Furijeov red

Uvod

Furijeovi redovi su oblast Furijeove analize.Pomoću Furijeovih redova možemo peridičnu funkciju predstaviti kao sumu jednostavnih sinusnih i kosinusnih oscilacija. Ovi redovi nose naziv u čast Francuskog fizičara i matematičara Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) koji je dao značajan doprinos proučavanju trigonometrijskih redova oslanjajući se na radove Leonarda Ojlera, Danijela Bernulija i drugih. Furije se smatra matematičarom koji je uveo trigonometrijske redove u matematičku analizu. Do tada se koristila tehnika razvijanja funkcija u polinomske, stepene, redove. Analogno njoj, Furije je predložio tehniku razvijanja funkcija u redove čiji su sabirci trigonometrijske funkcije promenljive.

Furije se bavio istraživanjima vezanim za prostiranje toplote u metalima.
Pre Furijeovog rada nije postojala opšta toplotna jednačina preko koje bi se moglo izračunati prostiranje toplote. Postojao je način za izračunavanje jedino ukoliko je izvor toplote mogao da se predstavi jednostavnim sinusnim ili kosinusnim oblikom. Furijeova ideja je bila da se složeni izvor toplote može predstaviti superpoziciom sinusnih i kosinusnih talasa. Rezutate svojih radova je objavio 1807. i 1811. godine na Francuskoj Akademiji nauka i time izazvao veliko interesovanje i oprečne ocene u stručnoj javnosti. Svoje delo “Theorie analytique de la chaleur” objavio je 1822.godine.

Iako je osnovna namera bila da se reši toplotna jednačina, postalo je jasno da se ista tehnika može primeniti na široku oblast problema u matematici i fizici. Furijeovi redovi su dobili široku primenu u elektrotehnici, akustici, optici, obradi signala, analizi vibracija itd.

Od Furijeovog vremena na ovamo pojavilo se mnogo različitih pristupa za razumevanje i definisanje koncepta Furijeovih redova koji su naglašavali različite aspekte ovog pitanja. Neki od najboljih pristupa zahtevaju nivo matematike koja u to vreme nije bila dostupna.

Brojni i funkcionalni redovi – osnovni pojmovi

Izraz oblika $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ naziva se brojnim redom. Red je zbir članova određenog niza.U ovom izrazu $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ označavaju određene brojeve koji su članovi reda. Izraz a_n koji određuje n-ti član reda za ma koju vrednost n=1,2,3... nazivamo opštim članom reda.

Posmatrajmo red $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...$, ako je $|q| < 1$, suma prvih n članova ovog reda se može izračunati po sledećoj formuli

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

za $|q| < 1$, važi $\lim_{n\to\infty} aq^n = 0$ a odatle

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

Veličinu Sn nazivamo n-tom parcijalnom sumom reda. Za red kažemo da je konvergentan ako postoji granična vrednost n-te parcijalne sume, a rezultat se naziva sumom reda i obeležava sa S.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ako granična vrednost ne postoji red je divergentan.

U teoriji redova pored geometrijske progresije kako se naziva gore navedeni red važnu ulogu ima i harmonijski red.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Ime reda potiče od osobine da svaki član reda (počevši od drugog) predstavlja harmonisku sredinu (c) susedna dva člana (u donjoj formuli predstavljeni sa a i b) :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Jedna od praktičnih primena teorije redova je i za izračunavanje približnih vrednosti. Da bi smo ocenili preciznost merenja potrebno je izračunati parcijalnu sumu ostatka reda. Ostatak reda se može izraziti preko formule

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Dakle,za proizvoljan red važi jednakost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

Sledeće dve teoreme definišu najjednostavnije operacije sa konvergentnim redovima.

Teorema 1.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

konvergira i ima sumu S, onda za svaki broj c red takođe konvergira i ima sumu cS. Ako red divergira i c≠0, tada i red divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n + \cdots$$

Teorema 2.

