

Univerzitet u Nišu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku



# Radonova transformacija i njene primene u tomografiji

MASTER RAD

Mentor:  
Prof. dr Nebojša Dinčić

Student:  
Svetlana Stanković

Niš, 2019.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kompjuterizovana tomografija</b>	<b>3</b>
2.1	O X-zracima . . . . .	3
2.2	Otkriće i princip rada kompjuterizovane tomografije . . . . .	5
2.3	Istorija CT uređaja . . . . .	6
2.4	Razvoj CT uređaja . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Furijeova transformacija</b>	<b>12</b>
3.1	Furijeova transformacija funkcija u $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	12
3.2	Furijeova transformacija funkcija u $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	13
3.3	Furijeova transformacija funkcija u $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	15
3.4	Furijeova transformacija funkcija u $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	16
3.5	Konvolucija . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Radonova transformacija</b>	<b>20</b>
4.1	Prostor pravih u ravni . . . . .	20
4.2	Radonova transformacija . . . . .	23
4.3	Inverzna Radonova transformacija . . . . .	33
4.3.1	Filtered Back-projection . . . . .	39
4.4	Hilbertova transformacija . . . . .	42
4.5	Aproksimativni inverzi Radonove transformacije . . . . .	44
4.6	Radonova transformacija podataka sa ograničenim nosačem . .	47
4.7	Neprekidnost Radonove transformacije i inverzne Radonove transformacije . . . . .	49
4.8	n-dimenzionalna Radonova transformacija . . . . .	52

# Glava 1

## Uvod

*Tema izučavanja ovog master rada je Radonova transformacija i njena primena u tomografiji. Rad se sastoji od tri glave.*

*Na početku prve glave govorimo o X-zracima. Potom, pažnju usmeravamo na kompjuterizovanu tomografiju, njen razvoj i istoriju.*

*U drugoj glavi se nalaze osnovni pojmovi i rezultati vezani za Furijeovu transformaciju, koji se kasnije koriste.*

*U trećoj glavi uvodimo definiciju Radonove transformacije i navodimo njene osnovne osobine. Zatim, prikazujemo zanimljive primere i rezultate vezane za ovu transformaciju. Govorimo o primeni Radonove transformacije u kompjuterizovanoj tomografiji, značajnim rezultatima za rekonstruisanje slike u medicini.*

*Neizmernu zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Nebojši Dinčiću, na ohrabrenju, strpljenju i stručnim savetima tokom izrade ovog master rada.*

*Veliku zahvalnost dugujem i svojoj porodici na bezuslovnoj ljubavi i podršci, ne samo tokom studiranja, već i tokom čitavog školovanja.*

## Glava 2

# Kompjuterizovana tomografija

### 2.1 O X-zracima

Za prekretnicu u istraživanju nemačkog fizičara Vilhema Konrada Rendgena (1845-1923) smatra se 1895. godina kada je vršio eksperimente sa katodnim zracima u Kruksovoj cevi (lampa iz koje je izvučen vazduh i u kojoj su na rastojanju od nekoliko centimetara postavljene dve elektrode, katoda i anoda, priključene na izvor napona). Rendgen je zapazio fluorescentno svetlucanje blizu aparature koje potiče od ploče presvučene barijum-platina-cijanidom. Naslutio je da se radi o novom, nepoznatom zračenju, a ne o zračenju iz katodne cevi. Zbog svoje tada još uvek neistražene prirode, nazvao je zrake X zracima, na osnovu matematičke oznake za nepoznatu vrednost, ali je nadalje uporno istraživao osobine istih. Sa tim ciljem uvio je lampu crnom hartijom i postavio u sobi fluorescentni materijal. Potom je između uvijene lampe i materijala redom stavljao knjige, razne predmete od metala, olovnu ploču. Primetio je da fluorescentni materijal svetli u svim slučajevima, osim kada je između lampe i materijala stavio olovnu ploču. Uz pomoć Hitorfove cevi (koja zrači katodne zrake) zaključio je da ni ploče od zlata, žive, urana ne propuštaju X-zrake. Veoma snažan osećaj u njemu ostavio je trenutak kada je između lampe i materijala stavio svoju ruku. Na materijalu su se prikazale kosti njegove šake, tamnije boje u odnosu na svetlu pozadinu. Zaključio je da su zraci prošli kroz sve meke delove njegove šake, a da ih čvrsto tkivo kostiju ipak ne propušta. Postupak je ponovio koristeći šaku svoje supruge, ali i šaku slavnog švajcarskog anatoma Alberta fon Kelikera. Takođe, u svom

