

Претпоставимо да је $x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t) > 0$, $t \in \Delta$. Тада је $s(t)$ строго растућа функција и криву Γ можемо параметризовати параметром s. Приметимо да вредностима $t > t_0$ одговарају позитивне вредности s, а вредностима $t < t_0$ одговарају негативне вредности s. Ако је крива Γ параметризована помоћу лука s, каже се да је параметризована **природним параметром**.

За дату диференцијабилну векторску функцију $\vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ реалне променљиве t, вектор $(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ који одређује њен диференцијал звaћемо и **првим изводом** и означавати са

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t));$$

ако је одговарајућа крива параметризована природним параметром, онда се први извод означава са

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}\,'(s) = (x_1'(s), \ldots, x_n'(s)).$$

Слично ћемо вектор $(x_1''(t), \ldots, x_n''(t))$, односно $(x_1''(s), \ldots, x_n''(s))$, називати **другим изводом** функције $\vec{r}$ и означавати са

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t), \qquad \text{односно} \qquad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{r}\,''(s).$$

Приметимо да се израз за дужину лука може написати у облику

(4) $$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt.$$

Одатле следи

$$|ds| = \|\dot{\vec{r}}(t)\| \cdot |dt|.$$

С друге стране, вредност диференцијала вектора $\vec{r}(t)$ за вредност dt прираштаја независно променљиве је $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\, dt$, па је $\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = 1$, односно

(5) $$d\vec{r}^{\,2} = ds^2.$$

Пример 4.1.3

Завојницу $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbf{R}$ $(a,\ b > 0)$ параметризујмо природним параметром.

Означимо

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Одавде је

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

па је дужина лука $s(t)$ од тачке $t = 0$ до произвољне тачке t

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, dt = t\sqrt{a^2+b^2}.$$

Како је $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то је

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \ \blacktriangle$$

4.2. КРИВЕ У $\mathbf{R}^3$. ФУНДАМЕНТАЛНИ ТРИЕДАР

Тангента

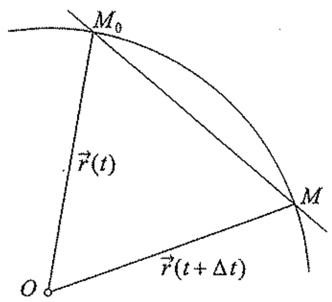
У овом одељку посматраћемо криве у простору $\mathbf{R}^3$. За векторе у $\mathbf{R}^3$ норму (тј. интензитет) означаваћемо и са $|\vec{r}| = \|\vec{r}\|$.

Нека је Γ произвољна крива и M_0 тачка на њој, сл. 4.2.1. Уочимо сечицу криве Γ која пролази кроз тачку M_0 и неку тачку M на кривој. Ако постоји гранични положај те сечице кад тачка M тежи тачки M_0, онда се гранична права назива **тангентом** криве Γ у тачки M_0.

Претпоставимо да једначина криве има облик $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и да тачкама M_0 и M одговарају вредности параметра t, односно $t+\Delta t$. Вектори положаја тачака M_0 и M су $\vec{r}(t)$, односно $\vec{r}(t+\Delta t)$. Вектор $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$ има правац сечице M_0M, као и вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Ако постоји $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ или, што је исто, $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, тај вектор ће имати правац тангенте. С друге стране је

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Дакле, правац вектора $\dot{\vec{r}}(t)$ је правац тангенте криве Γ у тачки M_0. Приметимо да је вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ усмерен на тангенти у смеру растења параметра t.



Сл. 4.2.1

У циљу налажења једначине тангенте у тачки $M(x(t), y(t), z(t))$, са $\vec{\rho} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$ означимо вектор положаја произвољне тачке M на тангенти, па је

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\dot{\vec{r}}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

односно

$$X = x + \lambda x', \quad Y = y + \lambda y', \quad Z = z + \lambda z'$$

тј.

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}. \tag{1}$$

Некад се ставља $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $z' = \dfrac{dz}{dt}$, па се из (1) добијају једначине тангенте

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Пример 4.2.1

Једначине тангенте завојне линије у тачки $t = \pi/4$ су

$$\frac{X - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{-a\sqrt{2}} = \frac{Y - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{a\sqrt{2}} = \frac{Z - \frac{b\pi}{4}}{2b},$$

јер је $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \dfrac{b\pi}{4}\vec{k}$ и $\dot{\vec{r}}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + b\vec{k}$. ▲

Са α, β, γ означимо углове које вектор $\dot{\vec{r}}$ образује са x-осом, y-осом, односно z-осом. Из (1) следи

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Како је $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{dx/dt}{ds/dt}$ и $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, и слично важи за $\dfrac{dy}{ds}$ и $\dfrac{dz}{ds}$, то имамо једнакости

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{2}$$

Пример 4.2.2

Покажимо да се крива $\vec{r}(t) = e^{mt}(a\cos t\,\vec{\imath} + a\sin t\,\vec{\jmath} + b\vec{k})$, $t \in \mathbf{R}$ (**цилиндро-конусна завојна линија**) налази на конусу $b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$ и сече његове изводнице под сталним углом.

Заиста, координате $x = ae^{mt}\cos t$, $y = ae^{mt}\sin t$, $z = be^{mt}$ произвољне тачке криве задовољавају једначину конуса, јер је $b^2(a^2e^{2mt}\cos^2 t + a^2e^{2mt}\sin^2 t) - a^2b^2e^{2mt} = 0$.

Ако са α, β, γ означимо углове које вектор тангенте криве у произвољној тачки $\vec{r}(t)$ заклапа са координатним осама, а са α_1, β_1, γ_1 означимо углове које изводница конуса у тачки $\vec{r}(t)$ заклапа са координатним осама, онда је

$$\cos\alpha = \frac{a(m\cos t - \sin t)}{\sqrt{m^2(a^2 + b^2) + a^2}}, \qquad \cos\alpha_1 = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{a(m\sin t + \cos t)}{\sqrt{m^2(a^2 + b^2) + a^2}}, \qquad \cos\beta_1 = \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{mb}{\sqrt{m^2(a^2 + b^2) + a^2}}, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

За угао φ између тангенте и изводнице имамо

$$\cos\varphi = \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{m^2(a^2 + b^2) + a^2}}. \quad ▲$$

Поменимо још једно својство извода векторске функције $\vec{r}(t)$.

Став 4.2.1

Ако је норма $|\vec{r}(t)|$ вектора $\vec{r}(t)$ константна, онда су вектори $\vec{r}(t)$ и $\dot{\vec{r}}(t)$ међусобно нормални.

Доказ.

Ако је $|\vec{r}(t)| = c = \text{const}$, онда је $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2$. Диференцирањем ове једнакости добија се $\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$, што значи да су $\vec{r}(t)$ и $\dot{\vec{r}}(t)$ нормални (уз претпоставку да су различити од нуле). ■

Посебно, ако је крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у равни Oxy, једначина тангенте (1) има облик

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'},$$

односно, ако је крива дата у облику $y = f(x)$, онда је $x' = 1$, $y' = f'(x)$, па је једначина тангенте

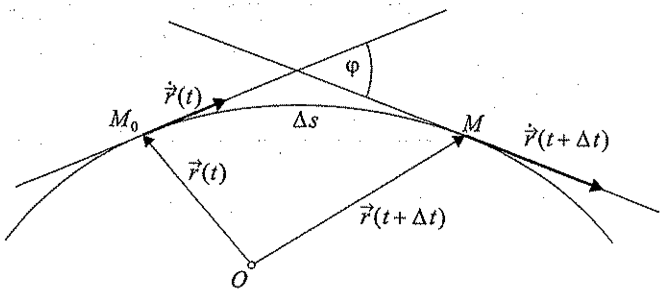
$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

У овом случају дефинише се нормала у тачки (x, y) криве. Наиме, права која пролази кроз тачку (x, y) и нормална је на тангенту криве у тој тачки назива се **нормалом**. Ако је коефицијент правца тангенте $f'(x) \neq 0$, онда је коефицијент правца нормале $-1/f'(x)$, па је њена једначина

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x).$$

Кривина

Посматрајмо глатку криву Γ. Ако се нека тачка креће по њој, одговарајућа тангента мења правац. У циљу мерења брзине промене правца тангенте уочимо тачке M_0 и M на кривој Γ, сл. 4.2.2.



Сл. 4.2.2

Дужину лука $\overset{\frown}{M_0M}$ означимо са Δs, а угао између одговарајућих тангената (које не морају припадати једној равни) са φ. Количник $\dfrac{\varphi}{\Delta s}$ назовимо средњом кривином лука $\overset{\frown}{M_0M}$. Лимес $\displaystyle\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}=K$ (ако постоји) назовимо **кривином криве** Γ у тачки M_0. Дакле, кривина K криве Γ у тачки M_0 је

(3)
$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s}.$$

Реципрочна вредност кривине K назива се **полупречником кривине**, у ознаци $R=\dfrac{1}{K}$ (ако је $K=0$, формално стављамо $R=\infty$).

Претпоставимо да је дата једначина $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in\Delta$, криве Γ и да постоји $\ddot{\vec{r}}(t)$. Показаћемо да постоји кривина у тачки M_0, која је одређена вектором положаја $\vec{r}(t)$.

Количник $\dfrac{\varphi}{\Delta s}$ напишимо у облику $\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\Delta s}$. Како је φ угао између вектора тангенте $\dot{\vec{r}}(t)$ у тачки M_0 и вектора тангенте $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)$ у тачки M, а из $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)-\dot{\vec{r}}(t)=\Delta\dot{\vec{r}}(t)$ следи $\dot{\vec{r}}(t+\Delta t)=\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)$, то је

$$\sin\varphi=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times(\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t))|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|},$$

јер је $\dot{\vec{r}}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)=0$. Приметимо да се прираштај лука Δs може написати у облику $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$, где је $s(t)$ дужина лука мерена од неке тачке на кривој.

Узевши у обзир да из $\Delta s\to 0$ следи $\Delta t\to 0$ и $\varphi\to 0$, једнакост (3) можемо написати у облику

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\,\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\times\dfrac{\Delta\dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t}\right|}{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\cdot|\dot{\vec{r}}(t)|\cdot|\dot{\vec{r}}(t)+\Delta\dot{\vec{r}}(t)|},$$

што даје

(4)
$$\frac{1}{R}=K=\frac{|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3},$$

јер је $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=|\dot{\vec{r}}(t)|$ и $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t}=\ddot{\vec{r}}(t)$.

Ако је векторска функција дата у облику $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, онда је

(5)
$$K=\frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}.$$

Када је крива параметризована помоћу природног параметра s, онда из једнакости $|\vec{r}\,'(s)|=1$ следи $\vec{r}\,'(s)\perp\vec{r}\,''(s)$, па из (4) добијамо

(6)
$$K=|\vec{r}\,''(s)|,\qquad R=\frac{1}{|\vec{r}\,''(s)|}.$$

Ако је крива Γ у равни Oxy, онда су једначине криве облика $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=0$, па је из (5)

(7)
$$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

док за криву облика $y=f(x)$ имамо

(8)
$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\qquad R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Примери 4.2.3

1° Нађимо кривину и полупречник кривине завојнице $\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $t\in\mathbf{R}$, у произвољној тачки.

Напишимо једначину завојнице у облику

$$\vec{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

(в. пример 4.1.3). Тада је

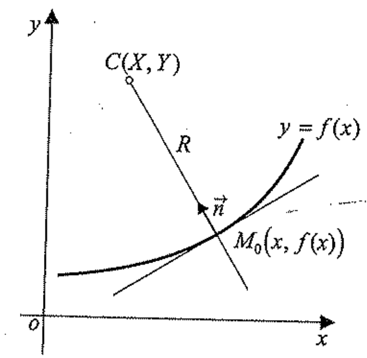
$$\vec{r}''(s)=\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right),$$

одакле следи $K=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, $R=\dfrac{a^2+b^2}{a}$.

2° Нађимо кривину у произвољној тачки параболе $y^2=2px$. У којој тачки параболе је кривина максимална?

Користићемо једнакости (8). У том циљу израчунавамо $y'=\dfrac{p}{y}$, $y''=-\dfrac{p^2}{y^3}$, па добијамо $K=\dfrac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}$, одакле се види да је у тачки $(0,0)$ кривина максимална. ▲

Еволута



Сл. 4.2.3

У тачки $M_0(x,f(x))$ графика Γ функције $y=f(x)$, $x\in\Delta\subset\mathbf{R}$, са R означимо полупречник кривине. Тачку C која се налази на нормали криве Γ на растојању R од тачке M_0 у смеру конкавности криве Γ, назовимо **центром кривине** криве Γ у тачки M_0, сл. 4.2.3. Круг са центром C и полупречником CM_0 називамо **кругом кривине** криве Γ у тачки M_0.

За налажење координата центра кривине претпоставимо да је функција f двапут диференцијабилна и да је $f''(x)>0$.

Како је вектор тангенте $\vec{\tau}=\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds}\right)$ познат, то је лако израчунати вектор $\vec{n}$ нормале, $\vec{n}=\left(-\dfrac{dy}{ds},\dfrac{dx}{ds}\right)$. За координате X, Y центра кривине имамо $X=x+R\left(-\dfrac{dy}{ds}\right)$, $Y=y+R\dfrac{dx}{ds}$. Стављајући у ове једнакости $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, $\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ (в. формуле (2)), добија се

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{9}$$

Формуле (9) добијају се и у случају када је $f''(x)<0$ (с тим што је тада $\vec{n}=\left(\dfrac{dy}{ds},-\dfrac{dx}{ds}\right)$).

Дефиниција 4.2.1

Геометријско место центара кривине равне криве назива се **еволутом** те криве.

Нека је дата глатка крива $y=f(x)$, $x\in\Delta\subset\mathbf{R}$, и нека постоји $f''(x)$, $x\in\Delta$. Са x, y означимо координате произвољне тачке на кривој, а са X, Y координате центра кривине у тој тачки. Из (9) добијамо параметарске једначине еволуте

$$X=x-\frac{f'(x)(1+f'^2(x))}{f''(x)},\quad Y=f(x)+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.$$

Пример 4.2.4

Нађимо еволуту параболе $y^2=2px$.

Како је $y'=\dfrac{p}{y}$, $y''=-\dfrac{p^2}{y^3}$, то је према (9)

$$X=3x+p,\quad Y=-\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Из ових параметарских једначина еволуте дате параболе можемо добити једначину еволуте у облику $Y^2=\dfrac{8}{27p}(X-p)^3$. ▲

Фундаментални триедар

Нека је крива Γ дата у облику $\vec{r}=\vec{r}(s)$, где је $\vec{r}(s)$ двапут диференцијабилна функција. Изаберимо на њој произвољну тачку M_0 са координатама $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. Са $\vec{\tau}$ означимо вектор тангенте, $\vec{\tau}=\vec{r}'(s)$, криве Γ у тачки M_0. Како је $|\vec{\tau}|=1$, то је $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\perp\vec{\tau}$. Означимо даље

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{d\vec{r}'}{ds}=\vec{r}''(s),\quad \vec{\nu}=\frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|}=R\cdot\vec{r}''(s), \tag{10}$$

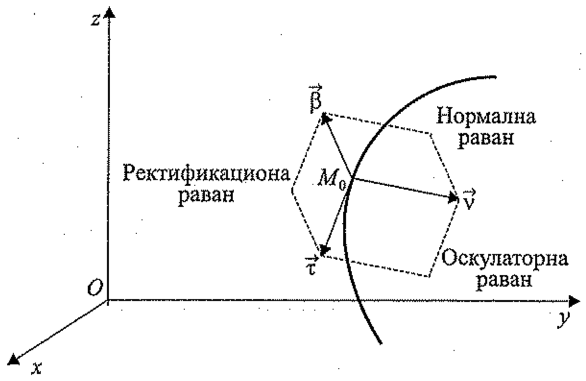
јер је полупречник кривине R једнак $1/|\vec{r}''(s)|$.

Вектор $\vec{\tau}$ одређује тангенту, а вектор $\vec{\nu}$, који је нормалан на $\vec{\tau}$, одређује праву коју називамо **главном нормалом** криве Γ у тачки M_0. Очито се кроз тачку M_0 може повући бесконачно много нормалних правих на тангенту; једна од тих правих је главна нормала.

Вектор $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$ одређује праву која је нормална и на тангенту и на главну нормалу; она се назива **бинормалом** криве Γ у тачки M_0.

Тангента, главна нормала и бинормала у тачки M_0 образују триедар који се назива **фундаменталним триедром**. Тачка M_0 је произвољна тачка криве Γ; дакле је фундаментални триедар везан за сваку тачку криве Γ. Равни фундаменталног триедра су:

(a) **нормална раван** са нормалним вектором $\vec{\tau}$,



Сл. 4.2.4

(б) **ректификациона раван** са нормалним вектором $\vec{\nu}$,

(в) **оскулаторна раван** са нормалним вектором $\vec{\beta}$.

Наведимо неколико својстава фундаменталног триедра, односно његових оса и равни, сл. 4.2.4.

Став 4.2.2

Сменом параметра s параметром $s_1 = -s$ у једначини $\vec{r} = \vec{r}(s)$ криве Γ, за векторе $\vec{\tau}_1$, $\vec{\nu}_1$, $\vec{\beta}_1$ добијеног фундаменталног триедра важе једнакости

$$\vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}, \quad \vec{\nu}_1 = \vec{\nu}, \quad \vec{\beta}_1 = -\vec{\beta},$$

где су $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ вектори фундаменталног триедра који зависе од s.

Доказ.

Прва једнакост следи из

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds_1} = -\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{\tau},$$

а друга из

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds_1^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{r}}{ds_1}\right) = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

За трећу једнакост уочимо да је $\vec{\beta}_1 = \vec{\tau}_1 \times \vec{\nu}_1 = -(\vec{\tau} \times \vec{\nu}) = -\vec{\beta}$. ■

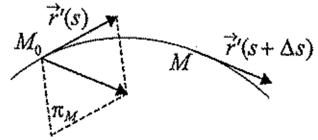
Став 4.2.3

Оскулаторна раван криве Γ у тачки M_0 је гранични положај равни које садрже тангенту у тачки M_0 и паралелне су тангенти у тачки M криве Γ, када M тежи M_0.

Доказ.

Вектор $\vec{r}\,'(s+\Delta s) - \vec{r}\,'(s) = \Delta\vec{r}\,'(s)$ је паралелан равни π_M која пролази кроз тачку M_0, садржи вектор $\vec{r}\,'(s)$ и паралелна је вектору $\vec{r}\,'(s+\Delta s)$. Но, и вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta s}$ паралелан је равни π_M, па је вектор $\vec{r}\,'(s) \times \dfrac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta s}$ нормалан на раван π_M, сл. 4.2.5. Приметимо да из $\Delta s \to 0$, следи $M \to M_0$. Према томе, гранични положај равни π_M кад $M \to M_0$ има нормалу облика

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left(\vec{r}\,'(s) \times \frac{\Delta\vec{r}\,'(s)}{\Delta s}\right) = \vec{r}\,'(s) \times \vec{r}\,''(s).$$



Сл. 4.2.5

Како ова гранична раван пролази кроз тачку M_0, то се она поклапа са оскулаторном равни криве Γ у тој тачки. ■

Приметимо да из става 4.2.2 следи да вектор $\vec{\nu}$ не зависи од тога на који је начин параметризована крива Γ помоћу природног параметра. Вектор $\vec{\nu}$ је усмерен у страну конкавности пројекције криве Γ на оскулаторну раван.

Уочимо вектор $\vec{\nu}$ главне нормале у тачки M_0 криве Γ, дате векторском једначином $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Са R нека буде означен полупречник кривине криве Γ у тачки M_0. Тачка C чији вектор положаја је $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{\nu}$ назива се **центром кривине** криве Γ у тачки M_0. Према једнакостима (6) и (10), за центар кривине важи

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\vec{r}\,''(s)}{|\vec{r}\,''(s)|^2}.$$

Када се тачка са вектором положаја $\vec{r}(s)$ креће по кривој Γ, меру брзине промене вектора $\vec{\tau} = \vec{r}\,'(s)$ даје извод $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{r}\,''(s) = K\vec{\nu}$. Потражимо брзину промене вектора $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$. Пођимо од једнакости $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta} = 1$ и $\vec{\beta}\cdot\vec{\tau} = 0$. Одатле диференцирањем добијамо

$$\vec{\beta}\,' \cdot \vec{\beta} = 0, \qquad \text{тј.} \qquad \vec{\beta}\,' \perp \vec{\beta},$$

и

$$\vec{\beta}\,' \cdot \vec{\tau} = -\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\,' = -\vec{\beta}\cdot K\vec{\nu} = 0, \quad \text{тј.} \quad \vec{\beta}\,' \perp \vec{\tau}.$$

Како је $\vec{\beta}\,'$ нормалан на $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$, то је колинеаран са $\vec{\nu}$. Ставимо

$$\vec{\beta}\,' = \varkappa\vec{\nu}.$$

Реалан број $\varkappa$ назива се **торзијом (увртањем)** криве Γ у тачки $\vec{r}(s)$. Реципрочна вредност торзије $\dfrac{1}{\varkappa} = T$ је **полупречник торзије** (некада се за кривину и торзију користе изрази прва кривина, односно друга кривина). Торзија $\varkappa$ криве Γ у тачки M_0, која је по апсолутној вредности једнака норми вектора $\vec{\beta}\,'$, представља меру брзине одступања од оскулаторне равни, када се тачка креће по кривој Γ.

Теорема 4.2.1 (Френеове[2] формуле)

За векторе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ важе једнакости

$$\vec{\tau}\,' = K\,\vec{\nu}, \quad \vec{\beta}\,' = \varkappa\,\vec{\nu}, \quad \vec{\nu}\,' = -K\,\vec{\tau} - \varkappa\,\vec{\beta}. \tag{11}$$

Доказ.

Прве две једнакости следе из одговарајућих дефиниција. У циљу доказа треће нађимо пројекције вектора $\vec{\nu}\,'$ на векторе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$. Из $\vec{\tau}\cdot\vec{\nu} = 0$, $\vec{\nu}\cdot\vec{\nu} = 1$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} = 0$ добијамо

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}\,' = -\vec{\tau}\,'\cdot\vec{\nu} = -K, \quad \vec{\nu}\,'\cdot\vec{\nu} = 0, \quad \vec{\beta}\cdot\vec{\nu}\,' = -\vec{\beta}\,'\cdot\vec{\nu} = -\varkappa.$$

Према томе је $\vec{\nu}\,' = -K\,\vec{\tau} - \varkappa\,\vec{\beta}$. ∎

Последица 4.2.1

Нека су K и $\varkappa$ кривина и торзија криве Γ, дате једначином $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Тада:

1° ако је $K \equiv 0$, онда Γ припада правој линији;

2° ако је $\varkappa \equiv 0$, онда је Γ равна крива.

Доказ.

1° Ако је $K \equiv 0$, онда је $\vec{\tau}\,' = 0$, односно $\vec{\tau} = \text{const}$; дакле Γ припада некој правој.

2° Ако је $\varkappa \equiv 0$, онда је $\vec{\beta}\,' = 0$. За вектор положаја $\vec{r}(s)$ тачке чији је вектор бинормале $\vec{\beta}$ имамо

$$\frac{d}{ds}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}) = \vec{\beta}\,'\cdot\vec{r} + \vec{\beta}\cdot\vec{r}\,' = \vec{\beta}\cdot\vec{\tau} = 0.$$

Дакле, $\vec{\beta}\cdot\vec{r} = \text{const}$; другачије речено, пројекција вектора $\vec{r}$ на осу одређену вектором $\vec{\beta}$ константна је. То значи да се крива Γ налази у равни (оскулаторној). ∎

Пример 4.2.5

Нађимо торзију и полупречник торзије завојне линије $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbf{R}$, у произвољној тачки.

Напишимо једначину завојнице у облику

$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Тада је

$$\vec{r}\,'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\vec{r}\,''(s) = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

[2] J. F. Frenet (1816–1900), француски математичар

Одавде је

$$\vec{\tau} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\vec{\nu} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right),$$

$$\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\vec{\beta}\,' = \left(\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

Из Френеове формуле $\vec{\beta}\,' = \varkappa\,\vec{\nu}$ следи $\varkappa = \vec{\beta}\,'\cdot\vec{\nu}$, па је

$$\frac{1}{T} = \varkappa = -\frac{b}{a^2+b^2}. \quad \blacktriangle$$

Ако је крива дата у облику $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где је t произвољан параметар, онда се једначине тангенте, нормале и бинормале, као и једначине нормалне, оскулаторне и ректификационе равни налазе помоћу вектора колинеарних са $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$.

Став 4.2.4

Ако је крива Γ дата у облику $\vec{r} = \vec{r}(t)$, онда је вектор $\vec{\tau}$ колинеаран вектору $\overrightarrow{T} = \dot{\vec{r}}$, вектор $\vec{\beta}$ вектору $\overrightarrow{B} = \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}$, а вектор $\vec{\nu}$ вектору $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{B}\times\overrightarrow{T}$.

Доказ.

Сматрајући да је Γ параметризована помоћу лука s, а s зависи од параметра t, имамо једнакост

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt}, \tag{12}$$

одакле се види да је $\vec{\tau} = \vec{r}\,'(s)$ колинеаран вектору $\overrightarrow{T}$.

Даље је

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt}\right) \tag{12'}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}\,'(s))\frac{ds}{dt} + \vec{r}\,'(s)\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \vec{r}\,''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{r}\,'(s)\frac{d^2s}{dt^2},$$

одакле имамо

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,'(s)\frac{ds}{dt}\times\vec{r}\,''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k(\vec{\tau}\times\vec{\nu}), \tag{13}$$

где је $k = K\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3$, тј. $\vec{\beta}$ је колинеаран вектору $\overrightarrow{B}$. Очито је да је $\vec{\nu}$ колинеаран вектору $\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{T}$. ∎

Став 4.2.5

Ако је крива Γ дата у облику $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где је функција $\vec{r}(t)$ три пута диференцијабилна, онда се торзија може израчунати по формули

$$\varkappa = -\frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2},$$

где је са $[\cdot,\cdot,\cdot]$ означен мешовити производ вектора.

Доказ.

Из треће једначине (11) добијамо

$$\vec{\nu}' \times \vec{\tau} = -\varkappa\vec{\beta} \times \vec{\tau} = -\varkappa\vec{\nu},$$

одакле је

$$\varkappa = -\vec{\nu} \cdot (\vec{\nu}' \times \vec{\tau}) = -\vec{\tau} \cdot (\vec{\nu} \times \vec{\nu}') .$$

Како је $\vec{\nu} = R\vec{r}''$, то је $\vec{\nu}' = R\vec{r}''' + R'\vec{r}''$ и $\vec{\nu} \times \vec{\nu}' = R^2 (\vec{r}'' \times \vec{r}''')$, па је

(14) $$\varkappa = -R^2 \vec{r}' \cdot (\vec{r}'' \times \vec{r}''') = -R^2 [\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''].$$

Диференцирајући (12′) добија се

$$\dddot{\vec{r}} = \vec{r}'''\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\vec{r}''\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \vec{r}'\frac{d^3s}{dt^3}.$$

На основу (12), (12′) и (13) је

(15) $$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = [\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''] \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 .$$

Замењујући релације (4) и (15) у (14) и узимајући у обзир да је $\dot{\vec{r}}^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ добија се

$$\frac{1}{T} = \varkappa = -\frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2}. \quad \blacksquare$$

Пример 4.2.6

Дата је крива $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Наћи једначине тангенте, главне нормале и бинормале, као и нормалне, ректификационе и оскулаторне равни у тачки $t = 1$. Колика је торзија у тој тачки?

Из једначине $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ је

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad \dot{\vec{r}}(1) = (1, 2, 3),$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 2, 6t), \qquad \ddot{\vec{r}}(1) = (0, 2, 6),$$

$\overrightarrow{T} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{B} = (6,-6,2) = 2(3,-3,1)$, $\overrightarrow{N} = (-22,-16,18) = -2(11,8,-9)$. При томе је $\vec{r}(1) = (1,1,1)$. Одавде добијамо једначине

тангенте: $$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$
главне нормале: $$\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9},$$
бинормале: $$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1},$$

као и једначине

нормалне равни: $x + 2y + 3z - 6 = 0,$

ректификационе равни: $11x + 8y - 9z - 10 = 0,$

оскулаторне равни: $3x - 3y + z - 1 = 0.$

Како је $\dddot{\vec{r}}(1) = (0,0,6)$, према ставу 4 имамо $\varkappa = -\frac{3}{19}$. ▲

4.3. СИНГУЛАРНЕ ТАЧКЕ РАВНИХ КРИВИХ

Ако су у околини U неке тачке (x,y) у равни Oxy задовољени услови за егзистенцију једне од функција датих имплицитно једначином $F(x,y) = 0$, онда је том једначином дефинисана крива Γ у околини U. Када постоје парцијални изводи $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, који нису истовремено једнаки нули, онда се може одредити однос координата вектора тангенте у датој тачки криве Γ. Из једнакости $F(x,y) = 0$ следи

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0,$$

па једначину тангенте у тачки (x,y) можемо написати у облику $F_x(X-x) + F_y(Y-y) = 0$, где је стављено $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$.

Посматрајмо једнакост $F(x,y) = 0$. Претпоставимо да су у некој околини тачке (x_0,y_0), $F(x_0,y_0) = 0$, испуњени сви услови за егзистенцију имплицитне функције сем једног: нека је $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

Дефиниција 4.3.1

Тачка (x_0,y_0) назива се **сингуларном тачком** криве дате једнакошћу $F(x,y) = 0$ ако је $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Тачке на кривој које нису сингуларне називају се **обичним тачкама** криве.

Каква својства има крива у околини сингуларне тачке? Да бисмо то испитали, посматраћемо однос између криве и произвољне праве која пролази кроз сингуларну тачку.

Претпоставимо да функција $F(x,y)$ има непрекидне прве и друге парцијалне изводе у некој околини сингуларне тачке $M_0(x_0,y_0)$. При томе, нека је испуњен услов

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)^2 > 0.$$

Користећи се Тејлоровом формулом, напишимо једнакост $2F(x,y)=0$ у облику

(1) $$2F(x,y) = F^0_{x^2}(x-x_0)^2 + 2F^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + F^0_{y^2}(y-y_0)^2 + \varepsilon\rho^2 = 0,$$

где је $F^0_{x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $F^0_{xy} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, $F^0_{y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)$, $\rho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ и $\varepsilon \to 0$ за $\rho \to 0$. Права кроз тачку (x_0,y_0) дата је једначинама

(2) $$x - x_0 = \cos\alpha\cdot t, \quad y-y_0 = \sin\alpha\cdot t, \qquad t\in\mathbf{R},$$

где је α фиксирано, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Пресек праве (2) са кривом (1) добија се решавањем једначине

(3) $$\cos^2\alpha\cdot F^0_{x^2}t^2 + 2\cos\alpha\sin\alpha\cdot F^0_{xy}t^2 + \sin^2\alpha\cdot F^0_{y^2}t^2 + \varepsilon t^2 = 0.$$

Једно, двоструко решење је $t=0$. Но, како и ε зависи од t, $\varepsilon=\varepsilon(t)$, то и једначина

(4) $$F^0_{x^2}\cos^2\alpha + 2F^0_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + F^0_{y^2}\sin^2\alpha + \varepsilon(t) = 0$$

може да има решења. Прво решење одговара тачки M_0, а друго (из једначине (4)) одговара некој тачки M, која се такође налази на кривој (1) и правој (2). Када $M \to M_0$, онда и $\varepsilon(t)\to 0$, па једначина (4) постаје

(5) $$F^0_{x^2}\cos^2\alpha + 2F^0_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + F^0_{y^2}\sin^2\alpha = 0.$$

Но, када $M\to M_0$, онда права (2) тежи граничном положају ако једначина (5) има решење по α. То решење одређује гранични положај праве, а у исти мах и понашање криве (1) у околини тачке M_0. С обзиром на број решења једначине (5) могућа су три случаја:

(а) $F^0_{x^2}F^0_{y^2} - (F^0_{xy})^2 < 0$ – постоје два различита решења; кроз тачку M_0 пролазе две праве које додирују криву у тој тачки; тачка M_0 назива се **двојном**.

(б) $F^0_{x^2}F^0_{y^2} - (F^0_{xy})^2 > 0$ – једначина (5) нема решења; тачка M_0 се назива **изолованом**; показује се да у њеној довољно малој околини нема тачака криве (сем саме тачке M_0).

(в) $F^0_{x^2}F^0_{y^2} - (F^0_{xy})^2 = 0$ – једначина има једно двоструко решење; за познавање понашања криве у околини тачке M_0 потребно је детаљније испитивање.

Примери 4.3.1

1° Испитајмо сингуларну тачку $(0,0)$ криве $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$.

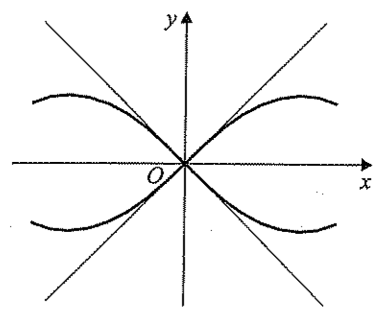
Да је $(0,0)$ сингуларна тачка, следи из чињенице да је $(0,0)$ решење система једначина

$$F_x = 4x^3 + 4xy^2 - 2x = 0, \quad F_y = 4x^2y + 4y^3 + 2y = 0.$$

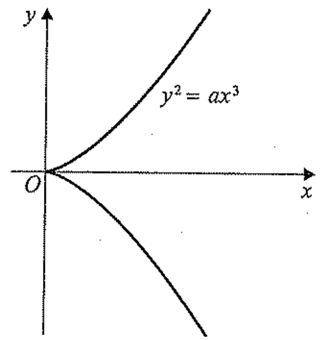
Како је $F_{x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2$, $F_{xy} = 8xy$, $F_{y^2} = 4x^2 + 12y^2 + 2$ и $F^0_{x^2} = -2$, $F^0_{xy} = 0$, $F^0_{y^2} = 2$, то је $F^0_{x^2}F^0_{y^2} - (F^0_{xy})^2 = -4 < 0$. Једначина (5) постаје

$$-2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0,$$

одакле је $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, тј. $\alpha = \pi/4$ или $\alpha = 3\pi/4$. Тачка $(0,0)$ је двојна, кроз њу пролазе две гране дате криве, чије тангенте имају коефицијенте праваца 1, односно -1. Облик криве у околини тачке $(0,0)$ је као на слици 4.3.1.



Сл. 4.3.1

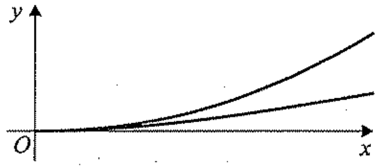


Сл. 4.3.2

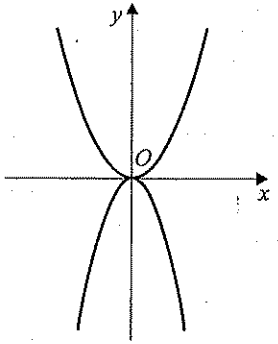
2° Функција $\Phi(x,y) = (x^2-a^2)^2 + (y^2-b^2)^2 - a^4 - b^4$, $a, b \neq 0$, дефинише криву $\Phi(x,y) = 0$ и има тачку $(0,0)$ као сингуларну. Из $\Phi_{x^2}(0,0) = -4a^2$, $\Phi_{y^2}(0,0) = -4b^2$ следи $\Phi^0_{x^2}\Phi^0_{y^2} - (\Phi^0_{xy})^2 = 16a^2b^2 > 0$. Тачка $(0,0)$ је изолована. Лако се види да у довољно малој околини тачке $(0,0)$ нема тачака дате криве.

3° Координатни почетак је сингуларна тачка криве $G(x,y) = y^2 - ax^3 = 0$, $a > 0$ (**полукубна парабола**). Како је $G^0_{x^2}G^0_{y^2} - (G^0_{xy})^2 = 0$, то једначина (5) има један корен, $\alpha = 0$. Крива има једну заједничку полутангенту за две гране криве, које се у околини тачке $(0,0)$ налазе са разних страна полутангенте, сл. 4.3.2. Тачка $(0,0)$ се назива **повратном тачком прве врсте**.

4° Тачка $(0,0)$ је сингуларна тачка криве $H(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5 = 0$. Једначина (5) у овом случају гласи $2\sin^2\alpha = 0$ и има један корен $\alpha = 0$. Оса Ox је полутангента обе гране криве у тачки $(0,0)$; обе гране се налазе с исте стране полутангенте у довољно малој околини тачке $(0,0)$, сл. 4.3.3. Сингуларна тачка овог типа назива се **повратном тачком друге врсте**.



Сл. 4.3.3



Сл. 4.3.4

5° У сингуларној тачки $(0,0)$ криве $\Psi(x,y) = y^2 + x^2y - 2x^4 = 0$ две гране се додирују, имају заједничку тангенту. За сваку од грана криве тачка $(0,0)$ је обична (није сингуларна), сл. 4.3.4. Ова сингуларна тачка криве назива се **тачком самододира**. ▲

4.4. ГЛАТКЕ ПОВРШИ У ПРОСТОРУ $\mathbf{R}^n$

Два скупа X, $Y \subset \mathbf{R}^n$ називамо **хомеоморфним** ако постоји бијективно пресликавање $f\colon X \to Y$, тако да су пресликавања f и f^{-1} непрекидна. При томе се пресликавање f назива **хомеоморфизмом**.

Нека је $k \leqslant n$; скуп $X \subset \mathbf{R}^n$ назива се ***k*-димензионалном елементарном површи (елементарном *k*-површи)** ако је хомеоморфан отвореној лопти $E^k = \{\, x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| < 1 \,\}$.

Подсетимо се да под околином тачке $p \in X$ у скупу $X \subset \mathbf{R}^n$ подразумевамо сваки скуп облика $V = U \cap X$, где је U околина тачке p у простору $\mathbf{R}^n$.

Уведимо још појам просте k-димензионалне површи. Ако је скуп $X \subset \mathbf{R}^n$ повезан и свака његова тачка има околину у њему која је k-димензионална елементарна површ, онда се за X каже да је ***k*-димензионална проста површ (проста *k*-површ)**.

Примери 4.4.1

1° Отворена елипса $\{\, (\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2 \mid \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 < 1 \,\}$ је елементарна 2-површ као хомеоморфна слика отвореног круга $\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$. Хомеоморфизам је дат једнакошћу $(\xi,\eta) = (ax, by)$, $x^2 + y^2 < 1$.

2° Отворена полусфера $\{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0 \,\}$ је елементарна 2-површ. Хомеоморфизам је дат паралелном пројекцијом полусфере на отворени круг $\{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$.

3° Простор $\mathbf{R}^n$ је елементарна n-површ. Хомеоморфизам $f\colon E^n \to \mathbf{R}^n$ дат је једнакошћу $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|} \operatorname{tg} \dfrac{\|x\|\pi}{2}$, $x \in E^n \setminus \{0\}$, $f(0) = 0$.

4° Нека је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. График Γ функције f је елементарна 1-површ. Хомеоморфизам h између $\mathbf{R}$ и Γ у равни Oxy дат је у облику

$$\mathbf{R} \ni x \overset{h}{\longmapsto} (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2.$$

5° Сфера $S^2 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$ је проста 2-површ, јер свака тачка има околину хомеоморфну отвореном кругу E^2.

6° Површ коцке у простору $\mathbf{R}^3$ је проста 2-површ. Наиме, коцка је хомеоморфна сфери S^2 (хомеоморфизам се добија пројектовањем тачака сфере на тачке површи коцке из заједничког центра), а она је проста 2-површ. ▲

Нека су X, Y два скупа у простору $\mathbf{R}^n$ (или, како се често још каже, две геометријске фигуре у простору $\mathbf{R}^n$). Пресликавање $f\colon X \to Y$ назива се **локално хомеоморфним** ако за сваку тачку $p \in X$ постоји околина тачке p у скупу X, таква да је U хомеоморфно са $f(U)$.

Дефиниција 4.4.1

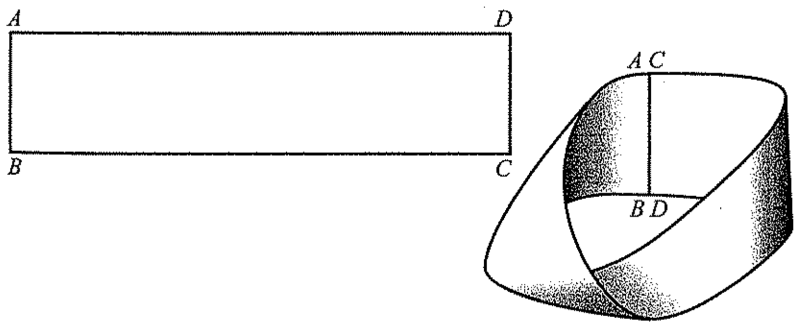
За скуп $X \subset \mathbf{R}^n$ кажемо да је **површ** ако представља локално хомеоморфну слику неке просте површи.

Лако се види да је елементарна површ и проста, а проста површ је површ у смислу дефиниције 4.4.1. Очито је да обратно не мора да важи.

Примери 4.4.2

1° **Мебиусова**[3] **трака** (сл. 4.4.1) је 2-димензионална површ (проста 2-површ) у простору $\mathbf{R}^3$, коју можемо добити ако спојимо две наспрамне странице AD и BC правоугаоника $ABCD$ тако да се супротна темена поклопе (A са C, D са B). Један начин да се Мебиусова трака зада параметарски је помоћу пресликавања $(-1/2, 1/2) \times (-\pi/2, \pi + \pi/4) \to \mathbf{R}^3$ и $(-1/2, 1/2) \times (\pi/2, 2\pi + \pi/4) \to \mathbf{R}^3$ датих са

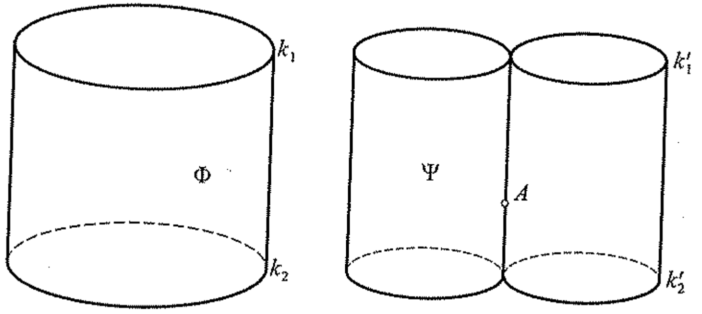
$$(v,\theta) \mapsto \big(\cos\theta + v\sin(\theta/2)\cos\theta, \sin\theta + v\sin(\theta/2)\sin\theta, v\cos(\theta/2)\big).$$



Сл. 4.4.1

[3] A. F. Möbius (1790–1868), немачки математичар

2° На слици 4.4.2 је приказана дводимензионална површ Ψ, добијена као локално хомеоморфна слика цилиндра Φ, који је проста површ. Површ Ψ није проста (јер, на пример, тачка A нема околину хомеоморфну отвореном кругу). Приметимо да скуп тачака на кружницама k_1 и k_2, односно на кривим k_1' и k_2' називамо границама површи Φ, односно Ψ. ▲



Сл. 4.4.2

Нека је Φ k-димензионална површ у простору $\mathbf{R}^n$, настала као слика области $G \subset \mathbf{R}^k$ функцијом $f\colon G \to \mathbf{R}^n$. Пресликавање f обично приказујемо у облику

$$
(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_k) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_k). \end{aligned}
$$

Са $\vec{r} = (x_1, \dots, x_n)$ означимо вектор положаја произвољне тачке N површи Φ, а са $t = (t_1, \dots, t_k)$ вектор положаја тачке $M \in G$, која се пресликава у тачку N. Тада се површ Φ може приказати векторском једначином $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in G$. Кажемо да је површ Φ параметризована параметром $t = (t_1, \dots, t_k) \in G$.

Ако свака тачка M површи Φ има околину $U(M)$ за коју постоји m пута (непрекидно) диференцијабилна параметризација, онда се каже да је Φ m пута (непрекидно) диференцијабилна површ. Непрекидно диференцијабилне површи називамо **глатким**.

У пракси ћемо користити и **део-по-део глатке** површи. Њих уводимо индуктивно на следећи начин.

Тачку називамо нула-димензионалном површи произвољне глаткости. k-површ $\Phi \subset \mathbf{R}^n$ називамо део-по-део глатком ако се из ње може удаљити коначно или пребројиво много део-по-део глатких површи димензија највише $k-1$, тако да је остатак унија глатких k-површи.

На пример, граница угла и граница квадрата су део-по-део глатке криве (1-површи). Граница коцке и граница правог кружног конуса у $\mathbf{R}^3$ су део-по-део глатке 2-површи.

Убудуће ћемо претпостављати да функције којима се површ приказује имају све потребне непрекидне изводе.

Примери 4.4.3

1° Површ Φ дата је једначинама

$$
(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \end{aligned}
$$

при чему је Φ слика функције $f = (f_1, \dots, f_n)\colon G \to \mathbf{R}^n$, $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ и за произвољну тачку $M \in G$ постоји околина $U(M)$ хомеоморфна са $f(U) \subset \Phi$. Тада из једначина (2) можемо елиминисати параметре $t_1, \dots, t_{n-1}$ и добити једначину површи $f(U) \subset \Phi$ у облику

$$
(3) \qquad F(x_1, \dots, x_n) = 0.
$$

Дакле, површ (2) може бити дата и у имплицитном облику (3).

2° Линеарна једначина $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, $x_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, у простору $\mathbf{R}^n$ представља хиперраван. Пресек ове хиперравни са потпростором $Ox_ix_jx_k$ (i, j, $k \in \{1, \dots, n\}$ фиксирани) је раван $a_ix_i + a_jx_j + a_kx_k + b = 0$ ($x_s = 0$ за $s \neq i, j, k$).

3° Параметарске једначине површи у простору $\mathbf{R}^n$ имају облик

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a\cos\varphi_1, & 0 &\leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \\
x_2 &= a\sin\varphi_1\cos\varphi_2, & 0 &\leqslant \varphi_2 \leqslant \pi, \\
x_3 &= a\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, & 0 &\leqslant \varphi_3 \leqslant \pi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= a\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & 0 &\leqslant \varphi_{n-1} < 2\pi, \\
x_n &= a\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}
$$

где је $a > 0$ фиксирано. Квадрирањем и сабирањем добија се једначина сфере $x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2$.

4° Нека је дата површ $F(x_1, \dots, x_n) = 0$. Претпоставимо да су испуњени услови за егзистенцију функције $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Тада се каже да је површ $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ експлицитно дата једначином $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Приметимо да се тачка $(x_1, \dots, x_n)$ површи $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ назива **обичном** ако је бар један од парцијалних извода $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, различит од нуле у њој. Ако је $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ за $i = 1, \dots, n$, онда је тачка $(x_1, \dots, x_n)$ **сингуларна**. ▲

4.5. ТАНГЕНТНА РАВАН И НОРМАЛА. ПРВА КВАДРАТНА ФОРМА ПОВРШИ

Тангентна раван и нормала површи

У овом и наредном одељку применићемо методе диференцијалног рачуна на неке проблеме површи у простору $\mathbf{R}^3$.

Нека је Φ дата површ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ произвољна тачка на њој. Ако постоји раван α која садржи тачку M_0 и има својство да угао φ између нормале равни α и произвољне сечице M_0M површи, $M \in \Phi$, тежи $\pi/2$ кад M тежи M_0, онда се раван α назива **тангентном равни** површи Φ у тачки M_0.

Уочимо скуп $\mathcal{T}$ свих кривих линија које се налазе на површи Φ, које пролазе кроз тачку M_0 и имају тангенту у тачки M_0. Према горњој дефиницији, тангентна раван представља унију тангената кривих фамилије $\mathcal{T}$.

Претпоставимо да је површ Φ дата у облику $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, где је f диференцијабилна функција. Покажимо да тангентна раван постоји у произвољној тачки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ површи, где је $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Уочимо тачке $M_0'(x_0, y_0)$ и $M'(x, y)$ у скупу D. За диференцијабилну функцију $z = f(x, y)$ важи

$$(1) \qquad z - z_0 = f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + o(\rho), \qquad \rho \to 0,$$

где је $f_x^0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f_y^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. С друге стране,

$$(2) \qquad z - z_0 = f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0)$$

је једначина равни кроз тачку (x_0, y_0, z_0). Угао φ између нормале на ову раван и сечице површи Φ кроз тачке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ дат је једнакошћу

$$\cos\varphi = \frac{f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{(f_x^0)^2 + (f_y^0)^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Из (1) следи да је бројилац последњег разломка једнак $o(\rho)$, $\rho \to 0$, па је

$$|\cos\varphi| \leqslant \frac{|o(\rho)|}{\rho\sqrt{(f_x^0)^2 + (f_y^0)^2 + 1}} \to 0, \quad \rho \to 0.$$

Дакле је (2) једначина тангентне равни. Означавајући текуће координате са X, Y, Z, а (x_0, y_0, z_0) са (x, y, z) и стављајући $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$, имаћемо једначину тангентне равни у облику

$$(2') \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Дефинишимо **нормалу** површи Φ у тачки $M_0(x, y, z)$ као нормалу тангентне равни у тој тачки. За једначину нормале имаћемо

$$(3) \qquad \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Ако је глатка површ Φ дата једначином $F(x, y, z) = 0$ и у тачки $M(x, y, z)$ је бар један од парцијалних извода функције F различит од нуле, на пример $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, онда је $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$, па је једначина тангентне равни у тачки M

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

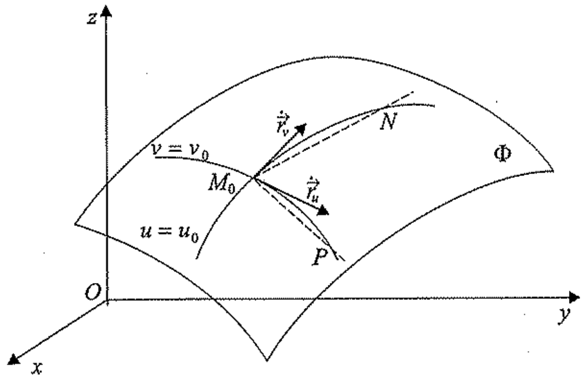
а нормале

$$(5) \qquad \frac{X - x}{\partial F/\partial x} = \frac{Y - y}{\partial F/\partial y} = \frac{Z - z}{\partial F/\partial z}.$$

Посматрајмо глатку 2-површ Φ дату једначином $\vec{r} = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, $(u, v) \in G \subset \mathbf{R}^2$. Нека је $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксирана произвољна тачка на површи Φ, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$. Криве линије

$$x = x(u_0, v),\ y = y(u_0, v),\ z = z(u_0, v) \quad \text{и} \quad x = x(u, v_0),\ y = y(u, v_0),\ z = z(u, v_0)$$

налазе се на површи Φ и пролазе кроз тачку M_0, сл. 4.5.1. Оне се називају **координатним линијама**. Уочимо криву $u = u_0$ и на њој тачку N. Гранични положај сечице M_0N, кад тачка N тежи тачки M_0, јесте тангента криве $u = u_0$ у тачки M_0. Слично, гранични положај сечице M_0P, кад тачка P тежи тачки M_0 остајући на кривој $v = v_0$, јесте тангента криве $v = v_0$ у тачки M_0. Како ове две тангенте леже у тангентној равни у тачки M_0, то је нормала тангентне равни паралелна вектору $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (претпостављаћемо да је тај векторски производ различит од нуле).



Сл. 4.5.1

Дакле, вектор нормале тангентне равни у произвољној тачки (x,y,z) можемо написати у облику

$$\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right),$$

где су са $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ означени кофактори матрице

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

добијени прецртавањем њене прве, друге, односно треће колоне. Та матрица је, уствари, транспонована матрица Јакобијеве матрице пресликавања $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$; услов $\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v \neq 0$ значи да је претпостављено да је она ранга 2. Према томе, једначине тангентне равни и нормале површи су

$$(6) \qquad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(X-x) + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(Y-y) + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(Z-z) = 0,$$

односно

$$(7) \qquad \frac{X-x}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}} = \frac{Y-y}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}} = \frac{Z-z}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}.$$

Пример 4.5.1

Површ је дата параметарским једначинама $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u\operatorname{ctg}\alpha$, $u \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant v < 2\pi$ (α фиксирано, $0 < \alpha < \pi/2$). Нађимо једначине тангентне равни и нормале у произвољној тачки (u_0, v_0), $u_0 \neq 0$.

Парцијални изводи у тачки (u_0, v_0) су:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v_0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -u_0 \sin v_0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u_0\cos v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Одатле је

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = -u_0\cos v_0 \operatorname{ctg}\alpha, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = -u_0 \sin v_0 \operatorname{ctg}\alpha, \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = u_0,$$

па је једначина тангентне равни

$$\cos v_0 \cdot x + \sin v_0 \cdot y - \operatorname{tg}\alpha \cdot z = 0,$$

а једначине нормале су

$$\frac{x - u_0\cos v_0}{\cos v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{\sin v_0} = \frac{z - u_0 \operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Елиминисањем параметара u, v из датих једначина површи добија се једначина $x^2+y^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot z^2$. Дата површ је конус, а условом $u_0 \neq 0$ је из разматрања искључен његов врх. ▲

Прва квадратна форма површи

Нека је $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, дата 2-површ у $\mathbf{R}^3$. Ако параметри u и v зависе од неког параметра t, $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in \Delta \subset \mathbf{R}$, онда разним вредностима параметра t одговарају вектори положаја тачака на површи које припадају кривој

$$(8) \qquad \vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big).$$

Ако су функције $\vec{r}$, u и v диференцијабилне, вектор тангенте криве (8) у произвољној тачки дат је једнакошћу

$$(9) \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}_u \frac{du}{dt} + \dot{\vec{r}}_v \frac{dv}{dt}.$$

Из (9) се види да вектор тангенте криве у некој тачки на површи представља линеарну комбинацију вектора тангената координатних линија у датој тачки.

Нађимо формулу за израчунавање дужине лука s криве (8) за вредности параметра t из неког сегмента $[\alpha, \beta]$.

Најпре приметимо да из релације (5) одељка 4.1 и једнакости $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}_u\,du + \dot{\vec{r}}_v\,dv$ следи

$$ds^2 = \dot{\vec{r}}_u^{\,2}\,du^2 + 2\dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v\,du\,dv + \dot{\vec{r}}_v^{\,2}\,dv^2.$$

Уведимо ознаке $\dot{\vec{r}}_u^{\,2} = E$, $\dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v = F$, $\dot{\vec{r}}_v^{\,2} = G$. Сада за ds^2 добијамо израз

$$(10) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Како се дужина лука израчунава по формули $s = \int_\alpha^\beta ds$, то је према (10), а имајући у виду зависност $u = u(t)$, $v = v(t)$,

$$(11) \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Квадратна форма $\varphi(du,dv) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ на десној страни једнакости (10) назива се **првом квадратном формом** површи $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, а њени коефицијенти E, F и G још и **Гаусовим коефицијентима** те површи. Из (11) се види да дужина лука криве на површи зависи од квадратне форме површи и једначина $u = u(t)$, $v = v(t)$.

Примери 4.5.2

1° Једначина сфере има облик $\vec{r}(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, па је $\dot{\vec{r}}_\theta = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, 0)$,

$\dot{\vec r}_\varphi = (a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\varphi)$. Одавде је $E = a^2\sin^2\varphi$, $F = 0$, $G = a^2$ и прва квадратна форма има облик

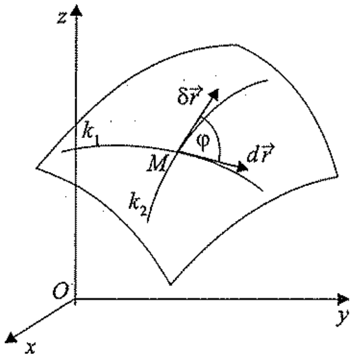
$$ds^2 = a^2(\sin^2\varphi\, d\theta^2 + d\varphi^2).$$

2° Једначина површи је $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D\subset \mathbf{R}^2$. Напишимо је у облику $\vec r(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)$. Види се да је $\dot{\vec r}_x = (1,0,p)$, $\dot{\vec r}_y = (0,1,q)$, одакле следи $E = 1+p^2$, $F = pq$, $G = 1+q^2$, као и

$$ds^2 = (1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2. \quad ▲$$

Уочимо две произвољне криве k_1 и k_2 на површи $\vec r = \vec r(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbf{R}^2$, које се секу у тачки M површи. Израчунајмо угао φ између кривих k_1 и k_2. Имајући у виду (9), вектор тангенте криве k_1 означимо са $d\vec r = \dot{\vec r}_u du + \dot{\vec r}_v dv$, а криве k_2 са $\delta\vec r = \dot{\vec r}_u \delta u + \dot{\vec r}_v \delta v$ (различите ознаке за диференцијале користимо зато да бисмо разликовали правце тангената кривих). За угао φ између тангената, сл. 4.5.2, важи једнакост

$$\cos\varphi = \frac{d\vec r\cdot\delta\vec r}{|d\vec r|\cdot|\delta\vec r|}.$$



Сл. 4.5.2

Узимајући у обзир да је

$$|d\vec r| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \quad |\delta\vec r| = \delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2},$$

$$d\vec r\cdot\delta\vec r = (\dot{\vec r}_u du + \dot{\vec r}_v dv)\cdot(\dot{\vec r}_u\delta u + \dot{\vec r}_v\delta v) = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v,$$

имамо

(12) $$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Приметимо да се из (12) види да је за израчунавање угла између кривих на површи довољно знати прву квадратну форму површи, а не и једначину те површи.

Пример 4.5.3

Израчунајмо угао између координатних линија површи $\vec r = \vec r(u,v)$ у произвољној тачки њиховог пресека.

Из $v = \text{const}$, односно $u = \text{const}$, следи $du \neq 0$, $dv = 0$, односно $\delta u = 0$, $\delta v \neq 0$, па (12) даје

$$\cos\varphi = \frac{F\,du\,\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Специјално, ако је $F\equiv 0$, онда су координатне линије у свакој тачки површи међусобно ортогоналне. Таква мрежа координатних линија се назива ортогоналном. ▲

4.6. СИНГУЛАРНЕ ТАЧКЕ ПОВРШИ У ПРОСТОРУ $\mathbf{R}^3$

Посматрајмо тачке површи Φ чија је једначина $F(x,y,z) = 0$, где је функција F двапут диференцијабилна. Нека је тачка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на тој површи сингуларна, тј. нека је $F_x^0 = \dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) = 0$, $F_y^0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 0$ и $F_z^0 = \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$. Тада у тачки M_0 не постоји тангентна раван. Како изгледа површ Φ у околини тачке M_0?

Став 4.6.1

Ако се у сингуларној тачки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ површи $F(x,y,z) = 0$ не анулирају сви парцијални изводи другог реда функције F, онда тангенте свих кривих, које леже на површи и пролазе кроз тачку M_0, припадају једном конусу (стварном, имагинарном, пару равни или правих).

Доказ.