Ako su redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{i}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

konvergentni i imaju redom sume S' I S'',onda i svaki od dva reda konvergira i ima odgovarjuću sumu S'± S''.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

Ako uzmemo da je $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots$ neki niz funkcija, izraz oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots$$

predstavlja funkcionalni red. Drugim rečima, funkcionalni red je red čiji su članovi funkcije nezavisno promenljive x. Ako promenljivoj x damo neku fiksiranu brojnu

vrednost x_0 funkcionalni red postaje numerički red i može biti konvergentan ili divergentan. Poseban oblik funkcionalnog reda je stepeni ili potencijalni red.
Oblik stepenog reda je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

gde se konstante $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazivaju koeficijentima reda.

Osnovne osobine periodičnih funkcija

Za realnu funkciju f: R→ R se kaže da je periodična ako postoji konstanta ω(≠0) takva da je

$(\forall x \in R) : f(x + \omega) = f(x)$

Konstanta ω je perioda funkcije *f*. Pošto se kod periodične funkcije *f* (sa periodom ω) njene osobine ponavljaju duž cele x ose dovoljno je izvršiti njeno proučavanje na intervalu dužine ω. U prirodi su česte periodične pojave. Smene plime i oseke ili dana i noći, njihanje klatna, otkucaji srca-sve su to pojave koje se ponavljaju u izvesnim konstantnim razmacima. Trigonometrijske funkcije su najjednostavnije periodične funkcije, a za sinusoidu možemo reći da je etalon periodičnih funkcija. Svaka pojava koja se može opisati periodičnom funkcijom se može nazvati oscilacijom.
Ako funkcija *f* ima periodu ω, onda je i 2 ω perioda te funkcije, jer je

$(\forall x \in R) : f(x + 2\omega) = f((x + \omega) + \omega) = f(x + \omega) = f(x)$

takođe, ako je ω perioda funkcije *f*,onda je -ω perioda jer je

$(\forall x \in R) : f(x - \omega) = f((x - \omega) + \omega) = f(x - \omega + \omega) = f(x)$

Možemo zaključiti da ako je ω perioda onda su periode i svi celobrojni umnošci kω, (k=±1, ±2,...).
Ako su ω1 i ω2 dve periode funkcije *f*, onda je i k1ω1 + k2ω2 ,(k1, k2∈Z) perioda jer je

$f(x + k1\omega1 + k2\omega2) = f((x + k1\omega1) + k2\omega2) = f(x + k1\omega1) = f(x)$

Možemo zaključiti da je algebarski zbir dve periode takođe perioda funkcije *f*. Dakle, broj perioda jedne periodične funkcije je beskonačan. Najmanja pozitivna perioda funcije se naziva osnovna perioda. Sve ostale periode su celobrojni umnošci ove osnovne periode.

Jedna od karakterističnih harmonijskih funkcija je funkcija:

$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$

gde su a,b i ω konstante. Složenija funkcija je trigonometrijski polinom n-tog reda:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b \sin 2\omega x) + ... + (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

ovde su $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n$ koeficijenti polinoma. Period polinoma je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, jer je $f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)$. Iz ove formule sledi, da ako je $\omega = 1$, da polinom ima periodu 2π :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ako u jednakosti $T = \frac{2\pi}{\omega}$ veličinu T zamenimo veličinom 2ℓ dobijamo trigonometrijski polinom čiji je period 2ℓ. Srđivanjem jednačine dobijamo $\omega = \frac{\pi}{\ell}$ pa zamenom u trigonometrijskom polinomu n-tog reda dobijamo:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell})$$

Beskonačni red $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, ako je konvergentan je funkcija sa periodom 2π Red ovog oblika naziva se trigonometrijski red. Beskonačni red $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell})$,ako je konvergentan, ima periodu 2ℓ.