eksperimentu, Rendgen je koristio i fotografsku ploču umesto fluorescentnog materijala. U radu „O novoj vrsti X-zraka”, Rendgen govori o svojstvima ovih zraka među kojima su fotohemijsko dejstvo na fotografsku ploču, apsorpcija, pravolinijsko prostiranje, kao i to da ne skreću u prisustvu magnetnog ili električnog polja. Za Rendgenovo otkriće, za koje je dobio najveće priznanje, Nobelovu nagradu za fiziku 1901. godine, ubrzo se čulo po svetu. Na prestižnom Masačusetskom Institutu za tehnologiju (MIT), na departmanu za fiziku, naučnici su bili u mogućnosti ponovo stvoriti X-zrake. Na medicinskom okupljanju u Bostonu 1896. godine bila je prikazana i slika celokupnog ljudskog skeleta. Veliki značaj X-zraka ogleda se i u korišćenju jednostavnih rendgen aparata za otkrivanje metaka u telu ratnika u Prvom svetskom ratu.

Javnosti je malo poznato da je X-zrake zapazio 1892. godine i Nikola Tesla kao „vidljivu svetlost, crnu svetlost i neko naročito zračenje”.<sup>1</sup> Iako dobijeni na različite načine, Teslini zraci (zapaženi kod sijalice za molekulsko bombardovanje) i Rendgenovi zraci, imali su veoma slične osobine. Obojica su bili duboko ganuti zapažanjima i postignućima drugog. Tesla je svojim temeljnim radom postavio osnove radiologije i rendgenografije. Prvi uvodi rendgensku foliju koja je ona nezaobilazna u rendgenografiji. Dele se na sitnozrnaste i krupno zrnaste folije. Prvi uočava da kvalitet rendgenske slike zavisi od veličine zrna folije. Takođe, prvi govori o negativnom uticaju X zraka na organizam čoveka. Pažljivo je opisao promene na telu koje je uočavao: „Prilikom izlaganja glave jakom zračenju zapaženi su neobični efekti. Na primer, našao sam da se javlja sanjivost i izgleda kao da vreme brzo prolazi. Postoji opšti efekat smirenja, a ja sam imao osećaj toplote u gornjem delu glave”.<sup>1</sup> Dodaje: „...kada mi je nešto drugo odvuklo pažnju, a nije prošlo ni 20 minuta kada sam zapazio da je ruka, koja je bila izložena, veoma pocrvenela i otekla”.<sup>1</sup> Međutim, radio je i na pronalasku zaštite od štetnog rendgenskog zračenja, pa je u tu svrhu uveo aluminijumske zavese kao prve zaštitne paravane.

---

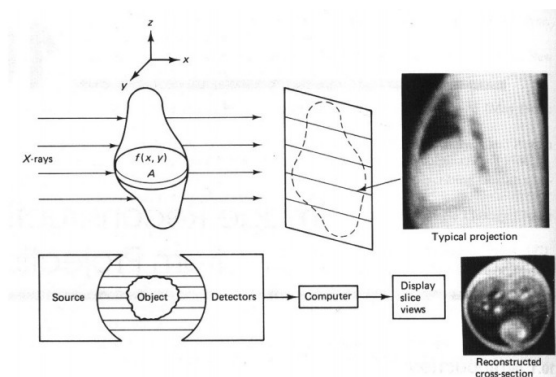
<sup>1</sup> „Tesla o X-zracima”, Rade R. Babić

## 2.2 Otkriće i princip rada kompjuterizovane tomografije

Nagli razvoj fizike, hemije, tehnike igra veoma bitnu ulogu u razvoju dijagnostičke medicine. Dijagnostičke metode (rendgenska dijagnostika, bio-hemijske analize, genetička dijagnostika...) su dobile na značaju, pa danas predstavljaju neizostavni deo procesa dijagnostike većine bolesti. Svi podaci, prikupljeni ispitivanjima pacijenta i pridruženi osnovnoj dokumentaciji, danas su digitalni. Osnovni cilj je da se sačuva ljudski život.