За произвољну криву $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ која пролази кроз тачку M_0 и налази се на површи $F(x,y,z) = 0$ важи једнакост

(1) $$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0.$$

При томе постоји t_0, тако да је $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Из (1) имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

и затим, поновним диференцирањем по t и заменом t са t_0,

(2) $$F_{x^2}^0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + F_{y^2}^0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 + F_{z^2}^0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 + 2\left(F_{xy}^0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + F_{xz}^0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 + F_{yz}^0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right) + F_x^0\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 + F_y^0\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 + F_z^0\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = 0,$$

при чему је $F_x^0 = F_y^0 = F_z^0 = 0$. Једначина тангенте криве $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ у тачки M_0 има облик

(3) $$\frac{x - x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0}.$$

Елиминисањем параметара $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\dfrac{dz}{dt}\right)_0$ из једначина (2) и (3) добија се једначина

(4) $$F_{x^2}^0(x - x_0)^2 + F_{y^2}^0(y - y_0)^2 + F_{z^2}^0(z - z_0)^2 + 2F_{yz}^0(y - y_0)(z - z_0) + 2F_{xz}^0(x - x_0)(z - z_0) + 2F_{xy}^0(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

која представља конус. ■

Примери 4.6.1

1° Конус $x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0$ има тачку $(0,0,0)$ као сингуларну. Једначина (4) у овој тачки има облик $x^2 + y^2 = k^2z^2$.

2° Сингуларна тачка површи $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ је координатни почетак. Једначина (4) је $x^2 + y^2 = 0$, што представља тачку (односно пар имагинарних правих).

3° Сингуларне тачке површи $z^3 + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 3z = 0$ налазе се у скупу решења система једначина $4x = 0$, $4y-4 = 0$, $3z^2-3 = 0$. Тачка $(0,1,1)$ не налази се на површи, а тачка $(0,1,-1)$ је сингуларна тачка дате површи. Једначина (4) има облик $2x^2 + 2(y-1)^2 = 3(z+1)^2$. ▲

ЗАДАЦИ

1. Нека је $\vec{r}(t)$ векторска функција у простору $\mathbf{R}^n$. Ако је она непрекидно диференцијабилна на сегменту $[t_0, t_1]$, онда је дужина лука s ходографа ове функције на $[t_0, t_1]$ дата интегралом

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt.$$

Доказати.

2. Параметризовати **хиперболичку завојницу** $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$, $z = at$, $t \in \mathbf{R}$, помоћу природног параметра.

3. Вектор положаја $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t \in \Delta \subset \mathbf{R}$, глатке криве Γ има други извод $\ddot{\vec{r}}(t)$. Наћи координате центра кривине у произвољној тачки криве Γ.

4. Наћи формулу за кривину ако је једначина криве у равни дата у поларним координатама.

5. За криве $y = f(x)$ и $y = g(x)$ каже се да у тачки x_0 имају **додир најмање реда** n ако је $f(x) - g(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ за $x \to x_0$.

1° Ако су функције f и g n пута непрекидно диференцијабилне у тачки x_0, онда криве $y = f(x)$ и $y = g(x)$ у тачки x_0 имају додир најмање реда n ако и само ако је $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, … , $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$. Доказати.

2° Доказати да круг кривине двапут непрекидно диференцијабилне криве има са њом у датој тачки додир најмање реда 2.

3° Доказати да круг кривине у теменима кривих другог реда има с тим кривим додир трећег реда.

6. Нека се тачка додира криве и тангенте налази у координатном почетку O, тангента је оса Ox, а оса Oy је усмерена према центру кривине. Ако се полупречник кривине означи са R, ордината тачке на кривој са y_1, а ордината

центра кривине са y_2, онда се y_1 и y_2 могу на следећи начин апроксимирати у околини координатног почетка:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R} + ax^3 + \cdots, \qquad y_2 = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \cdots,$$

где је a неки реалан број. Доказати.

7. Наћи еволуту

1° астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

2° **трактрисе** $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$;

3° логаритамске спирале $r = ae^{k\varphi}$.

8. Ако је крива k_2 еволута криве k_1, каже се да је крива k_1 **еволвента** криве k_2. Доказати да је крива $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ еволвента круга $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Наћи еволуту криве дате једначином $F(x,y) = 0$.

10. Испитати сингуларну тачку **Диоклесове**[4] **цисоиде** $x(x^2+y^2) = ky^2$.

11. **Конхоида** дате криве је геометријско место крајева дужи сталне дужине нанесених на продужетке вектора положаја тачака криве. Наћи једначину конхоиде круга у поларном координатном систему ако се пол налази на кругу (**Паскалов**[5] **пуж**). Преласком на правоугли координатни систем испитати сингуларну тачку Паскаловог пужа.

12. Вивијанијева крива (в. пример 4.1.1.3°) дата је као пресек сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ и цилиндра $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$.

1° Показати да се та крива може параметризовати помоћу $x = R(1+\cos t)$, $y = R\sin t$, $z = 2R\sin\dfrac{t}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$.

2° Показати да је њена кривина дата са $K = \sqrt{13 + 3\cos t}\,/R(3+\cos t)^{3/2}$, а торзија са $\varkappa = -6\cos\dfrac{t}{2}\,/R(13 + 3\cos t)$.

3° Наћи векторе фундаменталног триедра у тачкама самопресецања криве ($t = 0$, $t = 2\pi$) и у тачкама у којима је $\varkappa = 0$ ($t = \pi$, $t = 3\pi$).

13. Доказати да се крива $\vec{r} = e^{kt}(a\cos t\,\vec{\imath} + a\sin t\,\vec{\jmath} + bt\,\vec{k})$ налази на конусу $b^2(x^2 + y^2) = a^2z^2$.

14. 1° Наћи услов додира равни $Ax + By + Cz + D = 0$ и површи $xyz = a^3$.

2° Доказати да тангентне равни површи $xyz = a^3$ с координатним равнима образују тетраедре константне запремине.

[4] Диоклес (II век п. н. е.), старогрчки математичар

[5] E. Pascal (1588–1651), француски математичар

15. 1° Написати параметарске једначине површи која настаје ротацијом криве $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$, $u \in \Delta \subset \mathbf{R}$, око осе Oz.

2° Доказати да све нормале ове површи секу осу Oz.

3° Доказати да прва квадратна форма ове површи гласи

$$\left(f'^2(u) + g'^2(u)\right) du^2 + f^2(u)\, dv^2.$$

16. Ако све нормале неке површи секу једну праву, онда је површ обртна. Доказати.

17. Нека је на некој површи задата фамилија кривих линија. Криве на површи које сваку криву из фамилије секу под правим углом, називају се **ортогоналним трајекторијама** дате фамилије. Наћи ортогоналне трајекторије праволинијских генератриса хиперболичког параболоида $z = kxy$.

5. ВИШЕСТРУКИ ИНТЕГРАЛИ

У М.А.I посматрани су одређени интеграли, дефинисани на неком сегменту $[a, b] \subset \mathbf{R}$, као и низ примена одређених интеграла. Методе које су типичне за примену одређених интеграла на сегменту реалне праве показују се врло корисним код низа проблема везаних за „сегменте" у равни $\mathbf{R}^2$, односно простору $\mathbf{R}^3$ или пак, уопште, у простору $\mathbf{R}^n$. Наиме, у циљу генерализације Римановог интеграла дефинише се сегмент у простору $\mathbf{R}^n$, затим подела тога сегмента и мера сегмента. Даље се уводе мерљиви скупови у $\mathbf{R}^n$ и најзад одређени интеграл по сегменту, као и по произвољном мерљивом скупу. Примене иду у правцу дефинисања и налажења запремине геометријских тела, маса физичких тела, момената инерције и др.

5.1. ЖОРДАНОВА МЕРА

Нека су $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ две тачке у простору $\mathbf{R}^n$. Скуп $I_{a,b} = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n \,\}$ називаћемо **сегментом** у простору $\mathbf{R}^n$. Приметимо да за $n = 2$, сегмент је правоугаоник, за $n = 3$ је квадар; сегмент у простору $\mathbf{R}^n$ је **правоугли n-паралелепипед**.

Мера $\mu I_{a,b}$ сегмента $I_{a,b}$ је број $\mu I_{a,b} = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Примери 5.1.1

1° Сегмент $I_{a,b} = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2 \,\}$ је правоугаоник у равни $\mathbf{R}^2$; мера $\mu I_{a,b}$ је површина правоугаоника.

2° Сегмент $I_{a,b} = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, 3 \,\}$ је правоугли паралелепипед у простору $\mathbf{R}^3$. Мера $\mu I_{a,b}$ је запремина паралелепипеда. ▲

Приметимо да је мера $\mu I_{a,b}$ сегмента $[a, b] \subset \mathbf{R}$ једнака $b - a$.

Нека су $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$, сегменти на $\mathbf{R}$. Тада је $I_{a,b} = \prod\limits_{i=1}^{n} I_i$, где је $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. На сегменту I_i уочимо поделу $P_i = \{x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Декартов производ

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in P_i, i = 1, \ldots, n \,\}$$

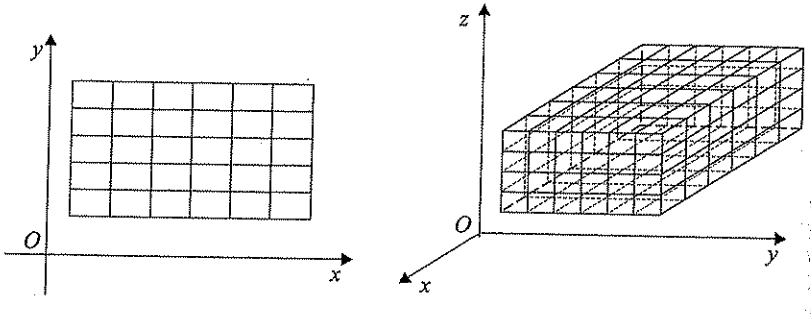
је **подела** сегмента $I_{a,b}$. Та подела одређује сегменте

$$[x_1^{j_1}, x_1^{j_1+1}] \times \cdots \times [x_n^{j_n}, x_n^{j_n+1}]$$

које називамо **подсегментима** у односу на сегмент $I_{a,b}$. Поделу P неког сегмента $I_{a,b}$ још ћемо представљати у облику скупа подсегмената $I^1, \dots, I^k$, тј.

$$P = \{I^1, \dots, I^k\}.$$

На слици 5.1.1 приказани су сегменти и њихове поделе у просторима $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$.



Сл. 5.1.1

Скуп $\mathcal{P}(I)$ свих подела сегмента $I \subset \mathbf{R}^n$ може се уредити. За две поделе P и P' сегмента I казаћемо да је P' **финија** од P, односно да је P **грубља** од P', и писати $P \prec P'$, односно $P' \succ P$, ако је сваки подсегмент $I^{k_i} \in P'$ подскуп неког подсегмента $I^{m_j} \in P$, $I^{k_i} \subset I^{m_j}$. Лако је видети да за сваке две поделе P', $P'' \in \mathcal{P}(I_{a,b})$ постоји подела $P \in \mathcal{P}(I_{a,b})$, тако да је $P' \prec P$, $P'' \prec P$.

Посматрајмо сада произвољне ограничене скупове у простору $\mathbf{R}^n$. Нека је A један такав скуп, који је садржан у сегменту I. Сетимо се да је $x \in \mathbf{R}^n$ унутрашња тачка скупа A ако она припада том скупу заједно са неком својом околином; x је спољашња тачка скупа A ако је унутрашња тачка скупа $\mathbf{R}^n \setminus A$; x је гранична тачка скупа A ако није ни његова унутрашња ни спољашња тачка. Скуп свих унутрашњих тачака скупа A означаваћемо са A°, а скуп свих граничних тачака са ∂A. Адхеренцију скупа A означаваћемо са $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Уочимо произвољну поделу P сегмента I који садржи дати ограничени скуп $A \subset \mathbf{R}^n$. Са $\underline{\omega}_P(A)$ означимо унију свих оних подсегмената поделе P који се састоје само од унутрашњих тачака скупа A, а са $\overline{\omega}_P(A)$ унију свих подсегмената који садрже бар неку тачку скупа $\overline{A}$. Збир мера свих подсегмената из $\underline{\omega}_P(A)$, односно $\overline{\omega}_P(A)$, означићемо са $|\underline{\omega}_P(A)|$, односно $|\overline{\omega}_P(A)|$ (краће $|\underline{\omega}_P|$, односно $|\overline{\omega}_P|$, ако се зна о ком се скупу A ради).

Лако се види да из $P \prec P'$ следи $|\underline{\omega}_P| \leqslant |\underline{\omega}_{P'}|$, односно $|\overline{\omega}_P| \geqslant |\overline{\omega}_{P'}|$. За две произвољне поделе P', P'' важи $|\underline{\omega}_{P'}| \leqslant |\overline{\omega}_{P''}|$. Дакле постоје коначни

(1) $$\sup_P |\underline{\omega}_P(A)| = \mu_i A,$$

(2) $$\inf_P |\overline{\omega}_P(A)| = \mu_e A.$$

Број $\mu_i A$ називамо **унутрашњом**, а број $\mu_e A$ **спољашњом Жордановом мером** скупа A (унутрашњом и спољашњом n-димензионалном мером). Очито је $\mu_i A \leqslant \mu_e A$.

Дефиниција 5.1.1

Ако је $\mu_i A = \mu_e A$, онда кажемо да је скуп A **мерљив (по Жордану)**, а тај број означавамо са μA и називамо **n-димензионалном Жордановом мером** скупа A.

Лако се показује да $\mu_i A$ и $\mu_e A$ (па самим тим и μA, ако постоји) не зависе од сегмента $I \supset A$, него само од самог скупа A. Ми ћемо убудуће говорити о поделама, мислећи при томе на поделе сегмента у коме се налази посматрани скуп.

Својства Жорданове мере

Приметимо најпре да за сваки мерљив скуп $A \subset \mathbf{R}^n$ важи $\mu A \geqslant 0$.

Став 5.1.1

1° Ако су $A, B \subset \mathbf{R}^n$ мерљиви скупови и $A \subset B$, онда је $\mu A \leqslant \mu B$.

2° Ако је $A \subset \mathbf{R}^n$ непразан, отворен и мерљив скуп, онда је $\mu A > 0$.

3° Мера скупа A једнака је нули ако и само ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји подела P, тако да је $|\overline{\omega}_P(A)| < \varepsilon$.

Доказ.

1° За сваку поделу P је $\underline{\omega}_P(A) \subset \underline{\omega}_P(B)$, одакле је $|\underline{\omega}_P(A)| \leqslant |\underline{\omega}_P(B)|$, што даје $\mu_i A \leqslant \mu_i B$. Дакле је и $\mu A \leqslant \mu B$.

2° Постоје тачка $x \in A$ и кугла $K(x, r) \subset A$, $r > 0$. Но, тада постоји и сегмент $I_{a,b}$, уписан у $K(x, r)$. Из $\mu I_{a,b} > 0$ и 1° следи тврђење.

3° Да је услов неопходан следи из (2), а из $\inf_P |\overline{\omega}_P(A)| < \varepsilon$ и чињенице да је ε произвољно мало следи $\mu_e A = 0$, па је услов и довољан. ∎

Теорема 5.1.1

Ако је $A \subset \mathbf{R}^n$ ограничен скуп, онда је $\mu_e \partial A = \mu_e A - \mu_i A$.

Доказ.

Уочимо произвољан сегмент $I \supset A$. За произвољну поделу P важи једнакост $|\overline{\omega}_P(\partial A)| = |\overline{\omega}_P(A)| - |\underline{\omega}_P(A)|$, одакле због (1) и (2) следи $\mu_e \partial A = \mu_e A - \mu_i A$, јер је $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$. ∎

Последица 5.1.1

Ограничен скуп A у простору $\mathbf{R}^n$ је мерљив ако и само ако је $\mu \partial A = 0$. ∎

Став 5.1.2

Нека су $A, B \subset \mathbf{R}^n$ мерљиви скупови. Тада:

1° скупови $A \cup B$, $A \cap B$ и $B \setminus A$ су мерљиви;

2° ако је $A \cap B \subset \partial A \cup \partial B$, онда је $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.

3° ако је $A \subset B$, онда је $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

Доказ.

1° Следи из последице 5.1.1 и инклузија $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$ и $\partial(B \setminus A) \subset \partial A \cup \partial B$ (в. задатак 1.5).

2° Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно мало. Према (1) и (2) постоји подела P, тако да је

$$\mu A - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(A)| \leqslant |\overline{\omega}_P(A)| < \mu A + \varepsilon,$$
$$\mu B - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(B)| \leqslant |\overline{\omega}_P(B)| < \mu B + \varepsilon.$$

На основу претпоставке одавде следи

$$\mu A - \varepsilon + \mu B - \varepsilon < |\underline{\omega}_P(A)| + |\underline{\omega}_P(B)| \leqslant \mu_i(A \cup B)$$
$$\leqslant \mu_e(A \cup B) \leqslant |\overline{\omega}_P(A)| + |\overline{\omega}_P(B)| < \mu A + \varepsilon + \mu B + \varepsilon,$$

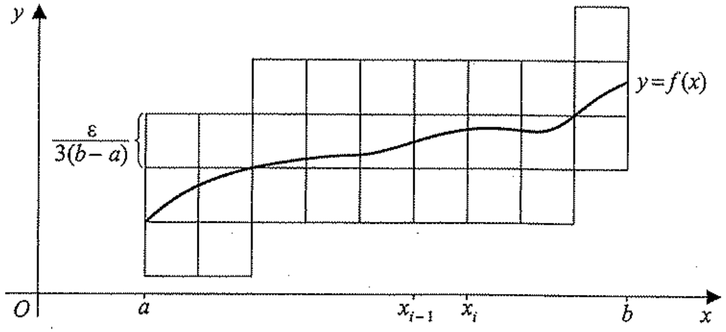
одакле имамо

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B.$$

3° Из једнакости $(B \setminus A) \cup A = B$ и из 2° следи $\mu(B \setminus A) + \mu A = \mu B$. ∎

Примери 5.1.2

1° Са A означимо скуп рационалних бројева у скупу $[0,1] \subset \mathbf{R}$. За произвољну поделу P сегмента $[0,1]$ је $|\underline{\omega}_P(A)| = 0$, јер сваки подсегмент поделе P садржи ирационалну тачку. Очито је $|\overline{\omega}_P(A)| = 1$. Дакле је $\mu_i A = 0$, $\mu_e A = 1$ и скуп A није мерљив по Жордану.



Сл. 5.1.2

2° Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција. Са A означимо њен график, $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a,b],\, y = f(x)\}$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Из непрекидности функције f на сегменту $[a,b]$ следи да постоји таква подела $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента $[a,b]$ да је $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ чим тачке x', x'' припадају истом сегменту поделе T. Тачке скупа A налазе се у унији правоугаоника страница дужине $x_i - x_{i-1}$ и $\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, сл. 5.1.2. Дакле се скуп A налази у унутрашњости уније правоугаоника чија укупна мера износи $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$. Према ставу 5.1.1.3° је $\mu A = 0$.

3° Са S означимо криволинијски трапез у равни $\mathbf{R}^2$, ограничен сегментом $[a,b]$ осе Ox, правим $x = a$, $x = b$ и луком криве $y = f(x) \geqslant 0$ (f је као у претходном примеру). Лако се види према претходном примеру да је $\mu\partial S = 0$, па је скуп S мерљив. Изаберимо такву поделу P у простору $\mathbf{R}^2$, да праве на којима се налазе ивице правоугаоника, паралелне y-оси, секу x-осу у тачкама x_0, x_1, …, x_n. При томе је $a = x_0$, $b = x_n$. Са $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ означимо одговарајућу поделу сегмента $[a,b]$. Ако се још са $\sigma(f, T, \xi)$ означи интегрална сума функције f на $[a,b]$ за неки избор ξ истакнутих тачака, онда се види да је

$$|\underline{\omega}_P(S)| \leqslant \sigma(f, T, \xi) \leqslant |\overline{\omega}_P(S)|,$$

што даје $\mu S = \int_a^b f(x)\,dx$.

4° График S непрекидне функције $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbf{R}^{n-1}$, где је скуп D затворен и ограничен, у простору $\mathbf{R}^n$ има меру нула. Доказ овог тврђења сличан је доказу у примеру 2°.

5° Површ S дата је једначином $x = \varphi(u)$, односно једнакостима

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_{n-1})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \overline{D} \subset \mathbf{R}^{n-1}$, где су φ_i и $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, непрекидни на $\overline{D}$, а D је отворен, конвексан и ограничен скуп. Покажимо да је n-димензионална мера μS скупа S једнака нули.

Уочимо две произвољне тачке $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ на површи S. За њих постоје одговарајуће вредности параметара u_1, …, u_{n-1}, тако да је $x'_i = \varphi_i(u'_1, \dots, u'_{n-1})$, $x''_i = \varphi_i(u''_1, \dots, u''_{n-1})$, $i = 1, \dots, n$. Према теореми 2.4.2 је

$$\|x'' - x'\| \leqslant \|u'' - u'\| \max \|d\varphi(\tau)\| = C\|u'' - u'\| \tag{3}$$

(тачка $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ је између $u' = (u'_1, \dots, u'_{n-1})$ и $u'' = (u''_1, \dots, u''_{n-1})$, а C је константа).

Уочимо једну коцку I у простору $\mathbf{R}^{n-1}$ која садржи скуп D и поделимо је на p^{n-1} једнаких коцки V^i, $i = 1, \dots, p^{n-1}$. Због својства површи S израженог у неједнакости (3), поступајући слично као у примеру 2°, за произвољно $\varepsilon > 0$ можемо изабрати p довољно велико, тако да све тачке површи S могу да се сместе у коцке $W^{i_1}, \dots, W^{i_r}$ простора $\mathbf{R}^n$ и да важи $\sum\limits_{k=1}^{r} \mu W^{i_k} < \varepsilon$.

6° Уочимо произвољан мерљив скуп $A \subset \mathbf{R}^n$. Нека део површи S (која задовољава услове као у претходном примеру) дели скуп A на делове A_1 и A_2. Тада су A_1 и A_2 мерљиви. Наиме, из чињенице да је $\partial A_1 \subset \partial A \cup S$ и $\partial A_2 \subset \partial A \cup S$, на основу теореме 5.1.1 и става 5.1.2.2°, те претходног примера, следи тврђење.

7° Мера $\mu\Delta$ интервала $\Delta = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \dots, n \}$ износи $\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Ово тврђење непосредно следи из дефиниције. ▲

5.2. n-ИНТЕГРАЛ

Нека је $I \subset \mathbf{R}^n$ сегмент. Уочимо фамилију $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ мерљивих затворених скупова, тако да је $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V^i$ и $(V^i)^\circ \cap (V^j)^\circ = \emptyset$ за $i \neq j$. Фамилију T назваћемо **поделом** сегмента I. Приметимо да овим проширујемо појам поделе дефинисан у одељку 5.1. При томе ћемо ову поделу називати произвољном, а поделу у одељку 5.1 — поделом на подсегменте. Уколико је јасно о којој се подели ради, назив поделе нећемо истицати.

У скуп $\mathcal{T}$ свих произвољних подела сегмента I може се увести уређење $\prec$ тако да је $T' \prec T''$ ако је сваки елемент $V'' \in T''$ подскуп неког елемента $V' \in T'$. За сваку поделу $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ сегмента I, према ставу 5.1.2.2° важи једнакост

$$\mu I = \sum_{i=1}^{k} \mu V^i.$$

Нека је $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$ произвољна подела сегмента $I \subset \mathbf{R}^n$. У сваком елементу V^i изаберимо тачку $\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$ и назовимо је **истакнутом тачком**. Овакву поделу T, код које је у сваком њеном елементу V^i изабрана истакнута тачка ξ^i, $i = 1, \dots, k$, назваћемо **поделом са истакнутим тачкама** у ознаци (T, ξ).

Са δV^i означимо дијаметар елемента V^i поделе T. **Параметром поделе** T назовимо највећи дијаметар $\lambda(T)$ елемената V^i, тј.

$$\lambda(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \delta V^i.$$

Нека је $I_{a,b} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, n \}$ произвољан сегмент у простору $\mathbf{R}^n$. Приметимо да за сваку поделу T тог сегмента и свако $\varepsilon > 0$

можемо наћи поделу T', тако да је $T \prec T'$ и $\lambda(T') < \varepsilon$. Ово се показује коришћењем примера 5.1.2.6°. Посебно, за свако $\varepsilon > 0$ и сваку поделу P сегмента $I_{a,b}$ на подсегменте можемо наћи поделе на сегментима $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, које индукују поделу P' сегмента $I_{a,b}$ за коју важи $P \prec P'$, $\lambda(P') < \varepsilon$.

Дефиниција 5.2.1

Нека је функција $f \colon I \to \mathbf{R}$ дефинисана на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$ и нека је (T, ξ) произвољна подела с истакнутим тачкама тог сегмента, $T = \{ V^i \mid i = 1, \dots, k \}$. Збир

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu V^i \tag{1}$$

називамо **интегралним збиром (интегралном сумом)** функције f на сегменту I по подели (T, ξ). Број J је лимес интегралне суме $\sigma(f, T, \xi)$ кад $\lambda(T) \to 0$, у ознаци

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi) = J,$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $|\sigma(f, T, \xi) - J| < \varepsilon$ за сваку поделу T за коју је $\lambda(T) < \delta$ и за сваки избор истакнутих тачака. Ако такав број J постоји, он се назива **n-интегралом** функције f по сегменту I и означава се са $\int_I f(x)\,dx$.

Дакле је

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi) = \int_I f(x)\,dx,$$

ако лимес на левој страни ове једнакости постоји. Осим поменуте ознаке за n-интеграл користе се и следеће:

$$\int_I f\,dx, \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n, \quad \overbrace{\int \cdots \int_I}^{n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n.$$

За $n = 2$ и $n = 3$ имамо 2-интеграл, односно 3-интеграл, које називамо **двојни**, односно **тројни интеграл** и најчешће означавамо са

$$\iint_I f(x, y)\,dx\,dy, \quad \text{односно} \quad \iiint_I f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ако постоји n-интеграл функције f на сегменту I, казаћемо да је f **интеграбилна по Риману** на I и писати $f \in \mathcal{R}(I)$, где је, дакле, са $\mathcal{R}(I)$ означен скуп интеграбилних по Риману функција на сегменту I.

Примери 5.2.1

1° Функција $f(x) = c$, $x \in I$, дефинисана на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$, интеграбилна је. Наиме, њена интегрална сума има облик

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu V^i = c \sum_{i=1}^{k} \mu V^i = c \cdot \mu I.$$

2° Нека је $f(x)$ интеграбилна на $I \subset \mathbf{R}^n$ функција. Посматрајмо функцију $cf(x)$ на сегменту I. Интегрална сума ове функције на сегменту I дата је изразом

$$\sigma(cf,T,\xi) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi^i)\cdot \mu V^i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi^i)\cdot \mu V^i,$$

одакле се, после преласка на лимес, добија

$$\int_I cf(x)\,dx = c\int_I f(x)\,dx. \quad \blacktriangle$$

Став 5.2.1

Ако је реална функција f интеграбилна на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$, онда је она и ограничена на њему.

Доказ.

Нека је $\delta > 0$ произвољно мали број и нека је $T = \{\, V^i \mid i = 1, \ldots, k \,\}$ подела сегмента I, $\lambda(T) < \delta$. Претпоставимо да је функција f неограничена на I. Тада постоји елемент V^r поделе T на коме је f неограничена. Интегралну суму $\sigma(f,T,\xi)$ напишимо у облику

$$\sigma(f,T,\xi) = f(\xi^r)\cdot \mu V^r + \sum_{i\neq r} f(\xi^i)\cdot \mu V^i.$$

При изабраној подели T и изабраним истакнутим тачкама ξ^i, $i \neq r$, други сабирак с десне стране ове једнакости има сталну вредност. Бирањем тачке ξ^r у првом сабирку, овај може бити произвољно велик. Дакле, не постоји коначан $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,\xi)$. Контрадикција. ■

Дарбуове суме

Претпоставимо да је реална функција f дефинисана на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$ и ограничена на том сегменту. Нека је $T = \{\, V^i \mid i = 1, \ldots, k \,\}$ подела сегмента I. Означимо $m_i = \inf\limits_{x\in V^i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in V^i} f(x)$. Суме

$$s = s(f,T) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \mu V^i \quad \text{и} \quad S = S(f,T) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \mu V^i$$

називамо **доњом**, односно **горњом Дарбуовом сумом функције** f **по подели** T.

Навешћемо нека својства Дарбуових сума (упоредити са М.А.I, одељак 8.1).

Из неједнакости $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, $i = 1, \ldots, k$, следи $m_i\cdot\mu V^i \leqslant f(\xi^i)\cdot\mu V^i \leqslant M_i \cdot \mu V^i$, одакле сабирањем за $i = 1, \ldots, k$, добијамо

$$s(f,T) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T).$$

Лако се види да важе једнакости

$$\inf_{\xi^i\in V^i} \sigma(f,T,\xi) = s(f,T), \quad \sup_{\xi^i\in V^i} \sigma(f,T,\xi) = S(f,T).$$

Нека су T и T' две поделе сегмента $I \subset \mathbf{R}^n$ и нека је $T \prec T'$. Тада за сваки елемент V^i поделе T постоје елементи W^{i_s} поделе T', тако да је $\bigcup_s W^{i_s} = V^i$, односно $\bigcup_i \big(\bigcup_s W^{i_s}\big) = \bigcup_i V^i = I$. Означимо

$$m_{i_s} = \inf_{x\in W^{i_s}} f(x), \quad M_{i_s} = \sup_{x\in W^{i_s}} f(x).$$

Из чињенице да је $m_i \leqslant m_{i_s} \leqslant M_{i_s} \leqslant M_i$, за сваки елемент $W^{i_s} \subset V^i$, као и за свако $V^i \subset I$, следи

$$s(f,T) \leqslant s(f,T') \leqslant S(f,T') \leqslant S(f,T), \quad T \prec T'.$$

Ако су T' и T'' две произвољне поделе сегмента $I \subset \mathbf{R}^n$, онда је лако конструисати поделу T, тако да је $T' \prec T$, $T'' \prec T$. За ове поделе важи

$$s(f,T') \leqslant s(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S(f,T'').$$

Одавде следи да ниједна доња Дарбуова сума није већа ни од једне горње Дарбуове суме. Штавише, скуп доњих Дарбуових сума ограничен је одозго, а скуп горњих Дарбуових сума ограничен је одоздо. Дакле, постоје коначни $\sup\limits_T s(f,T)$ и $\inf\limits_T S(f,T)$, који се називају **доњим**, односно **горњим Дарбуовим интегралом функције** f **на сегменту** I и означавају са

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx = \sup_T s(f,T) \quad \text{и} \quad \overline{\int_I} f(x)\,dx = \inf_T S(f,T).$$

Теорема 5.2.1

Нека је f ограничена реална функција на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$. Тада су следећи искази међусобно еквивалентни:

1° f је интеграбилна функција на I;

2° $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall T \in \mathcal{T})(\lambda(T) < \delta \Rightarrow S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon)$;

3° $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall T \in \mathcal{T})(\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,T,\xi') - \sigma(f,T,\xi'')| < \varepsilon)$;

4° $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall T', T'' \in \mathcal{T})(\lambda(T') < \delta,\ \lambda(T'') < \delta \Rightarrow$
$|\sigma(f,T',\xi') - \sigma(f,T'',\xi'')| < \varepsilon)$.

При томе су у 3° и 4° са ξ' и ξ'' означени произвољни скупови истакнутих тачака у одговарајућим поделама.

Доказ је сличан доказу теореме 8.1.1 из М.А.I, те га изостављамо. ■

Користећи горњу теорему показаћемо да су непрекидне функције интеграбилне.

Теорема 5.2.2

Ако је реална функција f непрекидна на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$, онда је $f \in \mathcal{R}(I)$.

Доказ.

Како је f непрекидна функција на сегменту I, то је она равномерно непрекидна (теорема 1.5.2), па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon$ за $d(\xi', \xi'') < \delta$. Уочимо поделу $T = \{V^i\}$ за коју је $\lambda(T) < \delta$. Преласком на супремум добија се

$$M_i - m_i = \sup_{\xi',\xi'' \in V^i} |f(\xi') - f(\xi'')| = \max_{\xi',\xi'' \in V^i} |f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon,$$

јер дијаметар сваког елемента V^i је мањи од δ. Одавде следи да је

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum_i (M_i - m_i) \cdot \mu V^i < \varepsilon \cdot \mu I.$$

На основу претходне теореме следи тврђење. ■

Друга дефиниција n-интеграла

Нека је реална функција f дефинисана на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$. Уочимо поделу на подсегменте $P = \{I^i\}_{i=1}^k$ сегмента I. У сваком подсегменту I^i уочимо истакнуту тачку ξ^i.

Дефиниција 5.2.2

Збир

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i) \cdot \mu I^i$$

називамо интегралним збиром (интегралном сумом) функције f на сегменту I по подели (P, ξ). За дати сегмент I, нека је $P_k = \{I^{k,i}\}_{i=1}^{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, низ подела на подсегменте, са истакнутим тачкама $\xi^{k,i}$, тако да $\lambda(P_k) \to 0$ за $k \to \infty$.

Ако постоји

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f, P_k, \xi^k) = J, \tag{2}$$

онда се J назива **n-интегралом функције f на сегменту** I. Означава се са $\int_I f(x)\,dx$.

Приметимо да (2) значи: за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је

$$|\sigma(f, P_k, \xi^k) - J| < \varepsilon$$

кад год је $\lambda(P_k) < \delta$ и за сваки избор истакнутих тачака.

Очигледно се дефиниције 5.2.1 и 5.2.2 n-интеграла разликују по томе што у дефиницији 5.2.2 уместо произвољних подела фигуришу поделе на подсегменте.

Теорема 5.2.1 важи и за n-интеграле у смислу дефиниције 5.2.2.

Теорема 5.2.3

Дефиниције 5.2.1 и 5.2.2 n-интеграла еквивалентне су.

Доказ.

Нека је функција $f\colon I \to \mathbf{R}$ интеграбилна на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$ у смислу дефиниције 5.2.1. Свака подела на подсегменте сегмента I је и произвољна подела па је функција f интеграбилна у смислу дефиниције 5.2.2.

Обратно, нека је функција $f\colon I \to \mathbf{R}$ интеграбилна на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$ у смислу дефиниције 5.2.2. Уочимо произвољну доњу и горњу Дарбуову суму

$$s = \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot \mu V^i \quad \text{и} \quad S = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu V^i \tag{3}$$

функције f по подели T сегмента I. Покажимо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $S - s < \varepsilon$ за $\lambda(T) < \delta$, што ће према теореми 5.2.1 значити да је функција f интеграбилна у смислу дефиниције 5.2.1.

По претпоставци, за $\varepsilon > 0$ постоји подела на подсегменте $P = \{I^k\}_{k=1}^r$ сегмента I тако да за горњу $\tilde{S} = \sum \tilde{M}_k \cdot \mu I^k$ и доњу $\tilde{s} = \sum \tilde{m}_k \cdot \mu I^k$ Дарбуову суму функције f по подели P важи

$$\tilde{S} - \tilde{s} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Означимо

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{r} \partial I^k \right) \setminus \partial I \quad \text{и} \quad M = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Како је $\mu A = 0$, то постоји подела на подсегменте $P' = \{I'^i\}_{i=1}^q$ сегмента I и постоји $B = \bigcup \{I'^{i_B}\}_{i_B}$ тако да је $A \subset B^\circ$, $\mu B < \dfrac{\varepsilon}{16M}$. Нека је

$$\delta = \inf\{\, d(x,y) \mid x \in A, y \in \partial B \setminus \partial I \,\}.$$

Приметимо да је $\delta > 0$.

Посматрајмо сада суме (3) за које је $\lambda(T) < \delta$. У циљу доказа да је $S - s < \varepsilon$ докажимо најпре да је

$$|\tilde{S} - S| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad |\tilde{s} - s| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пођимо од једнакости

$$\tilde{S} - S = \sum_{k=1}^{r} \tilde{M}_k \cdot \mu I^k - \left(\sum{}' M_i \cdot \mu V^i + \sum{}'' M_i \cdot \mu V^i \right),$$

где се у првом сабирку у загради налазе сви они чланови $M_i \cdot \mu V^i$ за које се V^i налази само у једном I^k, док су у другом сабирку сви остали чланови. Означимо још са W'^k унију свих V^i који се налазе само у I^k, а са W''^k скуп $\overline{I^k \setminus W'^k}$. Скупови W'^k и W''^k су мерљиви и важи једнакост $W'^k \cup W''^k = I^k$.

Сада имамо

$$\begin{aligned}\tilde{S}-S&=\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot(\mu W'^k+\mu W''^k)-\Big(\sum\nolimits' M_i\cdot\mu V^i+\sum\nolimits'' M_i\cdot\mu V^i\Big)\\&=\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W'^k-\sum\nolimits' M_i\cdot\mu V^i+\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W''^k-\sum\nolimits'' M_i\cdot\mu V^i\\&=\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W'^k-\sum_k\sum_{i_k}M_{i_k}\cdot\mu V^{i_k}+\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W''^k-\sum\nolimits'' M_i\cdot\mu V^i\\&=\sum_{k=1}^{r}\Big(\tilde{M}_k\cdot\mu W'^k-\sum_{i_k}M_{i_k}\cdot\mu V^{i_k}\Big)+\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W''^k-\sum\nolimits'' M_i\cdot\mu V^i,\end{aligned}$$

где се у изразу $\sum_k\sum_{i_k}M_{i_k}\cdot\mu V^{i_k}$ сабирање врши најпре по сабирцима у једном I^k, а потом по $k=1,2,\ldots,r$.

Приметимо да је

$$\Big|\sum_{k=1}^{r}\tilde{M}_k\cdot\mu W''^k\Big|\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{r}\mu W''^k<M\cdot\frac{\varepsilon}{16M}=\frac{\varepsilon}{16}$$

и

$$\Big|\sum\nolimits'' M_i\cdot\mu V^i\Big|\leqslant M\cdot\sum\nolimits''\mu V^i<M\cdot\frac{\varepsilon}{16M}=\frac{\varepsilon}{16},$$

јер су сви скупови W''^k, као и сви скупови V^i у суми $\sum''$ (због $\lambda(T)<\delta$) садржани у скупу B.

Тада је

$$\begin{aligned}|\tilde{S}-S|&<\Big|\sum_{k=1}^{r}(\tilde{M}_k\cdot\mu W'^k-\tilde{m}_k\cdot\mu W'^k)\Big|+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}\\&=\sum_{k=1}^{r}(\tilde{M}_k-\tilde{m}_k)\cdot\mu W'^k+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}\\&\leqslant\tilde{S}-\tilde{s}+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}=\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Слично се показује да је $|\tilde{s}-s|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Одавде следи

$$\tilde{s}-\frac{\varepsilon}{4}<s\leqslant S<\tilde{S}+\frac{\varepsilon}{4},$$

па због $\tilde{S}-\tilde{s}<\dfrac{\varepsilon}{8}$ имамо

$$S-s<\varepsilon.$$

Такође, како за интегралне суме σ и $\tilde{\sigma}$ важи $s<\sigma<S$ и $\tilde{s}<\tilde{\sigma}<\tilde{S}$, граничне вредности $\lim\sigma=J$ и $\lim\tilde{\sigma}=\tilde{J}$ су једнаке. ■

Скупови Лебегове мере нула

Потпун одговор на питање о интеграбилности даје Лебегова теорема.

Најпре размотримо скупове чија Лебегова мера је нула. Са $\Delta_{a,b}\subset\mathbf{R}^n$ означимо интервал у простору $\mathbf{R}^n$, тј.

$$\Delta_{a,b}=\{\,x\in\mathbf{R}^n\mid a_i<x_i<b_i,\ i=1,\ldots,n\,\}.$$

Дефиниција 5.2.3

Лебегова мера $m\Delta_{a,b}$ интервала $\Delta_{a,b}$ је број $m\Delta_{a,b}=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. Скуп $A\subset\mathbf{R}^n$ има **Лебегову меру нула** ако за свако $\varepsilon>0$ постоји пребројив скуп интервала $\Delta^1,\Delta^2,\ldots,\Delta^k,\ldots$, са својством $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta^k\supset A$ и $\sum_{k=1}^{\infty}m\Delta^k<\varepsilon$.

Примери 5.2.2

1° Скуп $\mathbf{Q}^n\subset\mathbf{R}^n$ свих тачака са рационалним координатама у простору $\mathbf{R}^n$ је пребројив, те га можемо представити у облику $\mathbf{Q}^n=\{q_1,q_2,\ldots,q_k,\ldots\}$. Тачку q_k прекријмо интервалом $\Delta^k\subset\mathbf{R}^n$, $m\Delta^k<\varepsilon/2^k$, $k=1,2,\ldots$, где је ε произвољан позитиван број. Како је $\sum_{k=1}^{\infty}m\Delta^k<\varepsilon$, то је $m\mathbf{Q}^n=0$.

Приметимо да Жорданова мера $\mu\mathbf{Q}^n$ не постоји.

2° Нека су $A_1,A_2,\ldots,A_k,\ldots$ подскупови простора $\mathbf{R}^n$ Лебегове мере нула. Тада скуп $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ има Лебегову меру нула, јер се скуп A_k може прекрити унијом интервала $\Delta^{k,j}$ ($j\in\mathbf{N}$) са $\sum_{j=1}^{\infty}m\Delta^{k,j}<\varepsilon/2^k$, $k=1,2,\ldots$, па се сам скуп A прекрива унијом $\bigcup_{k,j=1}^{\infty}\Delta^{k,j}$, при чему је $\sum_{k,j=1}^{\infty}m\Delta^{k,j}<\varepsilon$.

3° Нека је B подскуп скупа $A\subset\mathbf{R}^n$, $mA=0$. Из дефиниције следи непосредно $mB=0$. ▲

Ако је Жорданова мера μA неког скупа $A\subset\mathbf{R}^n$ једнака нули, онда је и Лебегова мера mA тог скупа такође једнака нули. У циљу доказа овог тврђења довољно је приметити да, ако се сегментом I, са $\mu I<\varepsilon$, може покрити неки скуп A, онда постоји интервал Δ, са $m\Delta<\lambda\varepsilon$, $\lambda>1$, којим се може покрити скуп A (уместо сегмента I за покривање скупа A може се узети интервал Δ, такав да је сегмент $\overline{\Delta}$ централно хомотетичан сегменту I).

Уочимо сада компактан скуп $K\subset\mathbf{R}^n$. Претпоставимо да за произвољно $\varepsilon>0$ постоји фамилија $\{\,\Delta^i\mid i\in\mathbf{N}\,\}$ тако да је $\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta^i\supset K$ и $\sum_{i=1}^{\infty}m\Delta^i<\varepsilon$. Тада постоји коначна подфамилија $\{\,\Delta^{i_k}\mid k=1,\ldots,p\,\}$ која покрива скуп K. Но, тада је и Жорданова мера μK мања од ε.

Формулишимо два последња тврђења у облику леме.

Лема 5.2.1

Скуп $A\subset\mathbf{R}^n$ Жорданове мере нула има Лебегову меру нула. Компактан скуп $K\subset\mathbf{R}^n$ Лебегове мере нула има Жорданову меру нула. ■

Теорема 5.2.4 (Лебег)

Ограничена реална функција f на сегменту $I \subset \mathbf{R}^n$ интеграбилна је на том сегменту ако и само ако је непрекидна свугде осим евентуално на скупу Лебегове мере нула.

Доказ.

Како је функција f ограничена, то постоји број M тако да је $|f(x)| \leqslant M$, $x \in I$. Претпоставимо да скуп $D \subset I$ прекида функције f има Лебегову меру $mD = 0$. За $\alpha > 0$ означимо са $D_\alpha \subset D$ скуп тачака $x \in D$ за које је осцилација $\omega(f,x) \geqslant \alpha$, тј. $D_\alpha = \{x \in D \mid \omega(f,x) \geqslant \alpha\}$. Према задатку 1.31, скупови D_α су затворени. Одавде следи да су они и компактни и, према леми 5.2.1, имају Жорданову меру нула.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Изаберимо $\alpha > 0$ тако да је $4\alpha \cdot \mu I < \varepsilon$, као и $\delta > 0$ тако да је $4\delta M < \varepsilon$. Како је $\mu(D_\alpha) = 0$, то се скуп D_α може покрити са коначно много интервала чија укупна мера је мања од δ. Означимо унију тих интервала са J, а скуп $I \setminus J$ са K. За сваку тачку $x \in K$ је $\omega(f,x) < \alpha$, па постоји отворена коцка $K_\gamma(x)$ са центром x, ивице дужине γ, таква да је $\omega(f, K_\gamma(x)) < 2\alpha$. Коцке $K_{\gamma/2}(x)$ образују отворени покривач компактног скупа K, па се из тог покривача може издвојити коначан потпокривач. Равни одређене странама коцки које чине тај потпокривач, као и стране интервала који чине скуп J, одређују једну поделу $P = \{I^i\}$ датог сегмента I.

Разлику $S(f,P) - s(f,P)$ представимо у облику

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{P_1} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i + \sum_{P_2} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i,$$

где се први збир с десне стране једнакости односи на подсегменте поделе P који су садржани у $\overline{J}$, а други на остале подсегменте поделе P. Тада је

$$S(f,P) - s(f,P) \leqslant 2M \cdot \delta + 2\alpha \cdot \mu I < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Према теореми 5.2.1 функција f је интеграбилна.

Претпоставимо да је функција f интеграбилна на сегменту I. Нека су $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbf{N}$ произвољни. Изаберимо поделу P сегмента I тако да је

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Са $P_1 \subset P$ означимо онај скуп подсегмената код којег сваки подсегмент садржи у својој унутрашњости бар једну тачку скупа $D_{1/k}$. Тада је

$$S(f,P) - s(f,P) \geqslant \sum_{I^i \in P_1} (M_i - m_i) \cdot \mu I^i \geqslant \frac{1}{k} \cdot \mu\Big(\bigcup_{I^i \in P_1} I^i\Big),$$

тј.

$$\mu\Big(\bigcup_{I^i \in P_1} I^i\Big) < \varepsilon.$$

Тачке скупа $D_{1/k}$ се налазе у $\bigcup_{I^i \in P_1} I^i$ и у граници осталих скупова I^i. Но, Жорданова мера ових скупова је нула. Дакле је $mD_{1/k} = \mu D_{1/k} = 0$.

С друге стране, скуп D свих тачака прекида може се написати у облику

$$D = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} D_{1/k},$$

па је и $mD = 0$. ∎

Интеграл на скуповима мерљивим по Жордану

За примене су потребни не само они интеграли који су дефинисани на сегменту, него и интеграли који су дефинисани на општијим, сложенијим скуповима. Овде ћемо дефинисати интеграл на скупу мерљивом по Жордану.

Нека је f ограничена реална функција на скупу $D \subset \mathbf{R}^n$, који је мерљив по Жордану. Са I означимо произвољан сегмент који садржи D. Дефинишимо функцију $g\colon I \to \mathbf{R}$ са

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in D, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

За функцију f каже се да је **интеграбилна у Римановом смислу** на скупу D ако постоји интеграл $\int_I g(x)\,dx$. При томе по дефиницији важи

$$\int_D f(x)\,dx = \int_I g(x)\,dx.$$

Скуп интеграбилних функција на скупу D означићемо са $\mathcal{R}(D)$.

Слично се дефинишу и горњи и доњи Дарбуов интеграл функције f на скупу D:

$$\overline{\int}_D f(x)\,dx = \overline{\int}_I g(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_D f(x)\,dx = \underline{\int}_I g(x)\,dx,$$

Приметимо да се код дефиниције интеграла функције f на скупу D може узети произвољан сегмент $I \supset D$. Наиме, дефинишимо $\int_D f(x)\,dx$ помоћу функција $g_1\colon I^1 \to \mathbf{R}$ и $g_2\colon I^2 \to \mathbf{R}$, $I^1 \cap I^2 \supset D$. Означимо $I^1 \cap I^2 = I$. Узевши у обзир да је $g_1(x) = g_2(x)$ за $x \in I$ и $g_1(x) = 0$, $x \in I^1 \setminus I$, односно $g_2(x) = 0$, $x \in I^2 \setminus I$, лако се показује да је

$$\int_{I^1} g_1(x)\,dx = \int_{I^2} g_2(x)\,dx,$$

тј. $\int_D f(x)\,dx$ не зависи од избора сегмента који садржи скуп D.

Полазећи од Лебегове теореме 5.2.4, сада можемо формулисати критеријум за егзистенцију интеграла.

Теорема 5.2.5

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив по Жордану скуп. Ограничена функција $f\colon D \to \mathbf{R}$ је интеграбилна на D ако и само ако Лебегова мера скупа њених тачака прекида је нула.

Доказ.

Нека сегмент I садржи скуп D. Дефинишимо функцију $g\colon I \to \mathbf{R}$ са $g(x) = f(x)$, $x \in D$ и $g(x) = 0$, $x \in I \setminus D$. Тачке прекида функције f су и тачке прекида функције g, с тим што функција g може имати тачке прекида још у скупу ∂D. Но, како је $\mu \partial D = 0$, то из теореме 5.2.4 следи тврђење. ■

Жорданова мера скупа изражена интегралом

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ ограничен скуп, мерљив по Жордану. Изразимо меру μD скупа D интегралом.

Уочимо произвољан сегмент $I \subset \mathbf{R}^n$ који садржи скуп D. Са χ_D означимо карактеристичну функцију скупа D,

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in D, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Функција χ_D је непрекидна на I, осим у тачкама скупа ∂D, који према последици 5.1.1 има меру $\mu \partial D = 0$. Дакле, $\int_I \chi_D \, dx$ постоји.

Нека је $P = \{I^1, \dots, I^p\}$ произвољна подела сегмента I. Са Δ означимо скуп

$$\Delta = \{\, i \mid I^i \cap D \neq \emptyset \,\}.$$

За горњу Дарбуову суму $S(\chi_D, P)$ имамо

$$S(\chi_D, P) = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu I^i = \sum_{i \in \Delta} 1 \cdot \mu I^i = \mu\Big(\bigcup_{i\in\Delta} I^i\Big),$$

јер је $M_i = \sup\limits_{x \in I^i} \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } i \in \Delta, \\ 0, & \text{за } i \notin \Delta. \end{cases}$ Сада је

$$\int_D 1 \, dx = \int_I \chi_D(x)\, dx = \overline{\int_I} \chi_D(x)\, dx = \inf_P S(\chi_D, P) = \inf_P \mu\Big(\bigcup_{i\in\Delta} I^i\Big)$$
$$= \mu_e D = \mu D.$$

Дакле важи

Теорема 5.2.6

Ако је $D \subset \mathbf{R}^n$ ограничен и мерљив по Жордану скуп, онда се његова мера изражава помоћу

(4) $$\mu D = \int_D 1 \cdot dx. \quad ■$$

Напоменимо да се мера фигуре у равни $\mathbf{R}^2$ назива површином, а мера фигуре у простору $\mathbf{R}^3$ запремином.

На крају овог излагања о основним појмовима везаним за Риманов n-интеграл приметимо да смо у њему претежно користили појам Жорданове мере скупа у $\mathbf{R}^n$. У савременијем излагању анализе више се користи Лебегова мера чија је предност у односу на Жорданову што оперише са пребројивим, уместо са коначним покривачима (ту разлику смо делимично описали говорећи о скуповима мере нула).

5.3. СВОЈСТВА n-ИНТЕГРАЛА

Навешћемо најпре својство линеарности интеграла. Напоменимо да ћемо убудуће мерљиве по Жордану скупове просто називати мерљивим скуповима.

Став 5.3.1

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $f,\ g \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Тада је:

1° $(f \pm g) \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(D)$.

2° $\int_D (f \pm g)(x)\, dx = \int_D f(x)\, dx \pm \int_D g(x)\, dx$, $\int_D (\alpha f)(x)\, dx = \alpha \int_D f(x)\, dx$.

Доказ.

1° Тврђење следи из теореме 5.2.5.

2° Докажимо да је $\int_D (f+g)(x)\, dx = \int_D f(x)\, dx + \int_D g(x)\, dx$. Нека је $I \supset D$ сегмент у $\mathbf{R}^n$, а $P = \{I^1, \dots, I^p\}$ је подела сегмента I. Са $h_1,\ h_2\colon I \to \mathbf{R}$ означимо функције дефинисане са

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in D, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus D, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} g(x), & \text{за } x \in D, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Тада је

$$\sigma(h_1 + h_2, P, \xi) = \sigma(h_1, P, \xi) + \sigma(h_2, P, \xi),$$

одакле следи тражена једнакост.

Слично се доказују и друге две једнакости. ■

Став 5.3.2

Нека су $A,\ B \subset \mathbf{R}^n$ мерљиви скупови, такви да је $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ и $D = A \cup B$. За реалну функцију f, дефинисану на скупу D, важи:

1° $f \in \mathcal{R}(D)$ ако и само ако $f \in \mathcal{R}(A)$ и $f \in \mathcal{R}(B)$.

2° Ако је $f \in \mathcal{R}(A)$ и $f \in \mathcal{R}(B)$, онда важи једнакост

(1) $$\int_D f(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_B f(x)\, dx.$$

Уочимо произвољну функцију $\varphi\colon I' \to \mathbf{R}$ за коју важи

$$\underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \leqslant \varphi(x) \leqslant \overline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy, \qquad x \in [a,b].$$

Из последње неједнакости следи

$$(3) \qquad \sum_i \inf_{x\in I_i'} \Big(\sum_j \inf_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k \Big) h$$

$$\leqslant \sum_i \inf_{x\in I_i'} \Big(\underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \Big) h \leqslant \sum_i \inf_{x\in I_i'} \varphi(x)\cdot h$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'} \varphi(x)\cdot h \leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'} \Big(\overline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \Big) h.$$

Из очигледне неједнакости

$$\overline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \leqslant \sum_j \sup_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k$$

следи

$$(4) \qquad \sum_i \sup_{x\in I_i'} \Big(\overline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy \Big) h \leqslant \sum_i \sup_{x\in I_i'} \Big(\sum_j \sup_{y\in I_j''} f(x,y)\cdot k \Big) h$$

$$\leqslant \sum_{i,j} M_{i,j} hk = S(f,P).$$

Функција $f(x,y)$ је интеграбилна на I, па је $\lim\limits_{p\to\infty} s(f,P) = \lim\limits_{p\to\infty} S(f,P) = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy$. У неједнакостима (2), (3) и (4) пустимо да $p \to \infty$. Види се да за функцију $\varphi(x)$ важи

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx = \iint_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

Слично се добија и једнакост

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big) dy. \quad \blacksquare$$

Приметимо да ћемо интеграле

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx \quad \text{и} \quad \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big) dy,$$

који се још пишу и у облику

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

називати **двоструким интегралима**.

Пример 5.4.1

Израчунајмо двојни интеграл $J = \iint_I (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$, где је $I = \{\,(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\,\}$.

Према теореми 5.4.1 имамо

$$J = \int_0^2 dx \int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2)\,dy.$$

Како је

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2)\,dy = \Big[x^2 y + \frac{2}{3} y^3 \Big]_{y=-1}^1 = 2x^2 + \frac{4}{3}$$

и $\int_0^2 (2x^2 + \frac{4}{3})\,dx = 8$, то је $J = 8$.

Приметимо да се дати интеграл могао рачунати и овако

$$J = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 (x^2 + 2y^2)\,dx = \int_{-1}^1 \Big(4y^2 + \frac{8}{3} \Big) dy = 8. \quad \blacktriangle$$

Посматрајмо сада интеграл $\int_I f(x)\,dx$, где је $I = \{\,(x_1,\dots,x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,\ \dots\ ,n\,\}$, $x = (x_1,\dots,x_n)$. У циљу уопштавања теореме 5.4.1 означимо $u = (x_1,\dots,x_m)$ и $v = (x_{m+1},\dots,x_n)$, за неко $m \in \{1,\dots,n-1\}$. Нека је $I' \subset \mathbf{R}^m$ пројекција скупа I на потпростор $Ox_1\dots x_m$, тј.

$$I' = \{\,(x_1,\dots,x_m) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1,\ \dots\ ,m\,\}$$

и $I'' \subset \mathbf{R}^{n-m}$ је пројекција скупа I на потпростор $Ox_{m+1}\dots x_n$, тј.

$$I'' = \{\,(x_{m+1},\dots,x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = m+1,\dots,n\,\}.$$

Користићемо се записима $I = I' \times I''$ и $x = (x_1,\dots,x_n) = (u,v)$.

Теорема 5.4.2

Нека је реална функција $f(x_1,\dots,x_n)$ интеграбилна на сегменту $I = I' \times I'' \subset \mathbf{R}^n$. Тада важе једнакости

$$(5) \qquad \int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I'} \Big(\int_{I''} f(u,v)\,dv \Big) du = \int_{I''} \Big(\int_{I'} f(u,v)\,du \Big) dv.$$

При томе, $\int_{I''} f(u,v)\,dv$ је Риманов интеграл за фиксирано u ако он постоји, или пак неки број између $\underline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv$ и $\overline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv$ (не изузимајући те границе). Слично се објашњава и $\int_{I'} f(u,v)\,du$.

Доказ.

Поделимо сваки од сегмената $[a_i,b_i]$, $i = 1,\ \dots\ ,n$, на p једнаких делова тачкама $a_i = x_i^0,\ x_i^1,\ \dots\ ,\ x_i^p = b_i$. Означимо $\dfrac{b_i - a_i}{p} = h_i$, $i = 1,\ \dots\ ,n$. Ове поделе индукују поделу $P' = \{\,I_i' \mid i = 1,\ \dots\ ,p^m\,\}$ сегмента I' и поделу $P'' = \{\,I_j'' \mid j = 1,\ \dots\ ,p^{n-m}\,\}$ сегмента I'', као и поделу $P = \{I_{i,j}\}_{i,j}$, где је $I_{i,j} =$

$I'_i \times I''_j$, сегмента I. При томе је $\mu I'_i = h_1 h_2 \cdots h_m$, $\mu I''_j = h_{m+1} h_{m+2} \cdots h_n$, $\mu I_{i,j} = h_1 h_2 \cdots h_n$. Ако се означи $m_{i,j} = \inf\limits_{u \in I'_i,\, v \in I''_j} f(u,v)$, $M_{i,j} = \sup\limits_{u \in I'_i,\, v \in I''_j} f(u,v)$, онда доња и горња Дарбуова сума имају облик

$$s(f,P) = \sum_{i,j} m_{i,j} h_1 h_2 \cdots h_n, \quad S(f,P) = \sum_{i,j} M_{i,j} h_1 h_2 \cdots h_n.$$

Како је функција $f(u,v)$ интеграбилна на I, то постоји заједнички лимес од $s(f,P)$ и $S(f,P)$ кад $p \to \infty$, тј. постоји $\int_I f(u,v)\,du\,dv$.

С друге стране, ако се са $\varphi\colon I' \to \mathbf{R}$ означи произвољна функција која задовољава услов

$$\underline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv \leqslant \varphi(u) \leqslant \overline{\int}_{I''} f(u,v)\,dv, \qquad u \in I',$$

онда се слично као у теореми 5.4.1 показује да је

$$\int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I'} \varphi(u)\,du.$$

На исти начин се доказује једнакост

$$\int_I f(u,v)\,du\,dv = \int_{I''} \left(\int_{I'} f(u,v)\,du \right) dv. \quad \blacksquare$$

Последица 5.4.1

За интеграл $\int_I f(x)\,dx$ интеграбилне функције $f(x_1,\dots,x_n)$ на сегменту $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ важи једнакост

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n. \tag{6}$$

Доказ.