Da bi određena funkcija bila predstavljena u obliku trigonometrijskog reda moraju se odrediti vrednosti koeficijenata $a_0, a_n, b_n, n \in N$. Ako funkcija ima period različit od 2π , ili uopšte nije periodična, gornja formula predstavlja razvoj te funkcije samo u intervalu dužine 2π , najčešće u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Furijeovi koficijenti

Ako pođemo od predpostavke da se periodična funkcija sa periodom 2π može razviti u trigonometrijski red sa istom periodom dobijamo sledeću jednakost

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Želimo da izračunamo koeficijente $a_0, a_k, b_k (k = 1,2,3...)$, funcija $f(x)$ je poznata. Posmatraćemo razvoj funkcije $f(x)$ u intervalu $[-\pi, \pi]$. Polazimo od predpostavke da je integral funkcije $f(x)$ jednak zbiru integrala članova reda. Obe strane jednakosti se integrale u granicama od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx)$$

Sada možemo posebno da izračunamo svaki od integrala sa desne starane:

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx = \frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \ ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx = \frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Dakle,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi \cdot a_0$$

odakle je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Obe strane jednakosti sada treba pomnožiti sa cosnx da bismo dobili koeficijente $a_n (n = 1,2,3,...)$:

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)$$

Ovu jednakost možemo integraliti sa obe strane u granicama od $-\pi$ do π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nxdx\right)$$

Sada treba izračunati integrale sa desne strane jednakosti primenom poznate trigonometriske formule za transformaciju proizvoda u zbir ili razliku. Prema tim formulama za sve prorodne brojeve m i n takve da je $m \neq n$ biće

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)dx = 0 \,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)dx = 0 \,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) dx = 0 .$$

Jedini integral različit od nule sa desne strane polazne jednakosti je integral uz koeficijent a_n. Odatle sledi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = a_n \pi .$$

Polaznu jednačinu smo mogli da pomnožimo sa sinnx i posle integracije obe strane bi dobili:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = b_n \pi$$

Iz dve poslednje relacije se dobijaju vrednosti a_n i b_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx ,$$

koje uz formulu $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, čine poznate Ojler-Furijeove formule. Pomoću ovih formula se izračunavaju koeficijenti razvoja zadate periodične funkcije $f(x)$ u trigonometrijski red. Ovi koeficijenti se nazivaju Furijeovi. Trigonometrijski red koji je određen ovim koeficijentima se naziva Furijeov red funkcije $f(x)$.

Prilikom izvođenja ovih formula za izračunavanje Furijeovih koeficijenata korištene su operacije čija ispravnost nije dokazana. Takođe,nije dokazano ni da funkcija $f(x)$ čiji period je 2π, može biti razvijena u trigonometrijski red sa istim periodom. Odatle, nije moguće utvrditi da li Furijeov red funkcije $f(x)$ konvergira ka $f(x)$, odnosno da je funkcija $f(x)$ suma svog Furijeovog reda. Ako nam nije već poznato unapred da li je $f(x)$ suma svog Furijeovog reda, po konvenciji umesto znaka jednakosti piše se znak ekvivalencije (~).

Podintegralne funkcije u Ojler-Furijeovim formulama su periodične sa periodom od 2π. Na odsečku čija je dužina jednaka periodu T, integral periodične funkcije $f(x)$ ima istu vrednost za ma koje α i β:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(x) dx .$$

Odatle sledi, da odsečak integracije $[-\pi,\pi]$ može biti zamenjen bilo kojim drugim odsečkom $[\alpha,\alpha+2\pi]$ dužine 2π . Sada možemo Ojler-Furijeove formule da napišemo u ovom obliku:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nxdx \quad \text{i}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nxdx\,. \qquad n=1,2,3...$$

Dovoljni uslovi za razvoj funkcije u Furijeov red

Dovoljni uslovi da bi se funkcija $f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a,b]$ dužine 2π mogla predstaviti u obliku trigonometrijskog reda nazivaju se **Dirihleovi uslovi**. Ti uslovi su sledeći:

- u svim tačkama odsečka $[a,b]$ data funkcija je ograničena
- na odsečku $[a,b]$ funkcija mora da bude monotona ili da ima konačan broj minimuma i maksimuma
- funkcija $f(x)$ je neprekidna u svim tačkama odsečka $[a,b]$ osim , možda, konačnog broja tačaka toga skupa

Razvoj neperiodične funkcije u Furijeov red

Razvoj neperiodične funkcije $f(x)$ u Furijeov red na odsečku $[d,d+2\pi]$ dužine 2π se obavlja tako što se prvo izračunaju Furijeovi koeficijenti $a_0,a_k,b_k\,(k\in N)$ i zapiše Furijeov red:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

koji predstavlja funkcije koje su periodični produžetak funkcije $f(x)$ izvan odsečka $[d,d+2\pi]$. Ako na ovom odsečku funkcija $f(x)$ zadovoljava Dirihleove uslove, onda te uslove zadovoljava i periodični produžetak, a sam red konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački odsečka $[d,d+2\pi]$ u kojoj je funkcija $f(x)$ neprekidna. Na krajevima ovog odsečka red konvergira ka vrednosti $\frac{1}{2}(f(d+0)+f(d+2\pi-0))$.

Furijeovi redovi za parne i neparne funkcije

Razvoj parnih i neparnih funkcija u Furijeov red možemo svrstati u posebne slučajeve razvoja.

Teorema 1.

Ako je periodična funkcija $f(x)$ čiji trigonometriski red tražimo parna, tj. ako ima osobinu da je $f(-x) = f(x)$, tada Furijeov red ne sadrži sinusne članove.
Dokaz:

a) ako je funkcija $f(x)$ parna funkcija na intervalu $[-a,a]$ onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

b) ako je funkcija $f(x)$ neparna funkcija na intervalu $[-a,a]$ onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

U prvom slučaju imamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

U drugom slučaju imamo:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Sada prelazimo na dokaz gornje teoreme. Naša predpostavka je da je $f(x)$ parna funkcija, dakle proizvod $f(x)\cos kx$ daje parnu a proizvod $f(x)\sin kx$ neparnu funkciju. Odatle, na osnovu predhodnih zapažanja sledi :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0.$$

Iz ovoga možemo zaključiti da Furijeov red parne funkcije sadrži samo kosinusne članove i slobodan član:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

Teorema 2.

Ako je periodična funkcija $f(x)$ čiji trigonometrijski red tražimo neparna, tj. ako ima osobinu da je $f(-x) = -f(x)$, tada Furijeov red ne sadrži kosinusne članove.
Dokaz:

Pošto polazimo od predpostavke da je $f(x)$ neparna funkcija, proizvod $f(x)\sin kx$ biće parna funkcija , a proizvod $f(x)\cos kx$ neparna. Prema osobinama koje smo već naveli u dokazivanju prve teoreme dobijamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Odakle zaključujemo da Furijeov red neparne funkcije sadrži samo sinusne članove tj.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Na kraju, ako funkcija nije ni parna ni neparna njen razvoj u Furijeov red sadrži i sinusne i kosinusne članove.

U slučaju kada je $f(x)$ neperiodična funkcija koja ne na odsečku $[-\pi,\pi]$ parna, Furijeov red na tom odsečku je oblika:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

Po analogiji, kada je $f(x)$ neperiodična funkcija koja ne na odsečku $[-\pi, \pi]$ neparna, red je oblika:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Ako proizvoljna neperiodična funkcija $f(x)$ u svom obliku Furijeovog reda sadrži samo kosinusne ili samo sinusne članove možemo iskoristiti gore navedena svojstva za predstavljanje na odsečku $[0, \pi]$. Dakle, ako želimo da predstavimo proizvoljnu funkciju $f(x)$ čiji Furijeov red sadrži samo kosinuse na odsečku reda $[0, \pi]$ treba uzeti parnu funkciju F(x) koja je jednaka $f(x)$ unutar ovog odsečka i razviti je na odsečku $[-\pi, \pi]$ u Furijeov red.