Nekada se bolest utvrđivala samo na osnovu podataka, simptoma koje pacijent saopšti lekaru i znakova bolesti koje on sam uoči na pacijentu. Dolazilo je do nejasnoća u postavljanju dijagnoze, kašnjenja u njenom postavljanju, pa čak i do netačne dijagnoze. Zahvaljujući današnjim instrumentima, koji postaju sve brojniji, procedura postavljanja dijagnoze je znatno olakšana. Cilj moderne tehnologije je pre svega sprečiti nastanak bolesti ili je otkriti u ranoj fazi kada su moguće intervencije koje će zaustaviti dalji razvoj bolesti.

Otkriće kompjuterske tomografije (eng. computed tomography), CT, ima ogroman značaj u medicini. To je radiološka metoda snimanja koja se zasniva na X-zracima i tomografiji (grčka reč, tomos-„kriška” i graphein-„pisati”), metodi koja koristi matematičke proračune i savremene računare za obradu snimaka. Cilj je da se dobije trodimenzionalna slika unutrašnjosti tela, koja pruža informacije koje nisu vidljive golim okom, na osnovu dvodimenzionalnih snimaka koji nastaju u toku pregleda.



Slika 2.1: Princip rada CT skenera

CT skener ima oblik velike kutije sa kružnim otvorom ili kraćim tunelom u centru u kome se nalazi ispitni sto. Pacijent leži na ispitnom stolu koji prolazi kroz skener i izlaže se rendgenskom zračenju. Izvor rendgenskog zračenja šalje X-zrake koji prolaze kroz telo pacijenta i putuju ka detektorima, koji su poređani u obliku kružnog prstena poznatijeg kao „detektorska banana”. Rendgenski zraci i detektori putuju oko tela pacijenta u kordinaciji sa stolom na kome je pacijent. X-zraci mogu biti apsorbovani ili oslabljeni pri prolasku kroz telo pacijenta u zavisnosti od gustine telesnih tkiva. Kompjuter dobija veliki broj podataka od detektora, pa obavljaajući matematičke proračune stvara dvodimenzionalnu sliku poprečnog preseka tela koja se prikazuje na monitoru računara. Slika nam pruža veliki broj saznanja o zdravstvenom stanju pacijenta, jer detektori imaju mogućnost da razlikuju i najmanju razliku u intenzitetu rendgenskog zračenja pri prolasku kroz telo pacijenta. Postoji mogućnost da se organ koji se snima ne razlikuje dobro od okolnih struktura. U tom slučaju, da bi se poboljšao vizuelni prikaz organa, pacijentu se daje kontrastno sredstvo intravenski, oralnim ili rektalnim putem, zavisno od organa. Ono oslabljuje zračenje zbog svog visokog atomskog broja (jod ili barijum). Lekar radiolog utvrđuje da li je potrebna primena kontrastnog sredstva. U slučaju umerenih neželjenih reakcija na kontrastno sredstvo, kao što su mučnina, povraćanje, osećaj toplote, bitno je da postoje oprema i lekovi za ukazivanje prve pomoći.

## 2.3 Istorija CT uređaja

U Japanu, 1946. godine, konstruisan je rendgenski aparat za rotacionu tomografiju, koji je nazvan ”rotografija”. Princip rotografije se sastojao u sledećem: pacijent je ležao na stolu, dok su rendgenska cev i rendgenski film u kaseti, koji su bili postavljeni sa različite strane bolesnika, paralelno rotirali oko njega praveći polukrug ili puni krug (od  $0^\circ$  za  $230^\circ$  ili  $360^\circ$ ) za vreme ekspozicije. Nedostatak odgovarajućih računara (kompjutera) u to vreme prouzrokovao je obrađivanje slika na uobičajen, klasičan način. Negativne strane ovog pristupa obradi slika su ogromno ulaganje napora, kao i upitna verodostojnost rezultata. Princip rotografije je postao idejni osnov nakon pojave računara za kompjuterizovanu tomografiju (CT). Oldendorf<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>William H. Oldendorf, 1925-1992, američki neurolog, fizičar i osnivač tehnike CT