Примена теореме 5.4.2 на интеграл $\int_I f(x)\,dx$ даје

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{I'} f(x_1,u)\,du,$$

где је $u = (x_2,\dots,x_n)$, $I' = [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$. Сукцесивном применом теореме 5.4.2 још $n-2$ пута добија се тврђење. $\blacksquare$

Пример 5.4.2

Израчунајмо вредност интеграла

$$J = \int_I (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n,$$

где је $I = \{\, (x_1,\dots,x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1,\dots,n \,\}$.

Према последици 5.4.1 имамо

$$\int_I (x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_n,$$

па је

$$J = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{2} \right) dx_{n-1}.$$

Индуктивно се добија $J = n/2$. $\blacktriangle$

Посматрајмо функцију $f\colon D \to \mathbf{R}$, где је $D \subset \mathbf{R}^n$ ограничен скуп. Претпоставимо да се тај скуп може написати у облику

$$D = \{\, (u,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid u \in D_u,\ \varphi_1(u) \leqslant x_n \leqslant \varphi_2(u) \,\},$$

где је $u = (x_1,\dots,x_{n-1})$ и $D_u \subset \mathbf{R}^{n-1}$ мерљив скуп. Нека је $I = I_u \times I_{x_n}$ сегмент који садржи D и при томе је $D_u \subset I_u \subset R^{n-1}$. Дефинишимо функцију $g\colon I \to \mathbf{R}$ тако да је

$$g(u,x_n) = \begin{cases} f(u,x_n), & \text{за } (u,x_n) \in D, \\ 0, & \text{за } (u,x_n) \in I \setminus D. \end{cases}$$

Ако је скуп D мерљив и функција f је на њему интеграбилна, онда је, узевши у обзир дефиницију функције g,

$$J = \int_D f(u,x_n)\,du\,dx_n = \int_I g(u,x_n)\,du\,dx_n.$$

Према теореми 5.4.2 је

$$J = \int_{I_u} \left(\int_{I_{x_n}} g(u,x_n)\,dx_n \right) du.$$

Узевши у обзир да за фиксирано $u \in D_u$ имамо

$$\int_{I_{x_n}} g(u,x_n)\,dx_n = \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} g(u,x_n)\,dx_n$$

и да је $g(u,x_n) = 0$ за $u \in I_u \setminus D_u$, то је

$$J = \int_{D_u} \left(\int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} f(u,x_n)\,dx_n \right) du.$$

Дакле, имамо још једну последицу теореме 5.4.2.

Последица 5.4.2

Нека се $D \subset \mathbf{R}^n$ може написати у облику

$$D = \{\, (u,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid u \in D_u,\ \varphi_1(u) \leqslant x_n \leqslant \varphi_2(u) \,\},$$

Доказ.

1° Тврђење следи из теореме 5.2.5.

2° Уочимо произвољан сегмент $I \supset D$ у простору $\mathbf{R}^n$ и функције $g_i \colon I \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, дате помоћу

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in D, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus D, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in A, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus A, \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in B, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus B, \end{cases} \qquad g_4(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in A \cap B, \\ 0, & \text{за } x \in I \setminus (A \cap B). \end{cases}$$

Тада за свако $x \in I$ важи $g_1(x) = g_2(x) + g_3(x) - g_4(x)$. На основу става 5.3.1 је

$$\int_I g_1(x)\,dx = \int_I g_2(x)\,dx + \int_I g_3(x)\,dx - \int_I g_4(x)\,dx.$$

Међутим, $\int_I g_1(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$, $\int_I g_2(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$, $\int_I g_3(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx$, а $\int_I g_4(x)\,dx = \int_{A\cap B} f(x)\,dx = 0$. Наиме, из претпоставки става следи да је $\mu(A \cap B) = 0$, а лимес интегралних сума (за интеграбилну функцију), кад модул поделе тежи нули, постоји и има исту вредност независно од избора истакнутих тачака. ∎

Став 5.3.3

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $f, g \in \mathcal{R}(D)$. Тада је:

1° $f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$.

2° $|f| \in \mathcal{R}(D)$.

3° $1/f \in \mathcal{R}(D)$, уз услов $|f(x)| \geqslant \alpha > 0$, $x \in D$.

Доказ.

Тврђење следи из теореме 5.2.5. ∎

Став 5.3.4

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $f, g \colon D \to \mathbf{R}$ интеграбилне функције за које важи неједнакост $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in D$. Тада је

$$\int_D f(x)\,dx \leqslant \int_D g(x)\,dx.$$

Доказ.

Ако је $I \subset \mathbf{R}^n$ сегмент који садржи D и $h_1, h_2 \colon I \to \mathbf{R}$ су такве да је $h_1(x) = f(x)$, $h_2(x) = g(x)$ за $x \in D$ и $h_1(x) = h_2(x) = 0$ за $x \in I \setminus D$, тада за поделу $P = \{I^1, \dots, I^p\}$ важи неједнакост

$$\sigma(h_1, P, \xi) \leqslant \sigma(h_2, P, \xi),$$

одакле се за $\lambda(P) \to 0$ добија тражена неједнакост. ∎

Теорема 5.3.1 (Теорема о средњој вредности интеграла)

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $f, g \colon D \to \mathbf{R}$ интеграбилне функције, при чему је $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Ако је $m = \inf\limits_{x\in D} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in D} f(x)$, онда важи

$$m \int_D g(x)\,dx \leqslant \int_D (fg)(x)\,dx \leqslant M \int_D g(x)\,dx. \tag{2}$$

Доказ.

Како је $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$, то према ставу 5.3.4 имамо

$$\int_D mg(x)\,dx \leqslant \int_D f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_D Mg(x)\,dx.$$

На основу става 5.3.1.2° следи тражено тврђење. ∎

Истаћи ћемо неколико последица теореме 5.3.1.

Последица 5.3.1

Ако је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $f \colon D \to \mathbf{R}$ задовољава услове $f \in \mathcal{R}(D)$ и $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$, онда је $\int_D f(x)\,dx \geqslant 0$.

Доказ.

У теореми 5.3.1 ставимо $m \geqslant 0$, $g(x) \equiv 1$. ∎

Последица 5.3.2

Ако је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп, $f \colon D \to \mathbf{R}$ је интеграбилна функција на D и m, M су као у теореми 5.3.1, онда постоји $k \in [m, M]$, тако да је

$$\int_D f(x)\,dx = k \cdot \mu D.$$

Доказ.

У неједнакостима (2) ставимо $g(x) \equiv 1$ и добијамо

$$m \cdot \mu D \leqslant \int_D f(x)\,dx \leqslant M \cdot \mu D.$$

Ако је $\mu D = 0$, дата једнакост важи. Ако је $\mu D \neq 0$, ове неједнакости постају

$$m \leqslant \frac{1}{\mu D} \int_D f(x)\,dx \leqslant M,$$

одакле следи да постоји $k \in [m, M]$, тако да је

$$\frac{1}{\mu D} \int_D f(x)\,dx = k. \quad ∎$$

Последица 5.3.3

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ линеарно конексан, затворен и мерљив скуп, $f\colon D \to \mathbf{R}$ је непрекидна функција, а $g\colon D \to \mathbf{R}$ је интеграбилна и $g(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Тада постоји $\xi \in D$, тако да је

$$\int_D f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_D g(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказ.

Како је f непрекидна, то је интеграбилна на D; постоје тачке x, $y \in D$ у којима она достиже минимум, односно максимум, $f(x) = m$, $f(y) = M$. Због линеарне конексности постоји пут α: $[0,1] \to D$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Из неједнакости (2) следи да постоји $k \in [m, M]$, тако да је

$$\int_D f(x)g(x)\,dx = k\int_D g(x)\,dx.$$

Како је функција $f{\circ}\alpha$: $[0,1] \to \mathbf{R}$ непрекидна и $(f{\circ}\alpha)(0) = m$, $f{\circ}\alpha(1) = M$, то постоји $\tau \in [0,1]$ тако да је $f{\circ}\alpha(\tau) = k$. Стављајући $\alpha(\tau) = \xi$, добија се једнакост (3). ■

Став 5.3.5

За реалну функцију $f \in \mathcal{R}(D)$, дефинисану на мерљивом скупу $D \subset \mathbf{R}^n$ важе неједнакости

$$\left|\int_D f(x)\,dx\right| \leqslant \int_D |f(x)|\,dx \leqslant L\cdot\mu D,$$

где је $L = \sup\limits_{x\in D}|f(x)|$.

Доказ.

Из интеграбилности функције $|f|$ (став 5.3.3.2°), неједнакости $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ и става 5.3.4 следе неједнакости

$$-\int_D |f(x)|\,dx \leqslant \int_D f(x)\,dx \leqslant \int_D |f(x)|\,dx,$$

тј. $\left|\int_D f(x)\,dx\right| \leqslant \int_D |f(x)|\,dx$.

Из неједнакости $|f(x)| \leqslant L$ и става 5.3.4 следи неједнакост $\int_D |f(x)|\,dx \leqslant L\cdot\mu D$. ■

Став 5.3.6

Нека је $E \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $D \subset E$ је такав да је $\mu(E\setminus D) = 0$. Ако је $f \in \mathcal{R}(E)$ и g је ограничена реална функција на E, при чему је $g(x) = f(x)$, $x \in D$, онда је $g \in \mathcal{R}(E)$ и

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Доказ.

За функцију $h\colon E \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in E$, важи $\int_E h(x)\,dx = \int_D h(x)\,dx + \int_{E\setminus D} h(x)\,dx$. Како је $h(x) = 0$, $x \in D$, то је $\int_D h(x)\,dx = 0$. Из $\mu(E\setminus D) = 0$ и последице 5.3.2 следи $\int_{E\setminus D} h(x)\,dx = 0$. Дакле је $\int_E h(x)\,dx = 0$, тј. $\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx$. ■

5.4. СВОЂЕЊЕ n-ИНТЕГРАЛА НА n-ТОСТРУКИ ИНТЕГРАЛ

Израчунавање n-интеграла може се свести на поступно израчунавање n Риманових интеграла. Почећемо случајем $n = 2$; другим речима, показаћемо како се двојни интеграл израчунава помоћу двоструког (узастопног).

Теорема 5.4.1

Нека је реална функција $f(x,y)$ интеграбилна на правоугаонику $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2$. Тада важе једнакости

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big) = \int_c^d dy\Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big). \tag{1}$$

При томе, $\int_c^d f(x,y)\,dy$ је Риманов интеграл за фиксирано x ако он постоји, или пак неки број између $\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy$ и $\overline{\int}_c^d f(x,y)\,dy$ (не изузимајући те границе). Слично се објашњава и $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Доказ.

Уочимо поделу $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$, $x_i - x_{i-1} = h$ за $i = 1, \ldots, p$, сегмента $I' = [a,b]$ и поделу $P'' = \{y_0, y_1, \ldots, y_p\}$, $y_i - y_{i-1} = k$ за $i = 1, \ldots, p$, сегмента $I'' = [c,d]$. Ове поделе индукују поделу $P = \{\, I_{i,j} \mid i,j = 1,\ldots,p \,\}$ правоугаоника $I = I' \times I'' = [a,b]\times[c,d]$; при томе је $I_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = I'_i \times I''_j$ и $\mu I_{i,j} = hk$. Нека је још $m_{i,j} = \inf\limits_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$, $M_{i,j} = \sup\limits_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$.

За доњу Дарбуову суму $s(f,P)$ функције f при подели P правоугаоника I важи неједнакост

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i,j} m_{i,j}hk = \sum_{i,j} \inf_{x\in I'_i,\, y\in I''_j} f(x,y)\cdot hk \\ &\leqslant \sum_i \inf_{x\in I'_i}\Big(\sum_j \inf_{y\in I''_j} f(x,y)\cdot k\Big)h. \end{aligned} \tag{2}$$

Функција f је ограничена на I, па постоје доњи и горњи интеграл на сегменту I'',

$$\sup_{P''}\sum_j \inf_{y\in I''_j} f(x,y)\cdot k = \underline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy,$$

$$\inf_{P''}\sum_j \sup_{y\in I''_j} f(x,y)\cdot k = \overline{\int}_{I''} f(x,y)\,dy.$$

где је $D_u \subset \mathbf{R}^{n-1}$ мерљив скуп. Ако је $f\colon D \to \mathbf{R}$ интеграбилна функција, онда важи једнакост

$$\int_D f(u, x_n)\,du\,dx_n = \int_{D_u} du \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} f(u, x_n)\,dx_n. \quad \blacksquare \tag{7}$$

Приметимо да се једнакост (7) може написати у облику

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \int_{D_u} dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n.$$

При томе је D_u пројекција скупа $D \subset \mathbf{R}^n$ на потпростор $Ox_1 \dots x_{n-1}$.

Сукцесивном применом последице 5.4.2 на интеграл $\int_D f(x)\,dx$ добија се његова вредност.

Примери 5.4.3

1° Интеграл $J = \iint_D xy\,dx\,dy$, где је D област ограничена линијама $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{5}{2} - x$, написаћемо према једнакости (7) у облику

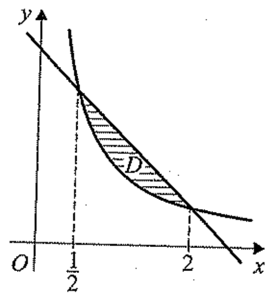
$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,dy.$$

Како је

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y\,dy = \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{1}{x^2}\right),$$

то је

$$J = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^3 - 5x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{165}{128} - \ln 2.$$



Сл. 5.4.1

2° Нађимо запремину V елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ $(a,\ b,\ c > 0)$.

Према формули (4) одељка 5.2 запремина се израчунава интегралом $V = \iiint_V 1 \cdot dx\,dy\,dz$. Из једнакости (7) имамо

$$V = \iint_{V_{xy}} dx\,dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz, \tag{8}$$

где је V_{xy} пројекција елипсоида на раван Oxy, тј.

$$V_{xy} = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1\,\}.$$

Примењујући још једном једнакост (7) на интеграл (8) добија се

$$V = \int_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Сукцесивно израчунавање ова три интеграла даје запремину

$$V = \int_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy = bc\int_{-a}^{a} \pi\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc. \quad \blacktriangle$$

5.5. СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ

Израчунавање Римановог интеграла неке функције на сегменту некад је олакшано увођењем нове променљиве. Исти случај је и са n-интегралом – некада се израчунавање n-интеграла може упростити помоћу смене променљивих.

Пре изучавања смене променљивих код n-интеграла размотрићемо нека питања бијективног пресликавања области простора $\mathbf{R}^n$ у простор $\mathbf{R}^n$. Посебно, то ће бити питања везана за однос мере области која се пресликава и њене слике.

Нека је област Δ у простору $\mathbf{R}^n$ са координатним системом $O\xi_1 \dots \xi_n$, а D је област у простору $\mathbf{R}^n$ са координатним системом $O'x_1 \dots x_n$.

Претпоставимо да је дата функција $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ помоћу координатних функција

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Нека φ задовољава следеће услове:

$$\begin{cases} 1^\circ & \varphi \text{ бијективно пресликава } \Delta \text{ на } D; \\ 2^\circ & \text{функције } \varphi_i \text{ и парцијални изводи } \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j},\ i,\ j = 1, \dots, n, \\ & \text{непрекидни су на } \overline{\Delta}. \end{cases} \tag{2}$$

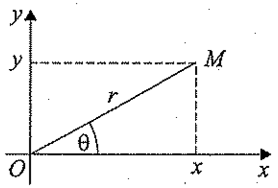
Може се показати (задатак 13) да из услова (2) следи да за јакобијан

$$\det d\varphi(\xi) = \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\xi_n} \end{vmatrix}$$

важи или неједнакост $\det d\varphi(\xi) \geqslant 0$ или неједнакост $\det d\varphi(\xi) \leqslant 0$, за $\xi \in \Delta$.

Тада свакој n-торци $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ у области Δ одговара тачно једна n-торка $(x_1,\dots,x_n)$ у области D, тако да $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ одређује положај тачке $M(x_1,\dots,x_n)$ у области D. Дакле, бројеве $\xi_1, \dots, \xi_n$ можемо сматрати координатама тачке M. Каже се још да формуле (1) трансформишу област Δ у област D.

Примери 5.5.1



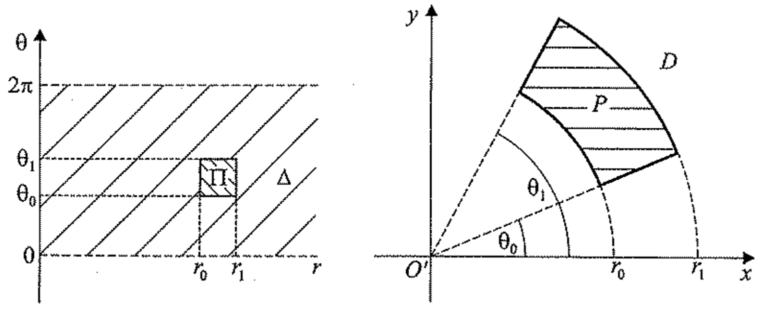
Сл. 5.5.1

1° Трансформација поларних координата r, θ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$) у Декартове x, y ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) дата је једнакостима (в. пример 2.2.1)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{3}$$

Геометријска интерпретација ових једнакости лако је видљива на сл. 5.5.1. Свакој тачки M различитој од координатног почетка одговара тачно један пар вредности r, θ ($r > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$).

Задржавајући једну од координата r, θ константном добијају се **координатне линије** у равни. Тако за $r = r_0$, координатна линија има облик $x^2+y^2=r_0^2$, а за $\theta = \theta_0$ координатна линија је полуправа $y = x\operatorname{tg}\theta_0$. Кроз сваку тачку равни, сем координатног почетка, пролази један пар координатних линија.



Сл. 5.5.2

Сада ћемо дати још једну интерпретацију трансформације (3). У равни $Or\theta$ уочимо област

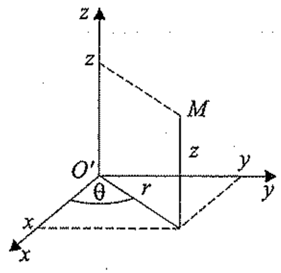
$$\Delta = \{\, (r,\theta) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi \,\},$$

а у равни $O'xy$ област D којој припадају све тачке равни осим тачака ненегативног дела осе $O'x$, сл. 5.5.2. Нека је $f\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ пресликавање дато једнакостима (3). При томе се област Δ (шрафирана на сл. 5.5.2) пресликава на област D. Јакобијан $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ има вредност r (в. пример 2.2.1). Дакле је $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} \geqslant 0$ за $(r,\theta) \in \overline{\Delta}$ и $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} > 0$ за $(r,\theta) \in \Delta$. Праве $r = r_0$ и $\theta = \theta_0$ се пресликавају у круг $x^2 + y^2 = r_0^2$, односно полуправу $y = x\operatorname{tg}\theta_0$. Отворени правоугаоник $\Pi \subset \Delta$, ограничен правим $r = r_0$, $r = r_1$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, пресликава се у отворени „криволинијски четвороугао" $P \subset D$, ограничен круговима $x^2 + y^2 = r_0^2$, $x^2 + y^2 = r_1^2$ и полуправим $y = x\operatorname{tg}\theta_0$, $y = x\operatorname{tg}\theta_1$, сл. 5.5.2. Према задатку 13 је $f(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $f(\partial\Pi) = \partial P$.

2° Трансформација поларно цилиндричних координата r, θ, z ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$) у Декартове x, y, z ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$) дата је једнакостима

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z. \tag{4}$$

Геометријска интерпретација ових једнакости може се лако видети. Свакој тачки M, различитој од координатног почетка O', додељује се тачно једна тројка бројева r, θ, z, сл. 5.5.3. Задржавајући једну координату константном добијају се **координатне површи** у простору $O'xyz$. За $r = r_0$, координатна површ има облик $x^2 + y^2 = r_0^2$ (цилиндар). Друге две координатне површи за $\theta = \theta_0$ и $z = z_0$ су облика $y = x\operatorname{tg}\theta_0$ (полураван), односно $z = z_0$ (раван).



Сл. 5.5.3

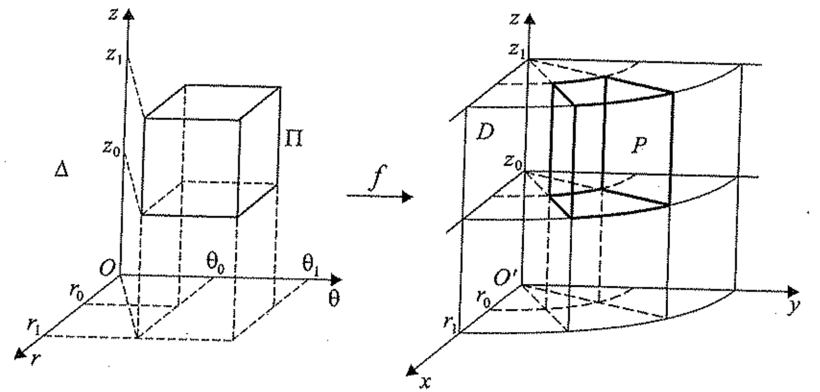
Пресликавање дато једнакостима (4) можемо интерпретирати као пресликавање $f\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$, где је

$$\Delta = \{\, (r,\theta,z) \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi,\ -\infty < z < \infty \,\}$$

област у простору $Or\theta z$, а D је простор $O'xyz$ без тачака затворене полуравни $y = 0$, $x \geqslant 0$. Јакобијан

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

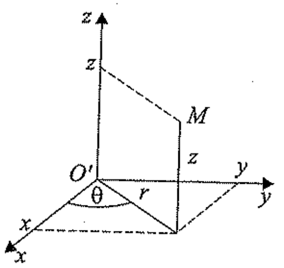
је позитиван у области Δ и ненегативан у $\overline{\Delta}$. Отворени паралелепипед $\Pi \subset \Delta$ ограничен равнима $r = r_0$, $r = r_1$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $z = z_0$, $z = z_1$ пресликава се у отворени „криви паралелепипед" P, сл. 5.5.4. При томе је $f(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $f(\partial\Pi) = \partial P$.



Сл. 5.5.4

3° У Декартовом координатном систему $O'xyz$ тачки M можемо доделити сферне координате r, φ, θ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$), чија је веза са Декартовим координатама дата једнакостима

(5)
$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi.$$



Сл. 5.5.5

Свакој тачки, изузев координатног почетка, додељује се тачно једна тројка (r,φ,θ), која одређује положај тачке, сл. 5.5.5. Кроз сваку тачку пролазе три координатне површи:

(а) за $r=r_0$ – сфера $x^2+y^2+z^2=r_0^2$,

(б) за $\varphi=\varphi_0$ – полуконус $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\varphi_0$,

(в) за $\theta=\theta_0$ – полураван $y = x\operatorname{tg}\theta_0$.

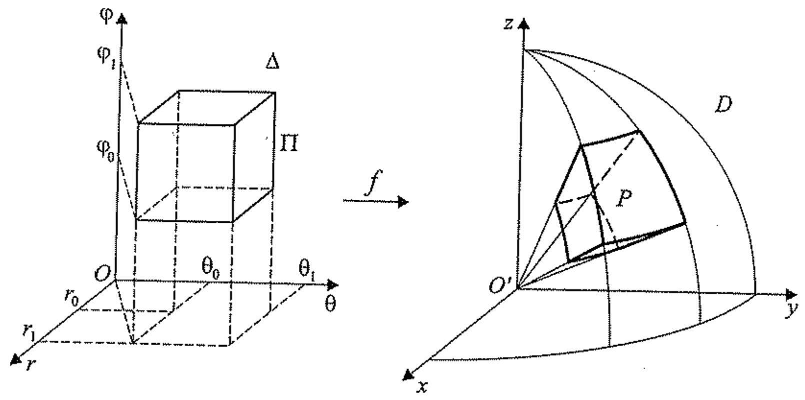
С друге стране, пресликавање (5) интерпретирамо у облику $f\colon \overline{\Delta}\to\overline{D}$, где је

$$\Delta = \{\,(r,\varphi,\theta) \mid r>0,\ 0<\varphi<\pi,\ 0<\theta<2\pi\,\},$$

а D је простор $O'xyz$ без тачака затворене полуравни $y=0$, $x\geqslant 0$. Јакобијан $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$ (в. пример 2.2.1) позитиван је у области Δ, а ненегативан у $\overline{\Delta}$. Отворени паралелепипед $\Pi\subset\Delta$, ограничен равнима $r=r_0$, $r=r_1$, $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1$, $\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_1$, пресликава се у отворени „криви паралелепипед“ $P\subset D$, сл. 5.5.6. При томе је $f(\overline{\Pi})=\overline{P}$, $f(\partial\Pi)=\partial P$.

4° Пресликавање φ равни $O\xi\eta$ на раван $O'xy$, дато једнакостима

(6)
$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta,\\ y &= c\xi + d\eta, \end{aligned} \qquad J = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0,$$



Сл. 5.5.6

задовољава услове (2). Уочимо произвољан правоугаоник Π са страницама дужине h, односно k, паралелним координатним осама. Његова слика $f(\Pi) = P$ је паралелограм у равни $O'xy$. Ако са $\mu\Pi$ и μP означимо површине правоугаоника Π, односно паралелограма P, лако се проверава да је $\mu P = hk|J|$, тј. $\mu P = |J|\mu\Pi$. ▲

У претходном примеру видели смо однос између површине правоугаоника и површине слике тог правоугаоника ако је функција која пресликава раван у којој се правоугаоник налази облика (6). Сада ћемо исти проблем посматрати у случају општије функције.

Став 5.5.1

Нека је Δ мерљива област у простору $O\xi_1\ldots\xi_n$, D мерљива област у простору $O'x_1\ldots x_n$ и $\varphi\colon \overline{\Delta}\to\overline{D}$ пресликавање дато једнакостима (1), које задовољава услове (2). Ако се нека n-димензиона коцка $\Pi\subset\Delta$, ивице h, пресликава на $\varphi(\Pi) = P\subset D$, онда важи једнакост

(7)
$$\mu P = |J(\xi)|\cdot\mu\Pi + O\big(h^n\cdot\omega(h)\big),$$

где је $J(\xi)$ вредност јакобијана $\det d\varphi(\xi) = \dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$ у произвољној тачки $\xi\in\Pi$ и

(8)
$$\omega(h) = \sup_{\substack{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\ \|\xi-\eta\|<h\\ i,j=1,\ldots,n}} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|.$$

При томе је константа у изразу $O\big(h^n\cdot\omega(h)\big)$ независна од $\Pi\subset\Delta$.

Доказ.

Доказ ће бити изведен у случају $n=2$. За $n>2$ изводи се слично. Дакле, доказаћемо једнакост

(9)
$$\mu P = |J(\xi)|\cdot\mu\Pi + O\big(h^2\cdot\omega(h)\big),\quad \xi\in\Pi.$$

Изнећемо најпре идеју доказа.

Нека је $\Pi = \{\,(\xi_1,\xi_2) \mid \xi_i^0 < \xi_i < \xi_i^0 + h,\ i = 1,2\,\}$ квадрат у равни $O\xi_1\xi_2$ са теменима у тачкама $E(\xi_1^0,\xi_2^0)$, $F(\xi_1^0+h,\xi_2^0)$, $G(\xi_1^0+h,\xi_2^0+h)$, $H(\xi_1^0,\xi_2^0+h)$ и границом Γ. Слика $\varphi(\Pi) = P \subset D$ квадрата је криволинијски четвороугао $KLMN$ са границом $\varphi(\Gamma) = C$. Темена E, F, G, H се пресликавају у K, L, M, N, респективно. Пресликавање φ, дато једнакостима

$$(1')\qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1,\xi_2),\\ x_2 &= \varphi_2(\xi_1,\xi_2), \end{aligned}$$

написаћемо, користећи Тејлоров образац, у облику

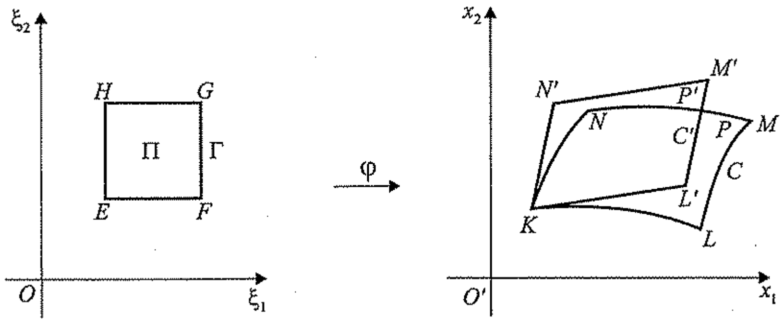
$$(10)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*}(\xi_1-\xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*}(\xi_2-\xi_2^0),\\ x_2 &= x_2^0 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*}(\xi_1-\xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*}(\xi_2-\xi_2^0). \end{aligned}$$

При томе је $x_i^0 = \varphi_i(\xi_1^0,\xi_2^0)$, а $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right)_{\xi^*}$ је вредност функције $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$ у некој тачки $\xi^* = (\xi_1^*,\xi_2^*) \in \Pi$, $i,j = 1,2$.

Заједно са (10) посматрајмо и линеарно пресликавање φ' које пресликава $\overline{\Delta}$ у раван $O'x_1x_2$, дефинисано са

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1' &= x_1^0 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}(\xi_1-\xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}(\xi_2-\xi_2^0),\\ x_2' &= x_2^0 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}(\xi_1-\xi_1^0) + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}(\xi_2-\xi_2^0), \end{aligned}$$

где је $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right)_{\xi_0} = \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi_1^0,\xi_2^0)$, $i,j = 1,2$. Ово пресликавање пресликава квадрат Π на паралелограм P' чија граница је C'. Слике темена E, F, G, H су, респективно, K, L', M', N', сл. 5.5.7.



Сл. 5.5.7

Показаћемо да се μP и $\mu P'$ произвољно мало разликују за довољно мало h, а затим ћемо упоредити $\mu\Pi$ са $\mu P'$, добијајући тиме тражено тврђење.

У циљу доказа става, најпре за произвољно $\xi \in \overline{\Pi}$ нађимо једну горњу границу растојања тачака $x = (x_1,x_2)$ и $x' = (x_1',x_2')$ чије су координате дате једнакостима (10) и (11). Из

$$x_i - x_i' = \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_1}\right)_{\xi^*} - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}\right](\xi_1-\xi_1^0) + \left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_2}\right)_{\xi^*} - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}\right](\xi_2-\xi_2^0),$$

$i = 1,\ 2$, задатка 1.32 и ознаке (8) следи

$$|x_i - x_i'| \leqslant 2\omega(h\sqrt{2})h \leqslant 2\omega(2h)h \leqslant 4\omega(h)h,\quad i = 1,2.$$

Одавде за $\|x - x'\|$ имамо

$$\|x-x'\| = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2} \leqslant \sqrt{16\omega^2(h)h^2 + 16\omega^2(h)h^2} < 6\omega(h)h,$$

где $\omega(h) \to 0$ за $h \to 0$. Наиме, приметимо да из услова непрекидности функција $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ на $\overline{\Delta}$, за модул непрекидности $\omega_{\partial\varphi_i/\partial\xi_j}(h)$ важи

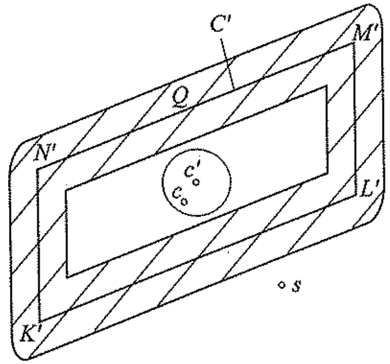
$$\lim_{h\to 0}\omega_{\partial\varphi_i/\partial\xi_j}(h) = 0,$$

а из једнакости

$$\begin{aligned} \omega(h) &= \sup_{\substack{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\ \|\xi-\eta\|<h\\ i,j=1,2}} \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|\\ &= \sup_{i,j=1,2}\left[\sup_{\xi,\eta\in\overline{\Delta},\ \|\xi-\eta\|<h}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\eta)\right|\right] \end{aligned}$$

следи $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h) = 0$.

Означимо $6\omega(h)h = r$. Уочимо све кругове $K(x',r)$, са центром у некој тачки $x' \in C'$ и полупречником r. Претпоставимо да је свака од висина h_1, h_2 паралелограма P' већа од $4r$.



Сл. 5.5.8

Скуп $\bigcup_{x'\in C'} K(x',r)$ означимо са Q. Приметимо да је $P'\setminus Q$ паралелограм и да је $C\subset Q$, сл. 5.5.8. Докажимо да је

$$P'\setminus Q\subset P\subset P'\cup Q. \tag{12}$$

Заиста, нека је c' центар паралелограма P'. Због $h_1,\, h_2>4r$, круг $K(c',r)$ се цео садржи у $P'\setminus Q$. С друге стране, како је $d(x,x')<r$ за свако x, то постоји тачка $c\in K(c',r)$ за коју је $c\in P$. Када би скуп $P'\setminus Q$ садржао неку тачку $e\notin P$, онда би сегмент $\overline{ce}$ морао сећи границу C. Та пресечна тачка би припадала скупу $P'\setminus Q$ због његове конвексности, што је немогуће, јер све тачке границе C припадају Q. Дакле је $P'\setminus Q\subset P$.

С друге стране, у циљу доказа инклузије $P\subset P'\cup Q$, претпоставимо супротно: постоји тачка $s\in P\setminus(P'\cup Q)$. Но, тада постоје $\sigma\in\Pi$ и $s'\in P'$, тако да је $\varphi(\sigma)=s$, $\varphi'(\sigma)=s'$, $d(s,s')<r$. Контрадикција. Овим је двострука инклузија (12) доказана.

На основу (12) непосредно следи

$$\mu P=\mu P'+\theta\cdot\mu Q,\qquad -1\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{13}$$

У циљу израчунавања вредности μQ, нађимо координате темена паралелограма P' – то су $K(x_1^0,x_2^0)$,

$$L'\left(x_1^0+h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0},\ x_2^0+h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_0}\right),$$
$$N'\left(x_1^0+h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0},\ x_2^0+h\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_0}\right).$$

Означавајући $\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_0}^2+\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_i}\right)_{\xi_0}^2}=m_i$, $i=1,\,2$, за дужине страница паралелограма $KL'M'N'$ се добија $KL'=hm_1$, $KN'=hm_2$, па се лако процењује μQ,

$$\mu Q\leqslant 2m_1h\cdot 2r+2m_2h\cdot 2r+4\pi r^2=4r[(m_1+m_2)h+\pi r].$$

Како су φ_i, $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$, $i,\,j=1,\,2$, непрекидне на $\overline{\Delta}$, а заједно с њима и m_i и $\omega(h)$, то је

$$\mu Q\leqslant Ch^2\omega(h), \tag{14}$$

где је C константа која не зависи од ξ^0 и h.

Из примера 5.5.1.4° следи $\mu P'=|J(\xi^0)|\cdot\mu\Pi$, па из (13) и (14) имамо

$$\mu P=|J(\xi^0)|\cdot\mu\Pi+O\big(h^2\cdot\omega(h)\big).$$

Лако се показује да ова једнакост важи и ако се ξ^0 замени произвољним $\xi\in\Pi$, тј. важи (9).

Претпоставимо сада да је $h_i\leqslant 4r$ бар за једно $i\in\{1,2\}$.

Тада је $\mu P'\leqslant m_ih\cdot 4r=24m_ih^2\cdot\omega(h)=O\big(h^2\cdot\omega(h)\big)$, па је (приметимо да инклузија $P\subset P'\cup Q$ важи и у овом случају)

$$\mu P\leqslant\mu P'+\mu Q\leqslant O\big(h^2\cdot\omega(h)\big)+O\big(h^2\cdot\omega(h)\big)=O\big(h^2\cdot\omega(h)\big).$$

Начин доказивања става за $n>2$ остаје исти, с тим што се на одговарајућим местима врше ситне измене, узимајући у обзир да се ради о простору $\mathbf{R}^n$, $n>2$. ■

Користећи став 5.5.1 доказаћемо **теорему о смени променљивих у n-интегралу**.

Теорема 5.5.1

Нека је Δ мерљива област у простору $O\xi_1\ldots\xi_n$, D мерљива област у простору $O'x_1\ldots x_n$ и $\varphi\colon\overline{\Delta}\to\overline{D}$ пресликавање дато једнакостима (1), које задовољава услове (2).

Ако је $f\in\mathcal{R}(D)$, онда важи једнакост

$$\int_D f(x)\,dx=\int_\Delta F(\xi)\cdot|J(\xi)|\,d\xi, \tag{15}$$

где је $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)=f\big(\varphi_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots,\varphi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n)\big)=F(\xi)$ и $J(\xi)=\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$.

Доказ.

Нека је $T=\{I^i\}_i$ подела области Δ; при томе су I^i коцке ивице h или делови тих коцки. Означимо $\varphi(I^i)=V^i\subset D$. Како је $\varphi(\partial I^i)=\partial V^i$ (в. задатак 13), према последици 5.1.1 и примеру 5.1.2.5°, скупови V^i су мерљиви по Жордану и чине поделу T' скупа D. Изаберимо $\eta^i\in I^i$ произвољно и означимо $\varphi(\eta^i)=y^i$. По претпоставци постоји

$$\lim_{h\to 0}\sum_i f(y^i)\cdot\mu V^i=\lim_{\lambda(T')\to 0}\sum_i f(y^i)\cdot\mu V^i=\int_D f(x)\,dx.$$

Према ставу 5.5.1 је

$$\begin{aligned}\sum_i f(y^i)\cdot\mu V^i&=\sum_i F(\eta^i)\big(|J(\eta^i)|\cdot\mu I^i+O(h^n\cdot\omega(h))\big)\\&=\sum_i F(\eta^i)|J(\eta^i)|\cdot\mu I^i+\sum_i F(\eta^i)\cdot O(h^n\cdot\omega(h)).\end{aligned} \tag{16}$$

Из ограничености функције F следи да је, за неку константу M,

$$\left|\sum_i F(\eta^i)\cdot O(h^n\cdot\omega(h))\right|\leqslant M\omega(h)\sum_i h^n\leqslant M\cdot\mu\Delta\cdot\omega(h).$$

Како је $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h)=0$, из (16) за $h\to 0$ следи

$$\int_D f(x)\,dx=\int_\Delta F(\xi)|J(\xi)|\,d\xi.\quad ■$$

Примери 5.5.2

1° Израчунајмо интеграл $J = \iiint_V \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, по елипсоиду

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \right\}, \qquad a,b,c>0.$$

Веома једноставно интеграл се израчунава преласком на **уопштене сферне координате** по формулама $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\varphi$ $(0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$. Како је јакобијан $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi$, то је

$$J = abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 r^4\,dr = \frac{4}{5}\pi abc.$$

2° Израчунајмо површину фигуре у равни Oxy ограничене кривом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$, $a,\ b,\ h,\ k>0$.

Површина је дата интегралом $P = \iint_D dx\,dy$, где је област D ограничена датом кривом. Напишимо једначину криве у облику

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}.$$

У интегралу P извршимо смену променљивих

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h} = r\cos\varphi, \qquad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k} = r\sin\varphi.$$

Једначина криве постаје $r = \sqrt{\dfrac{a^2}{4h^2}+\dfrac{b^2}{4k^2}}$, а вредност јакобијана је $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$. Узевши ово у обзир имамо

$$P = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}}} r\,dr = \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3° Израчунајмо меру μT^n n-димензионалног симплекса

$$T^n = \{\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0, x_1+\cdots+x_n\leqslant a\,\}, \quad a>0.$$

У интегралу

$$I_n(a) = \int_{T^n} dx_1\,\dots\,dx_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \dots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

извршимо смену $x_1 = a\xi_1,\ \dots,\ x_n = a\xi_n$. Тада је $J(\xi) = a^n$ и формула (15) даје

$$I_n(a) = a^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n,$$

што ћемо написати у облику

$$I_n(a) = a^n \underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\dots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\cdots+\xi_n\leqslant 1}}{\int\cdots\int} d\xi_1\,\dots\,d\xi_n = a^n I_n(1).$$

Применом теореме 5.4.2 на овај интеграл имамо

$$\begin{aligned} I_n(a) &= a^n \int_0^1 d\xi_n \underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\dots,\xi_{n-1}\geqslant 0\\ \xi_1+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n}}{\int\cdots\int} d\xi_1\,\dots\,d\xi_{n-1} \\ &= a^n \int_0^1 I_{n-1}(1-\xi_n)\,d\xi_n = a^n \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} I_{n-1}(1)\,d\xi_n \\ &= a^n I_{n-1}(1) \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1}\,d\xi_n = \frac{a^n}{n} I_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Одавде је

$$I_n(1) = \frac{1}{n}\,I_{n-1}(1) = \frac{1}{n!}\,,$$

па је

$$\mu T^n = I_n(a) = \frac{a^n}{n!}.$$

4° За израчунавање мере μK^n n-димензионалне кугле полупречника R,

$$K^n = \{\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2\,\},$$

у интегралу $\mu K^n = \int_{K^n} dx_1\,\dots\,dx_n$ увешћемо ***n*-димензионалне сферне координате** помоћу

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, & 0&\leqslant r\leqslant R,\\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, & 0&\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, & 0&\leqslant\varphi_2\leqslant\pi,\\ &\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & 0&\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi,\\ x_n &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, & 0&\leqslant\varphi_{n-1}<2\pi. \end{aligned} \tag{17}$$

Јакобијан $J = \dfrac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}$ израчунаћемо користећи резултат примера 3.3.1. Наиме, релације (17) написаћемо у облику

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv r^2 - (x_1^2+\cdots+x_n^2) = 0,\\ F_2 &\equiv r^2\sin^2\varphi_1 - (x_2^2+\cdots+x_n^2) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ F_n &\equiv r^2\sin^2\varphi_1\cdots\sin^2\varphi_{n-1} - x_n^2 = 0. \end{aligned}$$

Јакобијани

$$\begin{aligned}\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})} &= 2^n r^{2n-1}\sin^{2n-3}\varphi_1\cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1},\\ \frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} &= (-1)^n 2^n x_1\cdots x_n\\ &= (-1)^n 2^n r^n\sin^{n-1}\varphi_1\cos\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1},\end{aligned}$$

као троугаоне детерминанте, рачунају се непосредно. На основу формуле примера 3.3.1 имамо

$$J=(-1^n)\frac{\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}}{\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

Зато је

$$\begin{aligned}\mu K^n &= \int_0^R r^{n-1}\,dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\ \dots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\\ &= \frac{2\pi R^n}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\ \dots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}.\end{aligned}$$

Користећи формуле примера 8.4.1 из М.А.I добија се

$$\mu K^n = \begin{cases}\dfrac{\pi^m}{m!}R^{2m}, & \text{за } n=2m,\\[2mm] \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1}, & \text{за } n=2m+1.\end{cases}$$

Други начин добијања овог резултата показаћемо у примеру 8.4.1. ▲

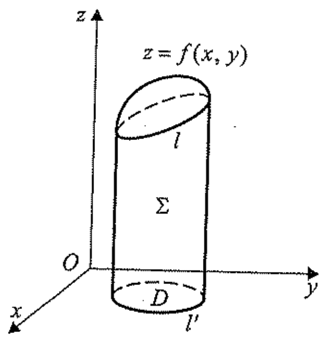
5.6. ПРИМЕНА ИНТЕГРАЛА

На неколико примера показаћемо како се методе интегралног рачуна користе у геометрији и механици. Приликом примене интеграла сматраћемо да су области по којима вршимо интеграцију мерљиве, а да то посебно не наглашавамо.

Израчунавање запремине

Нека је $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D\subset \mathbf{R}^2$, $z\geqslant 0$, површ у простору $Oxyz$, сл. 5.6.1.

Са l' означимо границу области D. Цилиндарска површ са водиљом l' и изводницама паралелним оси Oz сече површ $z=f(x,y)$ по кривој l. Са V означимо запремину тела Σ ограниченог поменутом цилиндарском површи, облашћу D и површи $z=f(x,y)$. Тада је



Сл. 5.6.1

(1) $$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Наиме, према формули (4) одељка 5.2 је

$$V=\iiint_\Sigma dx\,dy\,dz,$$

што се на основу једнакости (5) одељка 5.4 може написати као

$$V=\iint_D dx\,dy\int_0^{f(x,y)} dz=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ако је једначина површи $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$, $z\leqslant 0$, онда је запремина V горе описаног тела дата формулом

$$V=-\iint_D \varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример 5.6.1

Тело Σ у простору $Oxyz$ ограничено је параболоидом $z=x^2+y^2$, цилиндарским површима $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ и Oxy-равни. Са D означимо област између кругова $x^2+y^2=x$ и $x^2+y^2=2x$. Запремина V тела Σ дата је интегралом

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Узевши у обзир да једначине датих кругова у поларном координатном систему имају облик $r=\cos\theta$ и $r=2\cos\theta$, сменом променљивих x, y са r, θ добија се

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3\,dr=\frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{45}{32}\pi.\quad ▲$$

Мера површи

Нека је $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2$, једначина површи S. При томе су функција f и њени парцијални изводи $f'_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $f'_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрекидни на мерљивом скупу D. Уочимо произвољну поделу $T=\{\,V^i \mid i=1,\,\dots\,,k\,\}$ скупа D и у сваком елементу V^i изаберимо тачку (ξ_i,η_i). У тачки (ξ_i,η_i,ζ_i), где је $\zeta_i=f(\xi_i,\eta_i)$, конструишимо тангентну раван дате површи. Са Σ^i означимо део тангентне равни који се пројектује на V^i за $i = 1, \ldots, k$. Ако са γ_i означимо угао између тангентне равни и равни Oxy, онда је

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Мера (површина) μS **површи** S дефинише се као лимес

$$\mu S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \mu\Sigma^i.$$

Ако приметимо да је $\mu V^i = \mu\Sigma^i \cdot \cos\gamma_i$, онда је

$$\mu S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \mu V^i,$$

односно

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\, dx\, dy.$$

Користећи ознаке $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$, последњу једнакост пишемо у облику

(2) $$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Подинтегрални израз у једнакости (2) назива се **елементом површине**. Означимо ли га са dS, имамо

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy, \quad \text{односно} \quad \mu S = \iint_D dS.$$

Пример 5.6.2

Израчунајмо површину P сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Посматрајући горњу полусферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и имајући у виду да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

према формули (2) имамо

$$P = 2R \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Прелазећи на поларне координате добијамо

$$P = 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R^2. \quad \blacktriangle$$

Ако је површ S дата имплицитно једначином $F(x,y,z) = 0$ и ако је $F_z' \neq 0$ за $(x,y) \in D$, онда, узевши у обзир да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'},$$

за површину μS површи S имамо

$$\mu S = \iint_D \frac{1}{|F_z'|} \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}\, dx\, dy.$$

На крају, претпоставимо да је површ S дата параметарски

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \qquad (u,v) \in \Delta \subset \mathbf{R}^2,$$

где су φ, ψ, χ, као и њихови парцијални изводи, непрекидни. Претпоставимо да је бар један од три јакобијана $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ различит од нуле. Нека је, одређености ради, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ за $(u,v) \in \Delta$.

Сетимо се да вектор нормале тангентне равни у тачки (x,y,z) има облик

$$\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right).$$

Узевши у обзир да вектор нормале тангентне равни површи $z = f(x,y)$ у тачки (x,y,z) има облик $(p,q,-1)$, вршећи смену $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ у интегралу

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

добија се

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}\, \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\, dv,$$

где се област Δ функцијом $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ пресликава бијективно на D. Одавде следи да је мера μS површи S дата изразом

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\, du\, dv.$$

Користећи ознаке за Гаусове коефицијенте површи (в. одељак 4.5)

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

лако се израчунава да се μS може написати у облику

$$\mu S = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{3}$$

Елемент површине у овом случају дат је изразом

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Пример 5.6.3

Нађимо површину дела сфере између два меридијана и две паралеле.

Нека је полупречник сфере R познат. Напишимо једначину сфере у параметарском облику, бирајући u $(0 \leqslant u < 2\pi)$ као дужину меридијана и v $(-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2)$ као ширину паралеле,

$$x = R\cos u\cos v, \quad y = R\sin u\cos v, \quad z = R\sin v.$$

Са Δ означимо скуп $\{(u,v) \mid u_1 \leqslant u \leqslant u_2, v_1 \leqslant v \leqslant v_2\}$, а са S одговарајући део сфере. Израчунајмо најпре

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -R\sin u\cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = R\cos u\cos v, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -R\cos u\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -R\sin u\sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = R\cos v,$$

одакле је $EG - F^2 = R^4\cos^2 v$, па је

$$\begin{aligned}\mu S &= \iint_\Delta R^2\cos v\, du\, dv = R^2\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2}\cos v\, dv\\ &= R^2(u_2 - u_1)(\sin v_2 - \sin v_1). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Маса тела

Посматрајмо тело масе m у делу V простора $\mathbf{R}^3$ са координатним системом $Oxyz$. Однос $\dfrac{m}{\mu V}$ назива се **средњом густином** датог тела. Уочимо произвољну тачку $A(x,y,z)$ и произвољну лопту $K(A,\varepsilon)$ у скупу V. Густина $\rho(A)$ тела у тачки A је, по дефиницији,

$$\rho(A) = \rho(x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m_K}{\mu K(A,\varepsilon)},$$

где је m_K маса лопте $K(A,\varepsilon)$.

Ако је $\rho(A) = \text{const}$, тело је хомогено. У том случају веза између масе m, густине ρ и запремине μV тела је дата једнакошћу $m = \rho\cdot\mu V$.

Претпоставимо да је тело у скупу V нехомогено и да му је густина $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$, позната. Нађимо масу m тела.

У том циљу посматрајмо произвољну поделу $T = \{V^i \mid i = 1, \dots, k\}$ скупа V и изаберимо у сваком елементу V^i истакнуту тачку (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, \dots, k$.

Бирајући дијаметар δV^i довољно малим, можемо V^i сматрати приближно хомогеним телом са густином $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. У том случају маса m_i елемента V^i износи $m_i = \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i$, $i = 1, \dots, k$. Ако се изврши сумирање $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ добиће се приближна вредност масе m тела. Преласком на лимес

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{k}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i$$

добија се маса m тела, тј.

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Пример 5.6.4

Тело је облика коцке $V = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$ и густине $\rho(x,y,z) = x + y + z$. Нађимо масу m овог тела.

Према горе добијеној формули имамо

$$m = \iiint_V (x+y+z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)\, dz = \frac{3}{2}a^4. \quad \blacktriangle$$

Момент инерције

Под моментом инерције материјалне тачке у односу на праву подразумева се производ масе тачке и квадрата растојања тачке и праве. Момент инерције коначног скупа материјалних тачака једнак је збиру момената инерције свих тачака. У циљу дефинисања и налажења момента инерције тела поступа се на следећи начин.

Претпоставимо да тело V у координатном систему $Oxyz$ има густину $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$. Поделимо V на мале области V^i, $i = 1, \dots, k$, и изаберимо истакнуте тачке (ξ_i,η_i,ζ_i) у њима. Сматраћемо да момент инерције J_i у односу на осу Oz оног дела тела које се налази у V^i, има вредност

$$J_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i.$$

Сумирајући и прелазећи на лимес, добија се по дефиницији момент инерције J датог тела

$$J = \lim_{\max\delta V^i\to 0}\sum_{i=1}^{k}(\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mu V^i = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Пример 5.6.5

Хомогено тело густине $\rho = 1$ ограничено је делом сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и делом конуса $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$. Нађимо момент инерције J датог тела у односу на осу Oz.

Означимо

$$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 2,\ x^2+y^2 \leqslant z^2,\ z \geqslant 0\}.$$

Према горњој формули је

$$J = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Преласком на поларно-цилиндричне координате имамо

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\, dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5). \quad \blacktriangle$$

5.7. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

Појам n-интеграла дефинисаног на мерљивим скуповима за ограничене функције уопштава се на случајеве када су подинтегрална функција или област интеграције неограничени. Оба случаја посматраћемо истовремено.

Најпре ћемо дати појам монотоног покривача неке области у простору $\mathbf{R}^n$.

Дефиниција 5.7.1

Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ дата област. Фамилија $\mathcal{D} = \{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ области **монотоно покрива** област D ако су испуњени услови

1° $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D^k = D$;

2° $\overline{D^k} \subset D^{k+1}$ за $k = 1, 2, \dots$.

Фамилију $\mathcal{D}$ ћемо називати **монотоним покривачем**.

Примери 5.7.1

1° Са D^k означимо

$$D^k = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < k^2,\ k = 1, 2, \dots \}.$$

Фамилија $\{ D^k \mid k \in \mathbf{N} \}$ монотоно покрива простор $\mathbf{R}^n$.

2° Уочимо произвољан растући низ рационалних бројева $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$, већих од 1, такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \infty$. Фамилија $\mathcal{D} = \{ D^k \mid k \in \mathbf{N} \}$, где је

$$D^k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < \left(1 - \frac{1}{r_k}\right)^2 \right\}$$

монотоно покрива елипсоид $\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2/4 + z^2/9 < 1 \}$. $\blacktriangle$

Дефиниција 5.7.2

Нека је реална функција $f(x)$ дефинисана на области $D \subset \mathbf{R}^n$ и интеграбилна на сваком затвореном мерљивом подскупу скупа D. Посматрајмо све монотоне покриваче облика $\{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ који имају својство да је сваки $\overline{D^k}$ мерљив скуп. Ако за произвољан такав покривач постоји

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\overline{D^k}} f(x)\, dx$$

и лимес не зависи од избора покривача, онда се овај лимес назива **несвојственим интегралом** функције f на скупу D и означава са

$$\int_D f(x)\, dx, \qquad \text{или} \qquad \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Често се симбол $\int_D f(x)\, dx$ (ако је f или D неограничено) назива несвојственим интегралом, па се каже да тај несвојствени интеграл конвергира, односно дивергира, ако горе поменути лимес постоји (као коначан), односно не постоји или је бесконачан.

Несвојствени интеграл ненегативних функција

Теорема 5.7.1

Нека је $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$ и $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$. Да би несвојствени интеграл $\int_D f(x)\, dx$ конвергирао, потребно је и довољно да бар за једну фамилију $\mathcal{D} = \{ D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ која монотоно покрива област D и где су $\overline{D^k}$ мерљиви скупови, низ $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, $a_k = \int_{\overline{D^k}} f(x)\, dx$, буде ограничен.

Доказ.

Ако $\int_D f(x)\, dx$ конвергира, низ $(a_k)_k$ је конвергентан, дакле и ограничен.

Претпоставимо да је низ $(a_k)_k$ ограничен. Како из $\overline{D^k} \subset \overline{D^{k+1}}$ и $f(x) \geqslant 0$, $x \in D$ следи $\int_{\overline{D^k}} f(x)\, dx \leqslant \int_{\overline{D^{k+1}}} f(x)\, dx$, то је тај низ растући, па постоји коначан $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = I$.

Уочимо неку другу фамилију $\{ E^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ која монотоно покрива област D и означимо

$$b_k = \int_{\overline{E^k}} f(x)\, dx.$$

Нека је $k_0 \in \mathbf{N}$ произвољно. Нађимо k тако да је $\overline{E^{k_0}} \subset D^k$. Такво k постоји. Наиме, када не би постојало, онда би за свако $k \in \mathbf{N}$ постојала тачка $x^k \in \overline{E^{k_0}} \setminus D^k$. Како је $\overline{E^{k_0}}$ затворен и ограничен, тј. компактан скуп, низ $(x^k)_k$ садржи конвергентан подниз (последица 1.5.1) који тежи некој тачки $x^0 \in \overline{E^{k_0}}$. Тачка x^0, заједно са неком околином $U(x^0)$ налази се у једном од скупова D^m. Но тада том скупу D^m (па и свим скуповима D^{m_1} за $m_1 > m$) припада бесконачно много тачака x^k, што противречи претпоставци $x^k \notin D^k$, $k \in \mathbf{N}$.

При оваквом избору броја k је и $b_{k_0} \leqslant a_k \leqslant I$. Дакле је $(b_k)_k$ ограничен низ. Као растући, овај низ има лимес; нека је $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = I'$. Из претходног следи да је $I' \leqslant I$. Замењујући улоге низовима (a_k) и (b_k) добијамо неједнакост $I \leqslant I'$, одакле следи $I = I'$. $\blacksquare$

Пример 5.7.2

За израчунавање интеграла

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

уочимо фамилију $\{\,D^k \mid k=1,2,\dots\}$, $D^k=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<k^2\,\}$. Тада је

$$a_k=\iint_{D^k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

После преласка на поларне координате имамо

$$a_k=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k re^{-r^2}\,dr=\pi(1-e^{-k^2}).$$

Очито је $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=\pi$.

Приметимо да се дати несвојствени интеграл може израчунати и као

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{E^k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где је $E^k=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid -k<x<k, -k<y<k\,\}$, $k=1,\,2,\,\dots$. Из

$$\iint_{E^k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_{-k}^k e^{-x^2}\,dx\int_{-k}^k e^{-y^2}\,dy=\left(\int_{-k}^k e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

следи

$$\pi=\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^k e^{-x^2}\,dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

и затим

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

Овај интеграл обично се назива **Ојлер-Поасоновим**[1] **интегралом.** ▲

Наведимо сада неколико критеријума поређења за испитивање конвергенције несвојствених интеграла.

Теорема 5.7.2

Нека су f и g две ненегативне реалне функције дефинисане у области $D\subset\mathbf{R}^n$, интеграли $\int_D f(x)\,dx$, $\int_D g(x)\,dx$ су несвојствени и важи неједнакост $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in D$. Ако $\int_D g(x)\,dx$ конвергира, онда конвергира и $\int_D f(x)\,dx$.

Доказ.

За монотони покривач $\{\,D^k \mid k=1,2,\dots\}$ скупа D, низ $\left(\int_{D^k} g(x)\,dx\right)_k$ конвергира. Како је

$$\int_{D^k} f(x)\,dx\leqslant\int_{D^k} g(x)\,dx,$$

то је низ $\left(\int_{D^k} f(x)\,dx\right)_k$ ограничен, па како је и монотон, он је и конвергентан. ■

[1] S. D. Poisson (1781–1840), француски физичар и математичар

Последица 5.7.1

Ако функције f и g задовољавају услове теореме 5.7.2 и $\int_D f(x)\,dx$ дивергира, онда и $\int_D g(x)\,dx$ дивергира. ■

Став 5.7.1

Ако је $f(x)\geqslant 0$, $x\in D\subset\mathbf{R}^n$, $\int_D f(x)\,dx$ конвергира и $E\subset D$ има монотон покривач, онда $\int_E f(x)\,dx$ конвергира и важи неједнакост

$$\int_E f(x)\,dx\leqslant\int_D f(x)\,dx.$$

Доказ.