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

gde je

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos kx dx, \qquad k = 1,2,3,...$$

Rekli smo da unutar odsečka $[0, \pi]$ važi $F(x) = f(x)$ pa na tom odsečku je:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

gde je

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \qquad k = 1,2,3,...$$

Po analogiji, ako je neparna funkcija $\Phi(x)$ jedanaka funkciji $f(x)$ na odsečku $[0, \pi]$ važi:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

gde je

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1,2,3,...$$

Primer 1.

Parnu funkciju $f(x) = x^2$ razviti u Furijeov red na odsečku $[-\pi, \pi]$

Rešenje:

Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna. Na odsečku $[-\pi, 0]$ ova funkcija je opadajuća, a rastuća na odsečku $[0, \pi]$. Dakle, na odsečku $[-\pi, \pi]$ su zadovoljeni Dirihleovi uslovi. Svuda na ovom odsečku Furijeov red konvergira ka funkciji $f(x) = x^2$ i ka njenom periodičnom produžetku van tog odsečka. Pošto je ova funkcija parna Furijeovi koeficijenti će imati vrednost:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx\ , \ b_k = 0\,, \quad k = 1,2,3,...$$

Posle dvostruke primene parcijalne integracije dobija se:

$$a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

pa je na odsečku $[-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

Ako u dobijenoj jednakosti stavimo $x = \pi$ dobija se:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Primer 2.

Parnu funkciju $f(x)=x^2$ razviti u Furijeov red na odsečku $[0,2\pi]$.

Rešenje:
Funkcija $f(x)=x^2$ raste na celom odsečku $[0,2\pi]$, pa su na tom odsečku zadovoljeni Dirihleovi uslovi. Takođe, ova funkcija je na ovom odsečku neprekidna pa njen Furijeov red konvergira ka $f(x)=x^2$ u svim unutrašnjim tačkama odsečka $[0,2\pi]$, a na krajevima ovog odsečka konvergira ka $\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi))$. U ovom slučaju Ojler-Furijeove formule će glasiti:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3},$$
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos kxdx=\frac{4}{k^2},$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin kxdx=-\frac{4\pi}{k}\ ,\quad (k\in N)$$

na itervalu $[0,2\pi]$ je

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^2}-\frac{\pi\sin kx}{k}\right),$$

suma tog reda za $x=0$ i $x=2\pi$ je

$$\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi))=\frac{1}{2}(0+4\pi^2)=2\pi^2.$$

Izvan intervala $[0,2\pi]$ Furijeov red konvergira ka periodičnom produžetku funkcije $f(x)=x^2$ i to unutar odsečka $[2k\pi,2(k+1)\pi]$, $k\in Z$. Suma reda je na krajevima odsečka $2\pi^2$.

Primer 3

Funkcija $f(x)$ koja je definisana na sledeći način na intervalu $[0,2\pi]$ razviti u Furijeov red.
$f(0)=0;\ f(x)=1$ za $0<x<\pi$;
$f(\pi)=0;\ f(x)=-1$ za $\pi<x<2\pi$ i za $-\pi<x<0$
Rešenje:
Pošto je ovo neparna funkcija Furijeovi koeficijenti a_0 i a_n su jednaki nuli, dok je:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot \sin nxdx + \int_{\pi}^{2\pi} -1\cdot \sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}(1-\cos n\pi + \cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

ako je n parno biće $b_n = 0$, a ako je neparno biće $b_n = \frac{4}{n\pi}$. Dakle ovaj red ima razvoj za prvih nekoliko članova:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + ...\right).$$