Конструишимо функцију $\varphi\colon D\to\mathbf{R}$ формулом

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{за } x\in E,\\ 0, & \text{за } x\in D\setminus E.\end{cases}$$

Очито је $\varphi(x)\leqslant f(x)$ за $x\in D$, одакле следи

$$\int_D \varphi(x)\,dx\leqslant\int_D f(x)\,dx.$$

С друге стране, за произвољан монотон покривач $\{\,D^k \mid k=1,2,\dots\}$ скупа D важи

$$\int_{D^k\cap E}\varphi(x)\,dx\leqslant\int_{D^k}\varphi(x)\,dx.$$

Преласком на лимес за $k\to\infty$ имамо

$$\int_E f(x)\,dx\leqslant\int_D f(x)\,dx.\quad\blacksquare$$

Несвојствени интеграл функција променљивог знака

Испитивање несвојствених интеграла функција променљивог знака почнимо једном дефиницијом.

Дефиниција 5.7.3

Несвојствени интеграл $\int_D f(x)\,dx$ **апсолутно конвергира** ако конвергира $\int_D |f(x)|\,dx$.

Теорема 5.7.3

Несвојствени n-интеграл, $n\geqslant 2$, конвергира апсолутно ако и само ако конвергира у обичном смислу.

Доказ.

Претпоставимо да је реална функција f дефинисана у области $D\subset\mathbf{R}^n$. Са f_+ и f_- означимо функције дефинисане формулама

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2},\quad x\in D.$$

Другачије то можемо написати у облику

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{за } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{за } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in D.$$

Следеће неједнакости

$$(1) \qquad 0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \qquad x \in D,$$

као и једнакости

$$(2) \qquad f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x), \qquad x \in D,$$

очигледне су.

Ако $\int_D f(x)\,dx$ апсолутно конвергира, тј. ако $\int_D |f(x)|\,dx$ конвергира, онда према (1) и теореми 5.7.2 конвергирају $\int_D f_+(x)\,dx$ и $\int_D f_-(x)\,dx$. На основу једнакости (2) лако се види да конвергира и $\int_D f(x)\,dx$.

Обратно, нека конвергира $\int_D f(x)\,dx$. Претпоставимо, супротно, да $\int_D |f(x)|\,dx$ дивергира. Како је $|f(x)| \geqslant 0$, то $\int_D |f(x)|\,dx$ дивергира ка бесконачности и можемо наћи монотони покривач $\{\, D^k \mid k = 1, 2, \dots \}$ скупа D, тако да је

$$(3) \qquad \int_{\overline{D^{k+1}}} |f(x)|\,dx > 3 \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + 2k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Означимо $D^{k+1} \setminus \overline{D^k} = E^k$. Из (3) следи

$$(4) \qquad \int_{\overline{E^k}} |f(x)|\,dx > 2 \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + 2k.$$

Користећи (2) имамо

$$\int_{\overline{E^k}} |f(x)|\,dx = \int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx + \int_{\overline{E^k}} f_-(x)\,dx.$$

Од два интеграла на десној страни последње једнакости, један је већи или једнак другом. Одређености ради, претпоставимо да је

$$\int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx \geqslant \int_{\overline{E^k}} f_-(x)\,dx.$$

Из ове неједнакости и (4) следи

$$\int_{\overline{E^k}} f_+(x)\,dx > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k.$$

Изаберимо такву поделу $T = \{V^i\}_i$ скупа $\overline{E^k}$ да буде

$$\sum_i m_i \cdot \mu V^i > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k, \qquad m_i = \inf_{x \in V^i} f_+(x).$$

Означимо $P^k = \bigcup_j \{\, V^j \in T \mid m_j > 0 \,\}$, $\overline{D^k} \cup P^k = Q^k$. Тада је

$$(5) \qquad \int_{P^k} f(x)\,dx = \int_{P^k} f_+(x)\,dx > \int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx + k.$$

Из (5) и очигледне неједнакости

$$\int_{\overline{D^k}} f(x)\,dx \geqslant -\int_{\overline{D^k}} |f(x)|\,dx$$

сабирањем следи

$$\int_{Q^k} f(x)\,dx > k.$$

Фамилија скупова $\{\, (Q^{2k})^\circ \mid k \in \mathbf{N} \,\}$ задовољава све услове да би била монотони покривач скупа D, сем што скупови $(Q^{2k})^\circ$ можда нису повезани. Међутим, њиховом малом деформацијом, може се постићи да важи и тај услов, при чему остаје на снази последња неједнакост (за детаље видети, на пример, [29]). На основу те неједнакости онда следи да је $\int_D f(x)\,dx$ дивергентан. Контрадикција. ■

Приметимо да доказана теорема о апсолутној конвергенцији несвојственог вишеструког интеграла није у контрадикцији са познатом чињеницом (в. пример 8.7.6 у М.А.I) да постоје обични (једноструки) несвојствени интеграли који конвергирају условно. Наиме, последњи део доказа у општем случају за $n = 1$ не може се спровести.

ЗАДАЦИ

1. 1° Показати да скуп мере нула нема унутрашњих тачака, а ако неки скуп нема унутрашњих тачака, мера му не мора бити нула.

2° Ако је скуп $A \subset \mathbf{R}^n$ такав да је $\mu(A) = 0$, онда је и $\mu(\overline{A}) = 0$. Да ли одговарајуће тврђење важи за Лебегову меру?

2. Нека је $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$. Упоредити дефиницију 8.1.2 из М.А.I са дефиницијом n-интеграла за $n = 1$. Показати да је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx, \quad a < b,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_I f(x)\,dx, \quad b < a.$$

3. 1° Ако је I сегмент у $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{R}(I)$ и $\{\, x \in I \mid f(x) \neq 0 \,\}$ има Лебегову меру нула, доказати да је $\int_I f(x)\,dx = 0$.

2° Ако је $f\colon I \to \mathbf{R}$ ограничена функција и $\{\, x \in I \mid f(x) \neq 0 \,\}$ има Лебегову меру нула, да ли мора бити $f \in \mathcal{R}(I)$?

3° Ако је $A \subset \mathbf{R}^n$ мерљив по Жордану, $f\colon A \to \mathbf{R}$ је ненегативна функција и $\int_A f(x)\,dx = 0$, доказати да је $\{\, x \in A \mid f(x) \neq 0 \,\}$ Лебегове мере нула.

4. Доказати да горњи и доњи Дарбуов интеграл ограничене функције f на мерљивом скупу $D \subset \mathbf{R}^n$ представљају лимес горње, односно доње Дарбуове суме, кад параметар поделе тежи нули.

5. Нека је f реална функција, дефинисана и ограничена на $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$. Ако је $f(x_1, x_2)$ растућа по x_i за фиксирано x_j, $i, j = 1, 2$, доказати да је $f \in \mathcal{R}(P)$.

6. Функција f дефинисана је на $P = [0,1] \times [0,1]$ формулом

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \text{ рационално}, \\ 2y, & \text{ако је } x \text{ ирационално}. \end{cases}$$

Доказати:

1° Постоји $\underline{\int_0^t} f(x,y)\,dy$ за $0 \leqslant t \leqslant 1$ и

$$\int_0^1 \left(\underline{\int_0^t} f(x,y)\,dy \right) dx = t^2, \quad \int_0^1 \left(\overline{\int_0^t} f(x,y)\,dy \right) dx = t.$$

2° $\int_0^1 \big(\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dy\big)dx$ постоји (наћи вредност).

3° $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ не постоји.

7. Доказати неједнакост

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx \right]^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где је f непрекидна функција на $[a, b]$.

8. Нека је $f_i \in \mathcal{R}[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Ако је $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, доказати једнакост

$$\int_D f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\,dx_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\,dx_n \right).$$

9. 1° Доказати **Дирихлеову формулу**

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx \quad (a > 0)$$

за непрекидну функцију $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D = \{ (x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant x \}$.

2° Нека је $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрекидна реална функција на скупу $\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant a, i = 1, \ldots, n \}$, $n \geqslant 2$. Доказати једнакост

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n = \int_0^a dx_n \int_{x_n}^a dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^a f\,dx_1.$$

3° Доказати да за непрекидну функцију $f\colon [0, a] \to \mathbf{R}$ важи

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^a f(\xi)\,d\xi \right]^n.$$

10. Ако је $D \subset \mathbf{R}^n$, $\mu(D) > 0$, φ је непрекидна реална функција на D и $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је конвексна, доказати да важи неједнакост

$$f\left(\frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi(x)\,dx \right) \leqslant \frac{1}{\mu(D)} \int_D (f \circ \varphi)(x)\,dx.$$

11. 1° Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $D \subset I = I' \times I''$, где су $I' \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $I'' \subset \mathbf{R}$ интервали и за $y_0 \in I''$ означимо $D_{y_0} = \{ (x,y) \in D \mid y = y_0 \}$. Означимо са $\overline{\mu}(D_y)$ $(n-1)$-димензиону меру скупа D_y, односно било који број између $\underline{\int_{D_y}} dx$ и $\overline{\int_{D_y}} dx$ (ако та мера не постоји). Доказати да је

$$\mu(D) = \int_{I''} \overline{\mu}(D_y)\,dy.$$

2° Доказати **Кавалијеријев**[2] **принцип**: нека су A, $B \subset \mathbf{R}^3$ мерљиви по Жордану и нека за свако $c \in \mathbf{R}$ скупови $A_c = \{ (x,y,z) \in A \mid z = c \}$ и $B_c = \{ (x,y,z) \in B \mid z = c \}$ имају једнаке површине; тада скупови A и B имају једнаке запремине.

12. Наћи формуле трансформације при којима област

$$D = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geqslant 1, xy \leqslant 2, x - y + 1 \geqslant 0, x - y - 1 \leqslant 0, x > 0 \}$$

прелази у правоугаоник чије су странице паралелне координатним осама.

13. Нека функција $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ задовољава услове теореме 5.5.1. Доказати:

1° не постоје тачке η и ξ у области Δ, тако да је $\det d\varphi(\eta) > 0$ и $\det d\varphi(\xi) < 0$ [видети, на пример, [33]].

2° ако је $\Pi \subset \Delta$ ограничена област и $\overline{\Pi} \subset \Delta$, тада је $P = \varphi(\Pi)$ такође област и важи $\varphi(\overline{\Pi}) = \overline{P}$, $\varphi(\partial\Pi) = \partial P$.

14. Израчунати $\iint_{x^2+y^2 \leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$.

15. Наћи $f'(t)$ ако је

$$f(t) = \iint_D e^{tx/y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant t, 0 \leqslant y \leqslant t \}.$$

16. У uv-равни дат је четвороугао с теменима $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$, $D(1,3)$. Пресликавање uv-равни у xy-раван дато је једначинама

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv. \tag{1}$$

1° Наћи слику четвороугла $ABCD$ у xy-равни.

2° Израчунати интеграл $\iint_P xy\,dx\,dy$, користећи смену (1), где је $P = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$.

[2] B. Cavalieri (1598–1647), италијански математичар

17. 1° Одредити Јакобијан **уопштених поларних**, односно **сферних** координата

$$x = ar\cos^\alpha\theta, \quad y = br\sin^\alpha\theta, \qquad r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

односно

$$x = ar\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \quad y = br\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta, \quad z = cr\cos^\alpha\varphi,$$
$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

2° Наћи запремину тела ограниченог површи $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$.

18. Нека је $\Delta = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \xi_1 < 1, -2\pi < \xi_2 < 2\pi\}$, $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < e\}$ и $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ дато са $\varphi(\xi_1, \xi_2) = (x_1, x_2)$, $x_1 = e^{\xi_1}\cos\xi_2$, $x_2 = e^{\xi_1}\sin\xi_2$. Показати да је

$$\iint_{\overline{D}} dx_1\,dx_2 \neq \iint_{\overline{\Delta}} \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(\xi_1, \xi_2)}\right| d\xi_1\,d\xi_2.$$

Који услов теореме 5.5.1 о смени променљивих није испуњен у овом примеру?

19. Доказати да се формула за површину омотача обртног тела из одељка 8.5 у М.А.I добија као специјалан случај формуле (3) одељка 5.6.

20. Следећи **Шварцов пример** показује да се површина глатке површи у $\mathbf{R}^3$ не може дефинисати као лимес површина уписаних полиедара у ту површ (за разлику од аналогне ситуације код дефиниције дужине лука).

У прав кружни ваљак полупречника R и висине H упишимо полиедар на следећи начин. Поделимо ваљак равнима паралелним основама на m подударних ваљака висине H/m. Сваки од $m+1$ добијених кругова поделимо на n једнаких лукова, тако да се деоне тачке на сваком кругу налазе непосредно изнад (одн. испод) средишта лукова суседних кругова. Спојимо затим дужима на овај начин добијене „суседне“ тачке. Унија добијених троуглова је полиедарска површ P. Доказати:

(а) Површина површи P износи

$$\mu P = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + H^2}.$$

(б) Кад m, $n \to \infty$, тада дијаметри појединих троуглова теже нули, али је

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ n^2/m\to 0}} \mu P = \infty, \qquad \lim_{\substack{m,n\to\infty\\ m/n^2\to q}} \mu P = 2\pi R\sqrt{\frac{1}{4}\pi^4R^2q^2 + H^2},$$

тј. једино у случају $q = 0$ тај лимес је једнак површини омотача датог ваљка. Дакле, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\mu P$ не постоји.

21. Наћи меру: 1° n-димензионалне пирамиде

$$\frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n;$$

2° n-димензионалне купе

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} \leqslant \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n \leqslant a_n;$$

3° n-димензионалног елипсоида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1.$$

22. Нека је $D \subset \mathbf{R}^n$ мерљив скуп и $\{D^k\}$ монотони покривач скупа D, такав да су $\overline{D^k}$ мерљиви скупови. Доказати:

1° $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(\overline{D^k}) = \mu(\overline{D})$;

2° ако је $f \in \mathcal{R}(\overline{D})$, тада је $f|\overline{D^k} \in \mathcal{R}(\overline{D})$ и важи $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\overline{D^k}} f(x)\,dx = \int_{\overline{D}} f(x)\,dx$.

23. Испитати конвергенцију интеграла $\int_D (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-p/2}\,dx_1\cdots dx_n$ ако је:

1° $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$;

2° $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant 1\}$.

24. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

где је $\rho(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$ позитивно дефинитна форма.

25. Израчунати

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^py^qz^r}$$

за вредности параметара p, q, r за које тај интеграл конвергира.

26. Показати да је

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{|x|,|y|\leqslant n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0,$$

тако да $\iint_{\mathbf{R}^2}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ дивергира. Показати такође да је

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx = \int_0^\infty dx\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

27. Ако је $D = [1, \infty)^2$ и $f\colon D \to \mathbf{R}$ дата са $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, доказати да $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ дивергира, мада конвергирају оба узастопна интеграла

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty f(x,y)\,dx.$$

28. Доказати теорему о смени променљивих у несвојственом интегралу: ако су Δ, D области у $\mathbf{R}^n$ и $\varphi\colon \overline{\Delta} \to \overline{D}$ функција дата једнакостима (1) одељка 5.5 која задовољава услове (2) тог одељка на Δ. Ако је $f\colon D \to \mathbf{R}$ интеграбилна на мерљивим компактним подскуповима скупа D и несвојствени интеграл $\int_D f(x)\,dx$ конвергира, тада и $\int_\Delta (f\circ\varphi)(\xi)|\det d\varphi(\xi)|\,d\xi$ конвергира и има исту вредност као $\int_D f(x)\,dx$.

29. Доказати да је $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = 2\pi$.

6. КРИВОЛИНИЈСКИ И ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

Појам одређеног интеграла, дефинисаног на сегменту праве линије, у претходној глави уопштили смо, проширујући интеграцију на сегмент, односно мерљив скуп у простору $\mathbf{R}^n$ за $n \geqslant 2$. У овој глави уопштења ћемо вршити у другом правцу.

Када се за област интеграције узме лук криве у простору, а подинтегрална функција се дефинише на том луку, долази се до криволинијског интеграла. Криволинијски интеграли користе се, како у математици, тако и у применама (у вези са израчунавањем рада, циркулације флуида, израчунавањем масе и др). Обично се посматрају (у применама се виде потребе за тим) две врсте таквих интеграла – криволинијски интеграли прве и друге врсте.

Ако се, уместо криве линије, за област интеграције узме površ у простору, а подинтегрална функција се дефинише на тој површи, долази се до појма површинског интеграла, по много чему сличног криволинијском. И површински интеграли имају доста примена. Посебно се истиче њихова примена у теорији флуида.

Разликоваћемо и код ових интеграла два облика – површинске интеграле прве и друге врсте.

Ми ћемо проучавати криволинијске и површинске интеграле у простору $\mathbf{R}^3$. Посебно, када се говори о интеграцији дуж равне криве, биће речи о криволинијским интегралима у равни. Задржаћемо се и на неким применама криволинијских и површинских интеграла.

6.1. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

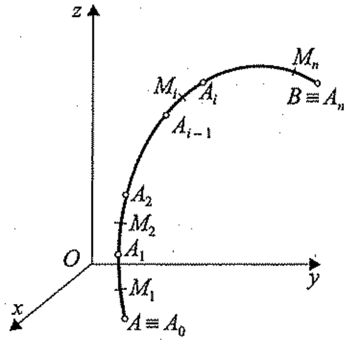
Посматрајмо у простору $Oxyz$ криву L која се може ректифицирати и не пресеца сама себе од тачке A до тачке B. Нека су њене једначине дате у облику

(1) $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Нека је функција $f(x,y,z)$ дефинисана и ограничена на кривој L. Поделимо сегмент $[\alpha, \beta]$ поделом T:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta.$$

Свакој вредности t_i, $i = 0, 1, \dots, n$, одговара на кривој тачка A_i с координатама x_i, y_i, z_i, где је $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$. Специјално, за $t = t_0$ и $t = t_n$ имамо тачке $A(x_0, y_0, z_0)$, односно $B(x_n, y_n, z_n)$. На сваком сегменту $[t_{i-1}, t_i]$ изаберимо вредност τ_i параметра t. Овој вредности одговара тачка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, где је $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, $\zeta_i = \chi(\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, сл. 6.1.1. Са Δs_i означимо дужину лука $A_{i-1}A_i$ криве L.



Сл. 6.1.1

Саставимо интегралну суму

$$(2) \qquad \sigma_1(f, L, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

За број I се каже да је лимес интегралне суме $\sigma_1(f, L, T)$ кад $\max \Delta s_i \to 0$, у ознаци $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T) = I$, ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да је $|\sigma_1(f, L, T) - I| < \varepsilon$ за $\max \Delta s_i < \delta$ и за произвољан избор тачака (ξ_i, η_i, ζ_i) на луку $A_{i-1}A_i$.

Дефиниција 6.1.1

Ако за функцију $f(x, y, z)$, дефинисану и ограничену на луку L, постоји $\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_1(f, L, T)$, онда се он назива **криволинијским интегралом прве врсте** функције $f(x, y, z)$ по кривој L и означава са

$$\int_L f(x, y, z)\, ds \quad \text{или} \quad \int_{AB} f(x, y, z)\, ds.$$

Уместо о кривој интеграције, говори се још о луку или путањи интеграције.

Ми ћемо убудуће претпостављати, уколико се не каже другачије, да је крива L део-по-део глатка и функција $f(x, y, z)$ ограничена на L и непрекидна у свим тачкама криве L сем њих коначно много. Показује се да у овом случају интеграл $\int_L f(x, y, z)\, ds$ постоји.

Својства криволинијског интеграла прве врсте

Криволинијски интеграли имају низ својстава као и обични одређени интеграли.

Став 6.1.1

Нека је L лук криве између тачака A и B, f и g су функције дефинисане на луку L и интеграли $\int_L f(x, y, z)\, ds$ и $\int_L g(x, y, z)\, ds$ постоје. Тада важи

1° $\int_L \big(\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)\big)\, ds = \alpha \int_L f(x, y, z)\, ds + \beta \int_L g(x, y, z)\, ds$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2° $\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{AC} f(x, y, z)\, ds + \int_{CB} f(x, y, z)\, ds$, где је $C \in L$ тачка између тачака A и B.

3° $\left|\int_L f(x, y, z)\, ds\right| \leqslant \int_L |f(x, y, z)|\, ds$.

4° Ако је $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$, $(x, y, z) \in L$, онда је $\int_L f(x, y, z)\, ds \leqslant \int_L g(x, y, z)\, ds$.

Доказ.

1° Следи из једнакости

$$\sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]\Delta s_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i,$$

преласком на лимес кад $\max \Delta s_i \to 0$.

2° При подели лука AB тачкама A_i, као једну од деоних тачака узмимо тачку C и фиксирајмо је. Интегрални збир $\sigma_1(f, L, T)$ може се симболички написати у облику

$$\sigma_1(f, L, T) = \sum_{AC} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i + \sum_{CB} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

Преласком на лимес кад $\max \Delta s_i \to 0$ добија се тражена једнакост.

3° Следи из неједнакости

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|\Delta s_i.$$

4° Из неједнакости $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \leqslant g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, \dots, n$, следи $\sigma_1(f, L, T) \leqslant \sigma_1(g, L, T)$. ■

Приметимо да се на основу својства 2° из овог става све особине криволинијских интеграла, које смо најпре дефинисали по незатвореним кривим, могу пренети и на криве које су затворене.

Став 6.1.2

Ако је $f(x, y, z)$ непрекидна функција на луку L, онда постоји тачка $\overline{M}(\xi, \eta, \zeta)$ на луку L, тако да је

$$\int_L f(x, y, z)\, ds = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot s,$$

где је s дужина лука L.

Доказ.

Најпре приметимо да је $\int_L ds = s$. Наиме, $\int_L ds = \int_L 1 \cdot ds$ по дефиницији је лимес збира $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i = s$.

Ако са m, односно M, означимо инфимум, односно супремум, функције $f(x, y, z)$ на луку L, онда је $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$ и, према ставу 6.1.1,

$$ms = \int_L m\, ds \leqslant \int_L f(x, y, z)\, ds \leqslant \int_L M\, ds = Ms.$$

Одавде је
$$\frac{1}{s}\int_L f(x,y,z)\,ds = \mu, \qquad m \leqslant \mu \leqslant M.$$
Због непрекидности функције $f(x,y,z)$ на луку L постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ тако да је $\mu = f(\xi,\eta,\zeta)$. ∎

Интеграл $\int_L f(x,y,z)\,ds$ не зависи од оријентације лука L.

Став 6.1.3

Ако постоји $\int_{AB} f(x,y,z)\,ds$, онда је
$$\int_{BA} f(x,y,z)\,ds = \int_{AB} f(x,y,z)\,ds.$$

Доказ.

Следи из чињенице да Δs_i у збиру $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ има исти знак на луковима $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i-1}. ∎

Израчунавање криволинијског интеграла прве врсте

Теорема 6.1.1

Нека је крива $L = AB$, дата једначинама (1), глатка и нема сингуларних тачака, и нека је функција $f(x,y,z)$ непрекидна на луку L. Тада важи формула

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

Доказ.

За поделу T: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = \beta$ и изабране тачке $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, збир $\sigma_1(f,L,T)$ има облик
$$\sigma_1(f,L,T) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i))\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt,$$
где је $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$ дужина лука $A_{i-1}A_i$. Уочимо интеграл
$$\begin{aligned} I &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt \\ &= \sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt \end{aligned}$$
и покажимо да се за произвољно $\varepsilon > 0$ може наћи $\delta > 0$ тако да важи
$$\max|t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |\sigma_1(f,L,T) - I| < \varepsilon.$$

Заиста, из непрекидности функција φ, ψ, χ, f следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да важи
$$|\tau - t| < \delta \implies |f(\varphi(\tau),\psi(\tau),\chi(\tau)) - f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))| < \frac{\varepsilon}{s},$$
где је s дужина лука AB. На основу ових неједнакости, за $\max\Delta t_i < \delta$ имамо
$$\begin{aligned} &|\sigma_1(f,L,T) - I| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}|f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt \\ &< \frac{\varepsilon}{s}\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Приметимо још да $\max\Delta s_i \to 0$ повлачи $\max\Delta t_i \to 0$. Заиста, како се непрекидне функције φ', ψ', χ' не анулирају истовремено на $[\alpha,\beta]$, важи
$$m = \min_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)} > 0 \quad \text{и} \quad \Delta s_i \geqslant m\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = m\Delta t_i,$$
па је $\Delta t_i \leqslant \Delta s_i/m$.

Тиме је доказано да $\sigma_1(f,L,T) \to I$ за $\max\Delta s_i \to 0$. ∎

Теорема важи и у случају да је крива L део-по-део глатка и функција $f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ део-по-део непрекидна.

Примери 6.1.1

1° Израчунајмо вредност криволинијског интеграла функције $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ дуж криве L чије су једначине $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Према теореми 6.1.1, за дати интеграл I имамо израз
$$\begin{aligned} I &= \int_L(x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt = \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

2° Израчунајмо интеграл $I = \int_L(x+y)\,ds$, где је L троугао с теменима у тачкама $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Према ставовима 6.1.1.2° и 6.1.3 имамо
$$I = \int_{OA}(x+y)\,ds + \int_{OB}(x+y)\,ds + \int_{BA}(x+y)\,ds.$$
Израчунавајући ова три интеграла, добијамо:

$\int_{OA}(x+y)\,ds = \int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$, где је $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ једначина сегмента OA и $ds = dx$;

$\int_{OB}(x+y)\,ds = \int_0^1 y\,dy = \dfrac{1}{2}$, где је $x=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$ једначина сегмента OB и $ds=dy$;

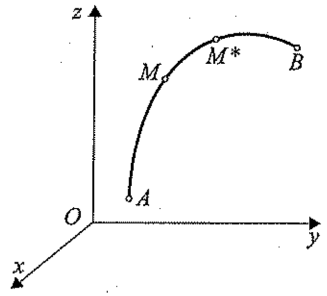
$\int_{BA}(x+y)\,ds = \int_0^1 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}$, где је $y=1-x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ једначина сегмента BA и $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$.

Сабирајући добијамо $I=1+\sqrt{2}$.

3° Замислимо лук $L=AB$ као комад жице, начињене од нехомогеног материјала. Ако са A означимо почетну тачку лука, а са B крајњу, и ако су једначине лука AB дате са (1), онда са $m(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, означимо масу жице, рачунајући од тачке $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\chi(\alpha))$ до тачке $M(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$. Тада је, на пример, $m(\alpha)=0$. Уочимо тачку $M^*(\varphi(t+\Delta t),\psi(t+\Delta t),\chi(t+\Delta t))$. Са Δs означимо дужину лука MM^*. По дефиницији,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta s}$$

назива се **линеарном густином** жице L у тачки M, сл. 6.1.2.



Сл. 6.1.2

Претпоставимо да је линеарна густина $\rho(x,y,z)$ жице L позната у свакој тачки $M(x,y,z)$ и нађимо масу m жице L.

У том циљу поделимо сегмент $[\alpha,\beta]$ на n делова тачкама $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$. На сваком сегменту $[t_{i-1},t_i]$ изаберимо тачку τ_i. Густину $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, где је $\xi_i=\varphi(\tau_i)$, $\eta_i=\psi(\tau_i)$, $\zeta_i=\chi(\tau_i)$, $i=1,\ldots,n$, сматраћемо приближно константном на сегменту $[t_{i-1},t_i]\ni\tau_i$. По дефиницији линеарне густине, маса m жице L биће приближно једнака збиру

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

Сматраћемо да је маса m једнака

$$m=\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i=\int_L\rho(x,y,z)\,ds. \quad \blacktriangle$$

6.2. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Нека је ректифицибилна крива L, која не пресеца сама себе, дата једначинама (1) одељка 6.1 и $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ су дефинисане и ограничене функције на луку L. Као и код дефинисања криволинијског интеграла прве врсте, уочимо поделу T сегмента $[\alpha,\beta]$ тачкама t_i, и изаберимо вредности

$\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ параметра t, $i=1,\ldots,n$. Вредностима t_i, односно τ_i, одговарају тачке $A_i(x_i,y_i,z_i)$, односно $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, где је $x_i=\varphi(t_i)$, $y_i=\psi(t_i)$, $z_i=\chi(t_i)$, $\xi_i=\varphi(\tau_i)$, $\eta_i=\psi(\tau_i)$, $\zeta_i=\chi(\tau_i)$, $i=1,\ldots,n$. Означимо још $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, $\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$.

Саставимо интегралне суме

$$\sigma_2(P,L,T)=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\sigma_3(Q,L,T)=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\sigma_4(R,L,T)=\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i,.$$

Лимеси ових интегралних сума дефинишу се слично као лимес суме $\sigma_1(f,L,T)$.

Дефиниција 6.2.1

Ако за функцију $P(x,y,z)$ $[Q(x,y,z),\ R(x,y,z)]$, дефинисану и ограничену на луку L, постоји лимес суме $\sigma_2(P,L,T)$ $[\sigma_3(Q,L,T),\ \sigma_4(R,L,T)]$ кад $\max\Delta s_i\to 0$, онда се он назива **криволинијским интегралом друге врсте** функције $P(x,y,z)$ $[Q(x,y,z),\ R(x,y,z)]$ по кривој L и означава са

$$\int_L P(x,y,z)\,dx \qquad \left[\int_L Q(x,y,z)\,dy,\quad \int_L R(x,y,z)\,dz\right],$$

или

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx \qquad \left[\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy,\quad \int_{AB} R(x,y,z)\,dz\right],$$

Збир $\int_{AB}P(x,y,z)\,dx+\int_{AB}Q(x,y,z)\,dy+\int_{AB}R(x,y,z)\,dz$ обично се пише у облику

(1) $$\int_{AB}P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

и назива (општим) криволинијским интегралом друге врсте.

Ми ћемо убудуће претпостављати, уколико се другачије не каже, да је крива $L=AB$ део-по-део глатка и функције P, Q, R су непрекидне у свим тачкама криве L, сем њих коначно много. Показује се да у овом случају интеграл (1) постоји.

Својства криволинијског интеграла друге врсте

Навешћемо најпре својства која су слична одговарајућим својствима криволинијског интеграла прве врсте и која се и доказују на сличан начин.

Став 6.2.1

Нека је $L=AB$ лук криве, P и P_1 су функције дефинисане на луку AB и интеграли $\int_{AB}P(x,y,z)\,dx$ и $\int_{AB}P_1(x,y,z)\,dx$ постоје. Тада важи:

1° $\int_L\big(\alpha P(x,y,z)+\beta P_1(x,y,z)\big)\,dx=\alpha\int_L P(x,y,z)\,dx+\beta\int_L P_1(x,y,z)\,dx$;

2° $\int_{AB}P(x,y,z)\,dx=\int_{AC}P(x,y,z)\,dx+\int_{CB}P(x,y,z)\,dx$, где је C тачка лука AB између A и B. ■

Став 6.2.2

Ако је $P(x,y,z)$ непрекидна функција на луку AB, онда постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta)$ на луку AB, тако да је

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = P(\xi,\eta,\zeta)(b-a),$$

где је $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. ∎

Криволинијски интеграл друге врсте зависи од оријентације криве по којој се врши интеграција.

Став 6.2.3

Ако постоји $\int_{AB} P(x,y,z)\,dx$, онда је

$$\int_{BA} P(x,y,z)\,dx = -\int_{AB} P(x,y,z)\,dx.$$

Доказ.

Следи из једнакости

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(x_i-x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(x_{i-1}-x_i). \quad ∎$$

Приметимо да због својства израженог у ставу 6.2.3 сматрамо да је лук L, односно лук AB, оријентисан. У том смислу ћемо интеграцију функције по истом луку супротне оријентације од $L=AB$ означавати са $\int_{L^-}$, односно $\int_{BA}$.

Израчунавање криволинијског интеграла друге врсте

Теорема 6.2.1

Нека је крива AB, дата једначинама (1) одељка 6.1, глатка и нема сингуларних тачака и нека је функција $P(x,y,z)$ непрекидна на луку AB. Тада важи формула

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Доказ.

За поделу T: $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ и изабране тачке $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=1,\ldots,n$, збир $\sigma_2(P,L,T)$ има облик

$$\sigma_2(P,L,T)=\sum_{i=1}^{n} P\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)\big)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)\,dt,$$

где је $x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)\,dt$. Уочимо интеграл

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

и покажимо да се за произвољно $\varepsilon>0$ може наћи $\delta>0$, тако да важи

$$\max|t_i-t_{i-1}|<\delta \implies |\sigma_2(P,L,T)-I|<\varepsilon.$$

Како је функција φ' ограничена, $|\varphi'(t)|<K$, $t\in[\alpha,\beta]$, и из непрекидности функција P, φ, ψ, χ следи да за $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, тако да важи

$$|\tau-t|<\delta \implies \Big|P\big(\varphi(\tau),\psi(\tau),\chi(\tau)\big)-P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\Big|<\frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)},$$

то за $\max|t_i-t_{i-1}|<\delta$ важи

$$\begin{aligned}|\sigma_2(P,L,T)-I| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big|P\big(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i)\big)-P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\Big|\cdot|\varphi'(t)|\,dt\\ &<\frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)}K(\beta-\alpha)=\varepsilon.\end{aligned}$$

Како $\max\Delta s_i\to 0$ повлачи $\max\Delta t_i\to 0$ (в. доказ теореме 6.1.1), то одавде следи да $\sigma_2(P,L,T)\to I$ за $\max\Delta s_i\to 0$. ∎

Лако се показује да уз одговарајуће услове важе једнакости

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy=\int_{\alpha}^{\beta} Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dz=\int_{\alpha}^{\beta} R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\chi'(t)\,dt,$$

као и

$$(2)\quad \int_{AB} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta}\big[P(\ldots)\varphi'(t)+Q(\ldots)\psi'(t)+R(\ldots)\chi'(t)\big]\,dt.$$

Једнакост (2) краће се пише у облику

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{\alpha}^{\beta}[P\varphi'(t)+Q\psi'(t)+R\chi'(t)]\,dt.$$

Она важи и у случају када су функције φ, ψ, χ део-по-део глатке и функције $P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$, $Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$, $R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$ део-по-део непрекидне.

Примери 6.2.1

1° Израчунајмо

$$\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy,$$

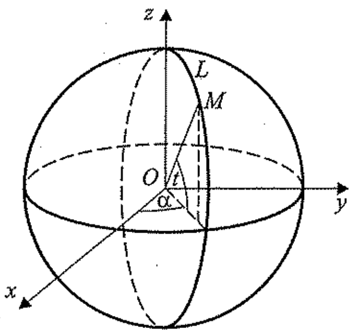
где је L лук параболе $y=x^2$ од тачке $A(-1,1)$ до тачке $B(1,1)$.

За параметар криве узмимо x. Једнакост (2) постаје ($R(x,y,z)=0$)

$$\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)\,dx=-\frac{14}{15}.$$

2° Израчунајмо

$$I = \int_L (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz,$$



Сл. 6.2.1

где је L круг $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Притом смер интеграције је супротан кретању казаљке на часовнику, ако се гледа од позитивног смера осе Ox. У циљу налажења параметарских једначина круга L уочимо тачку $M(x, y, z)$ у координатном систему $Oxyz$, сл. 6.2.1. За параметар изаберимо угао t између вектора положаја тачке M и равни Oxy. Тада једначине круга L имају облик

$$x = a\cos\alpha\cos t,\ y = a\sin\alpha\cos t,\ z = a\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Према формули (2) имамо

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [-a^2(\sin\alpha\cos t - \sin t)\cos\alpha\sin t - a^2(\sin t - \cos\alpha\cos t)\sin\alpha\sin t \\ &\qquad + a^2(\cos\alpha\cos t - \sin\alpha\cos t)\cos t]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)\,dt = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Векторска поља и криволинијски интеграл

Често се, посебно у применама, функције облика

$$\mathbf{R}^n \supset X \to Y \subset \mathbf{R}^m, \qquad n \geqslant 2, \quad m \geqslant 1,$$

називају **скаларним** (за $m = 1$), односно **векторским** (за $m \geqslant 2$) **пољима**. Каже се још да је у скупу X задато поље (скаларно, односно векторско). Скаларна и векторска поља јављају се често у физици и техници. Тако се, на пример, говори о пољу температуре, пољу притиска (скаларна поља), затим о пољу брзине, пољу гравитације (векторска поља) и др. Ми ћемо проучавати скаларна и векторска поља за $m = 1$, $n = 3$, односно $m = n = 3$. Користићемо се често векторским ознакама, тако да ћемо скаларно поље $u = u(x, y, z)$ означавати и са $u = u(\vec{r})$, где је $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ вектор положаја тачке (x, y, z) у простору $Oxyz$. Поље $u(x, y)$ у равни Oxy означава се и са $u = u(\vec{r})$, где је $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Константне векторе означаваћемо са $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$ итд. Норма вектора притом ће бити означена са $|\vec{r}| = r$, $|\vec{a}| = a$, ...

За векторско поље $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ користи се и ознака $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$, где су $v_i = v_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, функције од x, y, z, или пак $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) = v_1(\vec{r})\vec{\imath} + v_2(\vec{r})\vec{\jmath} + v_3(\vec{r})\vec{k}$.

Посматрајмо сада векторско поље $\vec{v} = (P, Q, R)$, дефинисано на кривој L, датој једначинама (1) одељка 6.1. Извод вектора положаја $\vec{r} = \vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ тачке $M(x, y, z)$ на кривој L има облик $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)$. Једнакост (2) можемо написати у облику

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{v} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt,$$

где је $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

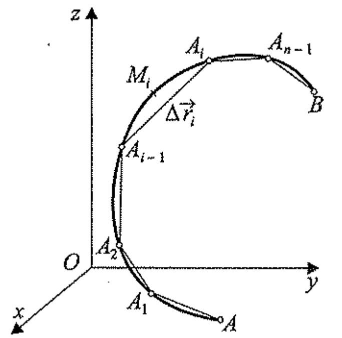
Ако је крива L затворена, онда се $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{r}$ назива **циркулацијом** вектора $\vec{v}$ по L и често означава и са

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Пример 6.2.2.

Сила $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$ делује на материјалну тачку премештајући је по кривој L из тачке A у тачку B. Колики рад врши сила $\vec{v}$?

У циљу израчунавања рада поделимо лук AB на n делова тачкама $A = A_0$, A_1, ... , $A_n = B$. Нека је крива L дата једначинама (1) одељка 6.1. Претпоставимо да је на сваком од лукова $A_{i-1}A_i$ сила $\vec{v}$ приближно константна и износи $\vec{v}_i = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{\imath} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{\jmath} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{k}$, где је $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ произвољно изабрана тачка на луку $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Посматрајмо (сл. 6.2.2) изломљену линију $AA_1 \ldots A_{n-1}B$. Рад који сила $\vec{v}_i$ изврши премештајући материјалну тачку из A_{i-1} у A_i по сегменту $A_{i-1}A_i$ износи $\vec{v}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot (\vec{\imath}\Delta x_i + \vec{\jmath}\Delta y_i + \vec{k}\Delta z_i)$, где је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Укупан рад који силе $\vec{v}_i$ изврше премештајући материјалну тачку из A у B, по изломљеној линији $AA_1 \ldots B$, износи



Сл. 6.2.2

$$\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{\imath} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{\jmath} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\vec{k}] \cdot (\vec{\imath}\Delta x_i + \vec{\jmath}\Delta y_i + \vec{k}\Delta z_i).$$

Лимес овог израза кад $\max\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \to 0$ сматраћемо радом силе $\vec{v}$ дуж лука AB. Очигледно, тај рад износи

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r}. \quad \blacktriangle$$

6.3. НЕЗАВИСНОСТ ИНТЕГРАЦИЈЕ ОД ПУТАЊЕ

Криволинијски интеграл $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ у општем случају зависи од путање по којој се интеграција врши. Међутим, некада то није тако. Ако израз $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ представља тотални диференцијал неке функције или, другачије речено, ако постоји скаларно поље $u(x,y,z)$, тако да је $\operatorname{grad} u = (P,Q,R)$, онда интеграл вектора (P,Q,R) по луку AB зависи само од тачака A и B, а не и од лука AB. Формулишимо ово прецизније.

Теорема 6.3.1

Ако је у области $V \subset \mathbf{R}^3$ дато непрекидно векторско поље

$$\vec{v} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big),$$

онда су следећа тврђења међусобно еквивалентна:

1° Постоји функција $u(x,y,z)$ са непрекидним парцијалним изводима, дефинисана у области V, тако да је $\operatorname{grad} u = \vec{v}$.

2° Криволинијски интеграл $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по путањи $AB \subset V$, где су $A(x_0,y_0,z_0)$ и $B(x,y,z)$ почетна, односно крајња тачка те путање, не зависи од облика путање, него само од тачака A и B. Вредност интеграла у том случају је $u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)$.

3° Криволинијски интеграл $\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по произвољној затвореној путањи $C \subset V$ једнак је нули.

Доказ.

1° $\Longrightarrow$ 2°. Ако је $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, онда је

$$\vec{v}\cdot d\vec{r} = \operatorname{grad} u \cdot d\vec{r} = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Ако лук AB има једначине $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, онда је

$$\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt = \int_\alpha^\beta \frac{du}{dt}\,dt,$$

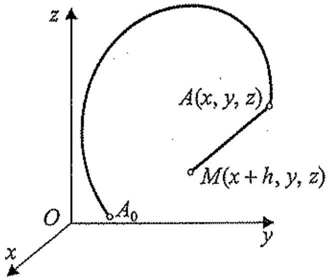
где је $u = u\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)$ функција променљиве t. Интеграцијом добијамо

$$\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r} = u\big(\varphi(\beta),\psi(\beta),\chi(\beta)\big) - u\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\chi(\alpha)\big) = u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0).$$

Приметимо да у случају $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, подинтегрални израз $\vec{v}\cdot d\vec{r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz$ је вредност диференцијала функције $u(x,y,z)$ за вредност (dx,dy,dz) прираштаја независно променљиве. Краће кажемо да је тај израз **тотални диференцијал** функције $u(x,y,z)$.

2° $\Longrightarrow$ 1°. Претпоставимо да интеграл $\int_{A_0A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависи од избора криве A_0A, где је A_0 фиксирана тачка, него само од тачке $A(x,y,z)$. Означимо

$$\int_{A_0A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x,y,z).$$



Сл. 6.3.1

Покажимо да је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Уочимо тачку $M(x+h,y,z)$, сл. 6.3.1. Тада је

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u(x+h,y,z) - u(x,y,z)]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{A_0AM} P\,dx+Q\,dy+R\,dz - \int_{A_0A} P\,dx+Q\,dy+R\,dz\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{AM} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.\end{aligned}$$

Узимајући једначине сегмента AM у облику $x=t$, $y=\text{const}$, $z=\text{const}$, $x\leqslant t\leqslant x+h$, добија се

$$\int_{AM} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_x^{x+h} P(t,y,z)\,dt = h\cdot P(x+\theta h,y,z), \quad 0<\theta<1,$$

па је

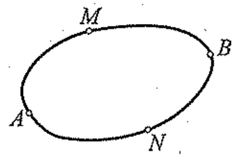
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot hP(x+\theta h,y,z) = P(x,y,z).$$

Слично је

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

2° $\Longleftrightarrow$ 3°. Нека је $C \subset V$ произвољна затворена крива. Уочимо две произвољне тачке A и B на тој кривој, сл. 6.3.2. Тачке A и B растављају криву C на два лука, AMB и ANB. Ако важи 2°, онда је

$$\int_{AMB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_{ANB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$



Сл. 6.3.2

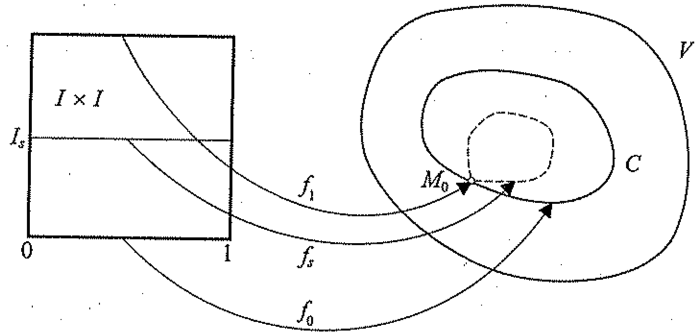
одакле је

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_{AMBNA} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = 0,$$

па важи 3°. Обратно је такође једноставно. ■

Да бисмо проблем израчунавања криволинијског интеграла, када он не зависи од путање, решили у целини, наћи ћемо још један критеријум за распознавање да ли је подинтегрална функција градијент неке функције. Пре тога поменимо појам просто повезане области.

Област $V \subset \mathbf{R}^3$ је **просто повезана** ако се свака затворена део-по-део глатка крива $C \subset V$ може „стегнути" у произвољну тачку $M_0 \in C$, остајући при томе у области V. Овом сликовитом изразу „стегнути у тачку" даћемо математички облик.



Сл. 6.3.3

Нека је $f_0\colon I \to V$ део-по-део глатко пресликавање сегмента $I = [0,1]$ у област V, $f_0(0) = f_0(1) = M_0$ и $f_0(I) = C$, сл. 6.3.3. Ако постоји непрекидно пресликавање $F\colon I \times I \to V$, тако да је

$$
\begin{aligned}
F(0,s) &= F(1,s) = M_0, && s \in [0,1],\\
F(t,0) &= f_0(t), && t \in [0,1],\\
F(t,1) &= f_1(t) = M_0, && t \in [0,1],
\end{aligned}
$$

онда се каже да се крива $C = f_0(I)$ **може стегнути у тачку** M_0. Притом свака крива $f_s(I_s)$, $s \in (0,1)$, где је $f_s(t) = F(t,s)$ и $I_s = \{\,(t,s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\,\}$, $s \in [0,1]$, јесте део-по-део глатка и налази се у V.

На пример, може се проверити да су унутрашњост круга и квадрата просто повезане области у равни $\mathbf{R}^2$, а да скуп $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ то није. У простору $\mathbf{R}^3$ примери просто повезаних области су унутрашњост лопте и коцке, као и област ограничена двема концентричним сферама. Унутрашњост торуса није просто повезана област.

Теорема 6.3.2

Нека је у просто повезаној области $V \subset \mathbf{R}^3$ задата непрекидна векторска функција $\vec{v} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$, која има непрекидне парцијалне

изводе $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$. Потребан и довољан услов да интеграл

$$\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad AB \subset V,$$

не зависи од путање AB, јесте да су испуњене једнакости

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{1}$$

Доказ.

$\Longrightarrow$. Ако $\int_{AB} \vec{v}\cdot d\vec{r}$ не зависи од путање, онда постоји функција $u(x,y,z)$ тако да је $\operatorname{grad} u = \vec{v}$, па је $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R$. Како су потребни парцијални изводи функција P, Q, R непрекидни, то из

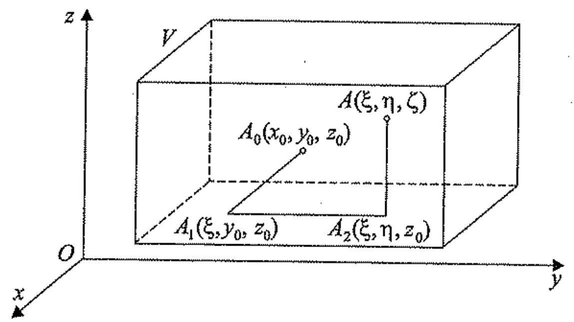
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

следи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Слично се доказују остале релације (1).

Приметимо да у доказу ове импликације нисмо користили просту повезаност области V.



Сл. 6.3.4

$\Longleftarrow$. Користећи једнакости (1) конструисаћемо функцију $u(x,y,z)$ за коју важи $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z)$.

Најпре претпоставимо да област V представља отворени правоугли паралелепипед. У паралелепипеду V уочимо произвољну тачку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ и промењиву тачку $A(\xi,\eta,\zeta)$, сл. 6.3.4. Дефинишимо

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \int_{A_0A_1A_2A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

За израчунавање криволинијског интеграла на десној страни узмимо за једначине сегмената:

$$\begin{aligned}
A_0A_1: &\quad x=t,\ y=y_0,\ z=z_0, \quad x_0\leqslant t\leqslant \xi;\\
A_1A_2: &\quad x=\xi,\ y=t,\ \ z=z_0, \quad y_0\leqslant t\leqslant \eta;\\
A_2A: &\quad x=\xi,\ y=\eta,\ \ z=t, \quad\ z_0\leqslant t\leqslant \zeta.
\end{aligned}$$

Тада је

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\int_{x_0}^{\xi}P(t,y_0,z_0)\,dt+\int_{y_0}^{\eta}Q(\xi,t,z_0)\,dt+\int_{z_0}^{\zeta}R(\xi,\eta,t)\,dt.$$

Користећи једнакости (1), одавде добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial\xi}&=P(\xi,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{\eta}\frac{\partial Q}{\partial\xi}(\xi,t,z_0)\,dt+\int_{z_0}^{\zeta}\frac{\partial R}{\partial\xi}(\xi,\eta,t)\,dt\\
&=P(\xi,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{\eta}\frac{\partial P}{\partial\eta}(\xi,t,z_0)\,dt+\int_{z_0}^{\zeta}\frac{\partial P}{\partial\zeta}(\xi,\eta,t)\,dt\\
&=P(\xi,y_0,z_0)+[P(\xi,\eta,z_0)-P(\xi,y_0,z_0)]+[P(\xi,\eta,\zeta)-P(\xi,\eta,z_0)]\\
&=P(\xi,\eta,\zeta).
\end{aligned}$$

У првом кораку овог извођења вршили смо диференцирање интеграла $\int_{y_0}^{\eta}Q(\xi,t,z_0)\,dt$ и $\int_{z_0}^{\zeta}R(\xi,\eta,t)\,dt$ по ξ тако што смо по ξ диференцирали подинтегралне изразе. Да је такав поступак оправдан доказаћемо касније (в. став 8.1.3).

Слично налазимо

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=Q(\xi,\eta,\zeta),\qquad \frac{\partial u}{\partial\zeta}=R(\xi,\eta,\zeta).$$

Дакле, вектор $\vec v$ се може написати у облику $\vec v=\operatorname{grad}u$ и важи

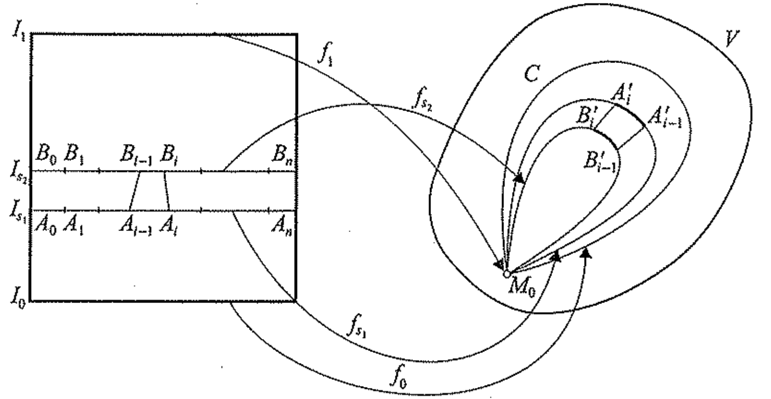
$$u(\xi,\eta,\zeta)=\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

где је L произвољан лук од тачке A_0 до променљиве тачке A.

Нека је сада V произвољна просто повезана област. Уочимо произвољну фиксирану тачку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и променљиву тачку $M(x,y,z)$ у области V. Функцију $u(x,y,z)$ дефинишимо као криволинијски интеграл

$$\int_{M_0M}P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

где је M_0M произвољна крива која спаја тачке M_0 и M. Доказаћемо да вредност криволинијског интеграла не зависи од избора путање која спаја M_0 и M, што значи исто што и $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=R$. Но, за то је довољно показати



Сл. 6.3.5

да је вредност криволинијског интеграла $\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, дуж произвољне, део-по-део глатке затворене криве $C\subset V$, једнака нули.

Нека је M_0 тачка на кривој C и $f_0\colon I\to V$, $I=[0,1]$, функција за коју је $f_0(I)=C$, $f_0(0)=f_0(1)=M_0$. Како се крива C може стегнути у тачку M_0, то постоји непрекидна функција $F\colon I\times I\to V$, тако да је $F(0,s)=F(1,s)=M_0$, $F(t,0)=f_0(t)$, $F(t,1)=M_0$, за $t,\ s\in I$. За произвољне $s_1,s_2\in I$, сегменте I_{s_1}, I_{s_2} (где је $I_s=\{\,(t,s)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\,\}$ за $s\in[0,1]$) поделимо тачкама $A_0,\,A_1,\,\ldots\,,A_n$, односно $B_0,\,B_1,\,\ldots\,,B_n$, на по n делова. Означимо $f_{s_1}(A_i)=A_i'$, $f_{s_2}(B_i)=B_i'$, $i=0,\,1,\,\ldots\,,\,n$, где је $f_s(t)=F(s,t)$ за $s,\ t\in[0,1]$. Изаберимо s_2 довољно близу s_1, те поделе на I_{s_1} и I_{s_2} довољно ситне, тако да се за сваки четвороугао $A_{i-1}A_iB_iB_{i-1}$ може наћи правоугли паралелепипед $V_i\subset V$ који садржи путању $A_{i-1}'A_i'B_i'B_{i-1}'A_{i-1}'$ (тачке A_0', B_0', A_n', B_n' се поклапају са M_0). Тада је

$$\oint\limits_{A_{i-1}'A_i'B_i'B_{i-1}'A_{i-1}'}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Сабирањем за $i=1,\,\ldots\,,\,n$ добијамо

$$\oint\limits_{M_0A_1'\ldots A_{n-1}'M_0}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint\limits_{M_0B_1'\ldots B_{n-1}'M_0}P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Дакле, криволинијски интеграл по затвореној кривој $f_s(I_s)$ је константан (не зависи од $s\in[0,1]$). Како је $f_1(I_1)=M_0$, то је

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Како је C произвољна затворена крива, то на основу теореме 6.3.1 следи тврђење. ■

Примери 6.3.1

1° Израчунајмо криволинијски интеграл

$$I = \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

где је C круг $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Прелазећи на Риманов интеграл, имамо

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{a^2} a\cos t \right) dt = 2\pi.$$

Израчунавајући парцијалне изводе функција $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, добија се

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Функције P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрекидне су свугде, сем у тачки $O(0,0)$. Област $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ није просто повезана.

Према теореми 6.3.2, криволинијски интеграл

$$\oint_{C^*} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

по кругу C^*, једначине $(x-2a)^2 + y^2 = a^2$, једнак је нули.

2° Израчунајмо криволинијски интеграл

$$I = \int_{(a_1,a_2,a_3)}^{(b_1,b_2,b_3)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где је тачка $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ на сфери $x^2+y^2+z^2 = a^2$, а тачка $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ на сфери $x^2+y^2+z^2 = b^2$. Како функције $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ задовољавају услове (1), то дати интеграл не зависи од путање. Према теореми 6.3.2 нађимо функцију $u(\xi,\eta,\zeta)$,

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,\zeta) &= \int_{a_1}^{\xi} \frac{t}{\sqrt{t^2+a_2^2+a_3^2}}\,dt + \int_{a_2}^{\eta} \frac{t}{\sqrt{\xi^2+t^2+a_3^2}}\,dt + \int_{a_3}^{\zeta} \frac{t}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+t^2}}\,dt \\ &= \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} - \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \end{aligned}$$

Дакле је

$$I = u(b_1,b_2,b_3) = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} - \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = b - a. \quad \blacktriangle$$

6.4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

Нека је дата глатка површ $S \subset \mathbf{R}^3$ једначином

(1) $$\vec{r}(u,v) = \varphi(u,v)\vec{\imath} + \psi(u,v)\vec{\jmath} + \chi(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \Delta,$$

$\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v \neq 0$, где је Δ мерљива затворена област, функције φ, ψ, χ су непрекидно диференцијабилне на Δ, а S је ограничена део-по-део глатком кривом. Претпоставимо да је на S задата непрекидна реална функција $f(x,y,z)$.

Уочимо произвољну поделу $T = \{\,\Delta_i \mid i = 1,\ldots,p\,\}$ области Δ. Подела T индукује поделу $T' = \{\,S_i \mid i = 1,\ldots,p\,\}$ на површи S. У сваком делу S_i поделе T' изаберимо тачку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, при чему је $x_i = \varphi(u_i,v_i)$, $y_i = \psi(u_i,v_i)$, $z_i = \chi(u_i,v_i)$ за неко $(u_i,v_i) \in \Delta_i$, $i = 1,\ldots,p$.

Посматрајмо збир

(2) $$\sum_{i=1}^{p} f(x_i,y_i,z_i)\cdot \mu S_i.$$

Коначни лимес интегралног збира (2) кад $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \delta S_i \to 0$ (са δS_i означен је дијаметар скупа S_i) назива се **површинским интегралом прве врсте** функције $f(x,y,z)$ по површи S и означава се са

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS.$$

Став 6.4.1

Нека је $S \subset \mathbf{R}^3$ глатка површ, $f,\ g\colon S \to \mathbf{R}$ и интеграли $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ и $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ постоје. Тада важи

1° $\iint_S(\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,dS = \alpha\iint_S f(x,y,z)\,dS + \beta\iint_S g(x,y,z)\,dS$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$.

2° $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)\,dS$ ако је $S = S_1 \cup S_2$ и површи S_1 и S_2 немају заједничких унутрашњих тачака.

3° Ако је $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$, онда је $\iint_S f(x,y,z)\,dS \leqslant \iint_S g(x,y,z)\,dS$.

4° Ако је $f(x,y,z)$ непрекидна функција на S, онда постоји тачка $\overline{M}(\xi,\eta,\zeta) \in S$, таква да је $\iint_S f(x,y,z)\,dS = f(\xi,\eta,\zeta)\mu S$, где је μS површина површи S. ∎

Израчунавање површинског интеграла прве врсте своди се на израчунавање двојног интеграла.

Теорема 6.4.1

Нека је дата површ S једначином (1) и на њој дефинисана непрекидна функција $f(x,y,z)$. Тада важи једнакост

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

где су E, F и G Гаусови коефицијенти површи S.

Доказ.

Како површи S у простору $Oxyz$ одговара област Δ у равни $O'uv$, то свакој подели $T = \{\Delta_1, \dots, \Delta_p\}$ области Δ одговара подела $T' = \{S_1, \dots, S_p\}$ површи S и обратно. У сваком делу S_i изаберимо произвољну тачку (x_i, y_i, z_i) и нађимо $(u_i, v_i) \in \Delta_i$ за које важи

$$x_i = \varphi(u_i, v_i), \quad y_i = \psi(u_i, v_i), \quad z_i = \chi(u_i, v_i), \qquad i = 1, \dots, p.$$

Показаћемо да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\eta > 0$, тако да за произвољну поделу T' за коју је $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$, важи неједнакост

$$(3) \quad \left| \sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i - \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \right| < \varepsilon,$$

без обзира на избор тачака $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$. Притом је: $E = {\varphi'_u}^2 + {\psi'_u}^2 + {\chi'_u}^2$, $F = \varphi'_u\varphi'_v + \psi'_u\psi'_v + \chi'_u\chi'_v$, $G = {\varphi'_v}^2 + {\psi'_v}^2 + {\chi'_v}^2$ (в. одељак 4.5).

По формули (3) одељка 5.6 је

$$\mu S_i = \iint_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

а коришћењем става о средњој вредности имамо

$$\mu S_i = \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)}\, \mu\Delta_i, \quad (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \in \Delta_i,$$

па се лева страна неједнакости (3) може написати у облику

$$(4) \quad \left| \sum_{i=1}^{p} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)) \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)}\, \mu\Delta_i \right.$$
$$- \sum_{i=1}^{p} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i$$
$$\left. - \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \right|.$$

Функција $f(x,y,z)$ је ограничена, па постоји $A \in \mathbf{R}$, тако да је $|f(x,y,z)| \leqslant A$, $(x,y,z) \in S$. Даље, како су функције $f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$, $E(u,v)$, $F(u,v)$ и $G(u,v)$ непрекидне, то постоје η_1 и η_2, тако да за $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta_1$ важи

$$\left| \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)} - \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{2A \cdot \mu\Delta},$$

а за $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta_2$ важи

$$\left| \sum_{i=1}^{p} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i), \chi(u_i, v_i)) \sqrt{E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)}\, \mu\Delta_i \right.$$
$$\left. - \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $\min\{\eta_1, \eta_2\} = \eta^*$. Изаберимо $\eta > 0$ тако да из $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$ следи $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta\Delta_i < \eta^*$ (то је могуће јер површ S нема сингуларних тачака). Узевши у обзир израз (4), види се да важи неједнакост (3) за $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \delta S_i < \eta$. ■

Ако је површ S дата у облику $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, онда је $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, па је

$$(5) \qquad \iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x, y, z(x,y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

где је D пројекција површи S на Oxy раван.

Може се показати да теорема 6.4.1 важи и када је S део-по-део глатка површ, тј. када се састоји од коначног броја глатких површи које се секу највише по границама.

Примери 6.4.1

1° Израчунајмо површински интеграл

$$I = \iint_S (x + y + z)\, dS,$$

где је S полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

Ставимо $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = R/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тада је

$$I = R \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx\, dy,$$

где је $D = \{\, (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2 \,\}$. Преласком на поларне координате имамо

$$I = R \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr + R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = \pi R^3.$$

2° Код танких плоча веће површине уводи се појам површинске густине. Ако је плоча хомогена, онда се површинска густина ρ дефинише као $\rho = m/S$, где је m маса, а S површина плоче. Код нехомогених плоча дефинише се густина у произвољној тачки M плоче као $\rho = \lim\limits_{\delta U \to 0} \dfrac{m(U)}{\mu U}$, где је U околина тачке M, $m(U)$ је маса дела плоче у тој околини, а μU површина тог дела.

Нека је позната површинска густина $\rho(x,y,z)$ масе m распоређене непрекидно по површи S у координатном систему $Oxyz$. Одредимо масу m. У том циљу уочимо једну поделу $T = \{\, S_i \mid i = 1, \dots, p \,\}$ површи S и у сваком делу S_i изаберимо тачку $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, p$. Претпоставимо да су S_i довољно мали по дијаметру.

Тада су површинске густине у свим тачкама дела S_i приближно једнаке површинској густини $\rho(x_i, y_i, z_i)$. Маса у делу површи S_i износи приближно

$\rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$, а маса m распоређена по површи S приближно износи

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i.$$

Преласком на лимес кад $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \delta S_i \to 0$ добија се маса m распоређена по површи S у облику

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS. \quad \blacktriangle$$

6.5. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

Оријентација површи

Нека је глатка површ S затворена или ограничена део-по-део глатком кривом k. Одређености ради претпоставимо да је S дата једначином $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. У свакој тачки површи дефинисана су два јединична вектора нормале. Ако један означимо са $\vec{n}$, други ће бити $-\vec{n}$.

Нека је M_0 произвољна тачка површи S. Са l означимо произвољну затворену криву на S, која садржи M_0 и не сече k. Уочимо тачку M која се креће по кривој l, полазећи из M_0, и враћа се у M_0, прошавши свим тачкама криве l. Притом посматрајмо променљиви вектор $\vec{n}(M)$, такав да је у почетку кретања $\vec{n}(M_0) = \vec{n}_0$ (један од два могућа вектора у тачки M_0), и чија је промена непрекидна при кретању тачке M.

Могу наступити два случаја – јединични вектор нормале $\vec{n}(M)$ на крају кретања, у тачки M_0 је $\vec{n}_0$ (променљиви вектор нормале долази у почетни положај) или $-\vec{n}_0$ (променљиви вектор нормале долази у супротан положај).

Ако се за сваку тачку M_0 површи S и сваку затворену криву на површи, која садржи тачку M_0, променљиви вектор нормале враћа у почетни положај, површ S ћемо називати **двостраном површи**. Сваки од два супротна вектора нормале у произвољној тачки M површи одређује по једну њену страну. Помоћу ових вектора нормала можемо оријентисати површ S. Ако страну површи коју одређује вектор $\vec{n}$ назовемо позитивном (позитивна страна површи S види се са краја вектора $\vec{n}$ ако му је почетак у тачки M), онда ћемо другу страну површи називати негативном.

Примера ради, двостране и, према томе, оријентабилне површи су сфера, елиптички и хиперболички параболоид и др.

Ако постоји бар једна тачка $N_0 \in S$ и бар једна затворена крива N_0ABN_0 на површи S, тако да произвољни вектор нормале долази у супротни положај у тачки N_0, онда за сваку тачку $N \in S$ постоји крива l' по којој променљиви вектор нормале долази у супротан положај (притом се подножје променљивог вектора креће по кривој l'). Заиста, ако криву NN_0ABN_0N узмемо за криву l', онда променљиви вектор нормале, полазећи од тачке N, долази у супротан положај.

Овакве површи ћемо називати **једностраним површима**. Оне су неоријентабилне. Као пример једностране, неоријентабилне површи наведимо Мебиусову траку (в. пример 4.4.2).

Површински интеграл друге врсте

Нека је глатка оријентисана површ $S \subset \mathbf{R}^3$ дата једначином

(1) $$\vec{r}(u,v) = \varphi(u,v)\vec{\imath} + \psi(u,v)\vec{\jmath} + \chi(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \Delta,$$

$\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v \neq 0$, где је Δ мерљива затворена област у равни $O'uv$, функције φ, ψ, χ су непрекидно диференцијабилне на Δ, а S је ограничена део-по-део глатком кривом. Изаберимо једну страну површи и са $\vec{n}(x, y, z)$ означимо векторско поље јединичних нормала на S. Претпоставимо да је на површи дефинисана непрекидна реална функција $f(x, y, z)$.

Уочимо произвољну поделу $T = \{\Delta_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ области Δ и њоме индуковану поделу $T' = \{S_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ површи S. У сваком делу S_i поделе T' изаберимо тачку (x_i, y_i, z_i). Углове које нормала $\vec{n}(x_i, y_i, z_i)$ заклапа са осама Ox, Oy, Oz означимо са α_i, β_i, γ_i, респективно.

Посматрајмо суме

(2a) $$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\alpha_i \cdot \mu S_i,$$

(2b) $$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\beta_i \cdot \mu S_i,$$

(2c) $$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i, z_i) \cos\gamma_i \cdot \mu S_i.$$

Коначни лимеси интегралних сума (2a), (2b), (2c) кад $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \delta S_i \to 0$ називају се **површинским интегралима друге врсте** функције $f(x, y, z)$ по површи S и означавају се, респективно, са

(3a) $$\iint_S f(x, y, z) \cos\alpha\, dS,$$

(3b) $$\iint_S f(x, y, z) \cos\beta\, dS,$$

(3c) $$\iint_S f(x, y, z) \cos\gamma\, dS.$$

Променом правца нормале или, што је исто, променом стране површи S по којој се врши интеграција, мења се знак интегралне суме (2a), (2b), односно (2c), а тиме и одговарајућег интеграла (3a), (3b), односно (3c). Када се приликом интеграције изврши избор стране површи S, онда се интеграли (3a,b,c) могу сматрати као површински интеграли прве врсте функција $f(x, y, z) \cos\alpha$, $f(x, y, z) \cos\beta$, $f(x, y, z) \cos\gamma$, респективно. Дакле, површински интеграл друге врсте израчунава се помоћу двојног интеграла.

Теорема 6.5.1

За дату површ (1) и непрекидну функцију $f(x,y,z)$, дефинисану на тој површи, важе једнакости

(4a)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\, dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,\cos\alpha\, du\, dv,$$
(4b)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\beta\, dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,\cos\beta\, du\, dv,$$
(4c)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,\cos\gamma\, du\, dv. \blacksquare$$

Интеграл по површи $z = z(x,y)$

Нека је површ S дата једначином $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. За параметре u и v узећемо x и y, тј. ставићемо $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$, $\chi(x,y) = z(x,y)$. Претпоставимо да вршимо интеграцију по оној страни површи код које нормала, повучена у произвољној тачки површи, заклапа оштар угао са осом Oz. Нека је на површи S дефинисана непрекидна функција $f(x,y,z)$. Како је $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}$, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, то формула (4c) има облик

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\, dx\, dy,$$

где је D пројекција површи S на раван Oxy. Горњу једнакост пишемо у облику

(5)
$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\, dx\, dy,$$

што нам указује на следећу ознаку површинског интеграла друге врсте

$$\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_S f(x,y,z)\, dx\, dy.$$

Ако се пројектовање површи S врши на раван Oyz, односно Ozx, добијају се површински интеграли друге врсте

$$\iint_S f(x,y,z)\, dy\, dz, \quad \text{односно} \quad \iint_S f(x,y,z)\, dz\, dx.$$

Обично се посматрају површински интеграли облика

(6)
$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

који се означавају још и као

(7)
$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy,$$

где су P, Q, R функције дефинисане на површи S.

Примери 6.5.1

1° Израчунајмо интеграл

$$I = \iint_S x^2y^2z\, dx\, dy,$$

где је S доња страна полусфере $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

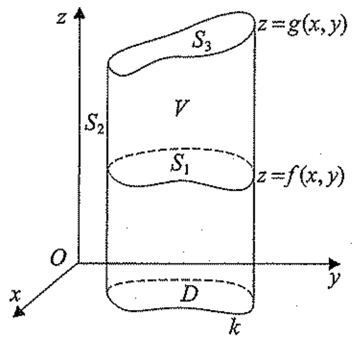
Пројекција површи S на раван Oxy је круг $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$. Једначина полусфере је $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, а $\cos\gamma$ је негативан. Према томе је

$$I = -\iint_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Преласком на поларне координате имамо

$$I = -\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\, dr = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8R^7}{105} = -\frac{2\pi R^7}{105}.$$

2° Геометријска фигура V ограничена је површима $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, $(x,y) \in D$, и цилиндричном површи чија је водиља крива k у равни Oxy која ограничава област D, а изводнице су паралелне z-оси, сл. 6.5.1. Део површи $z = f(x,y)$ који ограничава фигуру V означимо са S_1, део цилиндричне површи који ограничава V са S_2, а део површи $z = g(x,y)$ који ограничава V са S_3. Изразимо запремину μV фигуре V помоћу површинског интеграла.



Сл. 6.5.1

Запремина μV дата је разликом двојних интеграла

$$\mu V = \iint_D g(x,y)\, dx\, dy - \iint_D f(x,y)\, dx\, dy,$$

што се може написати у облику

(8)
$$\mu V = \iint_{S_3} g(x,y)\, dx\, dy + \iint_{S_1} f(x,y)\, dx\, dy,$$

где се интеграција врши по горњој страни површи S_3 и по доњој страни површи S_1. Како пројекција површи S_2 на раван Oxy има меру нула, то је

(9)
$$\iint_{S_2} z\, dx\, dy = 0.$$

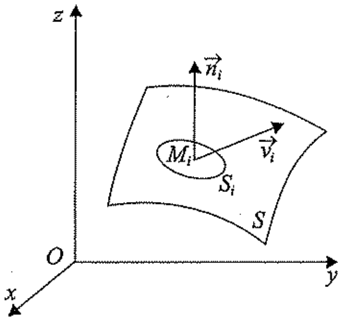
Ако десној страни једнакости (8) додамо леву страну једнакости (9) и означимо $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$, онда за μV добијамо

$$\mu V = \iint_S z\, dx\, dy.$$

3° Посматрајмо поље брзине

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

течности. Претпоставимо да је густина течности једнака јединици и да је кретање течности стационарно (тј. брзина делића који пролазе кроз једну тачку не зависи од времена, него само од тачке). Нека је S површ кроз коју пролази посматрана течност. Нађимо количину течности која пролази кроз површ S.



Сл. 6.5.2

У том циљу уочимо поделу $T = \{\, S_i \mid i = 1, \ldots, p \,\}$ површи S. У сваком S_i изаберимо тачку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Јединична нормала $\vec{n}_i$ у тачки M_i нека заклапа углове α_i, β_i, γ_i са осама Ox, Oy, Oz, респективно. Приближна количина течности која кроз површ S пролази у смеру нормале (или, да кажемо другачије, кроз површ S, са њене негативне на позитивну страну), у јединици времена, износи

$$\sum_{i=1}^{p} \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \, \mu S_i = \sum_{i=1}^{p} [P(x_i,y_i,z_i)\cos\alpha_i + Q(x_i,y_i,z_i)\cos\beta_i + R(x_i,y_i,z_i)\cos\gamma_i] \cdot \mu S_i.$$

Преласком на лимес закључујемо да је укупна количина течности која у јединици времена пролази кроз површ S, са њене негативне на њену позитивну страну, дата површинским интегралом

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{10}$$

Површински интеграл $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$ називамо **протоком (флуксом)** вектора $\vec{v}$ кроз оријентисану површ S. ▲

6.6. ГРАДИЈЕНТ, ДИВЕРГЕНЦИЈА, РОТОР

За дато скаларно поље $u = u(x,y,z)$ дефинисали смо векторско поље његовог градијента

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(в. одељак 2.1).

Дивергенција

Слично претходном, за дато векторско поље $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k} = (v_1, v_2, v_3)$ дефинисаћемо једно скаларно поље које ћемо називати дивергенцијом датог поља $\vec{v}$.

Нека је векторско поље $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ диференцијабилно. Тада је **дивергенција** $\operatorname{div}\vec{v}$ скаларна функција

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Наведимо нека својства дивергенције.

Став 6.6.1

Ако је $u(x,y,z)$ скаларно поље, $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ и $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{\imath} + w_2(x,y,z)\vec{\jmath} + w_3(x,y,z)\vec{k}$ су векторска поља, дефинисана и диференцијабилна у области $V \subset \mathbf{R}^3$, а C_1, C_2 су произвољне константе, онда је:

1° $\operatorname{div}(C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1 \operatorname{div}\vec{v} + C_2 \operatorname{div}\vec{w}$;

2° $\operatorname{div} u\vec{v} = u \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad} u$.

Доказ.

1° Следи из једнакости

$$\frac{\partial(C_1v_1 + C_2w_1)}{\partial x} + \frac{\partial(C_1v_2 + C_2w_2)}{\partial y} + \frac{\partial(C_1v_3 + C_2w_3)}{\partial z}$$
$$= C_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + C_2\frac{\partial w_1}{\partial x} + C_1\frac{\partial v_2}{\partial y} + C_2\frac{\partial w_2}{\partial y} + C_1\frac{\partial v_3}{\partial z} + C_2\frac{\partial w_3}{\partial z}.$$

2° Лева страна једнакости која се доказује, $\dfrac{\partial(uv_1)}{\partial x} + \dfrac{\partial(uv_2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(uv_3)}{\partial z}$, може се написати у облику

$$u\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}v_1 + \frac{\partial u}{\partial y}v_2 + \frac{\partial u}{\partial z}v_3,$$

што није ништа друго него десна страна те једнакости. ■

Примери 6.6.1

1° За векторско поље $\vec{v} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ и дато скаларно поље $u = u(x,y,z)$ израчунајмо $\operatorname{div} u\vec{r}$.

Према ставу 6.6.1 имамо

$$\operatorname{div} u\vec{r} = u \operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad} u.$$

Како је $\operatorname{div}\vec{r} = 3$ и $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, то је

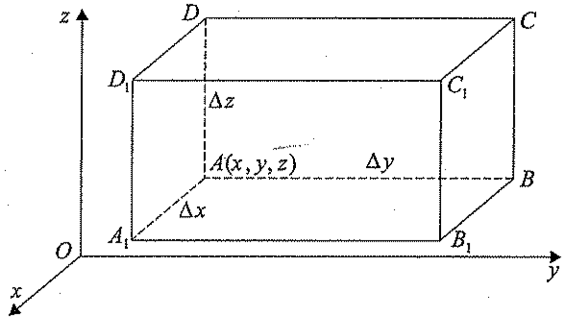
$$\operatorname{div} u\vec{r} = 3u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

2° Навешћемо једну интерпретацију дивергенције у теорији флуида. Флуиде, како се заједничким именом називају гасови и течности, посматраћемо као корпускуларне средине чији су делићи врло покретљиви. Притом под делићем подразумевамо врло малу количину флуида. Дакле, сматраћемо да се флуид у одређеној области $V \subset \mathbf{R}^3$ састоји од скупа $\{ (x,y,z) \mid (x,y,z) \in V \}$ тачака које ћемо називати делићима.

Посматрајмо флуид у коме се делићи крећу и са $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ означимо поље брзина делића флуида. Претпоставимо да брзина сваког делића (x,y,z) зависи само од места у пољу. Са $\rho(x,y,z)$ означимо густину флуида и дефинишимо масени проток флуида $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ у тачки (x,y,z), стављањем

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \rho(x,y,z)\,\vec{v}(x,y,z).$$

Према овој дефиницији, масени проток $\overrightarrow{F}$ показује масу флуида која би у јединици времена протицала кроз раван пресек јединичне површине, када би густина флуида била једнака $\rho(x,y,z)$, а смер протицања би се поклапао са смером вектора $\vec{v}$.



Сл. 6.6.1

Уочимо произвољну тачку $A(x,y,z)$ у области V флуида. Конструишимо мали правоугли паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивица Δx, Δy, Δz, сл. 6.6.1. Претпоставићемо да су брзина $\vec{v}$ делића флуида и густина флуида приближно константни на правоугаонику $ABCD$. Ако је вектор $\overrightarrow{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ познат, онда маса флуида која у јединици времена протекне у посматрани паралелепипед у смеру x-осе износи $P(x,y,z)\,\Delta y\,\Delta z$. Под сличним условима, маса флуида која за јединицу времена истекне из паралелепипеда у смеру x-осе износи $P(x+\Delta x,y,z)\,\Delta y\,\Delta z$. Дакле, израз

(1) $$\big(P(x+\Delta x,y,z) - P(x,y,z)\big)\,\Delta y\,\Delta z$$

показује разлику масе флуида која излази и оне која улази у паралелепипед у смеру x-осе.

На исти начин добијају се разлике

(2) $$\big(Q(x,y+\Delta y,z) - Q(x,y,z)\big)\,\Delta z\,\Delta x,$$

односно

(3) $$\big(R(x,y,z+\Delta z) - R(x,y,z)\big)\,\Delta x\,\Delta y,$$

масе флуида која излази и оне која улази у паралелепипед у правцу y-осе, односно z-осе.

Збир маса (1), (2) и (3) поделимо запремином $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ паралелепипеда и пустимо да $D = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \to 0$. Добијамо

$$\lim_{D\to 0}\left(\frac{P(x+\Delta x,y,z) - P(x,y,z)}{\Delta x} + \frac{Q(x,y+\Delta y,z) - Q(x,y,z)}{\Delta y} + \frac{R(x,y,z+\Delta z) - R(x,y,z)}{\Delta z}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\overrightarrow{F}$$

(ако лимес постоји).

Дакле, $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ представља промену масе флуида, сведену на јединицу запремине и јединицу времена.

Тачке у којима је $\operatorname{div}\overrightarrow{F} > 0$ називају се **изворима**, а оне у којима је $\operatorname{div}\overrightarrow{F} < 0$ су **понори**. ▲

Ротор

Нека је векторско поље $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ диференцијабилно. Променљиви вектор

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

назива се **ротором** векторског поља $\vec{v}$ и означава са $\operatorname{rot}\vec{v}$.

Став 6.6.2

Ако је $u(x,y,z)$ скаларно поље, $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{\imath} + v_2(x,y,z)\vec{\jmath} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ и $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{\imath} + w_2(x,y,z)\vec{\jmath} + w_3(x,y,z)\vec{k}$ су векторска поља, дефинисана и диференцијабилна у области $V \subset \mathbf{R}^3$, а C_1, C_2 су произвољне константе, онда је:

1° $\operatorname{rot}(C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1 \operatorname{rot}\vec{v} + C_2 \operatorname{rot}\vec{w}$;

2° $\operatorname{rot} u\vec{v} = u \operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{grad} u \times \vec{v}$.

Доказ.

1° Следи непосредном провером.

2° Пројекцију вектора $\operatorname{rot} u\vec{v}$ на x-осу означимо са $\operatorname{rot}_x u\vec{v}$. Тада је

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_x u\vec{v} &= \frac{\partial(uv_3)}{\partial y} - \frac{\partial(uv_2)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y}v_3 + u\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}v_2 - u\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ &= u\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}v_3 - \frac{\partial u}{\partial z}v_2\right) = u \operatorname{rot}_x\vec{v} + (\operatorname{grad} u \times \vec{v})_x.\end{aligned}$$

Слично се добијају и $\operatorname{rot}_y u\vec{v}$ и $\operatorname{rot}_z u\vec{v}$. ■

Примери 6.6.2

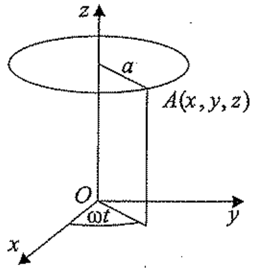
1° Нека је $\vec{c}$ константан вектор и $f(r)$ диференцијабилна скаларна функција ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Израчунајмо $\operatorname{rot} f(r)\vec{c}$.

Према ставу 6.6.2 имамо

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{c} = f(r)\operatorname{rot}\vec{c} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{c}.$$

Како је $\operatorname{rot}\vec{c} = 0$ и $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$, то је

$$\operatorname{rot} f(r)\vec{c} = \frac{f'(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{c}).$$



Сл. 6.6.2

2° Уочимо круто тело које се креће константном угаоном брзином $\vec{\omega}$ око осе Oz у координатном систему $Oxyz$. Нека је $A(x, y, z)$ произвољна тачка тела која се не налази на оси Oz, сл. 6.6.2. Сматраћемо да је вектор $\vec{\omega}$, интензитета ω, усмерен у позитивном смеру z-осе, тј. да је $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. За вектор положаја $\vec{r}$ тачке A имамо $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{\imath} + a\sin\omega t\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, где је $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ константно, а t је време. Брзина $\vec{v}$ тачке A дата је изразом

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{\imath} + a\omega\cos\omega t\,\vec{\jmath},$$

одакле је

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Дакле, ротор служи као мера ротације тачке.

3° Користећи уведени појам ротора, теореме 6.3.1 и 6.3.2 могу се исказати на следећи начин.

Нека је у просто повезаној области $V \subset \mathbf{R}^3$ задато непрекидно диференцијабилно векторско поље $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Тада су следећи услови међусобно еквивалентни:

1° У области V постоји непрекидно диференцијабилно скаларно поље u, такво да је $\operatorname{grad} u = \vec{v}$.

2° Рад $\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ поља $\vec{v}$ по путу $AB \subset V$ не зависи од облика пута, већ само од почетне и крајње тачке.

3° Циркулација $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$ поља $\vec{v}$ по произвољној затвореној кривој $C \subset V$ једнака је нули.

4° $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

Векторско поље $\vec{v}$ које има неко од наведена четири еквивалентна својства назива се **потенцијалним пољем**; скаларно поље u за које је $\vec{v} = \operatorname{grad} u$ је **потенцијал** поља $\vec{v}$. Примери потенцијалних поља су гравитационо и електростатичко поље. ▲

Оператор набла

У циљу једноставнијег изражавања градијента, ротора и дивергенције уводи се појам симболичког вектора, односно векторско-диференцијалног оператора **набла**, у ознаци

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Примена оператора ∇ на скаларну функцију $u(x, y, z)$, по дефиницији даје

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u.$$

Примена симболичког вектора ∇ на векторску функцију $\vec{v} = v_1(x, y, z)\vec{\imath} + v_2(x, y, z)\vec{\jmath} + v_3(x, y, z)\vec{k}$ по дефиницији даје

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{v}.$$

Векторски производ вектора ∇ и вектора $\vec{v}$ даје симболичку детерминанту

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{v}.$$

у којој се уместо множења елемената друге и треће врсте врши диференцирање.

Лако се показује да за диференцијабилна скаларна поља $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, диференцијабилну функцију f и константу C важи:

1° $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$;

2° $\nabla(Cu) = C\nabla u$;

3° $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$;

4° $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;

5° $\nabla f(u) = f'_u \nabla u$.

За двапут непрекидно диференцијабилна векторска поља $\vec{v}$ и $\vec{w}$, скаларну функцију $u(x, y, z)$ и константе C_1, C_2 важи:

6° $\nabla \cdot (C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1(\nabla \cdot \vec{v}) + C_2(\nabla \cdot \vec{w})$;

7° $\nabla \times (C_1\vec{v} + C_2\vec{w}) = C_1(\nabla \times \vec{v}) + C_2(\nabla \times \vec{w})$;

8° $\nabla \cdot (u\vec{v}) = u(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla u$;

9° $\nabla \times (u\vec{v}) = u(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla u) \times \vec{v}$

(в. ставове 6.6.1 и 6.6.2).

Операције другог реда

Дивергенција $\operatorname{div}\vec{v}$ векторске функције $\vec{v}$ представља скаларну функцију, док градијент $\operatorname{grad} u$ скаларне функције u и ротор $\operatorname{rot}\vec{v}$ векторске функције $\vec{v}$ представљају векторске функције. Дакле, можемо говорити о функцијама $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$,

$\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}$. Операције $\operatorname{grad}\operatorname{div}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ називају се некад **операцијама другог реда**.

Размотримо нека својства операција другог реда.

1° Нека је $u = u(x,y,z)$ дато двапут непрекидно диференцијабилно скаларно поље. Тада је

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla\cdot(\nabla u) = \Delta u,$$

где је уведена ознака $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Симбол диференцирања

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

назива се **Лапласовим оператором** или **лапласијаном**.

2° За двапут непрекидно диференцијабилно скаларно поље $u = u(x,y,z)$ је

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times(\nabla u) = 0,$$

јер је векторски производ вектора једнак нули кад су му фактори колинеарни.

3° Нека је $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ двапут непрекидно диференцијабилно векторско поље. Тада је

(4) $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0,$$

јер је мешовити производ вектора једнак нули кад су му два фактора колинеарна.

4° Уведимо још ознаку

$$\Delta\vec{v} = \Delta v_1\,\vec{i} + \Delta v_2\,\vec{j} + \Delta v_3\,\vec{k}.$$

Покажимо једнакост

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}.$$

Заиста,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = (\nabla\cdot\vec{v})\nabla - (\nabla\cdot\nabla)\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}.$$

Пример 6.6.3

Нека је $f(r)$ двапут диференцијабилна функција. Израчунајмо $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$.

Како је $\operatorname{grad} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$, то је

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right),$$

а према примеру 6.6.1.1° је $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = 3\dfrac{f'(r)}{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\dfrac{f'(r)}{r}$, одакле добијамо

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r). \quad \blacktriangle$$

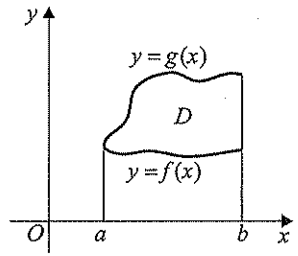
6.7. ИНТЕГРАЛНЕ ФОРМУЛЕ

Између уведених типова интеграла (двојних, тројних, криволинијских у равни и простору, као и површинских) постоје одређене везе које се исказују тзв. интегралним формулама. Навешћемо три формуле таквог типа.

Гринова формула

Веза између двојног интеграла по некој области и криволинијског интеграла по граници те области дата је **Гриновом**[1] **формулом**.

Уочимо просту затворену криву $C \subset \mathbf{R}^2$ која ограничава област D. Ако се C састоји од делова графика двеју непрекидних функција $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, и евентуално делова правих $x = a$ и $x = b$, онда ћемо D називати **елементарном облашћу** у односу на осу Ox, сл. 6.7.1. Слично се дефинише елементарна област у односу на осу Oy. Области, елементарне у односу на осе Ox и Oy, називаћемо елементарним областима.



Сл. 6.7.1

Теорема 6.7.1

Нека је $D \subset \mathbf{R}^2$ област ограничена део-по-део глатком кривом C. Ако су функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрекидне заједно са својим парцијалним изводима $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на затвореној области $\overline{D}$, онда важи једнакост

(1) $$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Притом ознака C^+ у криволинијском интегралу означава да се интеграција врши у смеру при коме тачке области D остају с леве стране.

Доказ.

Теорему најпре докажимо у случају када је D елементарна област.

Претпоставимо да је граница C области D дата једначинама $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = a$, $f(a) \leqslant y \leqslant g(a)$, као и $x = b$, $f(b) \leqslant y \leqslant g(b)$, сл. 6.7.2. На кривој C означимо тачке: $E(a, f(a))$, $F(b, f(b))$, $G(b, g(b))$, $H(a, g(a))$. Трансформишимо израз $\displaystyle\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Имамо

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x,g(x)) - P(x,f(x))]\,dx \\ &= \int_a^b P(x,g(x))\,dx - \int_a^b P(x,f(x))\,dx \\ &= -\int_{GH} P(x,y)\,dx - \int_{EF} P(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

Како је

$$\int_{HE} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int_{FG} P(x,y)\,dx = 0,$$

[1] G. Green (1793–1841), енглески математичар

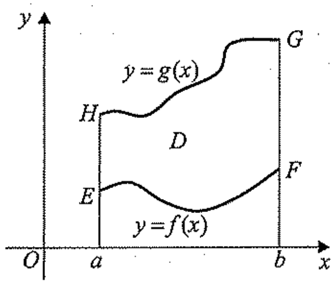
то је

$$\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{EF} P\,dx - \int_{FG} P\,dx - \int_{GH} P\,dx - \int_{HE} P\,dx = -\oint_{C^+} P\,dx.$$

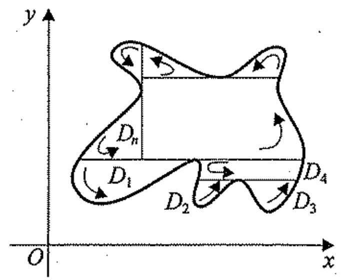
Слично се добија

$$\oint_{C^+} Q\,dy = \iint_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

па сабирањем следи формула (1).



Сл. 6.7.2



Сл. 6.7.3

Ако област D није елементарна, онда се она најпре, правим линијама паралелним координатним осама, подели на елементарне области D_i, $i = 1, \ldots, n$, сл. 6.7.3. Потом се на сваку од области D_i примени добијена једнакост

$$\oint\limits_{C_i^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\overline{D}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где је C_i граница области D_i. Сабирањем ових једнакости за $i = 1, \ldots, n$, добија се

$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

јер се криволинијски интеграли по оним границама области C_i које се налазе унутар области D појављују два пута, али у супротним смеровим, па се поништавају. ■

Пример 6.7.1

Помоћу криволинијског интеграла израчунаћемо површину равне површи ограничене део-по-део глатком кривом.

Нека је D затворена област у равни Oxy, ограничена део-по-део глатком кривом C. Површина μD те области дата је двојним интегралом $\mu D = \iint_D dx\,dy$. С друге стране, у формули (1) ставимо $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$. Тада је

$$\iint_D dx\,dy = \oint_{C^+} x\,dy.$$

Стави ли се $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, добија се

$$\iint_D dx\,dy = -\oint_{C^+} y\,dx.$$

Сабирајући последње две једнакости добијамо

$$\mu D = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_{C^+} x\,dy - y\,dx. \quad ▲$$

Стоксова формула

Теорема 6.7.2

Нека је S ограничена, глатка, двострана површ, са део-по-део глатком границом Γ. Нека су функције $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрекидно диференцијабилне у некој околини површи S. Тада важи једнакост (**Стоксова**[2] **формула**)

(2) $$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Притом се смер криволинијског интеграла на левој страни једнакости (2) узима тако да приликом обилажења оријентисане површи S по кривој Γ, површ остаје с леве стране.

Доказ.

Претпоставимо најпре да се површ S може бијективно пројектовати на сваку од координатних равни.

Напишимо формулу (2) у облику

(3) $$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

где су α, β, γ углови које изабрани смер нормале $\vec{n}$ на оријентисану површ S гради са осама Ox, Oy, Oz, респективно. Покажимо да важи једнакост

(4) $$\oint_\Gamma P\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS.$$

Једначина површи S може се написати у облику $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, где је $D \subset \mathbf{R}^2$ пројекција површи S на раван Oxy. Означимо ли, као и обично, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$, имаћемо

$$\cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

[2]G. G. Stokes (1819–1903), енглески математичар

Притом вектор $\vec{n}$ нормале на површ са z-осом заклапа оштар угао. Интеграл I на десној страни једнакости (4) напишимо у облику

$$I = \iint_S -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\gamma\, dS.$$

Како је, с друге стране,

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y,f(x,y))\big) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}q,$$

означивши границу области D (тј. пројекцију криве Γ на раван Oxy) са L, према једнакости (5) одељка 6.5, имаћемо

$$I = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y,f(x,y))\big)\,dx\,dy.$$

Према Гриновој формули (1) је

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y,f(x,y))\big)\,dx\,dy = \oint_L P(x,y,f(x,y))\,dx,$$

где се обилазак по кривој L врши тако да област D остаје с леве стране.

Како је

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \oint_L P(x,y,f(x,y))\,dx,$$

то је

$$I = \oint_\Gamma P(x,y,z)\,dx,$$

чиме је једнакост (4) доказана.

Слично се доказују и једнакости

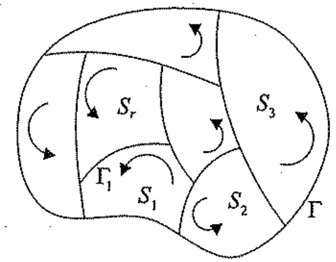
$$\oint_\Gamma Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS, \tag{5}$$

$$\oint_\Gamma R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS. \tag{6}$$

Из (4), (5) и (6) следи Стоксова формула у наведеном случају.

Провером се показује да Стоксова формула важи и у случају када је површ S део неке равни која је паралелна са једном од координатних оса (с тим да је тај део равни ограничен део-по-део глатком кривом).

Стоксова теорема важи и у случају када се површ S може представити у облику $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$, где су S_i ограничене, глатке, двостране површи са део-по-део глатким границама Γ_i, и свака од S_i се може пројектовати бијективно на сваку од координатних равни. Притом се S_i и S_j, $i \neq j$, секу највише по граничним тачкама сл. 6.7.4. Граница површи S је крива Γ.



Сл. 6.7.4

Наиме, за S_i важи једнакост

$$\oint_{\Gamma_i} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{S_i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{7}$$

за $i = 1, \ldots, r$. Сабирањем десних страна једнакости (7) за $i = 1, \ldots, r$ добија се десна страна једнакости (2), а сабирањем левих страна једнакости (7) добија се лева страна једнакости (2), јер се $\int_{\Gamma_k^*} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ у збиру појављује двапут, но у различитим смеровима интеграције. Притом су са Γ_k^* означене оне криве које припадају границама двеју површи S_i. ∎

Стоксова формула у векторском облику

Нека је вектор $\vec{v}$ облика $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$, а вектор $\vec{n}$ нормале на површ S је

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Диференцијал $d\vec{r}$ вектора $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ се може написати као

$$d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}.$$

Тада Стоксова формула (3) има облик

$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,dS.$$

Примери 6.7.2

1° Израчунајмо криволинијски интеграл

$$I = \oint_L dx + 2x^3y^2\,dy + 3z\,dz,$$

где је L пресек сфере $x^2+y^2+z^2 = a^2$ и равни Oxy, са смером обрнутим кретању казаљке на сату (гледајући одозго), и проверимо резултат употребљавајући Стоксову формулу, коришћењем горње полусфере као површи S.

Једначине криве L напишимо у облику $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тада је

$$I = \int_0^{2\pi}(-a\sin t + 2a^6\cos^4 t\sin^2 t)\,dt = 2a^6\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\,dt = \frac{\pi a^6}{4}.$$

С друге стране, употребљавајући формулу (2) стављањем $P = 1$, $Q = 2x^3y^2$, $R = 3z$, имаћемо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y^2$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$ и

$$I = 6\iint_S x^2y^2\,dx\,dy = 6\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2\,dx\,dy = 6\cdot\frac{\pi}{24}a^6 = \frac{\pi a^6}{4}.$$

2° Израчунајмо криволинијски интеграл

$$I=\oint_L (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$$

где је L пресек цилиндра $x^2+y^2=a^2$ и равни $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$, $a>0$, $c>0$. Смер интеграције је обрнут кретању казаљке на сату, гледајући одозго (са позитивног дела z-осе). У циљу примене формуле (3) за површ S узмимо део равни $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$ унутар цилиндра $x^2+y^2=a^2$. Тада, за $P=y-z$, $Q=z-x$, $R=x-y$, имамо $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=-2$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=-2$ и формула (3) даје

$$I=-2\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$$

(интеграција се врши по горњој страни равни). Косинуси углова α, β, γ су константни и износе

$$\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

где је $z=c-\dfrac{c}{a}x$, па је

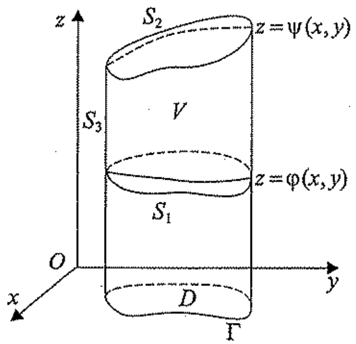
$$I=-2\iint_S\frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}\,dS=-2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\Big(1+\frac{c}{a}\Big)\,dx\,dy=-2\pi a(a+c). \ \blacktriangle$$

Формула Гауса-Остроградског

Нека је $V\subset \mathbf{R}^3$ затворена област ограничена део-по-део глатким површима:

$$S_1:\qquad z=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in D,$$
$$S_2:\qquad z=\psi(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

$\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y)$, и цилиндричном површи S_3, чија је водиља део-по-део глатка затворена крива Γ у равни Oxy која ограничава област D, а изводнице су паралелне оси Oz. Другачије можемо рећи да свака права l, паралелна оси Oz, сече границу ∂V области V у највише две тачке, или на правој l нема унутрашњих тачака области V. Назовимо такву област V z-елементарном. Са S означимо површ $S_1\cup S_2\cup S_3$, сл. 6.7.5.



Сл. 6.7.5

Претпоставимо да је у области V дефинисана непрекидна функција $R(x,y,z)$, која има непрекидан извод $\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Докажимо да важи једнакост

$$\iint_S R\,dx\,dy=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

Притом се интеграл на левој страни ове једнакости узима по спољашњој страни површи S.

Заиста, израз на десној страни једнакости (8) можемо написати у облику

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz&=\iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy\\&=\iint_D[R(x,y,\psi(x,y))-R(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy\\&=\iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy-\iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Означимо са S_1^- доњу страну површи S_1, са S_2^+ горњу страну површи S_2, а са S_3^+ спољашњу страну површи S_3. Имамо

$$\iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy=\iint_{S_2^+}R(x,y,z)\,dx\,dy,$$
$$\iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy=-\iint_{S_1^-}R(x,y,z)\,dx\,dy,$$
$$\iint_{S_3^+}R(x,y,z)\,dx\,dy=0.$$

Тако је

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz&=\iint_{S_2^+}R(x,y,z)\,dx\,dy+\iint_{S_1^-}R(x,y,z)\,dx\,dy\\&\quad+\iint_{S_3^+}R(x,y,z)\,dx\,dy=\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

где је последњи површински интеграл узет по спољашњој страни површи S.

Теорема 6.7.3

Нека се затворена област $V\subset\mathbf{R}^3$ може представити у облику $V=V_1\cup\cdots\cup V_r$, где су V_i x,y,z-елементарне затворене области са део-по-део глатким границама S_i. Притом се V_i и V_j, $i\neq j$ секу највише по граничним тачкама, а граница области V је површ S. Нека су реалне функције P, Q и R дефинисане и непрекидне у области V, заједно са својим изводима $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Тада важи једнакост

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \tag{9}$$

Притом је површински интеграл узет по спољашњој страни површи S.

Доказ.

Претпоставимо најпре да је сама област V x, y, z-елементарна и да је ограничена део-по-део глатком површи S. Тада, према напред доказаном, важи формула (8), а слично се доказују и формуле

$$(10)\qquad \iint_S P\,dy\,dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint_S Q\,dz\,dx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

Сабирањем формула (8) и (10) следи формула (9).

У случају да област V задовољава услове наведене у формулацији теореме, тада за област V_i важи једнакост

$$(11)\qquad \iint_{S_i} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

$i = 1, \dots, r$. Сабирањем десних страна једнакости (11) за $i = 1, \dots, r$ добија се десна страна једнакости (9), а сабирањем левих страна једнакости (11) добија се лева страна једнакости (9), јер се сваки интеграл облика $\iint_{S_k^*} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ у збиру појављује двапут, но интегрише се по различитим странама површи S_k^*. Притом смо са S_k^* означили оне делове површи S_i који припадају границама двеју области. ■

Узевши у обзир изразе (6) и (7) одељка 6.5, једнакост (9) може се написати у облику

$$(12)\qquad \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Формула (9), односно (12), која даје везу између тројног интеграла по области V и површинског интеграла по граници ∂V те области, назива се **формулом Гауса-Остроградског**[3].

Векторски облик формуле Гауса-Остроградског

Нека је вектор $\vec v$ облика $\vec v = P(x,y,z)\vec\imath + Q(x,y,z)\vec\jmath + R(x,y,z)\vec k$ и вектор нормале на површ S је $\vec n = \cos\alpha\,\vec\imath + \cos\beta\,\vec\jmath + \cos\gamma\,\vec k$. Тада је $\operatorname{div}\vec v = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ и $\vec v \cdot \vec n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, па се (12) може написати у облику

$$\iint_S \vec v \cdot \vec n\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec v\,dx\,dy\,dz.$$

Ова формула каже да је проток (флукс) вектора $\vec v$ кроз границу области V једнак тројном интегралу дивергенције вектора $\vec v$ по области V.

[3] М. В. Остроградский (1801–1862), руски математичар

Примери 6.7.3

1° Ставимо у формули (9) $P = x$, $Q = y$, $R = z$. Тада се добија

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 3\iiint_V dx\,dy\,dz,$$

односно

$$\mu V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

2° Нека је S површ јединичне коцке $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Користећи формулу (9) израчунајмо интеграл

$$I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

по спољашњој страни коцке.

Према (9) имамо

$$I = 2\iiint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dz = 3.$$

3° Израчунајмо површински интеграл

$$I = \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS,$$

где је S део конусне површи $x^2+y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, а $\vec n = \cos\alpha\,\vec\imath + \cos\beta\,\vec\jmath + \cos\gamma\,\vec k$ је нормала на спољашњу страну површи.

На интеграл се не може применити формула (12) јер површ није затворена. Посматрајмо, међутим, површ $S_1 = \{(x,y,z) \mid z = h,\ x^2+y^2 \leqslant h^2\}$. Ако означимо $S_2 = S \cup S_1$, онда важи једнакост

$$I = \iint_{S_2} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS - \iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS,$$

где се први интеграл узима по спољашњој страни површи S_2, а други по горњој страни површи S_1.

Означимо први интеграл у последњој једнакости са I_1, а други са I_2. Тада је

$$I_1 = 2\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где је област $V \subset \mathbf{R}^3$ ограничена са S_2. Преласком на поларно-цилиндричне координате имамо

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r\,dr \int_r^h (r\cos\theta + r\sin\theta + z)\,dz = \frac{\pi}{2}h^4.$$

За израчунавање интеграла I_2 приметимо да је $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma\, dS = dx\, dy$, одакле следи

$$I_2 = h^2 \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} dx\, dy = \pi h^4.$$

Дакле је $I = I_1 - I_2 = \dfrac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\dfrac{\pi}{2}h^4$.

4° Диференцијабилно векторско поље $\vec{v}$ за које је $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ у свим тачкама неке области $V \subset \mathbf{R}^3$, назива се **соленоидалним**.

Претпоставимо да је област V таква да за сваку просту затворену површ S, чије све тачке припадају области V, и све тачке дела простора чија је граница површ S такође припадају области V. Такве области се обично називају **просторно просто повезаним** (за разлику од просто повезаних области у смислу одељка 6.3, које се још називају **површински просто повезаним**). На пример унутрашњост торуса је просторно просто повезана област, а област $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ то није.

На основу формуле Гауса-Остроградског, из просторне просте повезаности области V непосредно следи да за соленоидално поље $\vec{v}$ важи да је његов флукс кроз произвољну просту затворену површ $S \subset V$ једнак нули,

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{v}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

где је $T \subset V$ област ограничена површи S.

Може се доказати да је поменути услов анулирања флукса поља $\vec{v}$ не само неопходан, већ и довољан да би то поље било соленоидално.

Поменимо још један неопходан и довољан услов да поље $\vec{v}$ буде соленоидално – то је услов да у области V постоји двапут диференцијабилно поље $\vec{w}$, такво да је $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$. Да је тај услов довољан следи из релације (4) одељка 6.6, јер је тада

$$\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{w} = 0.$$

За доказ неопходности поменутог услова в. нпр. [34]. Поље $\vec{w}$ које је на овај начин везано са пољем $\vec{v}$, назива се **векторским потенцијалом** поља $\vec{v}$.

Најзад, поменимо и следећу чињеницу, чији се доказ такође може наћи у [34].

Свако глатко векторско поље $\vec{v}$ може се представити као збир једног потенцијалног и једног соленоидалног поља,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \operatorname{rot}\vec{v}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0. \quad \blacktriangle$$

ЗАДАЦИ

1. Доказати да за криволинијски интеграл важи

$$\left|\int_L P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy\right| \leqslant d_L\cdot M,$$

где су P и Q непрекидне функције, d_L је дужина део-по-део глатког лука L и $M = \max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$.

2. Проценити интеграл $I_r = \displaystyle\int_L \frac{y\, dx - x\, dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$, где је L круг $x^2+y^2=r^2$. Доказати да је $\lim\limits_{r\to\infty} I_r = 0$.

3. Одредити две двапут непрекидно диференцијабилне функције $P(x,y)$, $Q(x,y)$, тако да криволинијски интеграл

$$I = \oint_L P(x+\alpha, y+\beta)\, dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\, dy$$

по затвореној кривој L, не зависи од константи α, β.

4. Нека је $D = \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $P,\, Q\colon D\to\mathbf{R}$, $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $A = \{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\geqslant 0, (x,y)\neq(0,0)\,\}$.

1° Ако је C проста, део-по-део глатка затворена крива у D, доказати да $\oint_C P\, dx + Q\, dy$ може узети једну од вредности: 0, 2π, -2π.

2° За $(a,b)\in A$, нека је $f(a,b) = \int_L P\, dx + Q\, dy$, где је L путања у A, с почетном тачком $(1,0)$ и крајњом тачком (a,b). Показати да је

$$f(a,b) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{ако је } a>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & \text{ако је } a=0,\\[2mm] \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi, & \text{ако је } a<0.\end{cases}$$

5. Нека су $u(x,y)$, $v(x,y)$ скаларна поља са непрекидним другим парцијалним изводима у области $D\subset\mathbf{R}^2$. Ако је $S\subset D$ скуп ограничен простом, затвореном, део-по-део глатком кривом C, показати да важи

$$\oint_C uv\, dx + uv\, dy = \iint_S \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\, dy.$$

6. Област у равни са једним „отвором" назовимо „двоструко повезаном" (таква област је, на пример, кружни прстен). Ако су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрекидно диференцијабилне реалне функције у двоструко повезаној области $D\subset\mathbf{R}^2$ и ако је $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y)\in D$, коју вредност може имати $\oint_C P\, dx + Q\, dy$, где је C проста, део-по-део глатка затворена крива у скупу D?

7. Нека је C део-по-део глатка крива у равни Oxy и непрекидна и позитивна функција $f(x,y)$ је дефинисана у тачкама криве C. Доказати да површина површи

$$S = \{\,(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x,y)\in C, 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\,\}$$

износи $\mu S = \int_C f(x,y)\, ds$.

8. Нека је крива AB дата једначинама $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, при чему су функције φ и ψ непрекидне и ограничене варијације на $[\alpha, \beta]$, и нека су $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функције, непрекидне у тачкама те криве. Доказати да је

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$
$$= (\mathrm{S})\int_\alpha^\beta P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\varphi(t) + (\mathrm{S})\int_\alpha^\beta Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\,d\psi(t).$$

9. Доказати Поасонову формулу

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

при чему је S површ сфере $x^2+y^2+z^2=1$, а функција f је непрекидна.

10. Израчунати интеграл $F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,dS$, где је

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{ако је } x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\\ 0, & \text{ако је } x^2+y^2+z^2 > 1.\end{cases}$$

11. Израчунати $F(x,y,z,t) = \iint_S f(u,v,w)\,dS$, где је S сфера $(u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2 = t^2$ и

$$f(u,v,w) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } u^2+v^2+w^2 < a^2,\\ 0, & \text{ако је } u^2+v^2+w^2 \geqslant a^2.\end{cases}$$

12. Ако је $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{c}$ је константан вектор, а $f(r)$ је дата (довољно глатка) функција, наћи:

1° $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$; 2° $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})$; 3° $\operatorname{rot}(\vec{c}\times f(r)\vec{r})$.

13. Ако је $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, наћи n тако да је $\operatorname{div}(r^n\cdot\vec{r}) = 0$.

14. Показати да је поље

$$\vec{u} = yz(2x+y+z)\vec{\imath} + xz(x+2y+z)\vec{\jmath} + xy(x+y+2z)\vec{k}$$

потенцијално и наћи потенцијал.

15. Показати да постоји и наћи примитивну функцију $u(x,y,z)$, ако је $du = (x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$.

16. Израчунати интеграл

$$\int_{AB} (x^2-yz)\,dx + (y^2-zx)\,dy + (z^2-xy)\,dz$$

по луку завојнице $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht/2\pi$, од тачке $A(a,0,0)$ до тачке $B(a,0,h)$.

17. Нека је L затворена крива у равни $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ и P је површина дела равни који ограничава L. Доказати једнакост

$$\oint_L (y\cos\alpha - z\cos\beta)\,dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,dz = 2P,$$

при чему је смер интеграције позитиван.

18. Нека је S затворена површ која ограничава део простора $V\subset\mathbf{R}^3$, $\vec{n}$ је спољашња нормала на површ S у тачки (u,v,w), а $\vec{r}$ је вектор с почетном тачком (x,y,z) и крајњом (u,v,w), $r=|\vec{r}|$.

1° Доказати формулу

$$\iiint_V \frac{du\,dv\,dw}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})\,dS.$$

2° Ако је S проста затворена глатка површ, израчунати **Гаусов интеграл**

$$f(x,y,z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS.$$

19. Дводимензионално поље силе $\vec{v}$ дато је једначином $\vec{v}(x,y) = cxy\,\vec{\imath} + x^6y^2\,\vec{\jmath}$, где је c позитивна константа. Ова сила дејствује на материјалну тачку, покрећући је од тачке $(0,0)$ до праве $x=1$, дуж криве $y=ax^b$, a, $b>0$. Наћи вредност a (у зависности од c), тако да је извршени рад независан од b.

20. Нека су $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ два непрекидно диференцијабилна скаларна поља на отвореном скупу који садржи диск $K = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. Наћи вредност интеграла

$$\iint_K \vec{v}\cdot\vec{w}\,dx\,dy,$$

ако је $\vec{v}(x,y) = u_2(x,y)\vec{\imath} + u_1(x,y)\vec{\jmath}$, $\vec{w}(x,y) = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right)\vec{\jmath}$, а на кругу $x^2+y^2=1$ је $u_1(x,y)=1$, $u_2(x,y)=y$.

21. Нека векторска поља $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ задовољавају једначине

$$(1)\qquad \operatorname{rot}\vec{v_1} = c\vec{v_2},\quad \operatorname{rot}\vec{v_2} = c\vec{v_1},$$

где је $c\neq 0$ константа.

1° Показати да је $\operatorname{div}\vec{v_1} = \operatorname{div}\vec{v_2} = 0$ и да $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ задовољавају парцијалну диференцијалну једначину

$$\Delta\vec{w} + c^2\vec{w} = 0.$$

2° Ако је $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, и u_1, u_2 су скаларна поља која задовољавају једначину $\Delta u + c^2u = 0$, показати да векторска поља

$$\vec{v_1} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}u_1\vec{r}) + c\operatorname{rot}(u_2\vec{r}),\quad \vec{v_2} = c\operatorname{rot}(u_1\vec{r}) + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}u_2\vec{r})$$

задовољавају (1).

22. Глатка површ S дата је једначином $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Нека је $\vec{n}$ јединична нормала на површ S, с тим да $\vec{n}$ заклапа оштар угао са z-осом. За векторско поље $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ важи

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dx\,dy.$$

Доказати.

23. Нека је $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$, где је $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $R = z$, и V је торус добијен ротацијом круга $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ око z осе. Показати да је $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ унутар V, али $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \neq 0$, где је $C = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4, z = 0\,\}$.

24. (а) Нека је S глатка затворена површ у $\mathbf{R}^3$ која ограничава тело V и нека су u, v двапут диференцијабилна скаларна поља, дефинисана на $\overline{V}$. Доказати **Гринове формуле**:

1° $\displaystyle\iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$

2° $\displaystyle\iiint_V v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz = -\iiint_V (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)\,dx\,dy\,dz + \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$

3° $\displaystyle\iiint_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS,$

где је n спољашња нормала на површ S.

(б) За функцију $u \in C^2(V,\mathbf{R})$ се каже да је **хармонијска** у V ако је $\Delta u = 0$ у V. Доказати да је функција u хармонијска ако и само ако је $\displaystyle\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0$ за сваку просту затворену површ $S \subset V$.

(в) Ако је функција u хармонијска у затвореној области $\overline{V}$, доказати да су вредности те функције у унутрашњости те области једнозначно одређене њеним вредностима на граници ∂V области $\overline{V}$.

(г) Ако је u хармонијска функција у области V, $(x_0,y_0,z_0) \in V$ и S је сфера полупречника R са центром у (x_0,y_0,z_0), доказати да је

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)\,dS.$$

(д) Ако је функција u хармонијска у области V и непрекидна је на $\overline{V}$, онда она не достиже своју максималну (минималну) вредност на ∂V (осим ако је константна).

25. 1° Доказати да је унутрашњост круга у простору $\mathbf{R}^2$ просто повезана област.

2° Доказати да је област $G = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid r_1 < x^2+y^2+z^2 < r_2\,\}$, $r_1 < r_2$, просто повезана.

7. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗОВИ И РЕДОВИ

7.1. ОБИЧНА И РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

Када су чланови неког конвергентног низа $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ реални бројеви, тада је његов лимес $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ фиксирани елемент скупа $\mathbf{R}$. Но, ако чланови тог низа зависе још од неке променљиве, тј. облика су $a_n(x)$, $x \in A \subset \mathbf{R}$, тада и гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ представља функцију од x, при чему x припада неком (могуће мањем од A) скупу $B \subset \mathbf{R}$:

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x), \quad x \in B.$$

За конкретно задате низове $\big(a_n(x)\big)$, чак и у случају да су $a_n(x)$ елементарне функције (с каквим смо се до сада најчешће сусретали) релативно је ретко могуће експлицитно одредити функцију $a(x)$. Специјално, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, за оне x за које конвергира, дефинише неку функцију $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, где је $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$; међутим, вредност $s(x)$ по правилу не можемо експлицитно да израчунамо. Зато је логично поставити проблем испитивања особина граничне функције $a(x)$ (односно, у случају реда, $s(x)$) само на основу познатих особина функција $a_n(x)$. Наведимо, међутим, неколико примера који показују да непосредно преношење особина функција $a_n(x)$ на граничну функцију у општем случају није могуће.

Примери 7.1.1

1° Нека је $A = \mathbf{R}$, $a_n\colon A \to \mathbf{R}$ дата са $a_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Јасно је да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ постоји ако и само ако $x \in B = (-1,1]$ и да је

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } -1 < x < 1,\\ 1, & \text{ако } x = 1.\end{cases}$$

Приметимо да је $a\colon B \to \mathbf{R}$ прекидна функција, мада су $a_n|B$ непрекидне за свако $n \in \mathbf{N}$.

2° Низ функција

$$a_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

има за граничну функцију $a(x) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$. Приметимо, међутим, да $\int_0^1 a_n(x)\,dx = 1 - e^{-n^2}$ има граничну вредност 1 кад $n \to \infty$, док је $\int_0^1 a(x)\,dx = 0$. Дакле, у овом случају,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,dx.$$

3° Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ конвергира за свако $x \in \mathbf{R}$ по Дирихлеовом правилу (став 9.3.4 из М.А.I). Његови чланови $a_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ су диференцијабилне функције, међутим, њихови изводи $a_n'(x) = \cos nx$ су чланови дивергентног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$. Дакле, о диференцијабилности збира функционалног реда не може се закључити само на основу диференцијабилности његових сабирака. ▲

Приметимо да се у свим наведеним примерима у суштини радило о проблему промене редоследа два гранична прелаза. На пример, у случају 1° питање о непрекидности функције $a(x)$ у тачки $x = 1$ је у ствари питање о тачности следеће једнакости:

$$\lim_{x\to 1-0} \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} a_n(x).$$

Подсетимо се да смо, у нешто другачијем облику, сличан проблем имали и у случају тзв. узастопних лимеса функција више променљивих (в. став 1.2.4 и последицу 1.2.1). Тада смо такође наводили примере који показују да, без додатних претпоставки, таква промена поретка лимеса у општем случају није дозвољена.