Furijeov red funkcije sa proizvoljnim periodom 2ℓ

Za razvoj u trigonometrijski red funkcije $F(x)$ koja ima periodu $T = 2\ell$ i koja je definisana na odsečku $[-\ell, \ell]$ uvešćemo smenu promenljivih $x = \frac{\ell t}{\pi}$ tj. $t = \frac{x\pi}{\ell}$. Neophodno je da ova funkcija zadovoljava Dirihleove uslove na ovom odsečku. Promenom x na odsečku $[d, d+2\ell]$ menja se promenljiva t na odsečku $\left[\frac{\pi}{\ell}d, \frac{\pi}{\ell}d + 2\pi\right]$ koji je dužine 2π i obrnuto. Uvođenjem smene funkciju možemo napisati na sledeći način:

$$F(x) = F\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \psi(t)$$

Ova funkcija se razvija na odsečku $\left[\frac{\pi}{\ell}d, \frac{\pi}{\ell}d + 2\pi\right]$ u Furijeov red:

$$\psi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gde je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\ell}d}^{\frac{\pi}{\ell}d+2\pi} \psi(t)dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\ell}d}^{\frac{\pi}{\ell}d+2\pi} \psi(t)\cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\ell}d}^{\frac{\pi}{\ell}d+2\pi} \psi(t)\sin kt dt$$

Ako se promenljiva t zameni sa $x = \frac{\ell t}{\pi}$, dobija se $dt = \frac{\pi}{\ell}dx$, $\psi(t) = \psi\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) = F(x)$ dok su nove granice integracije d i $d + 2\ell$. Tada dobijamo Furijeov red:

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

ovde se koeficijenti $a_0, a_k, b_k, k \in N$ računaju pomoću sledećih formula:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx, \qquad (k = 1,2,3,...)$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx, \qquad (k = 1,2,3,...)$$

Ako su Dirihleovi uslovi zadovoljeni za funkciju $F(x)$ na odsečku $[d, d+2\ell]$ dužine 2ℓ, tada su ti uslovi zadovoljeni i za funkciju $\psi(t)$ na odsečku $\left[\frac{\pi}{\ell}d, \frac{\pi}{\ell}d + 2\pi\right]$ dužine 2π.

Možemo zaključiti da sve što je rečeno za Furijeov red funkcije $f(x)$ na odsečku koji je dužine 2π, važi za Furijeov red funkcije $F(x)$ dužine 2ℓ na odsečku $[d, d+2\ell]$. Reći ćemo da ako funkcija $F(x)$ zadovoljava Dirihleove uslove na odsečku $[d, d+2\ell]$ tada njen Furijeov red konvergira ka $F(x)$ u svakoj tački unutar odsečka $[d, d+2\ell]$ u kojoj je ta funkcija neprekidna.

Kada funkciju $F(x)$ treba da razvijemo u Furijeov red na odsečku $[-\ell, \ell]$ ili $[0, 2\ell]$ za odredjivanje koeficijenata u prvom slučaju treba umesto d staviti $-\ell$, a u drugom slučaju 0. Ako se razvoj vrši na odsečku $[-\ell, \ell]$ važno je odrediti da li je funkcija parna ili neparna. Ako je funkcija $F(x)$ parna koriste se formule:

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,$$

$b_k = 0 \quad k = 1,2,3,...$

Kada je funkcija $F(x)$ neparna upotrebljavamo formule:

$a_0 = 0,$

$a_k = 0,$

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx \qquad k = 1,2,3,...$$

U radu se često uzima da je $\ell = \frac{T}{2}$, gde T predstavlja period tako da je $\frac{\pi}{\ell} = \frac{2\pi}{T} = \omega$. U tom slučaju Furijeov red ima oblik:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n sinn\omega t\right)$$

a koeficijenti su

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt$$

Primer 1.