У овој глави бавићемо се углавном проблемима испитивања функција задатих као граничне вредности неког функционалног низа или реда, при чему ће основно бити да се нађу довољни услови који обезбеђују размену лимеса, слично као у наведеним примерима, и на тај начин о особинама граничне функције закључи на основу особина функција $a_n(x)$. Имајући, међутим, у виду неке касније сличне примене на тзв. параметарске интеграле (в. главу 8), основне дефиниције и ставове даћемо у нешто општијем облику. Наиме, уместо функционалног низа $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$, који можемо схватити као фамилију функција параметризовану (индексирану) природним параметром $n \in \mathbf{N}$, посматраћемо **фамилију функција** $\{\, f_t(x) \mid t \in T \,\}$, $T \subset \mathbf{R}$, параметризовану произвољним реалним параметром t. Рецимо, у примеру 7.1.1.2° можемо узети

$$f_t(x) = 2t^2 x e^{-t^2x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \in \mathbf{R}$$

и тражити

$$\lim_{t\to\infty} f_t(x) = f(x) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Дефиниција 7.1.1

Нека је $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа $T \subset \mathbf{R}$ и нека је $A \subset \mathbf{R}$. Фамилија функција $\{f_t \colon A \to \mathbf{R} \mid t \in T\}$ **конвергира** функцији $f \colon A \to \mathbf{R}$ кад $t \to t_0$ ако за свако $x \in A$ важи

$$f(x) = \lim_{t\to t_0} f_t(x).$$

Пишемо и $f_t(x) \to f(x) \quad (t \to t_0)$ за $x \in A$, или само $f_t \to f \quad (t \to t_0)$ на A. Још се каже да у том случају функције f_t теже функцији f **у обичном смислу** или **тачка-по-тачка**. Дакле:

$$f_t \to f \quad (t \to t_0) \text{ на } A \iff$$
$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon, x)\big)(\forall t \in T)\big(t \in U_{t_0} \Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

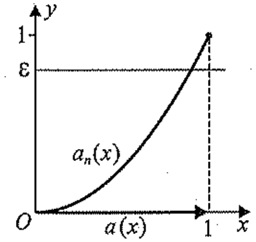
Дефиниција 7.1.2

Нека је $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа $T \subset \mathbf{R}$ и нека је $A \subset \mathbf{R}$. Фамилија функција $\{f_t \colon A \to \mathbf{R} \mid t \in T\}$ **равномерно (униформно) конвергира** функцији $f \colon A \to \mathbf{R}$ на A кад $t \to t_0$ ако се за свако $\varepsilon > 0$ може наћи околина U_{t_0} тачке t_0 (која зависи само од ε) таква да за све $t \in U_{t_0}$ и све $x \in A$ важи $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$. Пишемо $f_t(x) \rightrightarrows f(x) \quad (t \to t_0)$ на A или само $f_t \rightrightarrows f \quad (t \to t_0)$ на A. Дакле:

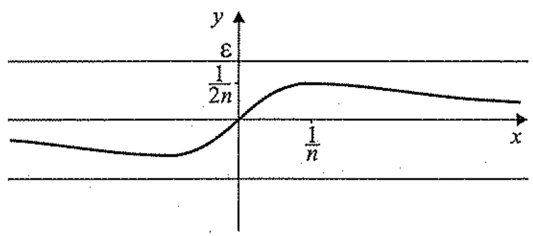
$$f_t \rightrightarrows f \quad (t \to t_0) \text{ на } A \iff$$
$$(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon)\big)(\forall x \in A)(\forall t \in T)\big(t \in U_{t_0} \Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

Приметимо да смо у претходним дефиницијама писали $t \in U_{t_0}$ уместо $t \in \overset{\circ}{U}_{t_0}$, $t \neq t_0$, што би било правилније. Да бисмо поједноставили записивање, тако ћемо чинити и убудуће.

Уочимо одмах разлику између појмова уведених дефиницијама 7.1.1 и 7.1.2. Очигледно је да ако $f_t \rightrightarrows f \quad (t \to t_0)$ на A, тада и $f_t \to f \quad (t \to t_0)$ на A, јер изабрана околина U_{t_0} „одговара“ и свим посебно изабраним $x \in A$. Обратно, међутим, не мора бити тачно, јер се у случају обичне конвергенције околине U_{t_0} бирају зависно од $x \in A$ и није сигурно да ли се може наћи околина која би „одговарала“ сваком таквом x. Рецимо, у примеру 7.1.1.1° за свако фиксирано x, $0 < x < 1$, важи $|a_n(x)| = x^n < \varepsilon$ за $n > \ln\varepsilon / \ln x$, међутим $\ln\varepsilon/\ln x \to \infty$ кад $x \to 1 - 0$, те се не може одредити n_0 тако да је за $n > n_0$ испуњено $|a_n(x)| < \varepsilon$ истовремено за све $x \in (0,1)$.



Сл. 7.1.1



Сл. 7.1.2

Илуструјмо овај закључак и на слици 7.1.1. За дато x, $0 < x < 1$, и дато ε, $0 < \varepsilon < 1$, крива $y = x^n$ биће „испод“ праве $y = \varepsilon$ за довољно велико n. Међутим, ма како било велико n, та крива ће увек имати део (са апсцисом довољно блиском јединици) који ће излазити изван траке ограничене x-осом и правом $y = \varepsilon$.

Дакле, низ $a_n(x) = x^n$ конвергира обично на интервалу $(0,1)$ функцији $a(x) \equiv 0$, али та конвергенција није равномерна.

Наведимо још два примера.

Примери 7.1.2

1° Нека је $a_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Очито је да је, за све $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = 0$. Притом је $|a_n(x)| = \dfrac{1}{2n} \cdot \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ за $x \in \mathbf{R}$, па, како је $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$ за довољно велико n, то закључујемо да $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на $\mathbf{R}$.

На слици 7.1.2 је приказан график функције $a_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; он има екстремне вредности једнаке $\pm 1/2n$ у тачкама $x = \pm 1/n$, тако да се, за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велико n, цео график налази у траци $|y| < \varepsilon$.

2° Фамилија функција $f_t(x) = \sin tx$, $x \in \mathbf{R}$, са параметром $t \in \mathbf{R}$ има за граничну функцију $f(x) = 0$ кад $t \to 0$. Међутим, $f_t(x)$ не тежи $f(x)$ равномерно на $\mathbf{R}$, јер је, за фиксирано $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} |\sin tx| = 1$. Препуштамо читаоцу да провери да ипак важи $f_t(x) \rightrightarrows f(x)$ $(t \to 0)$ на сваком коначном интервалу $[a,b]$. ▲

Наведимо још једну формулацију услова равномерне конвергенције. За дату фамилију функција $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R})$ која тежи тачка-по-тачка, кад $t \to t_0$, функцији $f\colon A \to \mathbf{R}$ означимо за $t \in T$ и $x \in A$:

$$r_t(x) = |f_t(x) - f(x)| \qquad \text{и} \qquad r_t = \sup_{x\in A} r_t(x).$$

Јасно је да тада:

$$f_t(x) \to f(x) \quad (t \to t_0) \quad \text{на } A \iff (\forall x \in A) \lim_{t\to t_0} r_t(x) = 0,$$

$$f_t(x) \rightrightarrows f(x) \quad (t \to t_0) \quad \text{на } A \iff \lim_{t\to t_0} r_t = 0,$$

па је и одатле јасно да $f_t \rightrightarrows f$ повлачи $f_t \to f$, али да обратно не мора да важи.

Рецимо, у примеру 7.1.2.1° је $r_n(x) = \dfrac{|x|}{1+n^2x^2}$ и $r_n = \dfrac{1}{2n}$, па важи $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ и $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на $\mathbf{R}$. У примеру 7.1.2.2° је, међутим, $r_t(x) = |\sin tx|$ и $r_t = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} r_t(x) = 1$, па не важи $\lim\limits_{t\to 0} r_t = 0$ ни $f_t(x) \rightrightarrows 0$ $(t \to 0)$ на $\mathbf{R}$.

Кошијев принцип конвергенције

Као и у неким другим случајевима које смо имали прилике да проучавамо, и за равномерну конвергенцију фамилије функција (са вредностима у $\mathbf{R}$) може се извести општи Кошијев неопходан и довољан услов, захваљујући комплетности простора $\mathbf{R}$. Он, као и обично, омогућава да се о равномерној конвергенцији суди само на основу познавања особина самих функција $f_t(x)$ дате фамилије, не познајући граничну функцију $f(x)$.

Теорема 7.1.1

Нека је t_0 тачка нагомилавања скупа $T \subset \mathbf{R}$ и $A \subset \mathbf{R}$. Фамилија функција $f_t\colon A \to \mathbf{R}$ равномерно конвергира на A кад $t \to t_0$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји околина $U_{t_0} = U_{t_0}(\varepsilon)$ тачке t_0, таква да за сваке две вредности $t_1, t_2 \in U_{t_0} \cap T$ и за свако $x \in A$ важи $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$. Дакле:

$$f_t(x) \text{ равномерно конвергира на } A \quad (t \to t_0)$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists U_{t_0})(\forall t_1, t_2 \in T \cap U_{t_0})(\forall x \in A)\ |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon.$$

Доказ.

Претпоставимо, најпре, да $f_t(x) \rightrightarrows f(x)$ $(t \to t_0)$ на A и за дато $\varepsilon > 0$ изаберимо U_{t_0} тако да за свако $x \in A$ и све $t \in U_{t_0} \cap T$ важи $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Тада ће за произвољне t_1, $t_2 \in U_{t_0} \cap T$ и све $x \in A$ важити

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f_{t_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{t_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

па је услов теореме задовољен.

Обратно, из наведеног услова, фиксирањем $x \in A$, закључујемо да следи да $f_t(x)$, као функција од $t \in T$, задовољава Кошијев услов за постојање граничне вредности $\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x) = f(x)$. У неједнакости $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon/2$ (која, по претпоставци, важи за све $x \in A$ и за све t_1, t_2 из погодно одабране околине U_{t_0}) пређимо на лимес кад $t_2 \to t_0$. Добијамо $|f_{t_1}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ за све $t_1 \in U_{t_0} \cap T$ и све $x \in A$, што и значи да $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ на A. ■

Читаоцу препуштамо да формулише посебан случај ове теореме када се, уместо произвољне фамилије, посматра функционални низ $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$.

7.2. РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ФУНКЦИОНАЛНИХ РЕДОВА

Најважнији специјалан случај конвергенције фамилије функција који ћемо проучавати у овој глави јесте конвергенција функционалних редова. Нека је

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

такав ред, где су $a_n\colon A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R})$ реалне функције и нека је $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ његова n-та парцијална сума. Конкретизујући дефиниције 7.1.1 и 7.1.2 долазимо до следећих појмова.

За ред (1) кажемо да **у обичном смислу** (или **тачка-по-тачка**) **конвергира** на скупу A ако низ његових парцијалних сума $s_n(x)$ конвергира на A, тј. ако постоји функција $s\colon A \to \mathbf{R}$, таква да је за свако $x \in A$ испуњено

$s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. За ред (1) кажемо да **равномерно (униформно) конвергира** на скупу A ако поред тога важи $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ $(n \to \infty)$ на A, тј. ако његов остатак $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ равномерно на A тежи нули кад $n \to \infty$.

Примери 7.2.1

1° Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ конвергира за $x \in (-1,1)$ и његов збир је $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$. За његов остатак $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$, при фиксираном $n \in \mathbf{N}$, важи $\lim\limits_{x\to 1-0} r_n(x) = +\infty$. Због тога не важи $r_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на $(-1,1)$, па дати ред не конвергира равномерно на $(-1,1)$.

2° Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ конвергира равномерно на $\mathbf{R}$. Заиста, на основу Лајбницовог правила (став 9.3.2 и задатак 9.10 из М.А.I) тај ред конвергира за све $x \in \mathbf{R}$ и за његов остатак $r_n(x)$ важи

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

што значи да $r_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на $\mathbf{R}$. ▲

Основни Кошијев принцип конвергенције (теорема 7.1.1) примењен на функционалне редове гласи:

Теорема 7.2.1

Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на $A \subset \mathbf{R}$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да за све $n \in \mathbf{N}$ за које је $n > n_0$ и све $p \in \mathbf{N}$ важи

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

истовремено за све $x \in A$. Симболички записано:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно конвергира на } A \iff$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in A)(\forall n, p \in \mathbf{N})\Big(n > n_0 \Rightarrow \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\Big| < \varepsilon\Big). \blacksquare$$

Последица 7.2.1

Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на $A \subset \mathbf{R}$, тада $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на A.

Доказ.

Ово тврђење добијамо из претходне теореме стављајући $p = 1$ и узимајући у обзир дефиницију 7.1.2 равномерне конвергенције низа. ■

Као и код конвергенције нумеричких редова, неопходан услов равномерне конвергенције реда наведен у последици 7.2.1 није довољан.

Пример 7.2.2

Функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ конвергира за $x \in [-1,1)$. Заиста, за $|x| < 1$ он конвергира апсолутно, на пример по Даламберовом правилу (став 9.2.2 из М.А.I), а за $x = -1$ по Лајбницовом. Притом је за $x \in [-1,1)$ испуњено $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, па $\dfrac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на $[-1,1)$. Међутим, овај ред не конвергира равномерно на $[-1,1)$. У то се можемо уверити применом теореме 7.2.1, јер је за x довољно блиско јединици испуњено

$$\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n}\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) > \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4},$$

тј. за дато ε, $0 < \varepsilon < 1/4$, не може се наћи $n_0 \in \mathbf{N}$ тако да за свако $x \in [-1,1)$, свако $n > n_0$ и, на пример, $p = n$ буде испуњено $\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2n}\right| < \varepsilon$. ▲

Конвергенција редова се, по дефиницији, своди на конвергенцију низова. Међутим, као што већ знамо из теорије нумеричких редова, за испитивање њихове конвергенције постоје бројна правила. Слично је, као што ћемо сада видети, и са равномерном конвергенцијом редова. Зато је од значаја приметити да се испитивање конвергенције (односно равномерне конвергенције) сваког функционалног низа може свести на испитивање конвергенције (односно равномерне конвергенције) неког функционалног реда. Наиме, уместо низа $(a_n(x))$ можемо посматрати ред

$$a_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+1}(x) - a_n(x)]$$

чији се низ парцијалних сума (до на небитну промену индекса) поклапа са низом $(a_n(x))$.

Наведимо сада нека специјална правила за равномерну конвергенцију функционалних редова. Најједноставније и најчешће примењивано је следеће **Вајерштрасово правило**.

Став 7.2.1

Ако постоји низ $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ реалних бројева, такав да:

1° постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leqslant c_n$;

2° ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

Доказ.

Није ограничење општости ако претпоставимо да неједнакост $|a_n(x)| \leqslant c_n$ важи за све $n \in \mathbf{N}$ и све $x \in A$. Како је за $x \in A$:

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| \leqslant c_{n+1} + \cdots + c_{n+p},$$

и како из 2° следи да се збир $c_{n+1}+\cdots+c_{n+p}$ може учинити произвољно малим за довољно велико n и свако p, то тврђење става следи из Кошијеве теореме 7.2.1. ■

Примери 7.2.3

1° Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира (тј. ако конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$) тада редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ равномерно конвергирају на $\mathbf{R}$ по Вајерштрасовом правилу.

2° Посматрајмо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ на скупу $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}$. Његов општи члан се на скупу A може по апсолутној вредности мајорирати општим чланом реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где је $c_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 0 < 1$, то ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира на основу Даламберовог правила, па следи равномерна конвергенција датог функционалног реда на скупу A. ▲

Очигледно је да у случају да се о равномерној конвергенцији на A функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ може закључити на основу Вајерштрасовог правила, онда тај ред мора и апсолутно конвергирати на A, тј. за свако $x \in A$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ мора бити конвергентан (штавише, овај последњи ред мора бити равномерно конвергентан на A). Као што ћемо ускоро видети, постоје редови који су равномерно, али не и апсолутно конвергентни; за такве редове, дакле, равномерна конвергенција се не може доказати применом овог једноставног правила. Навешћемо сада нека правила који се могу примењивати у таквим ситуацијама. За њихово доказивање користићемо Абелову лему 9.3.1 из М.А.I.

Став 7.2.2 (Абелово правило)

Нека:

1° функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbf{R}$;

2° $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbf{R}$ важи $|a_n(x)| \leqslant K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

Доказ.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан број. На основу претпоставке 1° и теореме 7.2.1 постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, такав да за свако $x \in A$ и све $n > n_0$, $p \in \mathbf{N}$ важи

$$|b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Користећи Абелову лему добијамо да је за све $x \in A$, $n > n_0$ и $p \in \mathbf{N}$ испуњено

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K}(K + 2K) = \varepsilon,$$

што на основу Кошијевог критеријума значи да је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергентан на A. ■

Став 7.2.3 (Дирихлеово правило)

Нека:

1° функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbf{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant K$;

2° $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ и важи $a_n(x) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на A.

Тада је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергентан на A.

Доказ.

За дато $\varepsilon > 0$ одредимо $n_0 \in \mathbf{N}$ тако да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| < \varepsilon/6K$. На основу претпоставке 1° имамо да је за све n, $p \in \mathbf{N}$ и свако $x \in A$ испуњено

$$|b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+p}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant 2K.$$

Поново примењујући Абелову лему добијамо да је тада

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2K\left(\frac{\varepsilon}{6K} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6K}\right) = \varepsilon,$$

па тврђење и овог става следи на основу Кошијевог критеријума. ■

Примери 7.2.4

1° Посматрајмо редове

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

и претпоставимо (за разлику од примера 7.2.3.1°) да је низ (a_n) монотон и да тежи нули. Услов 2° Дирихлеовог правила је тада испуњен за $a_n(x) \equiv a_n$. Проверимо да ли важи и услов 1°. Приметимо да за $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, важи

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Посматрајмо зато дате редове на неком сегменту $[a, b]$ који не садржи ниједну тачку облика $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Тада из претходног следи да постоји константа K, таква да за све $x \in [a, b]$ и за све $n \in \mathbf{N}$ важи $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant K$, те је, на основу Дирихлеовог правила, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ равномерно конвергентан на $[a, b]$. Слично се изводи да исто важи и за ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Ако сегмент $[a,b]$ на коме се посматрају дати редови садржи неку од тачака облика $x_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ за $x = x_0$ конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Што се тиче реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, он конвергира и за $x = x_0$ (јер му је општи члан тада идентички једнак нули), међутим, ипак се може догодити да конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ на $[a,b]$ буде неравномерна. На пример, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ конвергира на $[0,2\pi]$ неравномерно, у шта се можемо лако уверити, рецимо, применом Кошијеве теореме 7.2.1.

2° Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$ равномерно конвергира на $[0,\infty)$ по Абеловом правилу. Заиста, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ конвергира по Лајбницовом правилу, па и равномерно конвергира (на произвољном скупу); с друге стране, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ је, за фиксирано $x \in [0,\infty)$, монотон низ и за свако $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0,\infty)$ важи $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant 1$. ▲

7.3. ФУНКЦИОНАЛНА СВОЈСТВА ГРАНИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

Промена поретка граничних прелаза

Приступимо сада решавању основног задатка ове главе – испитивању особина функција задатих као границе неких фамилија функција (специјално, функционалних низова и редова). Као што смо већ поменули, већина проблема који се притом јављају јесу проблеми промена поретка двају граничних прелаза. Најчешћи довољан (али не и неопходан!) услов који обезбеђује такву промену јесте равномерна конвергенција граничној функцији.

Теорема 7.3.1

Нека је $f_t \colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R})$ фамилија реалних функција, $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа T и $a \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Ако:

1° $f_t \rightrightarrows f$ $(t \to t_0)$ на A,

2° за свако $t \in T$ постоји $\lim\limits_{x\to a} f_t(x) = b_t$,

тада постоје $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{t\to t_0} b_t$ и важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to t_0} b_t$, тј.

$$\lim_{x\to a}\lim_{t\to t_0} f_t(x) = \lim_{t\to t_0}\lim_{x\to a} f_t(x).$$

Доказ.

Из услова 1°, на основу Кошијеве теореме 7.1.1, следи да се за дато $\varepsilon > 0$ може наћи околина U тачке t_0, таква да за све $t_1, t_2 \in T \cap U$ и свако $x \in A$ важи

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon.$$

Одатле, коришћењем услова 2°, добијамо да за све $t_1,\ t_2 \in T \cap U$ важи $|b_{t_1} - b_{t_2}| \leqslant \varepsilon$. Дакле, фамилија бројева b_t (схваћена као функција из T у $\mathbf{R}$) задовољава Кошијев услов за постојање граничне вредности $\lim\limits_{t\to t_0} b_t = b$. Докажимо да је и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

За произвољно $t \in T$ и $x \in A$ важи

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_t(x)| + |f_t(x) - b_t| + |b_t - b|.$$

Сваки од три сабирка на десној страни ове неједнакости може се учинити произвољно малим. Заиста, на основу претпоставке 1°, може се наћи околина U тачке t_0, таква да је за све $x \in A$ и $t \in T \cap U$ испуњено $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon/3$. Даље, због $\lim\limits_{t\to t_0} b_t = b$, може се наћи околина V тачке t_0, таква да за $t \in T \cap V$ важи $|b_t - b| < \varepsilon/3$. За произвољно $t \in T \cap U \cap V$, на основу 2°, одредимо околину W тачке a, тако да је $|f_t(x) - b_t| < \varepsilon/3$ за све $x \in W \cap A$. За такве x је онда $|f(x) - b| < \varepsilon$, па важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. ■

Непосредна последица ове основне теореме је следеће важно тврђење.

Теорема 7.3.2

Ако фамилија функција $f_t \colon A \to \mathbf{R}$ $(t \in T \subset \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R})$, непрекидних у тачки $a \in A$, равномерно на A, кад $t \to t_0 \in T'$, конвергира функцији $f \colon A \to \mathbf{R}$, тада је и функција f непрекидна у тачки a. ■

Приметимо да, с обзиром да лимес функције у тачки, као и њена непрекидност, зависе само од особина функције у некој, произвољно малој, околини те тачке, у теоремама 7.3.1 и 7.3.2 услов равномерне конвергенције фамилије f_t на скупу A може се заменити условом равномерне конвергенције на некој околини тачке a. Овом напоменом често се можемо користити при практичном доказивању непрекидности граничне функције или налажењу њеног лимеса (в. даље пример 7.3.4).

Читаоцу препуштамо да теореме 7.3.1 и 7.3.2 преформулише за случај када се уместо произвољне фамилије функција посматра функционални низ. Овде дајемо формулацију одговарајућих ставова за функционалне редове.

Последица 7.3.1

Нека је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергентан на A и нека, у некој тачки a која је тачка нагомилавања скупа A, постоји $\lim\limits_{x\to a} a_n(x)$, за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} a_n(x)$ конвергира и важи

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} a_n(x). \quad ■$$

Каже се још да се гранична вредност $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ може наћи „уласком под знак суме“.

Последица 7.3.2

Нека су $a_n\colon A \to \mathbf{R}$, за свако $n \in \mathbf{N}$, непрекидне функције у тачки $a \in A$ и нека ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира у некој околини тачке a. Тада је и $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрекидна функција у тачки a. ∎

Примери 7.3.1

1° У примеру 7.1.1.1° видели смо да низ $a_n(x) = x^n$ непрекидних функција на $(-1, 1]$ конвергира, кад $n \to \infty$, функцији

$$a(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{ако } x = 1, \end{cases}$$

која је прекидна у тачки $x = 1$. На основу последице 7.3.2 (поново) закључујемо да $a_n(x)$ не тежи $a(x)$ равномерно на $(-1, 1]$.

2° Посматрајмо функционални ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}], \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Парцијалне суме тога реда су $s_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$, а његов збир је $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 x e^{-n^2x^2} = 0$ за све $x \in \mathbf{R}$. Докажимо, међутим, да овај ред не конвергира равномерно на $\mathbf{R}$.

Заиста, лако се проверава да је

$$\max_{x\in\mathbf{R}} |s_n(x)| = s_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = n\sqrt{\frac{2}{e}},$$

па је јасно да ни за једно $\varepsilon > 0$ не може важити $|s_n(x)| < \varepsilon$ истовремено за све $x \in \mathbf{R}$, ма како велико било n.

Приметимо, међутим, да су и чланови и збир овог неравномерно конвергентног реда непрекидне функције на $\mathbf{R}$. ▲

Претходни пример показује да услов равномерне конвергенције у теоремама 7.3.1 и 7.3.2 и њиховим последицама, мада битан (јер без њега та тврђења престају да важе), ипак није неопходан. Постоји, међутим, једна важна специјална ситуација када је равномерна конвергенција неопходан услов непрекидности граничне функције.

Став 7.3.1 (Дини[1])

Нека је $K \subset \mathbf{R}$ компактан (дакле, затворен и ограничен) скуп и нека је $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ монотон (по n) низ функција непрекидних на K. Ако $a_n(x) \to a(x)$ $(n \to \infty)$ на K и ако је $a\colon K \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, тада $a_n \rightrightarrows a$ $(n \to \infty)$ на K.

[1] U. Dini (1845–1918), италијански математичар

Доказ.

Претпоставимо да је, на пример, a_n растући низ, тј. да за свако n (или почев од неког n) и свако $x \in K$ важи $a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x)$. Нека је $\varepsilon > 0$ дати реалан број. За свако $x \in K$ нађимо индекс $n_x \in \mathbf{N}$, такав да важи $0 \leqslant a(x) - a_{n_x}(x) < \varepsilon$. Како су функције a и a_n непрекидне у тачки x, то неједнакост $0 \leqslant a(y) - a_{n_x}(y) < \varepsilon$ важи и за y из неке околине $U(x)$ тачке x. Такву околину $U(x)$ можемо изабрати за сваку тачку $x \in K$ и добијена фамилија $\{\,U(x) \mid x \in K\,\}$ чини покривач компактног скупа K отвореним скуповима $U(x)$. Може се, дакле, издвојити коначно много тачака $x_1, \ldots, x_k \in K$, таквих да околине $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ саме покривају K. Означимо сада

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}.$$

За $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ важиће тада $0 \leqslant a(y) - a_n(y) < \varepsilon$ за све $y \in K$, што и значи да низ $a_n(y)$ тежи функцији $a(y)$, кад $n \to \infty$, равномерно по $y \in K$. ∎

Последица 7.3.3

Нека је $K \subset \mathbf{R}$ компактан скуп и нека су $a_n\colon K \to \mathbf{R}$ непрекидне и ненегативне функције. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира на K и његова сума је непрекидна функција, тада он конвергира равномерно на K.

Доказ.

Због ненегативности функција a_n, парцијалне суме датог реда образују, за свако фиксирано $x \in K$, монотон низ, па тврђење следи из Динијевог става. ∎

Приметимо да је компактност домена битна претпоставка у Динијевом ставу.

Пример 7.3.2

Низ непрекидних функција $a_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $0 < x < 1$, конвергира на $(0, 1)$ непрекидној функцији $a(x) = 0$, при чему је, за све $x \in (0, 1)$, $\big(a_n(x)\big)_n$ монотон низ. Међутим, та конвергенција није равномерна (проверити!). ▲

Интеграција и гранични прелаз

Теорема 7.3.3

Нека су $f_t\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ интеграбилне функције за свако $t \in T \subset \mathbf{R}$ и нека је $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа T. Ако $f_t \rightrightarrows f$ $\ (t \to t_0)$ на $[a, b]$, тада је и f интеграбилна функција на $[a, b]$ и важи

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to t_0} \int_a^b f_t(x)\, dx.$$

Доказ.

У доказу интеграбилности функције f користићемо критеријум интеграбилности садржан у теореми 8.1.1 из М.А.I.

Најпре, за дато $\varepsilon > 0$ изаберимо околину U тачке t_0, такву да је за све $t \in U \cap T$ и све $x \in [a, b]$ испуњено

$$f_t(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_t(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{2}$$

За произвољно такво t одредимо $\delta > 0$, такво да за Дарбуове суме функције f_t које одговарају произвољној подели P сегмента $[a, b]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$, важи

$$S(f_t, P) - s(f_t, P) < \varepsilon. \tag{3}$$

Из (2) следи да је

$$s(f, P) \geqslant s(f_t, P) - \varepsilon \quad \text{и} \quad S(f, P) \leqslant S(f_t, P) + \varepsilon. \tag{4}$$

Најзад, из (3) и (4) добијамо да је $S(f, P) - s(f, P) < 3\varepsilon$ за све поделе P за које је $\lambda(P) < \delta$, што према поменутој теореми значи да $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Једнакост (1) следи из чињенице да је за свако $t \in U \cap T$, где је U околина тачке t_0, изабрана тако да важи (2), испуњено

$$\left|\int_a^b f_t(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_t(x) - f(x)\big)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_t(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Последица 7.3.4

Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a, b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\,dx. \quad \blacksquare \tag{5}$$

Ако важи формула (5), још се каже да се функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ може интегрисати члан-по-члан.

Примери 7.3.3

1° У примеру 7.1.1.2° видели смо да за низ $a_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ не важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right) dx.$$

Зато (поново) закључујемо да тај низ на $[0, 1]$ не конвергира равномерно.

2° Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (апсолутно) конвергира за $0 \leqslant x < 1$, али дивергира за $x = 1$. Дакле, он не конвергира равномерно на $[0, 1]$. Ипак, његов збир $1/(1+x)$ је интеграбилна функција на $[0, 1]$ и важи

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,dx. \quad \blacktriangle$$

Диференцирање и гранични прелаз

За разлику од непрекидности и интеграбилности, за диференцијабилност граничне функције фамилије диференцијабилних функција није довољно, у општем случају, претпоставити да та фамилија равномерно конвергира (в. задатак 7). Довољни услови који обезбеђују ту диференцијабилност и дају могућност налажења извода граничне функције дати су у следећој теореми.

Теорема 7.3.4

Нека су $f_t \colon [a, b] \to \mathbf{R}$ диференцијабилне функције за $t \in T \subset \mathbf{R}$ и нека је $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа T. Ако:

1° фамилија $\{\, f_t \mid t \in T \,\}$ конвергира за неко $x_0 \in [a, b]$ кад $t \to t_0$;

2° фамилија изводних функција $\{\, f_t' \mid t \in T \,\}$ конвергира равномерно на $[a, b]$ кад $t \to t_0$,

онда фамилија $\{\, f_t \mid t \in T \,\}$ такође равномерно конвергира на $[a, b]$ некој функцији f која је диференцијабилна и важи $f'(x) = \lim\limits_{t\to t_0} f_t'(x)$.

Доказ.

Докажимо најпре да фамилија $\{\, f_t \mid t \in T \,\}$ равномерно конвергира на $[a, b]$. За дато $\varepsilon > 0$, на основу 1°, можемо наћи околину U тачке t_0 тако да за све $t_1, t_2 \in U \cap T$ важи

$$|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

За произвољне t_1, $t_2 \in U \cap T$ применимо теорему о средњој вредности на функцију $f_{t_1} - f_{t_2}$ на интервалу $[x_0, x]$ за произвољно $x \in [a, b]$. Добијамо:

$$\big(f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\big) - \big(f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\big) = (x - x_0)\big(f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c)\big), \tag{7}$$

за неко $c \in (x_0, x)$. Смањујући, ако је потребно, околину U можемо постићи да за све t_1, $t_2 \in U \cap T$ и за све $c \in [a, b]$ (захваљујући 2°) важи

$$|f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{8}$$

Из (7) онда добијамо

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Но, како је

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0)| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)|,$$

из (6) и (9) следи да за свако $x \in [a, b]$ и све t_1, $t_2 \in U \cap T$ важи $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$, што и значи да фамилија $\{\, f_t \mid t \in T \,\}$ равномерно на $[a, b]$ конвергира, кад $t \to t_0$, некој функцији $f \colon [a, b] \to \mathbf{R}$.

Нека је сада x произвољна тачка сегмента $[a, b]$. Посматрајмо функцију

$$\varphi_t(h) = \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h},$$

дефинисану за оне $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ за које $x+h \in [a,b]$. С једне стране, јасно је да је $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_t(h) = f_t'(x)$. Докажимо да, с друге стране, фамилија $\{\varphi_t \mid t \in T\}$, кад $t \to t_0$, равномерно конвергира по h на указаном скупу. Заиста, примењујући на функцију $f_{t_1} - f_{t_2}$ Лагранжову теорему на сегменту $[x, x+h]$ добијамо

$$\varphi_{t_1}(h) - \varphi_{t_2}(h) = \frac{f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x)}{h} - \frac{f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x)}{h} = f_{t_1}'(c) - f_{t_2}'(c),$$

за неко $c \in (x, x+h)$, па из (8) следи

$$|\varphi_{t_1}(h) - \varphi_{t_2}(h)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

за произвољно, унапред задато, $\varepsilon > 0$ и све t_1, t_2 из погодно одабране околине $U \cap T$ тачке t_0. Примењујући сада на фамилију функција $\varphi_t(h)$ теорему 7.3.1 закључујемо да њена гранична функција

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

има лимес кад $h \to 0$ и да је он једнак $\lim\limits_{t\to t_0} \lim\limits_{h\to 0} \varphi_t(h) = \lim\limits_{t \to t_0} f_t'(x)$. Дакле, функција f је диференцијабилна у тачки x и важи

$$f'(x) = \lim_{t\to t_0} f_t'(x),$$

што је и требало доказати. ∎

Као и у неколико претходних ситуација, препустићемо читаоцу да формулише специјалан случај ове теореме када се уместо о произвољној фамилији говори о диференцирању граничне функције функционалног низа. Овде дајемо формулацију одговарајућег става за функционалне редове.

Последица 7.3.5

Ако је свака од функција $a_n \colon [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a,b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a,b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a,b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a,b]$. ∎

Ако важи закључак ове последице, каже се да се ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ може диференцирати члан-по-члан.

Приметимо да, слично као и код непрекидности, када се доказује диференцијабилност граничне функције неке фамилије функција на неком интервалу $A \subset \mathbf{R}$, онда уствари треба доказивати њену диференцијабилност у свакој тачки тог интервала, па није неопходно да услови теореме 7.3.4 буду задовољени на целом интервалу A, већ је довољно да они важе у некој околини сваке фиксиране тачке.

Пример 7.3.4

Испитајмо особине **Риманове зета функције** дате са

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{10}$$

Јасно је да ред (10) конвергира ако и само ако је $x > 1$, па је домен функције ζ интервал $(1, +\infty)$. Чланови тога реда су непрекидне функције од $x \in (1,+\infty)$, међутим он не конвергира равномерно на том интервалу (проверити!), па се о непрекидности функције ζ не може непосредно закључити на основу теореме 7.3.2. Међутим, ако за произвољну фиксирану тачку $x_0 > 1$ одаберемо позитиван број ε тако да важи $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (1, +\infty)$, онда ће за $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ важити $\dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^{x_0 - \varepsilon}}$, па, како је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{x_0-\varepsilon}}$ конвергентан, из Вајерштрасовог правила следи равномерна конвергенција реда (10) на $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. На тај начин, на основу последице 7.3.2 закључујемо да је функција ζ непрекидна у тачки x_0, дакле (због произвољности x_0) и на целом интервалу $(1, +\infty)$.

На сличан начин доказујемо и диференцијабилност функције ζ на $(1,+\infty)$. Наиме, за произвољно $x_0 > 1$ ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

равномерно конвергира на сваком интервалу облика $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ако је $x_0 - \varepsilon > 1$ (доказати!). Зато су испуњени услови последице 7.3.5, па добијамо да је функција ζ диференцијабилна у тачки x_0 (па и на интервалу $(1,+\infty)$) и важи

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x > 1.$$

Индуктивно се лако закључује да за свако $k \in \mathbf{N}$ важи

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}, \quad x > 1,$$

тј. функција $\zeta \colon (1, +\infty) \to \mathbf{R}$ је бесконачно диференцијабилна. ▲

Степени редови

У овом одељку применићемо развијену теорију функционалних редова да бисмо извели нека својства функција дефинисаних степеним редовима

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{11}$$

(видети одељак 9.4 у М.А.I). Докажимо најпре следећи

Лако се проверава да функција l може да се изрази у облику

$$l(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i|x-x_i|$$

са погодно одабраним коефицијентима a_i. Зато је још довољно доказати да се свака од функција $|x-x_i|$ на $[-1,1]$ може равномерно апроксимирати полиномима, а то ћемо доказати тако што ћемо показати да се функција $|x|$ може равномерно апроксимирати полиномима на скупу $[-2,2]$ који садржи све сегменте облика $[-1-x_i, 1-x_i]$. Ово последње, међутим, лако следи на основу биномног развоја. Наиме, важи

$$|x|=2\left|\frac{x}{2}\right|=2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=2\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^n$$

и тај ред равномерно конвергира на сегменту $[-2,2]$, јер ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}$ (апсолутно) конвергира (проверити!).

Означимо са p_i ($i=0, 1, \dots, n$) полином који равномерно апроксимира функцију $a_i|x-x_i|$, тј. за који важи

$$\big|\, a_i|x-x_i|-p_i(x)\,\big|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)},$$

и са p полином $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}p_i(x)$. Тада је

$$|l(x)-p(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}(a_i|x-x_i|-p_i(x))\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n}\big|\, a_i|x-x_i|-p_i(x)\,\big|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Узимајући у обзир релацију (2) добијамо да је испуњено $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$, за све $x\in[-1,1]$, што је и требало доказати. ∎

Последица 7.4.1

Простор $C[a,b]$ је сепарабилан.

Доказ.

Претпоставимо поново да је $[a,b]=[-1,1]$. Нека је f произвољна функција из $C[-1,1]$ и ε позитиван број. На основу доказане теореме постоји полином $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}p_kx^k$ са особином да је $d(f,p)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Изаберимо рационалне бројеве q_k тако да је $|p_k-q_k|<\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}$ за $k=0, 1, \dots, n$ и означимо са q полином $q(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}q_kx^k$. Тада је

$$d(p,q)=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\sum_{k=0}^{n}(p_k-q_k)x^k\right|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}(n+1)=\frac{\varepsilon}{2},$$

па је $d(f,q)\leqslant d(f,p)+d(p,q)<\varepsilon$. То значи да је скуп полинома са рационалним коефицијентима свуда густ у простору $C[a,b]$. Лако се проверава да је тај скуп полинома пребројив, па је простор $C[a,b]$ сепарабилан. ∎

Као и у случају других метричких простора, од великог је значаја да се нађе неопходан и довољан услов који обезбеђује да је неки подскуп простора $C[a,b]$ компактан. Наиме, према ставу 1.5.4 (в. и примедбу после тог става) такав подскуп има особину да сваки бесконачан низ у њему има подниз који конвергира елементу тог скупа. На основу става 1.5.2 и последице 1.5.1 (в. и напомену после те последице) знамо да су неопходни услови компактности ограниченост и затвореност. Ти услови, међутим, нису довољни. На пример, јединична сфера $S(0,1)$ простора $C[a,b]$ (дакле, скуп функција $f\in C[a,b]$ које имају особину да је $d(f,0)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=1$) није компактан скуп, мада је ограничен и затворен (проверити!). Навешћемо без доказа теорему која даје неопходне и довољне услове компактности подскупа простора $C[a,b]$ (за доказ видети нпр. [1]).

Теорема 7.4.2 (Арцела-Асколи[2])

Скуп $K\subset C[a,b]$ је компактан ако и само ако важе следећи услови:

1° K је затворен скуп;

2° скуп K је ограничен, тј. постоји број M, такав да је за све $f\in K$ и свако $x\in[a,b]$ испуњено $|f(x)|\leqslant M$ (каже се још да су функције $f\in K$ **униформно ограничене**);

3° функције $f\in K$ су **подједнако непрекидне**, тј. за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, такво да за све $f\in K$ важи:

$$x',x''\in[a,b],\ |x'-x''|<\delta \implies |f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \quad ∎$$

ЗАДАЦИ

1. Ако су $\{\,f_t\mid t\in T\,\}$ и $\{\,g_t\mid t\in T\,\}$ равномерно конвергентне фамилије функција на скупу A, доказати да је и $\{\,f_t+g_t\mid t\in T\,\}$ равномерно конвергентна фамилија на A. Ако су још функције f_t и g_t ($t\in T$) равномерно ограничене на A, доказати да је $\{\,f_tg_t\mid t\in T\,\}$ равномерно конвергентна фамилија на A.

2. Доказати да фамилија функција $f_t(x)=e^{-(x/t)^2}$, $x\in\mathbf{R}$, $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, кад $t\to 0$, конвергира неравномерно на $\mathbf{R}$.

3. Доказати да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ равномерно конвергира на сваком коначном интервалу, али није апсолутно конвергентан ни за једно $x\in\mathbf{R}$.

4. Доказати да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ конвергира апсолутно и равномерно на $\mathbf{R}$, али да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ не конвергира равномерно.

[2] C. Arzelà (1847–1912), G. Ascoli (1843–1896), италијански математичари

5. Нека је

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi}{x}, & \text{ако } \dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{за остале } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Доказати:

1° низ $\big(f_n(x)\big)$ конвергира неравномерно непрекидној функцији кад $n \to \infty$;

2° ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ апсолутно конвергира за све $x \in [0,1]$ али не конвергира равномерно на $[0,1]$.

6. Нека је за $n \in \mathbf{N}$ и $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\,\pi x)$. Доказати:

1° за свако n је f_n интеграбилна функција на сваком коначном интервалу;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ је Дирихлеова функција $\chi(x)$, па није интеграбилна ни на једном коначном интервалу.

7. Нека је $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ за $n \in \mathbf{N}$ и $x \in \mathbf{R}$. Доказати:

1° $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$ на $\mathbf{R}$;

2° функције f_n су диференцијабилне у 0 и важи $f_n'(0) = \sqrt{n}$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0) = 0$.

8. Нека је (c_n) низ реалних бројева. Доказати да ако **Дирихлеов ред** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^x}$ конвергира за неко $x_0 \in \mathbf{R}$, тада он конвергира равномерно за $x \geqslant x_0$, при чему за $x > x_0 + 1$ конвергира апсолутно. Доказати да је функција коју тај ред дефинише бесконачно диференцијабилна у својој области дефинисаности.

9. Користећи Динијево правило (став 7.3.1) доказати да низ функција $f_n(x) = n(1 - \sqrt[n]{x})$, кад $n \to \infty$, конвергира функцији $f(x) = \ln(1/x)$, равномерно на сваком сегменту $[a,b] \subset (0,1)$. Доказати да $f_n(x)$ не конвергира $f(x)$ равномерно на $(0,1]$.

10. Испитати конвергенцију (обичну, апсолутну и равномерну) **хипергеометријског реда**

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, x^n$$

за α, β, $\gamma \neq -k$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbf{R}$. Доказати да за све наведене вредности параметара α, β, γ и за $|x| < 1$ он дефинише функцију $f(x)$ која задовољава диференцијалну једначину

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

11. Доказати да **Беселова**[3] **функција** $J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+n}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, задовољава диференцијалну једначину $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

12. Доказати да је

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

13. За елиптичке интеграле прве и друге врсте:

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \qquad 0 < k < 1,$$

доказати да важи:

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2}\, k^{2n}\right],$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!^2}{(2n)!!^2} \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1}\right].$$

14. Доказати да је $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

15. Нека је φ_0 периодична функција с периодом 1, која је на $[0,1]$ дата помоћу

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 - x, & \text{ако } 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и нека је за $n \in \mathbf{N}$ и $x \in \mathbf{R}$: $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x)$. Доказати:

1° ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ конвергира равномерно на $\mathbf{R}$ и дефинише непрекидну функцију $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2° функција f није диференцијабилна ни у једној тачки $x_0 \in \mathbf{R}$.

[Први пример непрекидне функције која нигде није диференцијабилна дао је Вајерштрас; овај, нешто једноставнији, пример припада Ван дер Вардену[4].]

16. Доказати да за $|x| < \pi/2$ важи

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!}\, x^{2n-1},$$

---

[3] F. W. Bessel (1784–1846), немачки астроном

[4] B. L. van der Waerden (1903–1996), холандски математичар

Став 7.3.2

Нека степени ред (11) има радијус конвергенције $R > 0$. Тада за свако r, $0 < r < R$, тај ред равномерно конвергира на сегменту $[-r, r]$.

Доказ.

Како ред (11) апсолутно конвергира за $x = r$, то његова равномерна конвергенција на $[-r, r]$ лако следи на основу Вајерштрасовог правила. ∎

Како је свака тачка x_1 интервала $(-R, R)$ садржана у неком сегменту облика $[-r, r]$, $0 < r < R$, то из овог става непосредно добијамо да важи

Последица 7.3.6

Ако је радијус конвергенције R степеног реда (11) позитиван, функција $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ је непрекидна на интервалу $(-R, R)$. ∎

Последица 7.3.7

Ако у некој околини тачке 0 важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{12}$$

онда је $a_n = b_n$ за свако $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказ.

Стављајући у једнакости (12) $x = 0$ добијамо $a_0 = b_0$. За $x \neq 0$, скраћивањем добијене једнакости, добијамо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$. Због доказане непрекидности, међутим, та једнакост важи и за $x = 0$, тј. важи $a_1 = b_1$. Даље се аналогно редом добија $a_n = b_n$, $n = 2, 3, \ldots$. ∎

Приметимо да у општем случају ред (11) не конвергира равномерно на целом свом интервалу конвергенције $(-R, R)$. Заиста, у примерима 7.2.1.1° и 7.2.2 доказали смо да редови $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, односно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, не конвергирају равномерно на $(-1, 1)$. Међутим, ако ред (11) конвергира у неком од крајева интервала конвергенције, макар и неапсолутно, тада се интервал равномерне конвергенције може „проширити" до тога краја. Наиме, важи следећа **Абелова теорема**.

Теорема 7.3.5

Ако ред (11) има радијус конвергенције $R > 0$ и ако он конвергира за $x = R$, онда он конвергира равномерно на сегменту $[0, R]$ и његова сума је непрекидна (слева) у тачки $x = R$, тј. важи

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Доказ.

Општи члан реда (11) напишимо у облику

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Како ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, по претпоставци, конвергира, а низ $\left(\left(\dfrac{x}{R}\right)^n\right)$ је за $x \in [0, R]$ ограничен и опадајући (по n), то ред (11) равномерно конвергира на $[0, R]$ на основу Абеловог правила (став 7.2.2). ∎

Применом Абелове теореме се лако оправдавају резултати о развојима у степене редове елементарних функција које смо извели у М.А.I.

Наведимо једну примену ове теореме на множење нумеричких редова. Подсетимо се да ако редови реалних бројева $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергирају, онда и њихов производ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где је $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, такође конвергира и да му је сума једнака производу сума датих редова. Ако редови $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ само условно конвергирају, онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ не мора да конвергира. Међутим, важи

Став 7.3.3

Ако редови $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где је $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, конвергирају, тада важи

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{13}$$

Доказ.

Из конвергенције реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ следи да ред $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ апсолутно конвергира за $|x| < 1$ и, на основу теореме 7.3.5, важи $\lim\limits_{x \to 1-0} A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Слично важи за ред $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. За ред $C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, због апсолутне конвергенције редова $A(x)$ и $B(x)$ за $|x| < 1$, важи $C(x) = A(x)B(x)$. Поново примењујући теорему 7.3.5, преласком на лимес кад $x \to 1 - 0$, из те једнакости добијамо релацију (13). ∎

У вези са диференцирањем и интеграцијом функције дефинисане степеним редом важи следеће једноставно тврђење.

Став 7.3.4

Ако ред (11) има позитиван радијус конвергенције R, онда се он унутар свог интервала конвергенције може диференцирати и интегрисати члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни.

Доказ.

Формално диференцирање реда (11) даје ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, јасно је да тај ред има исти радијус конвергенције као и ред (11). На основу става 7.3.2 следи да је претходно диференцирање члан-по-члан оправдано.

Слично се доказује да за свако $x \in \mathbf{R}$ за које је $|x| < R$ важи

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \quad ■$$

Поменимо да, мада се при диференцирању и интеграцији радијус конвергенције степеног реда не мења, на рубу интервала конвергенције његово понашање се може променити.

Последица 7.3.8

Унутар свог интервала конвергенције степени ред (11) дефинише бесконачно диференцијабилну функцију $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, такву да је $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$. ■

Другим речима, ако се функција може представити као збир неког степеног реда, онда је тај ред обавезно њен Тејлоров ред. Поновимо још једном да то не значи да је свака бесконачно-диференцијабилна функција једнака збиру свог Тејлоровог реда (в. пример 9.4.3 у М.А.I).

Сви наведени резултати о степеним редовима се без проблема преносе и на редове облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

7.4. ПРОСТОР $C[a,b]$. АПРОКСИМАЦИЈА НЕПРЕКИДНИХ ФУНКЦИЈА ПОЛИНОМИМА

Подсетимо се да под метричким простором $C[a,b]$, где је $[a,b]$ сегмент реалне праве, подразумевамо скуп свих непрекидних функција $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, снабдевен метриком

(1) $$d(f,g) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

(пример 1.1.1.5°). Посматрајмо низ (f_n) функција из $C[a,b]$. Тај низ конвергира (у смислу уведене метрике d) функцији $f \in C[a,b]$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, тако да за све $n > n_0$ важи

$$d(f_n, f) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Другим речима, важи: низ (f_n) конвергира ка f у $C[a,b]$ ако и само ако $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ на $[a,b]$. Због ове чињенице често се метрика (1) простора $C[a,b]$ зове **равномерна (униформна) метрика**.

Став 7.4.1

Простор $C[a,b]$ је комплетан, тј. у њему сваки Кошијев низ конвергира.

Доказ.

Нека је (f_n) Кошијев низ функција $f_n \in C[a,b]$, тј. нека за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbf{N}$, такав да за $m,\ n > n_0$ важи $d(f_m, f_n) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, односно $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за све $x \in [a,b]$. На основу теореме 7.1.1 следи да функционални низ $\big(f_n(x)\big)$ равномерно конвергира некој функцији $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Према теореми 7.3.2 функција f је непрекидна на $[a,b]$, тј. $f \in C[a,b]$, чиме је тврђење става доказано. ■

Подсетимо се (в. задатке 1.6 и 1.7) да за метрички простор X кажемо да је сепарабилан ако у њему постоји пребројив скуп A који је свуда густ, тј. који има особину да за сваку тачку $x \in X$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји тачка $a \in A$, таква да је $d(x,a) < \varepsilon$. На други начин исказано, скуп A је свуда густ у X ако му се адхеренција $\overline{A}$ поклапа са X. За елементе свуда густог скупа можемо рећи да на одређени начин апроксимирају елементе самог простора X. Зато је од интереса наћи погодне свуда густе скупове у појединим метричким просторима. Доказаћемо да је у простору $C[a,b]$ свуда густ скуп свих полинома, тј. да се свака непрекидна функција $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ може равномерно апроксимирати полиномима. Из те чињенице следиће и сепарабилност простора $C[a,b]$.

Теорема 7.4.1 (Вајерштрас)

За свако $f \in C[a,b]$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји полином p са реалним коефицијентима, такав да је $d(f,p) < \varepsilon$, тј. $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ за све $x \in [a,b]$.

Доказ.

Не представља ограничење општости ако претпоставимо да је $[a,b] = [-1,1]$. Као непрекидна на $[-1,1]$, функција f је равномерно непрекидна на том сегменту, па за дато $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $x',\ x'' \in [-1,1]$ за које је $|x' - x''| < \delta$ важи $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$. Изаберимо поделу $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ сегмента $[-1,1]$ за коју је $\lambda(P) < \delta$. Дефинишимо функцију $l\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ која се у тачкама поделе P поклапа са f: $l(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,n)$, а на сегментима $[x_{i-1}, x_i]$ је линеарна, тј. за $x \in [x_{i-1}, x_i]$ важи

$$l(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Тада је за $i = 1, \ldots, n$ и $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

(2)
$$\begin{aligned}|f(x) - l(x)| &= \left|\frac{[f(x) - f(x_{i-1})][x_i - x_{i-1}] - [f(x_i) - f(x_{i-1})][x - x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}\right| \\ &= \left|\frac{[f(x) - f(x_i)][x - x_{i-1}] + [f(x) - f(x_{i-1})][x_i - x]}{x_i - x_{i-1}}\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(x - x_{i-1}) + (x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

јер је $|x - x_i| < \delta$ и $|x - x_{i-1}| < \delta$.

при чему се коефицијенти T_n одређују из система рекурентних релација

$$T_n - \binom{2n-1}{2}T_{n-1} + \binom{2n-1}{4}T_{n-2} - \cdots = (-1)^{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

На пример, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$, $T_4 = 272$, $T_5 = 7936$, тако да је

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots.$$

17. Доказати да се функција $f(x) = x \operatorname{cth} x = \dfrac{2x}{e^{2x}-1} + x$, за $|x| < \pi$, може развити у степени ред

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n},$$

где су B_n **Бернулијеви бројеви** који се дефинишу на следећи начин: $B_n = (-1)^{n-1}\beta_{2n}$, где је низ (β_n) реалних бројева дефинисан системом рекурентних релација

$$2\beta_1 + 1 = 0, \quad 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 = 0, \quad 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 = 0, \quad \ldots,$$

који се (формално) може записати у облику $(\beta+1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где после развијања претходног израза по биномном обрасцу треба сваки степен облика β^k заменити са β_k. На пример, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, $B_4 = 1/30$, $B_5 = 5/66$, $B_6 = 691/2730$, ...

18. Доказати да фамилија функција $\{ f_t(x) \mid t \in T \}$ равномерно по $x \in A$ конвергира кад $t \to t_0$ (где је $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ тачка нагомилавања скупа $T \subset \mathbf{R}$) ако и само ако за сваки низ тачака $t_n \in T$ за који $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$, функционални низ $\big(f_{t_n}(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ равномерно на A конвергира кад $n \to \infty$.

19. 1° Нека је функција $f \in C[a,b]$, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, а функција α је ограничене варијације на $[a,b]$ и $V = V_\alpha(a,b)$. Доказати да је

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant MV.$$

2° Нека су функције $f_n\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ непрекидне, $n \in \mathbf{N}$, и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ на $[a,b]$. Ако је α функција ограничене варијације на $[a,b]$, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f\,d\alpha.$$

3° Нека је $f \in C[a,b]$ и α_n су функције ограничене варијације на $[a,b]$ такве да је $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x) = \alpha(x)$, $x \in [a,b]$. Ако су функције α_n **униформно ограничене варијације**, тј. ако постоји $V \in \mathbf{R}$, такво да је $V_{\alpha_n}(a,b) \leqslant V$, за све $n \in \mathbf{N}$, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,d\alpha_n = \int_a^b f\,d\alpha.$$

8. ИНТЕГРАЛИ КАО ФУНКЦИЈЕ ПАРАМЕТРА

Одређени Риманов интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ дате интеграбилне реалне функције f на фиксираном одсечку $[a,b]$ реалне праве је фиксиран реалан број. Ако, међутим, подинтегрална функција тог интеграла или његове границе (или обоје) зависе од неког (реалног) параметра y, тј. ако је тај интеграл облика $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$, онда је јасно да је резултат те интеграције нека функција променљиве y, дефинисана за оне вредности те променљиве за које одговарајући интеграл постоји. Често таква функција није елементарна или није једноставно наћи њен елементаран запис. Зато је важно знати методе помоћу којих се, без израчунавања интеграла, такве функције могу испитивати. У овој глави бавићемо се проблемима те врсте, с тим што ћемо се у првом одељку задржати на својственим интегралима, а у следећим одељцима ћемо проширити разматрања на несвојствени случај.

8.1. СВОЈСТВЕНИ ПАРАМЕТАРСКИ ИНТЕГРАЛИ

Као и код функција дефинисаних као границе функционалних низова или суме функционалних редова (или, уопште, као границе неких фамилија функција), већина проблема приликом испитивања особина (лимеса, непрекидности, диференцијабилности, интеграбилности) функција дефинисаних параметарским интегралима везана су за могућност промене редоследа двају граничних прелаза. У вези са налажењем лимеса функције

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

непосредна преформулација теореме 7.3.3 даје

Став 8.1.1

Ако је функција $f(x,y)$ интеграбилна по x на сегменту $[a,b]$, за свако y из неке околине V тачке $y_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ и ако $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ по $x \in [a,b]$, онда је

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \quad \blacksquare \tag{2}$$

У случају да важи формула (2) каже се да се лимес функције $I(y)$ кад $y \to y_0$ може наћи „уласком под знак интеграла“.

Проверавање услова равномерне конвергенције из овог става у неким случајевима се може олакшати применом Динијевог става 7.3.1. Наиме, лако је проверити да тврђење тог става остаје на снази ако се уместо функционалног низа $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ посматра произвољна фамилија функција $\big(f(x,y)\big)_{y\in Y}$, при чему су све вредности $y \in Y \subset \mathbf{R}$ мање (веће) од y_0 и гранични прелаз се врши кад $y \to y_0$, монотоно по y. (За доказ те чињенице може се, на пример, користити задатак 7.18.) Зато важи

Последица 8.1.1

Ако је, за свако $y < y_0$ ($y > y_0$) из неке околине V тачке y_0, $f(x,y)$ непрекидна функција од $x \in [a,b]$, која кад y растући (опадајући) тежи y_0 такође монотоно (по y) тежи функцији $\varphi(x)$, непрекидној на $[a,b]$, тада важи једнакост (2). ∎

У следећем ставу дат је довољан услов непрекидности функције (1).

Став 8.1.2

Нека је P правоугаоник $[a,b]\times[c,d]$ и нека је $f(x,y)$ непрекидна функција на P. Тада је $I(y)$ непрекидна функција на $[c,d]$.

Доказ.

Функција f је, као непрекидна, равномерно непрекидна на компактном скупу P. Дакле, за дато $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да је $|f(x',y')-f(x'',y'')| < \varepsilon$ чим је $(x',y'),(x'',y'') \in P$ и $|x'-x''| < \delta$, $|y'-y''| < \delta$. Нека су y_0 и y произвољне тачке из $[c,d]$ и x произвољан елемент сегмента $[a,b]$. Узимајући у претходном услову $x' = x'' = x$, $y' = y$ и $y'' = y_0$ добијамо да је $|f(x,y)-f(x,y_0)| < \varepsilon$ за све $x \in [a,b]$ ако је $|y-y_0| < \delta$. Другим речима, важи $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ $(y \to y_0)$ по $x \in [a,b]$. Из става 8.1.1 следи да је

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = I(y_0),$$

тј. функција $I(y)$ је непрекидна у тачки y_0. Због произвољности y_0, тиме је тврђење става доказано. ∎

Став 8.1.3

Нека је $P = [a,b]\times[c,d]$ и функција $f\colon P \to \mathbf{R}$ задовољава следеће услове:

1° f је непрекидна по $x \in [a,b]$ за свако $y \in [c,d]$;

2° f има парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ који је непрекидна функција на P.

Тада је функција дефинисана релацијом (1) непрекидно диференцијабилна на $[c,d]$ и важи

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{3}$$

Доказ.

На основу претпоставке 1°, функција $I(y)$ је дефинисана за свако $y \in [c,d]$. Нека је $y \in [c,d]$ и $h \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ тако да $y+h \in [c,d]$. Лагранжова теорема, примењена на $f(x,y)$, схваћену као функцију од y на $[y,y+h]$ за фиксирано $x \in [a,b]$, даје $\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h)$, односно, после интеграције,

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h)\,dx, \tag{4}$$

за неко θ, $0 < \theta < 1$. Слично као у доказу става 2, непрекидност (дакле и равномерна непрекидност) функције $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на P повлачи да $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h) \rightrightarrows \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $(h \to 0)$ по $x \in [a,b]$. Зато се са лимесом кад $h \to 0$ може „ући“ под знак интеграла у једнакости (4), што као резултат даје формулу (3). Непрекидност функције $I'(y)$ је последица те формуле, претпоставке 2° и претходног става. ∎

Доказана формула (3) често се назива **Лајбницовим правилом** о диференцирању параметарског интеграла. Њена примена понекад омогућава и ефективно рачунање интеграла (1).

Пример 8.1.1

Израчунајмо интеграл

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \qquad |y| < 1.$$

Приметимо да, ако са $f(x,y)$ означимо његову подинтегралну функцију, важи $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x,y) = 2y$ за $|y|<1$, те дати интеграл није несвојствен. Ако се функција $f(x,y)$ за $x = \pi/2$ додефинише добијеном вредношћу лимеса, она постаје непрекидна по x на $[0,\pi/2]$ за свако y, $|y|<1$, а њен парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ је непрекидна функција на $[0,\pi/2]\times(-1,1)$. Према Лајбницовом правилу добијамо

$$I'(y) = 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-y^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1,$$

одакле је $I(y) = \pi\arcsin y + C$ за неку константу C. Стављајући $y = 0$ добијамо $0 = I(0) = C$, па је коначно $I(y) = \pi\arcsin y$ за $|y|<1$.

Приметимо да, мада је у ставу 8.1.3 претпостављено да y припада затвореном интервалу $[c,d]$, наведена примена на отворени интервал $(-1,1)$ је такође дозвољена, јер се свака фиксирана тачка y_0 тог интервала може укључити у неки затворени интервал $[c,d]$ који цео припада $(-1,1)$. ▲

Резултат става 8.1.3 модификоваћемо сада за случај када и границе интеграла зависе од параметра.

Став 8.1.4

Нека су f и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрекидне реалне функције на правоугаонику $P=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ и нека су $a(y)$ и $b(y)$ диференцијабилне функције дефинисане на $[c,d]$, са вредностима у $[\alpha,\beta]$. Тада је

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

диференцијабилна функција на $[c,d]$ и важи

$$I'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx-f\big(a(y),y\big)a'(y)+f\big(b(y),y\big)b'(y).$$

Доказ.

Интеграл $I(y)$ се може записати у облику

$$I(y)=F(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)\,dx,\quad u=a(y),\ v=b(y).$$

На основу става 8.1.3 је $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\displaystyle\int_u^v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$, а на основу правила о изводу интеграла по доњој (горњој) граници је $\dfrac{\partial F}{\partial u}=-f\big(a(y),y\big)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial v}=f\big(b(y),y\big)$. Примењујући правило о изводу сложене функције добијамо

$$I'(y)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}a'(y)+\frac{\partial F}{\partial v}b'(y),$$

а одатле заменом следи тврђење става. ■

Формула овог става такође се назива Лајбницовим правилом.

Став 8.1.5

Нека је функција $f\colon P\to\mathbf{R}$ непрекидна на правоугаонику $P=[a,b]\times[c,d]$. Тада је функција $I\colon[c,d]\to\mathbf{R}$, дефинисана интегралом (1) интеграбилна и важи

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказ.

На основу става 8.1.2, функција I је непрекидна, дакле и интеграбилна на $[c,d]$. Једнакост наведених узастопних интеграла је последица теореме 5.4.1, јер су оба та интеграла једнака $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$. ■

Пример 8.1.2

Применом става 8.1.5 израчунаћемо интеграл

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,\quad 0<a<b.$$

Ако подинтегралну функцију $\varphi(x)$ додефинишемо помоћу $\varphi(0)=0$ и $\varphi(1)=b-a$, лако се проверава да она постаје непрекидна на $[0,1]$, па дати интеграл постоји. Поред тога је $\varphi(x)=\int_a^b x^y\,dy$ за $x\in[0,1]$. Функција x^y је непрекидна на $[0,1]\times[a,b]$, па добијамо да је

$$\int_0^1\varphi(x)\,dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.\ \blacktriangle$$

8.2. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ. РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

У овом и следећим одељцима посматраћемо параметарске интеграле облика

$$(1)\qquad I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

који су (бар за неке y) несвојствени са сингуларитетом b, тј. такве да је или $b=+\infty$ или је b коначно, али је функција $f(x,y)$ неограничена у околини тачке $x=b$. Сва разматрања могу се аналогно пренети на случај несвојствених интеграла чији је сингуларитет доња граница, као и на оне код којих су сингуларитети обе границе, или је, пак, сингуларитет у унутрашњости интервала интеграције.

Подсетимо се да несвојствени интеграл (1) конвергира за неко y ако за ту вредност параметра постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\beta\to b}F(\beta,y)$, где је

$$F(\beta,y)=\int_a^\beta f(x,y)\,dx.$$

Увешћемо сада појам равномерне конвергенције несвојственог параметарског интеграла.

Дефиниција 8.2.1

За интеграл (1) кажемо да **равномерно конвергира по** $y\in Y$ (где је $Y\subset\mathbf{R}$) ако $F(\beta,y)\rightrightarrows I(y)$ $(\beta\to b)$ по $y\in Y$, тј. ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $\beta_0\in[a,b)$ тако да за свако $y\in Y$ и свако β, $\beta_0<\beta<b$, важи

$$|I(y)-F(\beta,y)|=\left|\int_\beta^b f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Пример 8.2.1

Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^y}$ конвергира за $y>1$. Ако је $Y_1=[2,\infty)$, онда тај интеграл равномерно конвергира по $y\in Y_1$, јер за $y\geqslant 2$:

$$\int_\beta^\infty\frac{dx}{x^y}=\frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}}\leqslant\frac{1}{\beta}\to 0\quad(\beta\to\infty).$$

Међутим, ако је $Y_2 = (1,\infty)$, дати интеграл не конвергира равномерно на Y_2. Заиста, за дато $\beta \in (1,\infty)$ важи:

$$\int_\beta^\infty \frac{dx}{x^y} = \frac{1}{(y-1)\beta^{y-1}} \to +\infty \quad (y \to 1+0),$$

па се за дато $\varepsilon > 0$ не може изабрати $\beta_0 \in (1,\infty)$, тако да неједнакост $\left|\int_\beta^\infty \frac{dx}{x^y}\right| < \varepsilon$ важи за $\beta > \beta_0$, истовремено за све $y \in Y_2$. ▲

Општи Кошијев принцип равномерне конвергенције (теорема 7.1.1) даје следећи неопходан и довољан услов равномерне конвергенције несвојственог параметарског интеграла.

Теорема 8.2.1

Интеграл (1) равномерно конвергира по $y \in Y \subset \mathbf{R}$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\beta_0 \in [a,b)$, такво да за све β', β'' за које је $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$ и за свако $y \in Y$ важи $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. ■

Последица 8.2.1

Ако је подинтегрална функција f интеграла (1) непрекидна на $[a,b) \times [c,d]$ и тај интеграл конвергира за $y \in (c,d)$, али дивергира за $y = c$ (односно $y = d$), онда он неравномерно конвергира на (c,d).

Доказ.

Претпоставимо да интеграл (1) дивергира, на пример, за $y = c$. Тада постоји $\varepsilon > 0$, такво да се за свако $\beta_0 \in [a,b)$ могу наћи $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ за које је $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,c)\,dx\right| > \varepsilon$. Интеграл $\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)\,dx$ је (својствени) параметарски интеграл који је (на основу става 8.1.2) непрекидна функција од $y \in (c,d)$. Значи, за вредности y, довољно блиске c, важиће такође и неједнакост $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)\,dx\right| > \varepsilon$. Дакле, нису испуњени услови теореме 8.2.1 за равномерну конвергенцију интеграла (1) на (c,d). ■

Приметимо да на основу ове последице непосредно добијамо закључак о неравномерној конвергенцији интеграла $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$ на $(1,\infty)$ (в. пример 8.2.1).

Наведимо сада неке довољне услове равномерне конвергенције несвојственог интеграла.

Став 8.2.1 (Вајерштрасово правило)

Нека је $\varphi\colon [a,b) \to \mathbf{R}$ интеграбилна функција (тј. нека конвергира $\int_a^b \varphi(x)\,dx$), таква да је $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$ за све $x \in [a,b)$, $y \in Y \subset \mathbf{R}$. Тада интеграл (1) равномерно конвергира по $y \in Y$.

Доказ.

Из конвергенције интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ следи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\beta_0 \in [a,b)$, такво да за све $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ важи $\int_{\beta'}^{\beta''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$. Тада је, за све $y \in Y$,

$$\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} |f(x,y)|\,dx \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon,$$

што на основу теореме 8.2.1 значи да интеграл (1) равномерно конвергира на Y. ■

Примери 8.2.2

1° Интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx$ равномерно конвергира по $y \in \mathbf{R}$ јер је за свако $y \in \mathbf{R}$ испуњено $\left|\dfrac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, а $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ конвергира.

2° Интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ има сингуларитете у $x = 0$ (за $\alpha < 1$) и у $x = 1$ (за $\beta < 1$). Он конвергира равномерно по α за $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ (за фиксирано $\beta > 0$), као и по β за $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ (за фиксирано $\alpha > 0$). Заиста, за $0 < x < 1$, $\beta > 0$ и $\alpha \geqslant \alpha_0$ је

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leqslant x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1},$$

а интеграл $\int_0^1 x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ конвергира. Слично се доказује друго тврђење. ▲

Вајерштрасовим правилом не може се доказати равномерна конвергенција неапсолутно конвергентног интеграла. У таквим случајевима можемо се послужити следећим ставом.

Став 8.2.2 (Абел-Дирихлеово правило)

Нека су функције $f(x,y)$, $g(x,y)$ дефинисане за $x \in [a,b)$ и $y \in Y \subset \mathbf{R}$ и нека су за свако $y \in Y$ интеграбилне по x на сваком сегменту $[a,\beta] \subset [a,b)$. За равномерну конвергенцију несвојственог интеграла

$$(2) \qquad \int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx$$

по $y \in Y$ довољно је да буду испуњени услови:

(D_1) за свако $y \in Y$ функција $f(x,y)$ је непрекидна по $x \in [a,b)$ и има равномерно ограничену примитивну функцију, тј. постоји константа M, таква да је $\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx\right| \leqslant M$ за све $y \in Y$ и све $\beta \in [a,b)$;

(D_2) за свако $y \in Y$ функција $g(x,y)$ је непрекидно диференцијабилна, монотона по $x \in [a,b)$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0 \ \ (x \to b)$ по $y \in Y$;

или

(A_1) за свако $y \in Y$ функција $f(x,y)$ је непрекидна по $x \in [a,b)$ и несвојствени интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно конвергира по $y \in Y$;

(A_2) за свако $y \in Y$ функција $g(x,y)$ је непрекидно диференцијабилна и монотона по $x \in [a,b)$; такође, g је равномерно ограничена по $x \in [a,b)$ и $y \in Y$.

Доказ.

Доказаћемо да су услови (D_1) и (D_2) довољни за равномерну конвергенцију интеграла (2). Слично се доказује и за услове (A_1) и (A_2).

Нека су $\beta', \beta'' \in [a, b)$, $\beta' < \beta''$ и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу друге теореме о средњој вредности интеграла (теорема 8.4.2 из М.А.I) важи

$$\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(\beta',y)\int_{\beta'}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(\beta'',y)\int_{\xi}^{\beta''} f(x,y)\,dx$$

за неко $\xi \in [\beta', \beta'']$. На основу претпоставке (D_1) интеграли на десној страни ове једнакости могу се по апсолутној вредности ограничити неком константом K (униформно по $y \in Y$). Из претпоставке (D_2) следи да се може наћи $\beta_0 \in [a, b)$, тако да ако је $\beta', \beta'' > \beta_0$ важи $|g(\beta', y)| < \varepsilon/(2K)$ и $|g(\beta'', y)| < \varepsilon/(2K)$, истовремено за све $y \in Y$. Из претходне једнакости следи да је за такве β', β'' испуњено $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$, што на основу теореме 8.2.1 значи да је интеграл (2) равномерно конвергентан по $y \in Y$. ∎

Приметимо да наведени став важи и под нешто слабијим претпоставкама – услови да је f непрекидна, а g глатка функција могу се изоставити.

Примери 8.2.3

1° Интеграл $\int_a^\infty e^{-xy} f(x)\,dx$, $a \geqslant 0$, равномерно конвергира по $y \geqslant 0$ ако конвергира интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$, а функција f је непрекидна. То следи јер су испуњени услови (A_1), (A_2) претходног става. На пример, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$$

равномерно конвергира по $y \geqslant 0$.

2° Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^y}\,dx$ равномерно конвергира по $y \geqslant y_0 > 0$, јер су испуњени услови (D_1), (D_2). Приметимо да, на основу последице 8.2.1, он не конвергира равномерно по $y > 0$, јер не конвергира за $y = 0$.

3° Интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$ конвергира за свако $y \in \mathbf{R}$. На скупу $Y = \{y \in \mathbf{R} \mid |y| \geqslant c\}$, за неко $c > 0$, тај интеграл конвергира равномерно. Заиста, како 0 није сингуларитет тог интеграла, можемо посматрати само његово понашање кад $x \to \infty$. Но, тада тврђење лако следи из Дирихлеовог правила.

Међутим, овај интеграл није равномерно конвергентан на $\mathbf{R}$. Заиста, за $\beta > 0$ важи

$$\sup_{y\in\mathbf{R}}\left|\int_\beta^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| = \sup_{\alpha>0}\left|\int_\alpha^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \geqslant \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx > 0. \quad \blacktriangle$$

8.3. ФУНКЦИОНАЛНА СВОЈСТВА

Испитивање особина функција дефинисаних несвојственим параметарским интегралима по правилу је компликованије од одговарајућег проблема у случају својствених интеграла. Наиме, код несвојствених интеграла појављује се још један (трећи) гранични прелаз о којем треба водити рачуна приликом потребне промене поретка. Да правила дата у одељку 8.1 заиста више не морају да важе у оваквој ситуацији, показаћемо следећим примером.

Пример 8.3.1

За функцију

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^3} e^{-y/(2x^2)}, & \text{ако је } x > 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0, \end{cases}$$

испуњено је, за свако $y > 0$ и x на интервалу $[0, \infty)$:

$$|f(x,y)| \leqslant f\left(\sqrt{\frac{y}{3}}, y\right) = 3\sqrt{\frac{3}{ye^3}} \to 0 = \varphi(x) \quad (y \to \infty),$$

што значи да $f(x,y) \rightrightarrows 0$ $(y \to \infty)$ по $x \in [0, \infty)$. Међутим, интеграл $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ има вредност 1 и, дакле, не тежи нули (вредности интеграла $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$) кад $y \to \infty$. ▲

Додатни довољан услов који обезбеђује закључке сличне онима из одељка 8.1 јесте равномерна конвергенција несвојственог интеграла.

Гранична вредност и непрекидност

Теорема 8.3.1

Нека је функција $f(x,y)$, за свако y из неке околине V тачке $y_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, интеграбилна по $x \in [a, \beta]$ за свако β за које је $a < \beta < b$. Ако:

1° за свако такво β важи $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ на $[a, \beta]$,

2° несвојствени интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно конвергира на V,

тада $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ конвергира и важи

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказ.

Означимо $F(\beta, y) = \int_a^\beta f(x,y)\,dx$. Из претпоставке 1° и става 8.1.1 следи да је $\lim\limits_{y\to y_0} F(\beta, y) = \int_a^\beta \varphi(x)\,dx$. С друге стране, услов 2° значи да $F(\beta, y) \rightrightarrows \int_a^b f(x,y)\,dx$ $(\beta \to b)$ по $y \in V$. На основу опште теореме о промени поретка граничних прелаза (теорема 7.3.1) закључујемо да постоји $\lim\limits_{\beta\to b}\int_a^\beta \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ и једнак је $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx$. ∎

Као и код својствених интеграла, провера услова наведене теореме некад се може извршити коришћењем Динијевог правила.

Последица 8.3.1

Нека је, за свако $y < y_0$ $(y > y_0)$ из неке околине V тачке y_0, $f(x,y)$ ненегативна и непрекидна функција од $x \in [a,b)$ која, кад y растући (опадајући) тежи y_0, растући (по y) тежи функцији $\varphi(x)$, непрекидној на $[a,b)$. Ако интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ конвергира, тада важи једнакост (1).

Доказ.

Монотоност конвергенције $f(x,y) \to \varphi(x)$ $(y \to y_0)$ обезбеђује, према Динијевом ставу, да је та конвергенција равномерна на сваком сегменту $[\alpha,\beta] \subset [a,b)$. С друге стране, неједнакост $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \varphi(x)$, која важи за све $x \in [a,b)$ и све $y \in V$, и конвергенција интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ повлаче да $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно конвергира по $y \in V$. На тај начин, испуњени су услови теореме 8.3.1, па важи једнакост (1). ■

Изведена тврђења омогућавају и нека једноставна правила о несвојственој интеграцији редова члан-по-члан. (Подсећамо да су се одговарајућа правила изведена у одељку 7.3 односила само на својствену интеграцију.)

Последица 8.3.2

Нека су чланови реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ненегативне и непрекидне функције на $[a,b)$ и нека је његов збир $f(x)$ на $[a,b)$ непрекидна и интеграбилна функција. Тада се тај ред може интегрисати члан-по-члан на $[a,b)$, тј. важи

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\,dx. \quad ■$$

Непосредна последица теореме 8.3.1 је и следећа теорема о непрекидности функције дефинисане несвојственим параметарским интегралом.

Теорема 8.3.2

Нека је функција f непрекидна на $[a,b) \times [c,d]$ и нека је (несвојствени) интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно конвергентан по $y \in [c,d]$. Тада је $I(y)$ непрекидна функција на $[c,d]$. ■

Примери 8.3.2

1° Израчунајмо интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx,$$

развијајући подинтегралну функцију у степени ред. Додефинишимо ту функцију њеним лимесом -1 у тачки $x=0$. За $0 \leqslant x < 1$ је тада

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Тај ред не конвергира равномерно на $[0,1)$ (јер не конвергира за $x=1$). Међутим, испуњени су услови последице 8.3.2 (проверити!), па важи

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Касније ћемо показати (пример 8.3.1) да је збир последњег реда једнак $\pi^2/6$.

2° У примеру 8.2.3.1° доказали смо да је интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx$$

равномерно конвергентан по $y \in [0,\infty)$. Како је његова подинтегрална функција (додефинисана јединицом за $x=0$) непрекидна на $[0,\infty) \times [0,d]$, за све $d > 0$, то на основу теореме 8.3.2 закључујемо да је и функција $I(y)$ непрекидна на $[0,d]$, дакле и на $[0,\infty)$. Специјално, важи

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \lim_{y\to 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \quad ▲$$

Диференцирање несвојственог интеграла

У следећој теореми наводимо довољне услове за могућност примене Лајбницовог правила на несвојствене параметарске интеграле.

Теорема 8.3.3

Нека су испуњени следећи услови:

1° функција $f\colon [a,b) \times [c,d] \to \mathbf{R}$ је непрекидна по $x \in [a,b)$ за свако $y \in [c,d]$, а функција $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ је непрекидна на $[a,b) \times [c,d]$;

2° интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ конвергира за неко $y = y_0 \in [c,d]$;

3° интеграл $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ равномерно конвергира на $[c,d]$.

Тада је функција $I(y)$ диференцијабилна на $[c,d]$ и важи

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Доказ.

Као и обично, означимо

$$F(\beta,y) = \int_a^{\beta} f(x,y)\,dx$$

за $a < \beta < b$. Услови 1°, на основу става 8.1.3, обезбеђују да функција F има парцијални извод по y на $[c,d]$ и да важи

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta,y) = \int_a^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

На основу 3° важи

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\beta, y) \rightrightarrows \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \quad (\beta \to b) \quad \text{на } [c,d].$$

Најзад, из 2° следи да функција $F(\beta, y)$ има за $y = y_0$ граничну вредност кад $\beta \to b$. На тај начин, испуњени су услови теореме 7.3.4 о диференцијабилности граничне функције фамилије диференцијабилних функција, па на основу ње закључујемо да $F(\beta, y) \rightrightarrows I(y)$ $(\beta \to b)$ на $[c,d]$ и важи формула (2). ■

Пример 8.3.3

Као пример примене претходне теореме израчунајмо **Дирихлеов интеграл**

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx, \qquad y \in \mathbf{R}.$$

Непосредна примена Лајбницовог правила је немогућа, јер би се формалним диференцирањем добио дивергентан интеграл $\int_0^\infty \cos yx\,dx$. Посматрајмо зато, за фиксирано $\alpha > 0$, параметарски интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} e^{-\alpha x}\,dx, \qquad y \geqslant 0.$$

Тај интеграл задовољава све услове теореме 8.3.3: подинтегрална функција је непрекидна заједно са својим парцијалним изводом по y (када се погодно додефинише за $x = 0$), а интеграл добијен диференцирањем

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos yx\,dx = \frac{\alpha}{y^2+\alpha^2}$$

равномерно конвергира по $y \geqslant 0$, јер се мајорира конвергентним интегралом $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ који не зависи од y.

Из $I'(y) = \dfrac{\alpha}{y^2+\alpha^2}$ добијамо $I(y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{\alpha} + C$. Заменом $y = 0$ добијамо $C = I(0) = 0$, па је

(3) $$I(y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Као у примеру 8.3.2.2°, међутим, важи

$$\lim_{\alpha\to 0} I(y) = \lim_{\alpha \to 0}\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = D(y),$$

па из (3) добијамо $D(y) = \pi/2$ за $y > 0$. Како је, очигледно, $D(0) = 0$ и $D(y)$ је непарна функција од y, то је коначно

$$D(y) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, \qquad y \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangle$$

Интеграција несвојствених интеграла

Код интеграције функција дефинисаних несвојственим параметарским интегралима разликоваћемо случајеве када је тај нови интеграл својствен, односно несвојствен. У првом случају, ако желимо да променимо редослед интеграције, мораћемо да водимо рачуна о три гранична прелаза, а у другом – о четири.

Теорема 8.3.4

Ако важе претпоставке теореме 8.3.2, тј. ако је функција f непрекидна на $[a,b)\times[c,d]$ и (несвојствени) интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно конвергира на $[c,d]$, онда је функција $I(y)$ интеграбилна на $[c,d]$ и важи

(4) $$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказ.

Из непрекидности функције f, на основу става 8.1.5, следи да за свако $\beta \in [a,b)$ важи

(5) $$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx = \int_a^\beta dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Како фамилија функција $F(\beta,y) = \int_a^\beta f(x,y)\,dx$, кад $\beta \to b$, конвергира интегралу $\int_a^b f(x,y)\,dx$, равномерно по $y \in [c,d]$, то из теореме 7.3.3 следи да лева страна једнакости (5) тежи $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$, кад $\beta \to b$. Но, онда и десна страна има граничну вредност кад $\beta \to b$ и та гранична вредност је $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$. ■

Као и у неким ситуацијама које смо раније посматрали, у случају ненегативности подинтегралне функције Динијево правило омогућава да се услови претходне теореме ослабе.

Последица 8.3.3

Ако је f непрекидна и ненегативна реална функција на $[a,b)\times[c,d]$ и ако је $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ непрекидна функција на $[c,d]$, тада важи формула (4). ■

Када је потребно променити поредак двају несвојствених интеграла, услови који то обезбеђују се даље компликују. Доказаћемо овде само једно тврђење које се односи на случај ненегативне подинтегралне функције.

Теорема 8.3.5

Нека је функција $f\colon [a,b)\times[c,d) \to \mathbf{R}$ непрекидна и ненегативна и нека оба (несвојствена) интеграла

(6) $$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \qquad J(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

дефинишу непрекидне функције (од $y \in [c,d)$, односно од $x \in [a,b)$). Тада важи једнакост

(7) $$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

под претпоставком да бар један од тих узастопних интеграла конвергира.

Доказ.

Претпоставимо, на пример, да конвергира интеграл на левој страни релације (7). Нека је $\beta \in [a,b)$. Тада из последице 8.3.3 добијамо да је

$$\int_a^\beta dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx.$$

С друге стране, због $f(x,y) \geqslant 0$ је

$$\int_c^d dy \int_a^\beta f(x,y)\,dx \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Из последњих двеју релација следи да и интеграл на десној страни релације (7) конвергира и да важи

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \leqslant \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

На сличан начин се доказује и обратна неједнакост. ■

Доказана теорема не важи без претпоставке о ненегативности функције f (в. даље пример 8.3.4.3°). Навешћемо без доказа (в. нпр. [27]) теорему која даје довољне услове промене поретка интеграције за функције променљивог знака.

Теорема 8.3.6

Ако важе следећи услови:

1° функција f је непрекидна на $[a,b) \times [c,d)$;

2° оба несвојствена интеграла (6) равномерно конвергирају, први по $y \in [c,\delta]$, за свако $\delta \in [c,d)$, а други по $x \in [a,\beta]$, за свако $\beta \in [a,b)$;

3° конвергира бар један од интеграла

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x,y)|\,dx, \qquad \int_a^b dx \int_c^d |f(x,y)|\,dy,$$

тада важи формула (7). ■

Примери 8.3.4

1° Нека је $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ непрекидно диференцијабилна функција, при чему је f' монотона функција и постоји $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(+\infty)$. Доказаћемо да тада за све a, $b > 0$ важи формула

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = [f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a}. \tag{8}$$

Заиста, нека је, на пример, $a < b$. Није ограничење општости ако претпоставимо да је f' опадајућа и позитивна функција. Интеграл $\int_0^\infty f'(yx)\,dx$ равномерно конвергира по $y \in [a,b]$, јер се $|f'(yx)|$ мајорира са $f'(ax)$, а интеграл $\int_0^\infty f'(ax)\,dx$ конвергира (вредност му је $[f(+\infty)-f(0)]/a$). Зато се на интеграл $\int_a^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx$ може применити теорема 8.3.4, па се добија

$$[f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{f(+\infty)-f(0)}{y}\,dy = \int_a^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx$$
$$= \int_0^\infty dx \int_a^b f'(yx)\,dy = \int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx.$$

Као специјалан случај формуле (8) добија се, на пример,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}, \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

2° Полазећи од Дирихлеовог интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad y > 0$$

(пример 8.3.3), који равномерно конвергира на сваком сегменту $[a,b]$ за $0 < a < b$, добијамо

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \int_0^\infty dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x}\,dy = \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a).$$

3° Директним рачуном се добија да је за $f(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_1^\infty dy \int_1^\infty f(x,y)\,dx = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_1^\infty dx \int_1^\infty f(x,y)\,dy.$$

При томе интеграли

$$\int_1^\infty f(x,y)\,dx, \qquad \int_1^\infty f(x,y)\,dy$$

конвергирају равномерно (први по $y \in [1,\infty)$, други по $x \in [1,\infty)$). Из овог примера закључујемо следеће: (а) услови као у теореми 8.3.4 нису довољни да би важила формула (4) у случају да су оба интеграла у њој несвојствени; (б) услови теореме 8.3.5 нису довољни да би важила формула (7) ако подинтегрална функција f није сталног знака; (в) у датом случају није испуњен услов 3° теореме 8.3.6 (што се може и непосредно проверити).

4° Применом теореме 8.3.6 израчунаћемо **Френелове**[1] **интеграле**

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

[1] A. J. Fresnel (1788–1827), француски физичар и математичар

Први од тих интеграла се сменом $x^2 = t$ трансформише у

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

и конвергира према Дирихлеовом правилу. (Приметимо да у полазном интегралу подинтегрална функција не тежи нули кад $x \to \infty$.) Користећи познати резултат $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$ (пример 5.7.2), добијамо да за $t > 0$ важи

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}du,$$

па је

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}du.$$

Директна примена теореме 8.3.6 на промену редоследа добијених интеграла није могућа (зашто?). Зато ћемо, слично као код Дирихлеовог интеграла (пример 8.3.3) посматрати, за неко фиксирано $\alpha > 0$, интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}du.$$

Сада су услови теореме 8.3.6 испуњени, јер је $|e^{-\alpha t}e^{-tu^2}\sin t| \leqslant e^{-\alpha t}$ за све $t > 0$, $u > 0$, а интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt$ конвергира. Тако добијамо:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}.$$

Како интеграл $I(\alpha)$ равномерно конвергира по $\alpha \geqslant 0$ (на пример, на основу Дирихлеовог правила), а добијени интеграл равномерно конвергира по $\alpha \geqslant 0$ (на основу Вајерштрасовог правила), то преласком на лимес кад $\alpha \to +0$ добијамо

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \lim_{\alpha\to+0} I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

На сличан начин се изводи да и интеграл $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ има исту вредност. ▲

8.4. ОЈЛЕРОВИ ИНТЕГРАЛИ

Међу најважније (неелементарне) функције које се дефинишу несвојственим параметарским интегралима спадају **бета** и **гама-функција** које се уводе **Ојлеровим интегралима**:

(1) $$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

(2) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

У овом одељку, користећи се раније доказаним својствима параметарских интеграла, извешћемо неке особине ових функција.

Гама-функција

Интеграл (2) има сингуларитете $x = \infty$ и (ако је $\alpha < 1$) $x = 0$. Што се првог сингуларитета тиче, јасно је да интеграл конвергира за свако $\alpha \in \mathbf{R}$. Када $x \to +0$, међутим, важи $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$, па закључујемо да интеграл (2) конвергира ако и само ако је $\alpha > 0$. Дакле, домен функције Γ је $(0,+\infty)$. Изведимо сада неке њене најважније особине.

1° За свако $\alpha > 0$ важи

(3) $$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Заиста, парцијалном интеграцијом непосредно добијамо

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Узастопна примена доказане формуле (3) омогућава да се израчунавање вредности функције Γ за $\alpha > 1$ сведе на израчунавање вредности $\Gamma(\alpha)$ за $0 < \alpha \leqslant 1$. Специјално, за $\alpha = n \in \mathbf{N}$ добијамо

(4) $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!,$$

с обзиром да је $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$. На тај начин, гама-функција се може схватити као продужење факторијела са скупа природних на скуп позитивних реалних бројева.

Друга последица формуле (3) је да помоћу ње можемо дефинисати $\Gamma(\alpha)$ и за неке негативне вредности аргумента. Наиме, за $-1 < \alpha < 0$ можемо по дефиницији ставити $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$. Настављајући овај поступак, функција Γ се дефинише за све реалне вредности α, различите од 0 и од негативних целих бројева.

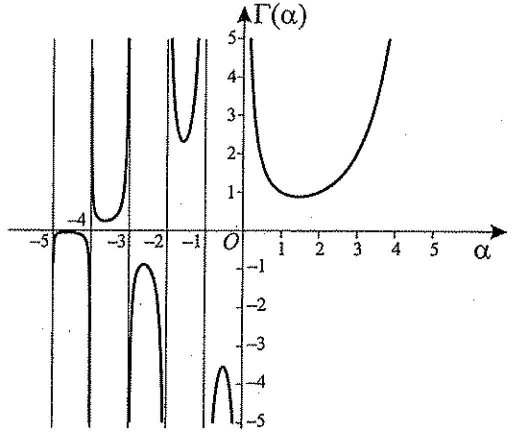
Поменимо да се гама-функција дефинише и за неке комплексне вредности аргумента, али ми се на томе нећемо задржавати.

2° Докажимо сада да је на свом (основном) домену $(0,+\infty)$ функција Γ бесконачно диференцијабилна.

Ни интеграл (2), као ни интеграли $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ не конвергирају равномерно на $(0,+\infty)$. Но, напишимо (2) у облику $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. За произвољно $\alpha_0 > 0$ изаберимо α_1, α_2 тако да је $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$. За $\alpha \geqslant \alpha_1$ и $0 < x < 1$ је $|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| < x^{\alpha_1-1}|\ln^n x|$, па како $\int_0^1 x^{\alpha_1-1}|\ln^n x|\,dx$ конвергира, то $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ равномерно конвергира за $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$.

С друге стране, за $\alpha \leqslant \alpha_2$ и $x > 1$ је $|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| < x^{\alpha_2+n-1}e^{-x}$ (јер је $\ln x < x$), а $\int_1^\infty x^{\alpha_2+n-1}e^{-x}\,dx$ конвергира, па $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ равномерно конвергира за $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$. На тај начин, важи

(5) $$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$



Сл. 8.4.1

Из доказане формуле најпре закључујемо да је $\Gamma''(\alpha) > 0$ за $\alpha > 0$, па је функција $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ конвексна. Даље, како је $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, на основу Ролове теореме, постоји $\alpha_1 \in (1,2)$, такво да је $\Gamma'(\alpha_1) = 0$. Због конвексности, та нула је и једина коју извод $\Gamma'(\alpha)$ има на интервалу $(0,+\infty)$. Дакле, функција Γ строго опада на $(0,\alpha_1)$, а строго расте на $(\alpha_1,+\infty)$. Може се израчунати

$$\alpha_1 \approx 1,4616, \qquad \min_{0<\alpha<+\infty} \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \approx 0,8856.$$

Приметимо још да из (3) следи да

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \to +\infty \quad (\alpha \to +0),$$

а из $\Gamma(\alpha) > n!$ за $\alpha > n+1$ следи да је $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty$. На тај начин долазимо до скице графика функције Γ који је приказан на слици 8.4.1. На тој слици дати су и делови графика гама-функције за негативне вредности аргумента, који се добијају применом формуле (3).

3° Осим што је функција $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ конвексна, она је и **логаритамски конвексна**, тј. функција $\ln\Gamma$ је конвексна. Заиста, важи

$$(\ln\Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2},$$

а примењујући формулу (5) и Коши-Шварцову неједнакост добијамо, за $\alpha > 0$,

$$[\Gamma'(\alpha)]^2 = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\,dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\ln x\right)dx\right)^2$$
$$< \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx\right) = \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha).$$

Дакле, за свако $\alpha > 0$ важи $[\ln\Gamma(\alpha)]'' > 0$.

4° Важи следећа **Ојлер-Гаусова формула** за гама-функцију

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}. \tag{6}$$

Докажимо ту формулу најпре за $0 < \alpha \leqslant 1$. Нека је $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Тада је $n-1 < n < n+\alpha \leqslant n+1$, па како је функција $\ln\Gamma$ конвексна, добијамо

$$\frac{\ln\Gamma(n) - \ln\Gamma(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln\Gamma(n+\alpha) - \ln\Gamma(n)}{(n+\alpha)-n} \leqslant \frac{\ln\Gamma(n+1) - \ln\Gamma(n)}{(n+1)-n},$$

тј. $\ln(n-1) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!} \leqslant \ln n$. Одатле следи

$$(n-1)^\alpha (n-1)! \leqslant \Gamma(n+\alpha) \leqslant n^\alpha (n-1)!,$$

односно, узастопном применом формуле (3),

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} = \frac{(n-1)^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$
$$\leqslant \Gamma(\alpha) \leqslant \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}.$$

На други начин записано,

$$\Gamma(\alpha) \leqslant \frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \leqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha \Gamma(\alpha),$$

одакле следи једнакост (6) за $0 < \alpha \leqslant 1$. За $\alpha > 1$ она се доказује узастопном применом једнакости (3). (На исти начин се доказује и да формула (6) важи за свако реално α различито од нуле и од негативних целих бројева.)

5° Једна од важних особина гама-функције дата је следећом **формулом допуњавања**

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

Да бисмо доказали ову формулу, искористимо доказану Ојлер-Гаусову једнакост (6) и следећи приказ синуса у облику бесконачног производа:

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^\infty\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

који ћемо извести касније (в. пример 9.4.2.3°). Добијамо

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\alpha(n-\alpha)} \cdot \frac{1}{(1+\frac{\alpha}{1})\cdots(1+\frac{\alpha}{n-1})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{1})\cdots(1-\frac{\alpha}{n-1})}\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)} = \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^\infty \frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Специјално, из формуле (7) налазимо

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

одакле можемо поново добити познату вредност Ојлер-Поасоновог интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

6° На крају, наведимо без доказа (в. нпр. [29]) **Стирлингову[2] формулу** која описује асимптотско понашање функције Γ (а самим тим и факторијела) за велике вредности аргумента:

$$\Gamma(\alpha)=\sqrt{2\pi}\cdot\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha+\frac{\theta(\alpha)}{12\alpha}},\qquad \alpha>0,$$

где је $0<\theta(\alpha)<1$.

Бета-функција

Као што смо видели у примеру 8.2.2.2°, интеграл (1) конвергира ако је $\alpha>0$ и $\beta>0$. Дакле, функција $B(\alpha,\beta)$ дефинисана је за те вредности променљивих. Из истог примера и теореме 8.3.2 следи да је она непрекидна по обе променљиве на свом домену. Наводимо основна својства ове функције.

1° Функција B је симетрична, тј. за све $\alpha,\ \beta>0$ важи

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha).$$

Ова релација добија се сменом $x=1-t$ у интегралу (1).

2° За $\alpha>1$ и $\beta>0$ важи

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta). \tag{8}$$

Заиста, парцијалном интеграцијом ($u=x^{\alpha-1}$, $dv=(1-x)^{\beta-1}\,dx$) се добија

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta)&=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx\\&=\frac{\alpha-1}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx-\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right]\\&=\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta)-\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

одакле следи формула (8). Користећи симетрију бета-функције добијамо да за $\beta>1$, $\alpha>0$ важи

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1). \tag{9}$$

[2] J. Stirling (1692–1770), шкотски математичар

3° Сменом $x=\dfrac{t}{1+t}$ у интегралу (1) добијамо другу интегралну репрезентацију функције B,

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

4° Докажимо сада да између функција B и Γ постоји веза

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\qquad\text{за } \alpha>0,\ \beta>0. \tag{10}$$

У том циљу претпоставимо најпре да је $\alpha>1$ и $\beta>1$ и напишимо производ $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ у облику

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty z^{\beta-1}e^{-z}\,dz. \tag{11}$$

У интеграл $\Gamma(\beta)=\int_0^\infty z^{\beta-1}e^{-z}\,dz$ уведимо смену $z=xy$, па је

$$\Gamma(\beta)=x^\beta\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-xy}\,dy.$$

Тада се добија $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int_0^\infty dx\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy$. Да бисмо у последњем интегралу могли да променимо редослед интеграције, проверимо да ли су испуњени услови теореме 8.3.5. Функција

$$f(x,y)=x^{\alpha+\beta-1}y^{\beta-1}e^{-(1+y)x}$$

је непрекидна и ненегативна на $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. Интеграли

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dx=\frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta),$$

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dy=x^{\alpha-1}e^{-x}\Gamma(\beta)$$

дефинишу непрекидне функције од $y\in[0,+\infty)$, односно $x\in[0,+\infty)$, а из (11) следи да постоји узастопни интеграл $\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)\,dy$. Дакле, важи

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)\,dx=\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty\frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy\\&=\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

за $\alpha>1$, $\beta>1$. Да бисмо доказали да та формула важи и за све $\alpha,\ \beta>0$, довољно је да применимо формуле (3), (8) и (9).

Као последицу доказане формуле (10) можемо још нека својства функције B извести из одговарајућих својстава функције Γ. На пример, из особине (4) добија се

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},\qquad m,\,n\in\mathbf{N},$$

а из (7),

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Специјално, $B(1/2, 1/2) = \pi$.

Неке примене доказаних резултата о бета и гама-функцији даћемо у примерима, а још неке су наведене у задацима.

Примери 8.4.1

1° За α, $\beta > -1$, сменом $\sin^2 x = t$, добијамо

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\alpha-1)/2}(1-t)^{(\beta-1)/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

2° Користећи претходни резултат можемо лако израчунати меру n-димензионе кугле полупречника R (в. пример 5.5.2.4°)

$$\mu K^n = \frac{2\pi R^n}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2}$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \Gamma^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n} \cdot \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n.$$

3° Израчунајмо вредност **Рабеовог интеграла**

$$I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx.$$

Сменом $1 - x = t$ добијамо $I = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\, dx$, па је

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [\ln\pi - \ln\sin\pi x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

При томе смо користили познати резултат $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ (в. задатак 8.15 из М.А.I). ▲

ЗАДАЦИ

1. Ако је $f(x,y) = \frac{1}{y}(1 - x^{1/y})x^{1/y}$, $x \in [1/2, 1]$, $y \in (0, 1]$, доказати да је

$$\lim_{y\to+0}\int_{1/2}^1 f(x,y)\, dx \neq \int_{1/2}^1 \left(\lim_{y\to+0} f(x,y)\right) dx.$$

2. Доказати да функција $y(x) = \int_0^{\pi/2}\cos(n\varphi - x\sin n\varphi)\, d\varphi$ за $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ и $x \in \mathbf{R}$ задовољава Беселову диференцијалну једначину $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ (в. и задатак 7.12).

3. 1° Доказати да за елиптичке интеграле $E(k)$ и $F(k)$ (в. задатак 7.15) важи:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}, \qquad \frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}.$$

2° Ако се уведу ознаке $k' = \sqrt{1-k^2}$, $E'(k) = E(k')$, $F'(k) = F(k')$, доказати да важи Лежандров идентитет:

$$EF' + E'F - FF' = \frac{\pi}{2}.$$

3° Доказати да је

$$\int_0^1 F(k)\, dk = \int_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}\, dt.$$

4. Ако је $F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$, где $n \in \mathbf{N}$, а функција f је непрекидна на интервалу интеграције, доказати да је $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

5. Доказати да је

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ако је } |r| \leqslant 1, \\ 2\pi\ln|r|, & \text{ако је } |r| > 1. \end{cases}$$

6. Ако је $f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0) = 0$, доказати да је

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\, dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

7. Доказати да је интеграл $I(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\, dx$ прекидне функције $\operatorname{sgn}(x-y)$ непрекидна функција од $y \in \mathbf{R}$.

8. 1° Ако је $\varphi(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,dx$ $(a>0)$, доказати да функција φ задовољава диференцијалну једначину $\varphi''(y) - a^2\varphi(y) = -\pi/2$ и извести одатле да је $\varphi(y) = \dfrac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ay})$ за $y>0$.

2° Доказати да следећи **Лапласови интеграли** имају наведене вредности:

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ay}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ay}, \qquad a,\, y>0.$$

9. Доказати да за $a_n(x) = ae^{-anx} - be^{-bnx}$ $(0<a<b)$ важи

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty a_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n(x)\Big)\,dx.$$

10. **Лапласовом трансформацијом** функције $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ назива се функција

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt, \qquad p>0,$$

ако тај интеграл конвергира. Наћи Лапласове трансформације следећих функција: 1° $f(t) = t^n$ $(n\in\mathbf{N})$; 2° $f(t)=\sqrt{t}$; 3° $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$, $f(0)=1$; 4° $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$ $(\alpha\in\mathbf{R})$.

11. На примеру функције $f(x,y) = (2-xy)xye^{-xy}$, $(x,y)\in[0,\infty)\times[0,1]$, показати да формула теореме 8.3.4 не мора да важи за функцију променљивог знака ако се изостави претпоставка о равномерној конвергенцији одговарајућег несвојственог интеграла.

12. Користећи познату вредност интеграла $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ доказати да је

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-y^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2xy\,dx = e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt, \qquad y\in\mathbf{R}.$$

13. 1° Користећи познату вредност Дирихлеовог интеграла (пример 8.3.3) доказати да тзв. **прекидни Дирихлеов множитељ** има вредност $(\alpha,\beta>0)$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{за } \beta<\alpha,\\ \pi/4, & \text{за } \beta=\alpha,\\ 0, & \text{за } \beta>\alpha.\end{cases}$$

2° Помоћу претходног резултата, мењајући редослед интеграције у изразу

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x}\,dx\int_0^\infty e^{-t}\sin xt\,dt,$$

наћи вредности Лапласових интеграла из задатка 8.2° за $a=1$.

14. Доказати **Лежандрову формулу**

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac12\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha), \qquad \alpha>0.$$

15. Користећи формулу

$$\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}\,dy, \qquad x>0,\ \alpha>0,$$

доказати да је, за $a\in\mathbf{R}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}$$

(у првом случају је $0<\alpha<1$, а у другом $0<\alpha<2$).

16. Развијајући у ред подинтегралну функцију, доказати да је за $\alpha>1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha),$$

где је ζ Риманова зета-функција (пример 7.3.4).

17. За хипергеометријски ред (в. задатак 7.10) доказати **Гаусову формулу**

$$1+\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

за оне вредности α, β, γ за које је десна страна те једнакости дефинисана.

18. Користећи формулу $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (која се може извести, на пример, помоћу комплексних бројева) и формулу допуњавања за гама-функцију, доказати да је

$$\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}.$$

19. Доказати **Вајерштрасову формулу**

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}e^{-C\alpha}\prod_{n=1}^\infty \frac{e^{\alpha/n}}{1+\dfrac{\alpha}{n}}, \qquad \alpha>0,$$

где је C Ојлерова константа (в. задатак 4.10 из М.А.I).

20. За функције класе $C^2(I)$, где је I интервал на $\mathbf{R}$, доказати:

(а) збир и производ логаритамски конвексних функција на I су логаритамски конвексне функције на I;

(б) позитиван тачка-по-тачка лимес логаритамски конвексних функција на I је логаритамски конвексна функција на I.

21. Нека функција $f\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ задовољава услове:

1° $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$ за $\alpha > 0$,

2° f је логаритамски конвексна на $(0,+\infty)$,

3° $f(1) = 1$.

Тада је $f(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha)$ за $\alpha \in (0,+\infty)$. Доказати.

22. 1° Доказати да је бета-функција бесконачно диференцијабилна (по оба аргумента) у својој области дефинисаности. На пример,

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x \, dx.$$

2° Користећи бета-функцију извести формуле:

$$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(a+bx^q)^r} = \frac{1}{q} a^{r+\frac{p+1}{q}} b^{-\frac{p+1}{q}} B\left(\frac{p+1}{q}, r - \frac{p+1}{q}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

23. Извести формулу (10) одељка 8.4 уводећи у двојном интегралу

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x-y} x^{\beta-1} y^{\alpha-1}\,dx\,dy$$

смену $x = u(1-v)$, $y = uv$.

24. Израчунати Дирихлеов интеграл

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz \qquad (p,q,r,s > 0),$$

где је $V = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\,\}$.

25. Доказати да је

$$\iint_P \cos(xu+yv)\,du\,dv = \frac{2\pi J_1(r)}{r},$$

где је $P = \{\,(u,v) \mid u^2+v^2 \leqslant 1\,\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а J_1 је Беселова функција $J_1(r) = \frac{r}{\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} \cos rt\,dt$, задатак 7.11.

9. ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

У овој глави проучићемо један од најважнијих типова функционалних редова – тригонометријске Фуријеове[1] редове. Неке особине тих редова се једноставније изводе ако се они посматрају као специјалан случај општих Фуријеових редова у просторима са скаларним производом, па ћемо зато најпре говорити о таквим просторима. Тако постављена, ова теорија представља и уопштење теорије коначнодимензионих еуклидских простора и проблема разлагања вектора по бази на бесконачнодимензиони случај. Последњи одељак ове главе биће посвећен континуалном аналогону Фуријеовог реда – Фуријеовом интегралу.

9.1. ХИЛБЕРТОВ ПРОСТОР

Као што знамо, коначнодимензиони еуклидски простор $\mathbf{R}^k$ је векторски простор у коме се норма, па самим тим и метрика, уводи помоћу скаларног производа (в. пример 1.1.1). Тај скаларни производ има одређена својства која могу да послуже као инспирација за аксиоматско увођење одговарајуће операције у произвољном векторском простору. У овој књизи задржаћемо се само на случају реалног векторског простора.

Дефиниција 9.1.1

Нека је X реалан векторски простор. За функцију која сваком пару (x,y) елемената из X додељује реалан број $x \cdot y$ кажемо да је **скаларни производ** на X ако за све x, y, $z \in X$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ важи:

1° $x \cdot y = y \cdot x$;

2° $\lambda x \cdot y = \lambda(x \cdot y)$;

3° $(x+y)\cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

4° $x \cdot x \geqslant 0$;

5° $x \cdot x = 0$ ако и само ако је $x = 0$.

[1] J. B. J. Fourier (1768–1830), француски математичар

Међу најважније особине сваког скаларног производа спадају Коши-Шварцова неједнакост

(1) $$(x\cdot y)^2 \leqslant (x\cdot x)(y\cdot y)$$

и неједнакост Минковског

(2) $$\sqrt{(x+y)\cdot(x+y)} \leqslant \sqrt{x\cdot x}+\sqrt{y\cdot y}.$$

За доказ релације (1), приметимо да за свако $\lambda\in\mathbf{R}$ важи

$$0\leqslant (x+\lambda y)\cdot(x+\lambda y) = (x\cdot x)+2\lambda(x\cdot y)+\lambda^2(y\cdot y),$$

па је дискриминанта последњег квадратног тринома по λ непозитивна. Неједнакост (2) следи из (1), јер је

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x+y) &= x\cdot x+2x\cdot y+y\cdot y\\ &\leqslant x\cdot x+2\sqrt{(x\cdot x)(y\cdot y)}+y\cdot y=(\sqrt{x\cdot x}+\sqrt{y\cdot y})^2.\end{aligned}$$

Доказане чињенице омогућавају да се у сваком простору X са скаларним производом уведе норма помоћу $\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$ за $x\in X$, која има следеће особине:

1° $\|x\|\geqslant 0$ за $x\in X$ и $\|x\|=0$ ако и само ако $x=0$;

2° $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ за $x\in X$ и $\lambda\in\mathbf{R}$;

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ за $x,\ y\in X$.

Самим тим, сваки простор са скаларним производом је један метрички простор. Растојање у њему се уводи помоћу

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}.$$

Дефиниција 9.1.2

Векторски простор у коме је дефинисан скаларни производ назива се (реалним) **пред-Хилбертовим**[2] **простором**. Ако је он комплетан у односу на метрику која је дефинисана помоћу скаларног производа, називамо га **Хилбертовим простором**.

Примери 9.1.1

1° $\mathbf{R}^k$ је (коначнодимензиони) Хилбертов простор. Његова комплетност је доказана у примеру 1.3.2.

2° У векторском простору l^2 свих реалних низова $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, таквих да $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ конвергира, уведимо скаларни производ помоћу

$$x\cdot y=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n \quad \text{за } x=(x_n),\ y=(y_n)\in l^2.$$

[2]D. Hilbert (1862–1943), немачки математичар

Приметимо да из $x,\ y\in l^2$ следи да тај ред (апсолутно) конвергира, јер је $|x_ny_n|\leqslant \frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)$ за $n\in\mathbf{N}$. Особине скаларног производа проверавају се непосредно. За доказ комплетности простора l^2 видети нпр. [1].

3° Подсетимо се да за функцију $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ кажемо да је део-по-део непрекидна ако постоји коначно много тачака $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ сегмента $[a,b]$, тако да је f непрекидна на сваком од интервала (x_{i-1},x_i), $i=1,\ \dots,\ n$, а у крајевима тих интервала има десне, односно леве лимесе (тј. има највише коначно много тачака прекида и оне су прве врсте). Означимо са $C_0[a,b]$ векторски простор свих део-по-део непрекидних функција $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ које имају и особину да у свакој тачки x задовољавају једнакост

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Операције векторског простора дефинишу се на стандардан начин. У тај простор уведимо скаларни производ помоћу

(3) $$f\cdot g=\int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad \text{за } f,\ g\in C_0[a,b].$$

Особине 1°–4° из дефиниције 9.1.1 се лако проверавају. Да бисмо доказали особину 5° скаларног производа, претпоставимо да је функција $f\in C_0[a,b]$ таква да је $f\cdot f=\int_a^b f^2(x)\,dx=0$. Нека су $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ тачке прекида функције f. Тада је и $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f^2(x)\,dx=0$ за $i=1,\ \dots,\ n$. Посматрајмо функцију $f_i\colon[x_{i-1},x_i]\to\mathbf{R}$ дату са

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & \text{за } x\in(x_{i-1},x_i),\\ f(x_{i-1}+0), & \text{за } x=x_{i-1},\\ f(x_i-0), & \text{за } x=x_i.\end{cases}$$

Та функција је непрекидна и важи $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_i^2(x)\,dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f^2(x)\,dx=0$, па је $f_i(x)\equiv 0$ за $x\in[x_{i-1},x_i]$. Значи, важи и $f(x_{i-1}+0)=f(x_i-0)=0$ за свако $i=1,\ \dots,\ n$. Из услова $f\in C_0[a,b]$ онда следи да је $f(x)=0$ за $x\in[a,b]$.

Може се показати да пред-Хилбертов простор $C_0[a,b]$ није комплетан.

Метрика

$$d(f,g)=\left\{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}, \qquad f,\ g\in C_0[a,b],$$

коју индукује скаларни производ (3) зове се још и **метрика средњег квадратног одступања**. Ако низ функција $f_n\in C_0[a,b]$ конвергира у смислу те метрике функцији $f\in C_0[a,b]$, кажемо да f_n тежи f **у средњем**. ▲

Став 9.1.1

Скаларни прозвод је непрекидна функција по обе променљиве у следећем смислу: ако за низове (x_n), (y_n) вектора из пред-Хилбертовог простора X важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$.

Доказ.

Важи

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leqslant |(x_n - x)\cdot y_n| + |x \cdot (y_n - y)| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|.$$

Кад $n \to \infty$, имамо $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$, а $(\|y_n\|)$ је ограничен низ реалних бројева, јер низ вектора (y_n) конвергира. Одатле следи да израз $x_n \cdot y_n - x \cdot y$ тежи нули. ∎

Предност пред-Хилбертових простора над произвољним нормираним просторима је у томе што се у њима може дефинисати угао између вектора. Специјално, уводи се

Дефиниција 9.1.3

За векторе x, y пред-Хилбертовог простора X каже се да су **ортогонални** ако важи $x \cdot y = 0$.

Наводимо следеће једноставно својство ортогоналних вектора.

Став 9.1.2 (Питагорина теорема)

Ако су вектори x и y ортогонални, онда је $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказ.

Из $x \cdot y = 0$ следи

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = (x \cdot x) + 2(x \cdot y) + (y \cdot y) = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad ∎$$

9.2. ОРТОНОРМИРАНИ СИСТЕМИ И ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

Дефиниција 9.2.1

За систем вектора $\{\, e_i \mid i \in I \,\}$ (I је произвољан скуп индекса) пред-Хилбертовог простора X кажемо да је **ортонормиран** ако је

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j, \\ 0, & \text{за } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j \in I).$$

Приметимо одмах да су вектори ортонормираног система увек међусобно линеарно независни. Заиста, ако би неки коначан подскуп $\{e_1, \dots, e_n\}$ датог ортонормираног система био линеарно зависан, постојали би скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, од којих бар један (нпр. λ_i) није једнак нули, такви да је $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Скаларним множењем са e_i следило би тада $\lambda_i = 0$, супротно учињеној претпоставци.

Примери 9.2.1

1° У простору $\mathbf{R}^k$ вектори $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …, $e_k = (0, 0, \dots, 1)$ чине један ортонормиран систем.

2° Уочимо векторе

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \quad e_3 = (0, 0, 1, \dots), \quad \dots$$

Хилбертовог простора l^2. Непосредно се проверава да је низ вектора $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ортонормиран.

3° У простору $C_0[-\pi, \pi]$ део-по-део непрекидних функција на сегменту $[-\pi, \pi]$ посматрајмо **тригонометријски систем функција**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \dots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ \dots . \tag{1}$$

Ортонормираност тог низа функција следи из једнакости:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{за } m \neq n, \\ \pi, & \text{за } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{за } m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad \text{за } m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \ n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{за } m \neq n, \\ \pi, & \text{за } m = n \neq 0, \end{cases}$$

које се непосредно проверавају.

4° На сличан начин се доказује да је у простору $C_0[-l, l]$ $(l > 0)$ ортонормиран следећи низ функција

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \ \dots, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \ \dots .$$

5° Полиноми који се дефинишу помоћу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

називају се **Лежандровим полиномима**. На пример,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad \dots .$$

Докажимо да је систем $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ Лежандрових полинома ортогоналан (али не и ортонормиран) у простору $C_0[-1, 1]$.

У том циљу довољно је доказати да је сваки полином $P_n(x)$ ортогоналан на полиноме $1, x, \dots, x^{n-1}$, чијим линеарним комбинацијама се добијају полиноми $P_k(x)$ за $k < n$. Парцијалном интеграцијом се за $k < n$ добија

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{k+1}x^k}{dx^{k+1}}\,\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\,dx = 0.$$

Лако се изводи да је $\|P_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$, па је систем полинома $\tilde{P}_n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, где је $\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,P_n(x)$, ортонормиран у простору $C_0[-1,1]$. ▲

Нека је $\{e_1, \dots, e_k\}$ ортонормиран скуп вектора (ортонормирана база) коначнодимензионог простора $\mathbf{R}^k$. Из линеарне алгебре је познато да се сваки вектор $x \in \mathbf{R}^k$ може на јединствен начин приказати у облику $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, при чему су коефицијенти α_i одређени са $\alpha_i = x \cdot e_i$. Да ли слични закључци важе и за бесконачнодимензионе просторе? Уведимо следеће основне појмове.

Дефиниција 9.2.2

Нека је X бесконачнодимензиони пред-Хилбертов простор и

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \tag{2}$$

ортонормиран низ вектора у њему. За бројеве $\alpha_n = x \cdot e_n$, $n \in \mathbf{N}$, кажемо да су **Фуријеови коефицијенти** вектора $x \in X$ у односу на низ (2), а за ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n$$

да је **Фуријеов ред** тог вектора у односу на низ (2).

Наведимо неколико општих својстава Фуријеових коефицијената и Фуријеових редова.

Став 9.2.1

Нека је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран низ вектора у пред-Хилбертовом простору X и $x \in X$. Тада за дато $n \in \mathbf{N}$ и сваки вектор облика $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ важи

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \Big\| \leqslant \Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big\|,$$

при чему се једнакост постиже ако и само ако је $\lambda_i = x \cdot e_i$, $i = 1, \dots, n$. Другим речима, од свих линеарних комбинација $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, вектор x најбоље апроксимира она која је уједно n-та парцијална сума Фуријеовог реда тог вектора у односу на систем $\{e_1, e_2, \dots\}$.

Доказ.

Квадрат норме вектора $x - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ може се проценити на следећи начин

$$\begin{aligned}
\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big\|^2 &= \Big(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) \cdot \Big(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x \cdot e_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - x \cdot e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 \\
&\geqslant \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2,
\end{aligned}$$

при чему се једнакост постиже ако и само ако је $\lambda_i = x \cdot e_i$ за $i = 1, \dots, n$. ■

Став 9.2.2 (Беселова неједнакост)

Нека је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран низ вектора у пред-Хилбертовом простору X и $x \in X$. Тада важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot e_i)^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{3}$$

Доказ.

Из доказа претходног става, стављајући $\lambda_i = x \cdot e_i$ за $i = 1, \dots, n$, добијамо да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2, \tag{4}$$

одакле следи $\sum\limits_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$. Дакле, ред (са позитивним члановима) на левој страни неједнакости (3) конвергира и сума му није већа од $\|x\|^2$. ■

Последица 9.2.1

Низ Фуријеових коефицијената $(x \cdot e_n)$ сваког вектора по произвољном ортонормираном низу тежи нули. ■

Пример 9.2.2

Интерпретирајмо резултате ставова 9.2.1 и 9.2.2 на примеру тригонометријског система (1) у простору $C_0[-\pi, \pi]$. Фуријеови коефицијенти функције $f \in C_0[-\pi, \pi]$ у односу на тај систем дати су са

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Уобичајено је, међутим, да се уместо њих посматрају коефицијенти $a_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\alpha_0$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\alpha_n$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, тј.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

које ћемо у даљем звати тригонометријским Фуријеовим коефицијентима функције f. Фуријеов ред те функције онда гласи

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6}$$

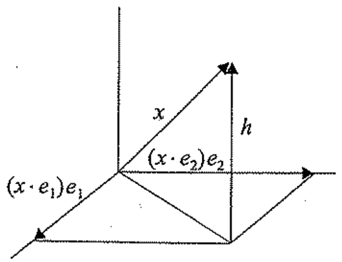
и зове се тригонометријски Фуријеов ред функције f.