Parnu funkciju $f(x) = |x|$ razviti u Furijeov red na odsečku $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Rešenje:

Funkcija $f(x) = |x|$ zadovoljava Dirihleove uslove na odsečku $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ i konvergira ka $|x|$ u svim tačkam odsečka. Koeficijente izračunavamo prema ranije navedenim formulama:

$$a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos\frac{k\pi x}{\frac{1}{2}}dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2k\pi dx, \quad k \in N$$

$b_k = 0.$

Odavde se za član a_k parcijalnom integracijom dobija :

$$a_k = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \qquad k = 1,2,3...$$

Kada koeficijente unesemo u osnovnu formulu dobijemo:

$$|x| = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos 2k\pi x$$

$$|x| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \frac{\cos 10\pi x}{5^2} + \ldots\right)$$

Izvan intervala $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ red konvergira ka periodičnom produžetku funkcije $f(x) = |x|$ van tog odsečka

Kompleksno predstavljanje Furijeovih redova

Kao što je već rečeno funkcija $f(x)$ koja ispunjava Dirihleove uslove na odsečku $[d, d+2\ell]$ može da se razvije u Furijeov red oblika

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

gde je

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx, \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_d^{d+2\ell} F(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx, \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

Možemo pokazati da je ovaj obrazac ekvivalentan redu:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}$$

gde je

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_d^{d+2\ell} f(x) e^{-\frac{k\pi x}{\ell}} dx, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..$$

za koeficijente sa pozitivnim indeksom

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_d^{d+2\ell} f(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx - isin\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_d^{d+2\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx - \frac{i}{2\ell}\int_d^{d+2\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$c_k = \frac{1}{2}a_k - \frac{i}{2}b_k = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

ovde je iskorištena Ojlerova formula $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Za koeficijente sa negativnim indeksom k, ako pišemo $-n$ umesto k $(n > 0)$, i ponovo iskoristimo Ojlerovu formulu, dobijamo:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\ell}\int_{d}^{d+2\ell} f(x)e^{\frac{n\pi x}{\ell}i}dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\ell}\int_{d}^{d+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx + \frac{i}{2\ell}\int_{d}^{d+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{i}{2}b_n = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)$$

dokaz jednakosti:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{-1} c_k e^{\frac{k\pi x}{l}i} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{l}i}$$

u prvoj sumi treba staviti $k = -n \quad (n > 0)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{n\pi x}{l}i} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{l}i} + c_0$$

i kada se ubace vrednosti za c_k i c_n dobija se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{n\pi x}{l}i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{\frac{k\pi x}{l}i} + c_0$$

pošto je

$$c_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{d}^{d+2\ell} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0$$

dobijamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-\frac{n\pi x}{l}i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{\frac{k\pi x}{l}i} + \frac{a_0}{2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}\left(e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i} + e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ib_k}{2}\left(e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i} - e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}\right)$$

na osnovu Ojlerove formule

$$2\cos\frac{k\pi x}{\ell} = \left(e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i} + e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}\right)$$

$$-2i\sin\frac{k\pi x}{\ell}=\left(e^{-\frac{k\pi x}{\ell}i}-e^{\frac{k\pi x}{\ell}i}\right)$$

i zamenom u gornjoj formuli dobijamo

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x+b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Furijeov integral i Furijeova transformacija

Funkcija $f(x)$ na odsečku $[-l,l]$ razvijena u Furijeov red u komleksnom obliku izgleda:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$$

a koeficijenti su oblika

$$c_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx$$

Članovi oblika $e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$ predstavljaju kompleksne harmonike a članovi c_n su kompleksne amplitude. Možemo početnu formulu napisati u sledećem obliku, a promenljivu x smo zamenili promenljivom t da bi sačuvali redosled operacija:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}\cdot\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}t}dt$$

Uvodimo smenu $\omega=\frac{\pi}{\ell}$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\omega x}\cdot\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)e^{-in\omega t}dt$$

ako $\ell\to\infty$, ω prelazi u $d\omega$, $n\omega$ prelazi u ω a sumiranje po svim harmonicima prelazi u integraciju u intervalu $(-\infty,\infty)$ pa se može napisati

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Gornja jednakost je Furijeov integral u kompleksnom obliku. Integral

$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ predstavlja Furijeovu transformaciju funkcije $f(x)$ tj.

$$F(f(x))=F(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$