Став 9.2.1 у овом случају може се исказати на следећи начин: од свих тригонометријских полинома n-тог реда (тј. збирова облика $A_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$), најбоље апроксимира функцију f (у смислу средњег квадратног одступања) n-та парцијална сума тригонометријског Фуријеовог реда (6) те функције.

Беселова неједнакост (3) гласи

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \quad \blacktriangle$$

Геометријски, ставови 9.2.1 и 9.2.2 могу се приказати на слици 9.2.1. Бројеви $x \cdot e_i$, $i = 1, \dots, n$ (на слици је узето $n = 2$) представљају алгебарске вредности пројекција вектора x на координатне осе, а вектор $\sum\limits_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)e_i$ је пројекција вектора x на раван одређену векторима $e_1, \dots, e_n$. Он је, од свих вектора те равни, најбоља апроксимација вектора x, тј. од свих вектора облика $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ вектор $h = x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)e_i$ (који је нормалан на тој равни) има најмању норму. Та норма се изражава релацијом (4): $\|h\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)^2$ и једнака је нули ако и само ако вектор x припада поменутој равни. У том случају важи $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x \cdot e_i)^2$, што је на други начин записана Питагорина теорема.



Сл. 9.2.1

Потпуни ортонормирани системи

Нека од основних питања која се могу поставити за сваки ортонормирани низ $\{e_1, e_2, \dots\}$ у пред-Хилбертовом простору су:

1° Да ли се сваки вектор $x \in X$ може произвољно добро апроксимирати линеарним комбинацијама елемената датог система?

2° Да ли се сваки вектор $x \in X$ може приказати као сума свог Фуријеовог реда, тј. да ли важи

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n\,?$$

3° Да ли за сваки вектор $x \in X$ у Беселовој неједнакости (3) важи једнакост?

4° Да ли је 0 једини вектор у X чији су сви Фуријеови коефицијенти једнаки нули, тј. да ли је 0 једини вектор који је ортогоналан на све векторе датог ортонормираног система?

Лако је показати да сва наведена питања у општем случају имају одречан одговор. Штавише, то је тако и у коначнодимензионом случају ако ортонормирани систем има мање вектора него што је димензија простора. На пример, скуп $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)\}$ вектора из $\mathbf{R}^3$ јесте ортонормиран, али не задовољава ниједан од услова 1°–4°.

Везу између услова 1°–4° даје следећа основна

Теорема 9.2.1

(а) За ортонормирани низ $\{e_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ у пред-Хилбертовом простору X следећи услови су еквивалентни:

1° За свако $x \in X$ и свако $\varepsilon > 0$ постоје скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, такви да је $\left\|x - \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\| < \varepsilon$.

2° За свако $x \in X$ важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)e_n = x$ (конвергенција реда у смислу метрике простора X).

3° За свако $x \in X$ важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x \cdot e_n)^2 = \|x\|^2$ (**Парсевалова**[3] **једнакост**).

(б) Било који од услова 1°–3° повлачи да важи

4° Ако је вектор $x \in X$ такав да је $x \perp e_n$ за све $n \in \mathbf{N}$, онда је $x = 0$.

Ако је простор X Хилбертов (дакле, комплетан), онда су услови 1°–4° међусобно еквивалентни.

Доказ.

Доказаћемо импликације 1° $\Rightarrow$ 2°, 2° $\Rightarrow$ 3°, 3° $\Rightarrow$ 1°, 3° $\Rightarrow$ 4° и (у случају комплетности простора X) 4° $\Rightarrow$ 2°.

[3] M. A. Parseval (1755–1836), француски математичар

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Ако важи 1°, за дато $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ изаберимо бројеве $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ тако да важи $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon$. На основу екстремалног својства Фуријеових коефицијената (став 9.2.1), важи

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon,$$

што значи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n$ конвергира и има суму x.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Због непрекидности скаларног производа (став 9.1.1) и ортонормираности датог система, из 2° следи да за свако $x \in X$ важи

$$\|x\|^2 = x \cdot x = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n \right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n)^2.$$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Из једнакости (4) и услова 3° добијамо да је за свако $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 \right) = 0,$$

што значи да се вектор x може произвољно добро апроксимирати линеарним комбинацијама облика $\sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Ако је $x \in X$ такав вектор да је $x \cdot e_n = 0$ за $n \in \mathbf{N}$, онда из 3° следи $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n)^2 = 0$, тј. $x = 0$.

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Докажимо најпре да ако је простор X комплетан, онда Фуријеов ред сваког вектора $x \in X$ конвергира.

Заиста, ако са $s_n = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i$ означимо парцијалну суму тога реда, имамо за $m > n$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left[\sum_{i=n+1}^{m} (x \cdot e_i) e_i \right] \cdot \left[\sum_{i=n+1}^{m} (x \cdot e_i) e_i \right] = \sum_{i=n+1}^{m} (x \cdot e_i)^2.$$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n)^2$, међутим, јесте конвергентан нумерички ред (став 9.2.2), па из претходног следи да је низ (s_n) Кошијев, дакле конвергентан у X.

Означимо $y = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n$ и $z = x - y$. Због непрекидности скаларног производа имамо да је за свако $i \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} z \cdot e_i &= x \cdot e_i - y \cdot e_i = x \cdot e_i - \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n \right] \cdot e_i \\ &= x \cdot e_i - x \cdot e_i = 0. \end{aligned}$$

Ако важи услов 4°, одатле следи да је $z = 0$, тј. $x = y = \sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n) e_n$. ∎

Приметимо да у случају некомплетног пред-Хилбертовог простора услов 4° не мора да повлачи услове 1°–3° (за одговарајући пример в. задатак 5).

Дефиниција 9.2.3

За ортонормиран низ $\{ e_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ у пред-Хилбертовом простору X који задовољава било који од услова 1°–3° претходне теореме кажемо да је **потпун** или да представља **ортонормирану базу** у X.

Пример 9.2.3

Систем јединичних вектора $e_1, e_2, \dots$ простора l^2 (пример 9.2.1.2°) је ортонормирана база тог простора. Било који од услова 1°–4° може се једноставно проверити. ▲

О, за нас најважнијем, питању потпуности тригонометријског система у $C_0[-\pi, \pi]$ говорићемо у наредном одељку.

9.3. ПОТПУНОСТ ТРИГОНОМЕТРИЈСКОГ СИСТЕМА

Вајерштрасова теорема 7.4.1 тврди да се свака реална функција, непрекидна на одсечку $[a, b]$, може произвољно добро (равномерно на $[a, b]$) апроксимирати алгебарским полиномима. Када су у питању периодичне непрекидне функције $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ периода 2π или, што је очигледно еквивалентно, функције f простора $C[-\pi, \pi]$ за које важи $f(-\pi) = f(\pi)$, може се извршити равномерна апроксимација тригонометријским полиномима, тј. сумама облика $A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$. То тврди следећа теорема, која се обично назива **другом Вајерштрасовом теоремом**.

Теорема 9.3.1

За сваку непрекидну функцију $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ периода 2π и за свако $\varepsilon > 0$ постоји тригонометријски полином t, такав да је $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$ за све $x \in \mathbf{R}$.

Доказ.

Јасно је да је дату неједнакост довољно доказати за $x \in [-\pi, \pi]$.

Претпоставимо најпре да је функција f парна. Посматрајмо функцију $g(u) = f(\arccos u)$, $u \in [-1, 1]$. Очигледно је $g \in C[-1, 1]$, па на основу теореме 7.4.1 следи да постоји алгебарски полином p, такав да је $|f(\arccos u) - p(u)| < \varepsilon$ за све $u \in [-1, 1]$. Другим речима, важи

$$|f(x) - p(\cos x)| < \varepsilon \quad \text{за } x \in [0, \pi].$$

Но, због парности функција $f(x)$ и $\cos x$, та неједнакост важи и за $x \in [-\pi, 0]$. Како је $t(x) = p(\cos x)$ тригонометријски полином (проверити!), то је тврђење теореме за парну функцију f доказано.

Претпоставимо сада да је $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ произвољна непрекидна функција периода 2π. Напишимо је у облику

$$f(x) = f(x) \sin^2 x + f(x) \cos^2 x. \tag{1}$$

Први од добијених сабирака можемо представити као

$$(2)\qquad f(x)\sin^2(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}\sin^2 x + \left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x\right)\sin x.$$

Како су функције $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ и $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x$ непрекидне, периодичне (са периодом 2π) и парне, то на основу првог дела доказа постоје тригонометријски полиноми t_1 и t_2, такви да је

$$\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2} - t_1(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4},\quad \left|\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x - t_2(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

за све $x \in [-\pi,\pi]$. Но, онда из (2), стављајући $t_3(x) = t_1(x)\sin^2 x + t_2(x)\sin x$, следи

$$(3)\qquad |f(x)\sin^2 x - t_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Аналогним расуђивањем, полазећи од функције $g(x) = f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, добијамо да постоји тригонометријски полином $t_4(x)$, такав да важи $\left|f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - t_4(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, односно, уз ознаку $t_5(x) = t_4\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$(4)\qquad |f(x)\cos^2 x - t_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Из релација (1), (3) и (4) следи да за тригонометријски полином $t(x) = t_3(x) + t_5(x)$ важи

$$|f(x) - t(x)| < \varepsilon,\qquad x\in[-\pi,\pi].\quad\blacksquare$$

Коришћењем доказане Вајерштрасове теореме може се лако извести следећа основна

Теорема 9.3.2

Тригонометријски систем

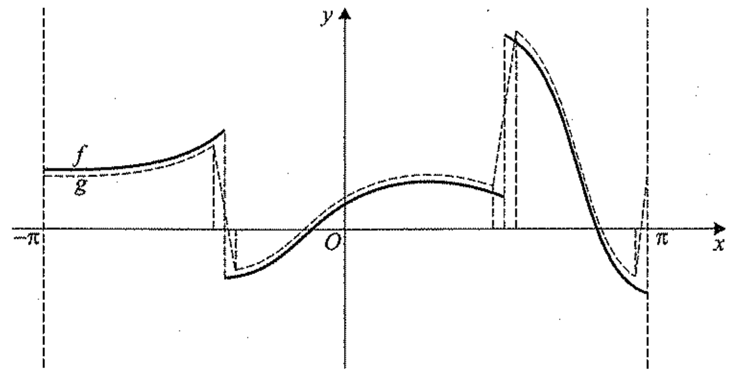
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

је потпун у простору део-по-део непрекидних функција $C_0[-\pi,\pi]$.

Доказ.

Доказаћемо да важи услов 1° теореме 9.2.1, тј. да за сваку функцију $f \in C_0[-\pi,\pi]$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји тригонометријски полином t, такав да је

$$\|f-t\| = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-t(x)]^2\,dx\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$



Сл. 9.3.1

Најпре, за дату функцију $f \in C_0[-\pi,\pi]$ одредимо непрекидну функцију $g\colon [-\pi,\pi]\to \mathbf{R}$, такву да је $g(-\pi)=g(\pi)$ и $\|f-g\| < \varepsilon/2$. Поступак одређивања функције g скициран је на слици 9.3.1 на којој је пуном линијом нацртан график дате део-по-део непрекидне функције f, а испрекиданом график тражене функције g – она се поклапа са f свуда осим у довољно малим околинама тачака прекида функције f, односно тачке π; у тим околинама функција g је линеарна.

За нађену функцију g, на основу теореме 9.3.1, постоји тригонометријски полином t, такав да је $|g(x)-t(x)| < \varepsilon/2\sqrt{2\pi}$ за све $x\in[-\pi,\pi]$,односно

$$\|g-t\| = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-t(x)]^2\,dx\right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дакле је

$$\|f-t\| \leqslant \|f-g\| + \|g-t\| < \varepsilon,$$

чиме је теорема доказана. $\blacksquare$

Узимајући у обзир теорему 9.2.1, можемо из доказане теореме 9.3.2 извести следећу последицу.

Последица 9.3.1

1° Тригонометријски Фуријеов ред сваке део-по-део непрекидне функције $f\in C_0[-\pi,\pi]$ конвергира тој функцији у средњем.

2° Ако су тригонометријски Фуријеови коефицијенти a_0, a_n, b_n $(n\in\mathbf{N})$ функције $f\in C_0[-\pi,\pi]$ дефинисани релацијама (5) одељка 9.2, онда важи Парсевалова једнакост

$$(5)\qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

3° Ако функција $f\in C_0[-\pi,\pi]$ има све тригонометријске Фуријеове коефицијенте једнаке нули, онда је $f\equiv 0$. Ако функције f, $g\in C_0[-\pi,\pi]$ имају тригонометријске Фуријеове редове чији су сви одговарајући коефицијенти међусобно једнаки, онда је $f\equiv g$. $\blacksquare$

Пример 9.3.1

Посматрајмо функцију $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbf{R}$ дату са $f(x) = x$ за $x \in [-\pi,\pi]$. Очигледно је $f \in C_0[-\pi,\pi]$. На основу формула (5) одељка 9.2 добијамо да су њени тригонометријски Фуријеови коефицијенти

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0, \quad n = 0,1,2,\dots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1,2,\dots.$$

На тај начин, тригонометријски Фуријеов ред функције f има облик

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

и, према последици 9.3.1.1°, конвергира тој функцији у средњем, тј. важи

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[x - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\right]^2 dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Приметимо, међутим, да тај ред не конвергира тачка-по-тачка функцији f на $[-\pi,\pi]$. Заиста, за $x=-\pi$ или $x=\pi$ његова сума је очигледно једнака нули, док је $f(-\pi)=-\pi$, $f(\pi)=\pi$.

Парсевалова једнакост (5) у овом примеру гласи

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx, \qquad \text{тј.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacktriangle$$

9.4. ОБИЧНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКОГ ФУРИЈЕОВОГ РЕДА

На основу резултата претходног одељка, тригонометријски Фуријеов ред сваке део-по-део непрекидне функције конвергира тој функцији у средњем. То, међутим, не значи да он конвергира тој функцији у свакој тачки. Заиста, већ сасвим једноставан пример 9.3.1 показује да се може догодити да у неким тачкама одговарајуће једнакости не важе. Познати су и много „гори" примери – рецимо, Ди Боа Рејмон[4] је показао да постоји непрекидна функција $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$ која задовољава услов $f(-\pi)=f(\pi)$ и чији тригонометријски Фуријеов ред дивергира у унапред задатом бесконачном свуда густом скупу тачака сегмента $[-\pi,\pi]$. Чак је и питање да ли тригонометријски Фуријеов ред дате део-по-део непрекидне функције мора да конвергира бар у једној тачки датог сегмента тек 1966. године добило потврдан одговор (Карлесон[5]).

[4] P. Du Bois Reymond (1831–1889), немачки математичар
[5] L. Carleson (1928–), шведски математичар

Дакле, проблем обичне конвергенције тригонометријског Фуријеовог реда дате функције много је тежи од проблема конвергенције у средњем. У овом одељку даћемо неке довољне услове који обезбеђују такву конвергенцију. Како ћемо искључиво говорити о тригонометријским Фуријеовим редовима, то ћемо у даљем изостављати атрибут „тригонометријски".

Посматраћемо функције $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ које су 2π-периодичне и апсолутно интеграбилне (у својственом или несвојственом смислу) на сегменту $[-\pi,\pi]$. За такве функције су дефинисани Фуријеови коефицијенти

(1)
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad k=0,1,2,\dots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \quad k=1,2,\dots,$$

а n-та парцијална сума $s_n(x)$ одговарајућег Фуријеовог реда има облик

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Замењујући вредности коефицијената, ту суму можемо трансформисати на следећи начин

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\sin kx\,dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}\,dt. \end{aligned}$$

У последњем прелазу користили смо познату формулу

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u};$$

при томе подразумевамо да добијени разломак у тачкама у којима је $x-t=2m\pi$ ($m\in\mathbf{Z}$) има такву вредност да је тај разломак непрекидна функција. Узимајући ту конвенцију у обзир, означимо

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}.$$

Израз $D_n(u)$ назива се **Дирихлеовим језгром**. Помоћу њега се парцијална сума $s_n(x)$ записује у облику

(2)
$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Наведимо следећа два једноставна својства Дирихлеовог језгра.

1° D_n је 2π-периодична и парна функција.

2° $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 1.$

Својство 1° је очигледно, а својство 2° се добија интеграцијом израза $D_n(u) = 2\Big(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos ku\Big)$.

За даље испитивање суме $s_n(x)$ биће нам потребно следеће важно помоћно тврђење.

Лема 9.4.1 (Риман)

Нека је $(a,b) \subset \mathbf{R}$ произвољан (коначан или бесконачан) интервал и $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна функција (у својственом или несвојственом смислу). Тада је

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Доказ.

Докажимо једнакост $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Друга једнакост доказује се аналогно.

Претпоставимо, одређености ради, да је тачка b једини (евентуални) сингуларитет интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Тада за дато $\varepsilon > 0$ можемо изабрати сегмент $[a,\beta] \subset [a,b)$, тако да је за свако $\lambda \in \mathbf{R}$ испуњено

$$(3)\quad \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^\beta f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \int_\beta^b |f(x)\cos\lambda x|\,dx \leqslant \int_\beta^b |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Функција f је интеграбилна на $[a,\beta]$, па постоји подела $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ тог сегмента, таква да за одговарајућу доњу Дарбуову суму $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $i = 1, \ldots, n$, важи

$$0 \leqslant \int_a^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

Дефинишимо функцију $g\colon [a,\beta] \to \mathbf{R}$ помоћу

$$g(x) = m_i \quad \text{за} \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и $g(\beta) = m_n$. Тада је $g(x) \leqslant f(x)$ за $x \in [a,\beta]$ и

(4)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\beta f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^\beta g(x)\cos\lambda x\,dx\right| &\leqslant \int_a^\beta |f(x) - g(x)|\cdot|\cos\lambda x|\,dx\\ &\leqslant \int_a^\beta [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < \varepsilon.\end{aligned}$$

Најзад, за део-по-део константну функцију g важи

$$(5)\quad \begin{aligned}\int_a^\beta g(x)\cos\lambda x\,dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i\cos\lambda x\,dx\\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\sin\lambda x_i - \sin\lambda x_{i-1}}{\lambda} \to 0 \quad (\lambda\to\infty).\end{aligned}$$

Комбинујући добијене процене (3), (4) и (5), изводимо тражену једнакост $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. ■

Приметимо да као специјалан случај доказане леме поново добијамо тврђење последице 9.2.1, примењено на тригонометријске Фуријеове коефицијенте.

Следећа основна теорема обично носи назив **Риманов принцип локализације**.

Теорема 9.4.1

Нека је функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-периодична и апсолутно интеграбилна (у својственом или несвојственом смислу) на $[-\pi,\pi]$ и нека $x \in (-\pi,\pi)$. Понашање Фуријеовог реда функције f у тачки x (дакле, његова конвергенција или дивергенција и, у случају конвергенције, вредност његовог збира) зависи само од вредности функције f у некој, произвољно малој, околини тачке x.

Доказ.

У изразу (2) за n-ту парцијалну суму Фуријеовог реда функције f заменимо $x - t$ са u. Ако искористимо чињеницу да интеграл 2π-периодичне функције има исту вредност на било ком интервалу дужине 2π, добијамо

$$(6)\quad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du.$$

Изаберимо сада произвољан број δ за који је $0 < \delta < \pi$. Напишимо последњи интеграл у облику збира три интеграла по сегментима $[-\pi,-\delta]$, $[-\delta,\delta]$ и $[\delta,\pi]$. Ако у првом од тих интеграла заменимо $-u$ са u (и тиме га преведемо у интеграл по сегменту $[\delta,\pi]$), користећи парност Дирихлеовог језгра, добијамо

(7)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-u)D_n(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{\sin(u/2)}\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)u\,du.$$

Како је функција $1/\sin(u/2)$ ограничена на сегменту $[\delta,\pi]$, то је функција $\dfrac{f(x+u)+f(x-u)}{\sin(u/2)}$ апсолутно интеграбилна на том сегменту. Зато применом леме 9.4.1 закључујемо да други интеграл на десној страни релације (7) тежи нули кад $n\to\infty$. На тај начин, понашање парцијалне суме $s_n(x)$ зависи од понашања првог интеграла у тој релацији, а у њему учествују само вредности функције f у околини $(x-\delta,x+\delta)$ тачке x. Тиме је тврђење теореме доказано. ∎

Укажимо на, у одређеном смислу, неочекиваност резултата теореме 9.4.1. Наиме, коефицијенти a_n, b_n Фуријеовог реда функције f изражавају се интегралима (1) и, дакле, зависе од вредности те функције на целом интервалу $[-\pi,\pi]$; на конвергенцију тога реда у тачки x, међутим, утичу само оне вредности које су близу тачке x.

Приметимо, такође, да из претходног доказа следи да тачка x може бити и један од крајева сегмента $[-\pi,\pi]$ (на пример, $x=\pi$), но у том случају на конвергенцију реда у тој тачки утичу како вредности из околине $(\pi-\delta,\pi]$, тако и вредности из околине $[-\pi,-\pi+\delta)$.

Докажимо сада следеће **Динијево правило** који даје довољне услове за конвергенцију Фуријеовог реда.

Теорема 9.4.2

Нека је $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2π-периодична функција, апсолутно интеграбилна на $[-\pi,\pi]$ и $x\in\mathbf{R}$. Ако

1° постоје леви и десни лимеси $f(x-0)$ и $f(x+0)$ функције f у тачки x,

2° за неко $\varepsilon>0$ апсолутно конвергирају интеграли

$$\int_0^\varepsilon \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du,\qquad \int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du,$$

тада Фуријеов ред функције f конвергира у тачки x и збир му је

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Специјално, ако је функција f још и непрекидна у тачки x, тада важи

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Доказ.

Представимо парцијалну суму $s_n(x)$ Фуријеовог реда функције f у облику другог интеграла у формули (6), а затим тај интеграл напишимо као збир интеграла по интервалима $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$. Ако у првом од тих интеграла заменимо $-u$ са u, добијамо

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+u)+f(x-u)]D_n(u)\,du.$$

Користећи својство 2° Дирихлеовог језгра, одузмимо од обе стране претходне једнакости израз

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}D_n(u)\,du.$$

Добијамо

$$\begin{aligned}
s_n(x)&-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2}+\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2}\right]D_n(u)\,du\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin(u/2)}+\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin(u/2)}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du.
\end{aligned}$$

Ако узмемо у обзир да је $2\sin\dfrac{u}{2}\sim u$ $(u\to 0)$ и претпоставку 2° теореме, закључујемо да се на последњи интеграл може применити Риманова лема 9.4.1, те он тежи нули кад $n\to\infty$. Тиме је доказано да, под претпоставкама теореме, важи

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.\quad\blacksquare$$

Последица 9.4.1 (Липшицово правило)

Нека је 2π-периодична функција $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна на $[-\pi,\pi]$ и непрекидна у тачки $x\in\mathbf{R}$. Ако постоје константе $L\in\mathbf{R}$ и $\alpha\in(0,1]$, такве да за неко $\delta>0$ и свако $u\in(-\delta,\delta)$ важи

$$|f(x+u)-f(x)|\leqslant L|u|^\alpha, \tag{8}$$

онда Фуријеов ред функције f у тачки x конвергира и збир му је једнак $f(x)$.

Доказ.

Потребно је само проверити да важи услов 2° теореме 9.4.2. Но, како је

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right|\leqslant\frac{L}{|u|^{1-\alpha}},\qquad |u|<\delta,$$

то апсолутна конвергенција наведених интеграла следи из поредбеног критеријума. ∎

Услов (8) претходне последице још се назива **Хелдеровим условом**, а функције које га задовољавају **функцијама Хелдерове класе**. Лако се проверава да тврђење последице остаје на снази ако се уместо непрекидности функције f у тачки x и Хелдеровог услова претпостави само постојање једностраних лимеса $f(x+0)$ и $f(x-0)$ и важење следећих „једностраних" Хелдерових услова

$$|f(x+u)-f(x+0)|\leqslant Lu^\alpha,\quad |f(x-u)-f(x-0)|\leqslant Lu^\alpha,\qquad 0<u<\delta,$$

за неке α $(0<\alpha\leqslant 1)$ и $L>0$. Наравно, у том случају је збир Фуријеовог реда једнак $\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Последица 9.4.2

Ако је функција $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2π-периодична и део-по-део глатка (тј. има део-по-део непрекидан извод) на $[-\pi,\pi]$, тада њен Фуријеов ред конвергира у свакој тачки $x\in\mathbf{R}$ и сума му је $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Доказ.

Користећи Лагранжову теорему о средњој вредности, лако се показује да део-по-део глатка функција задовољава Хелдеров услов (8) са експонентом $\alpha=1$ у свакој тачки x у којој је њен извод дефинисан и непрекидан. У евентуалној тачки прекида извода задовољени су одговарајући једнострани услови. ∎

Пример 9.4.1

Функцији $f(x)=x$ из примера 9.3.1 променимо вредности у крајевима интервала $[-\pi,\pi]$, стављајући $f(-\pi)=f(\pi)=0$, а затим добијену функцију 2π-периодично продужимо на целу реалну праву. Добијену функцију означимо поново са f. Дакле је

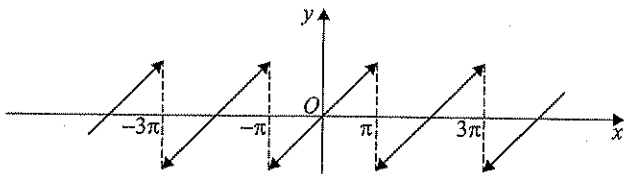
$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi;\qquad f(-\pi)=f(\pi)=0;$$
$$f(x+2\pi)=f(x),\quad x\in\mathbf{R},$$

сл. 9.4.1. Функција f задовољава све услове последице 9.4.2 и при томе је $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=f(x)$ за свако $x\in\mathbf{R}$. Зато њен Фуријеов ред конвергира вредности $f(x)$ у свакој тачки $x\in\mathbf{R}$. Специјално, важи

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases} x, & \text{за } -\pi<x<\pi,\\ 0, & \text{за } |x|=\pi.\end{cases}$$

Стављајући $x=\pi/2$ добијамо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}. \tag{9}$$ ▲



Сл. 9.4.1

На крају, наведимо још неке напомене, корисне код ефективног развијања датих функција у Фуријеове редове.

1° Сва разматрања овог одељка могу се, са небитним изменама, спровести за функције чији је период једнак $2l$, $l>0$. У том случају (в. и пример 9.2.1.4°) Фуријеови коефицијенти функције f имају облик

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\dots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots,$$

а одговарајући Фуријеов ред је

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Big).$$

2° Ако је $2l$-периодична функција $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ парна, јасно је да важи

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\dots;\qquad b_n=0,\quad n=1,2,\dots,$$

па се она, ако важе одговарајући услови, развија у „ред по косинусима" $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$.

Слично, ако је функција f непарна, њени коефицијенти су

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\dots;\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots,$$

а Фуријеов ред јој је „синусни": $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Наравно, сваку функцију, дефинисану, на пример, на сегменту $[0,l]$ можемо, по жељи, парно или непарно продужити на сегмент $[-l,l]$ и затим је развити у косинусни, односно синусни ред.

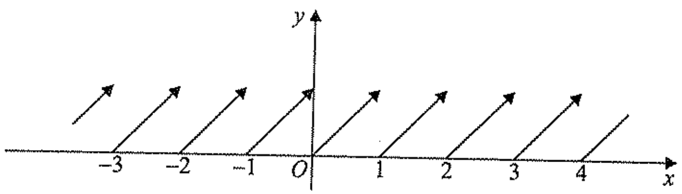
Примери 9.4.2

1° Функција $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$, сл. 9.4.2, периодична је с периодом $2l=1$. Зато је

$$a_0=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\,dx=2\int_0^1 x\,dx=1,$$
$$a_n=\frac{1}{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\cos 2n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx=0,\quad n\in\mathbf{N},$$
$$b_n=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi},\quad n\in\mathbf{N}.$$

Фуријеов ред функције f има облик

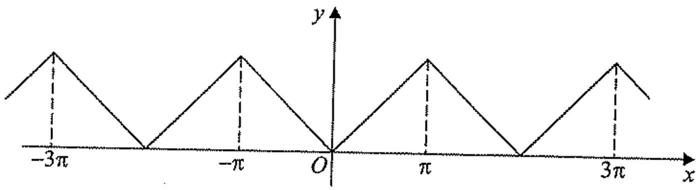
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}.$$



Сл. 9.4.2

Како функција f задовољава све услове последице 9.4.2 (са $2l$ уместо 2π), то тај ред конвергира за све $x \in \mathbf{R}$. При томе је његов збир једнак $f(x)$ за свако $x \notin \mathbf{Z}$, док је у свакој тачки $x \in \mathbf{Z}$ вредност тог збира $1/2$. Специјално, за $x = 1/4$ поново добијамо резултат (9).

2° Функцију $f(x) = x$ развићемо у косинусни ред на интервалу $[0, \pi]$.



Сл. 9.4.3

Посматрајмо функцију $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинисану помоћу

$$g(x) = x, \quad x \in [0, \pi]; \qquad g(-x) = g(x), \quad x \in [0, \pi];$$
$$g(x + 2\pi) = g(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

сл. 9.4.3. Она задовољава услове последице 9.4.2, при чему је, због непрекидности, $g(x) = \frac{1}{2}[g(x-0) + g(x+0)]$ за све $x \in \mathbf{R}$. Коефицијенти функције g су $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi$ и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{за } n = 2k-1. \end{cases}$$

Зато је

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

и, специјално,

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Стављајући у последњу једнакост $x = \pi$ добијамо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{9}.$$

3° Нека је a позитиван реалан број који није цео. Нађимо Фуријеов ред 2π-периодичне функције f, дате са $f(x) = \cos ax$ за $x \in [-\pi, \pi]$. Јасно је да су испуњени услови да тај ред за свако $x \in \mathbf{R}$ има суму једнаку $f(x)$.

Због парности функције f је $b_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Дакле, за $x \in [-\pi, \pi]$ је

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}\cos nx.$$

Ако у ту релацију ставимо $x = \pi$ и поделимо је (различитим од нуле) бројем $\sin a\pi/\pi$, добијамо

$$\pi\operatorname{ctg} a\pi - \frac{1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

Нека је сада $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$. Извршимо интеграцију претходне једнакости по a на сегменту $[0, \alpha]$, узимајући у обзир да ред на десној страни на том сегменту равномерно конвергира (што је лако проверити). Добијамо

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right),$$

односно

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Може се доказати да наведено представљање синуса (које смо користили у одељку 8.4) важи за свако $\alpha \in \mathbf{R}$. ▲

9.5. УСЛОВИ РАВНОМЕРНЕ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ. ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ И ИНТЕГРАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКОГ РЕДА

Нека је дат произвољан тригонометријски ред

(1) $$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx).$$

Такав ред, макар био и конвергентан на целом $\mathbf{R}$, не мора бити Фуријеов ред ниједне функције. Заиста, на основу примера 9.2.2, тригонометријски Фуријеови коефицијенти a_0, a_n, b_n неке функције f задовољавају услов да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ конвергира, а такав услов не мора задовољавати конвергентан ред (1) (в. задатак 8). Међутим, ако тај ред конвергира равномерно на $\mathbf{R}$, тада је он Фуријеов ред своје суме f. Заиста, у случају равномерне конвергенције, ред (1), као и редови који се из њега добијају множењем са $\cos kx$, односно $\sin kx$, могу се интегрисати члан-по-члан, што, због ортогоналности тригонометријског система, даје познате изразе за Фуријеове коефицијенте

$$\alpha_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k \in \mathbf{N}\cup\{0\},$$
$$\beta_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Поставимо сада обратно питање: када је Фуријеов тригонометријски ред неке функције f равномерно конвергентан? Јасно је да је за то неопходно да функција f буде непрекидна и 2π-периодична (јер су такве парцијалне суме његовог реда, што се равномерном конвергенцијом одржава). У следећем ставу дати су једноставни довољни услови равномерне конвергенције.

Став 9.5.1

Нека је функција $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ непрекидна и 2π-периодична и нека постоји извод f' те функције који је део-по-део непрекидан на $[-\pi,\pi]$. Тада Фуријеов ред функције f апсолутно и равномерно на $\mathbf{R}$ конвергира тој функцији.

Доказ.

Приметимо најпре да због 2π-периодичности функције f важи $f(-\pi)=f(\pi)$. Означимо са a_n, b_n Фуријеове коефицијенте функције f, а са a_n', b_n' Фуријеове коефицијенте функције f'. Парцијалном интеграцијом добијамо

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n,$$
$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n,$$

за $n\in\mathbf{N}$. Како $f'\in C_0[-\pi,\pi]$, то из Беселове неједнакости (пример 9.2.2) следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n'^2+b_n'^2)$ конвергира. С друге стране, из претходних релација, користећи елементарну неједнакост $|x|\cdot|y|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, добијамо

$$|a_n|+|b_n| = \frac{|a_n'|}{n}+\frac{|b_n'|}{n} \leqslant \frac{1}{2}(a_n'^2+b_n'^2)+\frac{1}{n^2}.$$

Како и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира, то одатле следи да конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$. Но, како његови чланови очигледно мајорирају чланове

$a_n\cos nx+b_n\sin nx$ Фуријеовог реда функције f, то на основу Вајерштрасовог правила закључујемо да тај Фуријеов ред апсолутно и равномерно конвергира на $\mathbf{R}$. ∎

Из доказа претходног става може се закључити да глаткост функције f „побољшава" конвергенцију њеног Фуријеовог реда, као и реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$, где су a_n, b_n Фуријеови коефицијенти функције f. Даље прецизирање овог закључка даје следећи

Став 9.5.2

Нека 2π-периодична функција $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ припада класи $C^p[-\pi,\pi]$, тј. нека има p непрекидних извода и нека на $[-\pi,\pi]$ она има део-по-део непрекидан извод $f^{(p+1)}$. Тада конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p(|a_n|+|b_n|). \tag{2}$$

Ако је при томе $p>0$, тада се Фуријеов ред функције f може p пута диференцирати члан-по-члан на $[-\pi,\pi]$.

Доказ.

Аналогним поступком као у доказу става 9.5.1, ако са $a_n^{(p+1)}$, $b_n^{(p+1)}$ означимо Фуријеове коефицијенте функције $f^{(p+1)}$, добијамо да важи

$$n^p(|a_n|+|b_n|) = \frac{|a_n^{(p+1)}|}{n}+\frac{|b_n^{(p+1)}|}{n} \leqslant \frac{1}{2}[(a_n^{(p+1)})^2+(b_n^{(p+1)})^2]+\frac{1}{n^2}.$$

Одатле, применом Беселове неједнакости на функцију $f^{(p+1)}$, закључујемо да конвергира ред (2).

Нека је $p\geqslant 1$. Ако p пута формално диференцирамо Фуријеов ред функције f, добијамо ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\left[a_n\cos\left(nx+p\frac{\pi}{2}\right)+b_n\sin\left(nx+p\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Његови чланови се по апсолутној вредности могу мајорирати члановима конвергентног реда (2), што на основу Вајерштрасовог правила повлачи његову равномерну конвергенцију. На основу теореме 7.3.4 и става 9.5.1 закључујемо да је збир реда (3) једнак $f^{(p)}(x)$. ∎

Нагласимо да услов 2π-периодичности функције f у претходном ставу имплицира да важе услови

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad f'(-\pi)=f'(\pi),\quad \ldots,\quad f^{(p)}(-\pi)=f^{(p)}(\pi). \tag{4}$$

Дакле, ако бисмо желели да применом тог става докажемо могућност диференцирања Фуријеовог реда неке функције $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$, морали бисмо, поред одређене глаткости те функције, да претпоставимо важење услова (4). Наиме, тада би било могуће функцију f 2π-периодично продужити на читаву реалну праву, а затим искористити став 9.5.2.

Проблем интеграције Фуријеовог реда неке функције члан-по-члан много је једноставнији од проблема његовог диференцирања. Наиме, може се показати да се ред добијен формалном интеграцијом „боље" понаша од полазног реда. Прецизније, важи

Став 9.5.3

Нека је $f \in C_0[-\pi,\pi]$ и нека је

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

њен Фуријеов ред. Тада (независно од тога конвергира ли тај ред или не) за све $x\in[-\pi,\pi]$ важи

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt,$$

при чему последњи ред конвергира равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Доказ.

Посматрајмо функцију

$$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\,dt.$$

Она је непрекидна на $[-\pi,\pi]$ и има део-по-део непрекидан извод (јер је функција f део-по-део непрекидна). Поред тога је $F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt-\pi a_0=0$, тј. $F(\pi)=F(-\pi)$. На основу става 9.5.1 следи да се функција F може на $[-\pi,\pi]$ разложити у равномерно конвергентан Фуријеов ред

(5) $$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

За коефицијенте тог реда се парцијалном интеграцијом (слично као у доказу става 9.5.1) добија

$$A_n=-\frac{b_n}{n},\quad B_n=\frac{a_n}{n},\qquad n\in\mathbf{N}.$$

Да бисмо одредили A_0 ставимо у релацији (5) $x=0$ и добијамо

$$A_0=-2\sum_{n=1}^{\infty}A_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Дакле је

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt,$$

што доказује тврђење става. ■

Пример 9.5.1

Полазећи од резултата примера 9.4.1

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad -\pi<x<\pi,$$

наћи ћемо Фуријеов ред функције $f(x)=x^2$. Интеграцијом датог реда члан-по-члан у интервалу $[0,x]$, $|x|<\pi$, добија се

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x\sin nt\,dt=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Први сабирак последњег збира може се одредити на основу чињенице да он мора бити слободни члан Фуријеовог реда функције $x^2/2$, дакле је његова вредност

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

Одатле је

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Поновном интеграцијом може се добити

$$x^3-\pi^2x=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx,\qquad -\pi<x<\pi.\quad\blacktriangle$$

9.6. ФУРИЈЕОВ ИНТЕГРАЛ

Да би се реална функција дефинисана на читавој реалној правој могла развити у Фуријеов ред по неком тригонометријском систему, неопходно је да буде периодична. За непериодичне функције, међутим, под одређеним условима, могуће је развијање у континуални аналогон Фуријеовог реда – Фуријеов интеграл. Наведимо најпре нека нестрога разматрања која ће нас довести до формула које ћемо касније доказати.

Претпоставимо да функција $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ задовољава услове да се у произвољном интервалу $(-l,l)$ може развити у тригонометријски Фуријеов ред

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где је

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Другим речима, нека је за $-l < x < l$ испуњено

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt.$$

Да ли израз на десној страни ове једнакости има лимес када $l \to \infty$? Његов први сабирак тежи нули ако за функцију f претпоставимо да је интеграбилна на $(-\infty, \infty)$. Што се бесконачне суме тиче, њу можемо написати у облику

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta y_n \int_{-l}^{l} f(t)\cos y_n(t-x)\,dt,$$

где смо означили $y_0 = 0$, $y_n = \dfrac{n\pi}{l}$ и $\Delta y_n = y_n - y_{n-1} = \dfrac{\pi}{l}$ за $n \in \mathbf{N}$. Тако записана, кад $l \to \infty$ она представља неку врсту интегралне суме несвојственог интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt\right]dy.$$

То значи да можемо очекивати да, под неким условима, важи

(1) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

односно

(2) $$f(x) = \int_0^{\infty}[a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\,dy,$$

где је

(3) $$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos yt\,dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin yt\,dt.$$

За једнакост (1), односно (2), у случајевима када она важи, казаћемо да представља развој функције f у **Фуријеов интеграл**. Функције (3) представљају континуалан аналогон тригонометријских Фуријеових коефицијената функције f и називају се још **косинусном**, односно **синусном Фуријеовом трансформацијом** те функције.

Навешћемо сада неке довољне услове који обезбеђују могућност развоја дате функције у Фуријеов интеграл.

Претпостављаћемо да је функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ локално део-по-део непрекидна (тј. део-по-део непрекидна на сваком коначном сегменту) и апсолутно интеграбилна на $\mathbf{R}$, тј. претпостављаћемо да конвергира интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$. Те претпоставке су очигледно довољне да обезбеде дефинисаност функција $a(y)$ и $b(y)$ за свако $y \in \mathbf{R}$, као и њихову непрекидност. Други услов који ћемо поставити биће исти као у Динијевом правилу (теорема 9.4.2) за конвергенцију тригонометријског Фуријеовог реда.

Теорема 9.6.1

Нека је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ локално део-по-део непрекидна и апсолутно интеграбилна функција и нека је $x \in \mathbf{R}$. Ако за неко $\varepsilon > 0$ апсолутно конвергирају интеграли

(4) $$\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x-u) - f(x-0)}{u}\,du, \qquad \int_0^{\varepsilon}\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u}\,du,$$

тада Фуријеов интеграл функције f у тачки x конвергира и има вредност

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Специјално, ако је функција f непрекидна у тачки x, онда важе формуле (1), односно (2).

Доказ.

Да бисмо испитали конвергенцију Фуријеовог интеграла функције f и одредили његову вредност, посматрајмо одговарајући „делимични" интеграл

$$I_\beta = \int_0^{\beta}[a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

$\beta > 0$, који је дефинисан због непрекидности функција $a(y)$ и $b(y)$. Конвергенција интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ обезбеђује равномерну конвергенцију (по $y \in [0,\beta]$) несвојственог интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt$, што, на основу теореме 8.3.4, значи да је дозвољена промена поретка интеграла. Дакле, важи

$$I_\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_0^{\beta}\cos y(t-x)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\,dt.$$

Сменом $t - x = u$ добијамо

(5) $$I_\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin\beta u}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x-u) + f(x+u)]\frac{\sin\beta u}{u}\,du.$$

У другом прелазу написали смо интеграл по интервалу $(-\infty, \infty)$ као збир интеграла по интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, а затим у првом од њих заменили u са $-u$.

Искористимо сада познату вредност Дирихлеовог интеграла (пример 8.3.3), записаног у облику

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta u}{u}\,du.$$

Ако ту једнакост помножимо са $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, па је одузмемо од (5), добијамо

$$\begin{aligned} I_\beta - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} + \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u}\right]\sin\beta u\,du.\end{aligned}$$

Остаје да се докаже да интеграл на десној страни ове једнакости тежи нули кад $\beta \to \infty$. У том циљу раставимо тај интеграл на интеграле по интервалима $(0, \varepsilon)$ и (ε, ∞). Први од тих интеграла тежи нули на основу Риманове леме 9.4.1 због претпостављене апсолутне конвергенције интеграла (4). Даље, на основу исте леме, важи

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-u)+f(x+u)}{u}\sin\beta u\,du \to 0 \quad (\beta\to\infty),$$

јер је функција f апсолутно интеграбилна на $\mathbf{R}$, па је функција $\dfrac{f(x-u)+f(x+u)}{u}$ апсолутно интеграбилна на $[\varepsilon, \infty)$. Најзад,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin\beta u}{u}\,du = \int_{\beta\varepsilon}^\infty \frac{\sin v}{v}\,dv$$

тежи нули кад $\beta \to \infty$ због конвергенције Дирихлеовог интеграла.

Тиме је теорема у потпуности доказана. ■

У пракси ћемо најчешће користити следеће довољне услове конвергенције Фуријеовог интеграла.

Последица 9.6.1

Ако је функција $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна на $\mathbf{R}$ и део-по-део глатка на сваком коначном интервалу, тада њен Фуријеов интеграл конвергира у свакој тачки $x\in\mathbf{R}$ и вредност му је $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. ■

Слично као у случају Фуријеових редова, када је функција f парна, односно непарна, формуле (2) и (3) добијају нешто једноставнији облик. Тако, у случају парне функције имамо развој у „косинусни Фуријеов интеграл"

$$f(x) = \int_0^\infty a(y)\cos yx\,dy, \quad a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos yt\,dt,$$

а у случају непарне у „синусни"

$$f(x) = \int_0^\infty b(y)\sin yx\,dy, \quad b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin yt\,dt.$$

Такође, сваку функцију дату на интервалу $(0,\infty)$, која задовољава одређене услове, можемо парно, односно непарно продужити на $\mathbf{R}$, а затим је развити у косинусни, односно синусни Фуријеов интеграл.

Примери 9.6.1

1° Нека је $a < b$ и

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) = \begin{cases} 2, & \text{за } a<x<b,\\ 1, & \text{за } x=a \text{ или } x=b,\\ 0, & \text{за } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Функција f задовољава све услове последице 9.6.1, при чему је $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ за све $x\in\mathbf{R}$. При томе је

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \cos yx\,dx = \frac{2}{\pi y}(\sin by - \sin ay),$$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_a^b \sin yx\,dx = \frac{2}{\pi y}(\cos ay - \cos by).$$

Зато је за све $x\in\mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\sin by - \sin ay)\cos yx + (\cos ay - \cos by)\sin yx}{y}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y(b-x)+\sin y(x-a)}{y}\,dy.$$

Из овог резултата може се извести вредност Дирихлеовог прекидног множитеља из задатка 8.13.

2° Функцију $f(x) = e^{-ax}$ $(a>0,\ x>0)$ продужимо најпре парно, а затим непарно на реалну праву (у првом случају продуженој функцији додељујемо вредност 1 у тачки $x=0$, а у другом случају вредност 0). Налазећи косинусну Фуријеову трансформацију

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos yx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+y^2},$$

односно синусну трансформацију

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\sin yx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{a^2+y^2}$$

функције f, добијамо да је

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos yx}{a^2+y^2}\,dy, \quad x\geqslant 0,$$

односно

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\sin yx}{a^2+y^2}\,dy, \quad x>0.$$

Тиме су добијене и вредности Лапласових интеграла из задатка 8.9.

3° Одредимо непрекидну функцију $\varphi\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ која задовољава интегралну једначину

$$\int_0^\infty \varphi(y)\sin xy\,dy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin x, & \text{за } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{за } x>\pi.\end{cases}$$

Јасно је да φ мора бити синусна Фуријеова трансформација функције на десној страни претходне једнакости, па је

$$\varphi(y) = \int_0^\pi \sin x\sin yx\,dx = \begin{cases} \dfrac{\sin\pi y}{1-y^2}, & \text{за } y\neq 1,\\ \pi/2, & \text{за } y=1.\end{cases} \ \blacktriangle$$

Формалном применом **Ојлерове формуле**

$$e^{iyx} = \cos yx + i \sin yx,$$

може се показати да се Фуријеове релације (2), (3) могу записати у облику

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-iyx} \widehat{f}(y)\, dy,$$

где је

$$(7) \qquad \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} f(x)\, dx.$$

Комплексна функција $\widehat{f}$ дефинисана релацијом (7) назива се **Фуријеовом трансформацијом** апсолутно интеграбилне функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Формула (6) назива се **Фуријеовом формулом инверзије**. У случају да је функција $\widehat{f}$ такође апсолутно интеграбилна на $\mathbf{R}$, та формула се може записати у облику

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Још се каже да је функција f **инверзна Фуријеова трансформација** функције $\widehat{f}$. Наведимо без доказа нека основна својства Фуријеове трансформације.

1° Ако је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна функција, тада је њена Фуријеова трансформација $\widehat{f}$ равномерно непрекидна на $\mathbf{R}$ и важи $\widehat{f}(y) \to 0$ кад $|y| \to \infty$.

2° Ако за неко $n \in \mathbf{N}$ конвергира интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^n)|f(x)|\, dx,$$

тада је Фуријеова трансформација $\widehat{f}$ n пута диференцијабилна и за $k = 1, 2, \ldots,$ n важи

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} (ix)^k f(x)\, dx, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Дакле, с тачношћу до константног фактора, извод Фуријеове трансформације функције f је Фуријеова трансформација производа $x^k f(x)$.

3° Дуално, ако је f $(n-1)$-пута непрекидно-диференцијабилна на $\mathbf{R}$, постоји $f^{(n)}$ и интеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|\, dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

конвергирају, тада је

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = \left(\frac{y}{i}\right)^n \widehat{f}(y), \quad y \in \mathbf{R}.$$

Дакле, до на константан фактор, Фуријеова трансформација n-тог извода функције f једнака је Фуријеовој трансформацији саме функције f, помноженој са y^n.

На основу наведених особина закључујемо да између оператора диференцирања и оператора множења функције независно променљивом постоји одређена веза која се успоставља Фуријеовом трансформацијом. Због тога се Фуријеова трансформација користи у теорији диференцијалних оператора и теорији (обичних и парцијалних) диференцијалних једначина, јер њена примена понекад омогућава да се неки проблеми диференцијалног типа преведу на одговарајући алгебарски проблем и тако лакше реше. Детаљније о овоме може се наћи, на пример, у књигама [21], [27], [29], [35].

ЗАДАЦИ

1. 1° Доказати да у сваком пред-Хилбертовом простору X важи **релација паралелограма**

$$(1) \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{за } x,\, y \in X.$$

2° Ако у неком реалном нормираном простору $(X, \|\cdot\|)$ важи релација (1), доказати да се може дефинисати скаларни производ на X, такав да је $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ за $x \in X$.

3° Доказати да се у нормираном простору $C[0,1]$ (са равномерном метриком) не може увести скаларни производ тако да он индукује његову норму.

2. Нека је $c \in \mathbf{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \cdots$ низ решења једначине $\operatorname{tg} l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin \xi_n x \mid n \in \mathbf{N}\}$ ортогоналан у $C_0[0, l]$.

3. Нека је $q \in C^\infty[a,b]$, а функције $u_n \in C^2[a,b]$ (које нису идентички једнаке нули) анулирају се на крајевима интервала $[a,b]$ и задовољавају једначину

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),$$

свака са својом вредношћу реалног параметра $\lambda = \lambda_n$. Доказати да је систем функција $\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ортогоналан у простору $C_0[a,b]$.

4. Доказати да систем функција $\left\{ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$ (без функције $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$!) није потпун у простору $C_0[-\pi, \pi]$.

5. Нека су e_i $(i = 1, 2, \ldots)$ стандардни јединични вектори Хилбертовог простора l^2, $e = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\right) \in l^2$ и X потпростор простора l^2 образован од свих линеарних комбинација вектора $e, e_2, e_3, \ldots$ (без вектора e_1!). Доказати:

1° Простор X није затворен у l^2 (самим тим, он није комплетан).

2° У X не постоји вектор, различит од нултог, који је ортогоналан на све векторе система $\{e_2, e_3, \dots\}$.

3° Вектор $e \in X$ се не може произвољно добро апроксимирати линеарним комбинацијама вектора система $\{e_2, e_3, \dots\}$ (тј. тај систем није потпун у X).

6. 1° Нека је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран низ у пред-Хилбертовом простору X. Доказати да за свака два вектора $x, y \in X$ важи $x \cdot y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x \cdot e_n)(y \cdot e_n)$ ако (и само ако) је низ $\{e_1, e_2, \dots\}$ потпун.

2° Ако са $a_n(f)$, $b_n(f)$, односно $a_n(g)$, $b_n(g)$, означимо тригонометријске Фуријеове коефицијенте функција $f, g \in C_0[-\pi, \pi]$, доказати да је

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)].$$

3° Доказати да за сваку функцију $f \in C_0[-\pi, \pi]$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n(f)}{n}$ конвергира.

7. 1° Нека је $\{x_1, x_2, \dots\}$ линеарно независан низ вектора у пред-Хилбертовом простору. Доказати да је низ $\{e_1, e_2, \dots\}$, који се из њега добија помоћу

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1\|}, \quad \dots, \quad e_n = \frac{x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_n \cdot e_k)e_k}{\left\|x_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_n \cdot e_k)e_k\right\|}, \quad \dots$$

ортонормиран. При томе се за свако $n \in \mathbf{N}$ линеал над векторима $\{x_1, \dots, x_n\}$ поклапа са линеалом над векторима $\{e_1, \dots, e_n\}$.

2° Доказати да се низ нормираних Лежандрових полинома $\tilde{P}_n(x)$ (в. пример 9.2.1.5°) добија претходно описаним поступком ортогонализације из низа $\{1, x, x^2, \dots\}$ вектора простора $C_0[-1, 1]$.

3° Доказати да у сваком сепарабилном пред-Хилбертовом простору постоји ортонормирана база.

8. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ (мада конвергентан за свако $x \in \mathbf{R}$) није Фуријеов ред ниједне функције $f \in C_0[-\pi, \pi]$.

9. Доказати да је сваки од низова $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos x, \dots, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos nx, \dots$, и $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x, \dots, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin nx, \dots$ ортонормирана база у простору $C_0[0, \pi]$.

10. Доказати да је

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \text{за } 0 < x < 2\pi;$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 \leqslant x < \pi, \quad b_{2k} = -\frac{\pi}{k},\ b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^2};$$

$$e^{ax} = \frac{\operatorname{sh} al}{al} + 2\operatorname{sh} al \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2l^2 + n^2\pi^2}\Big(al\cos\frac{n\pi x}{l} - n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}\Big), \ |x| < l,\ a \neq 0;$$

$$\ln\Big|2\sin\frac{x}{2}\Big| = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \quad \text{за } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$\int_0^x \ln\sqrt{\Big|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\Big|}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad |x| \leqslant \pi.$$

Користећи претходне резултате доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

11. Нека је f 2π-периодична функција, интеграбилна на $[-\pi, \pi]$.

1° Ако она задовољава услов $f(x+\pi) = -f(x)$ за $x \in \mathbf{R}$, доказати да за њене Фуријеове коефицијенте важи $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n+1)x\,dx$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\,dx$.

2° Ако она задовољава услов $f(\pi + x) = -f(\pi - x) = -f(x)$ за $x \in \mathbf{R}$, доказати да је $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(2n+1)x\,dx$.

12. Ако су a_n, b_n Фуријеови коефицијенти 2π-периодичне функције $f(x)$, доказати да су Фуријеови коефицијенти $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ функције $g(x) = f(x+h)$, $h = \text{const}$, дати са

$$\bar{a}_n = a_n\cos nh + b_n\sin nh, \quad n \in \mathbf{N}\cup\{0\},$$
$$\bar{b}_n = b_n\cos nh - a_n\sin nh, \quad n \in \mathbf{N}.$$

13. 1° Применом Вајерштрасове теореме 7.4.1 доказати да је низ Лежандрових полинома $\tilde{P}_n(x)$ (в. пример 9.2.1.5°) ортонормирана база простора $C_0[-1, 1]$.

2° Показати да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n-1)(2n-2)!}{n!\,(n-1)2^{2n-1}}P_{2n-1}(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } -1 < x < 0,\\ 1, & \text{за } 0 < x < 1.\end{cases}$$

14. Доказати да су за сваку апсолутно интеграбилну функцију $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ њена косинусна и синусна Фуријеова трансформација $a(y)$ и $b(y)$ равномерно непрекидне функције на $[0, \infty)$ које теже нули кад $y \to \infty$.

15. Доказати да је

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cos 2xy\,dy = \begin{cases} 1 - x, & \text{за } 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ 0, & \text{за } x > 1.\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{a}{2}, \quad a > 0.$$

16. Користећи познате вредности Френелових интеграла (пример 8.3.4.4°) доказати да за функције $\cos\dfrac{x^2}{2}$, $\sin\dfrac{x^2}{2}$ (које нису апсолутно интеграбилне на $\mathbf{R}$!) важе развоји у косинусне Фуријеове интеграле на $[0,\infty)$.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

ЛИТЕРАТУРА

1. S. ALJANČIĆ: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd 1968.
2. T. M. APOSTOL: *Calculus I and II*, Blaisdell Publ. Co., New York 1961.
3. T. M. APOSTOL: *Mathematical Analysis* (2nd ed.), Addison Wesley Publ. Co., London 1974.
4. M. AŠIĆ, J. VUKMIROVIĆ: *Zbirka zadataka iz matematičke analize II*, Naučna knjiga, Beograd 1975.
5. H. CARTAN: *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Hermann, Paris 1967.
6. J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1960.
7. B. R. GELBAUM, J. M. H. OLMSTED: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, San Francisco 1964.
8. M. JOVANOVIĆ: *Diferencijalni račun na* $\mathbf{R}^n$. *Konveksne funkcije. Ekstremi*, PMF, Banjaluka, 2001.
9. K. KNOPP: *Theory and Apllication of Infinite Series*, Blackie and Son, London 1951.
10. N. LAŽETIĆ: *Matematika II*, Naučna knjiga, 1 1991, 2 1994.
11. G. LEFORT: *Algèbre et analyse. Exercises* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1964.
12. S. MARDEŠIĆ: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, I 1974, II 1977.
13. M. MARJANOVIĆ: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd 1979.
14. D. PERIŠIĆ, S. PILIPOVIĆ, M. STOJANOVIĆ: *Funkcije više promenljivih. Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, 1997.
15. G. PÓLYA, G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (4. Aufl.), Springer, Berlin-Heidelberg, I 1970, II 1971.
16. S. RADENOVIĆ: *Matematička analiza II*, Zbirka rešenih ispitnih zadataka i zadataka za pripremu ispita, Beograd 1996.
17. W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill Co., New York 1964.
18. W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Co., New York 1966.
19. L. SCHWARTZ: *Analyse mathématiques I, II*, Hermann, Paris 1967.
20. M. SPIVAK: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York 1965.
21. E. C. TITCHMARSH: *The Theory of Functions* (2nd ed.), Oxford Univ. Press, Oxford 1939.

22. M. ZAMANSKY: *Introduction a l'algèbre et l'analyse modernes* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1963.

23. Г. И. АРХИПОВ, В. А. САДОВНИЧИЙ, В. Н. ЧУБАРИКОВ: *Лекции по математическому анализу* (4-ое изд.), Дрофа, Москва 2004.

24. И. А. ВИНОГРАДОВА, С. Н. ОЛЕХНИК, В. А. САДОВНИЧИЙ: *Задачи и упражнения по математическому анализу* (4-ое изд.), Дрофа, Москва 2004.

25. Б. П. ДЕМИДОВИЧ: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* (10-ое изд.), Наука, Москва 1990.

26. В. ДРАГОВИЋ, Д. МИЛИНКОВИЋ: *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд 2003.

27. В. А. ЗОРИЧ: *Математический анализ*, Наука, Москва, I 1981, II 1984.

28. В. А. ИЛЬИН, Э. Г. ПОЗНЯК: *Основы математического анализа*, Наука, Москва, I 1971, II 1980.

29. В. А. ИЛЬИН, В. А. САДОВНИЧИЙ, БЛ. Х. СЕНДОВ: *Математический анализ*, I, Наука, Москва 1979; II, Изд. Московского Унив., Москва 1987.

30. Л. Д. КУДРЯВЦЕВ: *Курс математического анализа I, II*, Высшая школа, Москва 1981.

31. Р. КУРАНТ: *Курс диференцијалног и интегралног рачуна I, II* (пр. са енгл.), Београд

32. И. И. ЛЯШКО, А. К. БОЯРЧУК, Я. Г. ГАЙ, Г. П. ГОЛОВАЧ: *Справочное пособие по математическому анализу*, Вища школа, Киев, I 1977, II 1979.

33. С. М. НИКОЛЬСКИЙ: *Курс математического анализа I, II*, Наука, Москва 1973.

34. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ: *Курс дифференциального и интегрального исчисления I–III* (7-ое изд.), Наука, Москва 1969.

35. Г. Е. ШИЛОВ: *Математический анализ. Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1--2. 1969, 3. 1970.

36. Г. Е. ШИЛОВ: *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных*, Наука, Москва 1972.