je 1961. godine, na osnovu eksperimenata koje je vršio, ukazao na mogućnost merenja apsorpcije u poprečnom preseku tela pomoću uskog snopa X-zraka. Međutim, problem je predstavljalo manuelno izračunavanje. Tek nakon pojave kompjutera, na ovim principima, a nakon četvorogodišnjeg istraživanja, engleski fizičar Godfri Haunsfild (Godfrey Newbold Hounsfield), u saradnji sa američkim matematičarom Alenom Kormarkom (Allen Cormack) i uz sugestije neuroradiologa Embrouza (J. Ambrose), konstruisao je 1971. godine prvi aparat za kompjuterizovanu tomografiju, koji je proizveden u firmi EMI (Electronic Music Industries) u Londonu. Prototip prvog CT uređaja je montiran u bolnici "Morley Hospital" u Atkinsonu 1971. godine. Koristio se samo za snimanje glave. Prvi CT skeneri uvedeni su u kliničku praksu 1972. godine. Haunsfildov projekat je finansiran od strane Elektronske muzičke industrije (EMI) u koju je Godfri radio tokom šesdesetih i sedamdesetih godina 20. veka. EMI je bila u mogućnosti da načini ovaj korak, jer je zarađivala zavidne svote novca zahvaljujući uspešnim muzičarima i njihovim pločama. Haunsfildov doprinos razvoju kompjuterizovane tomografije ogleda se i u upotrebi Haunsfildove skale koje se koristi za merenje atenuacije <sup>3</sup> rendgenskih zraka na CT snimcima. Veličina Haunsfildove jedinice se određuje na sledeći način: vodi je dodeljena vrednost od 0 Hausfildovih jedinica, skraćeno 0 HU (0 Housfiled unit), vazduhu -1000 HU, a gustoj kortikalnoj kosti +1000 HU, tj. voda ima centralni denzitet<sup>4</sup> u odnosu na vazduh i kost. Ostala tkiva se nalaze između ovih vrednostu u zavisnosti od svog denziteta. Vrednosti atenuacije brojnih zapreminskih jedinica u telu pacijenta, poznate kao i CT vrednosti, mere se i služe za dobijanje dvodimenzionalne slike. Na osnovu Haunsfildovih jedinica se može odrediti denzitet patoloških promena na CT pregledu. Na primer, cistična struktura sa homogenom atenuacionom vrednošću od oko 0 HU predstavlja jednostavnu vodenu cistu, dok mekotkivna promena sa atenuacionom vrednošću od oko -100 HU predstavlja leziju koja sadrži mast. U navedenim slučajevima, lezije se mogu smatrati benignim, pa biopsija nije neophodna. Južnoafrikanac, Alen Kormak, je pronašao skalu sive boje, koja je služila za slikovno prikazivanje *koeficijenata atenuacije*<sup>5</sup> različitih tkiva na slici poprečnog preseka. Oba naučnika su 1979. godine nagrađena Nobelovom nagradom za medicinu i fiziologiju. Prvi skener za kompjuterizovanu tomografiju celog tela, čija

---

<sup>3</sup>proces kojim se smanjuje intenzitet zračenja pri prolazu kroz tkivo ili neki drugi materijal

<sup>4</sup>gustina

<sup>5</sup>opisuje slabljenje X-zraka pri prolasku kroz neki materijal



proizvodnja počinje 1974. godine, je konstruisao naučnik Lendli (Lendley), Potom svi veći klinički centri u svetu bivaju opremljeni ovim CT aparatima.

Koeficijent atenuacije u matematici predstavlja nenegativnu, realnu funkciju  $\mu$  definisanu na  $\mathbb{R}^3$ . Za različite tačke u objektu imamo u opštem slučaju različite vrednosti koeficijenta atenuacije, a u tačkama izvan objekta uzima se da je koeficijent atenuacije jednak nuli. Da bismo odredili „slice” funkcije  $\mu$ , fiksiraćemo koordinatni sistem  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , što je veoma bitno u tomografiji. U opštem slučaju, fiksira se poslednja koordinata. Za svaku fiksiranu vrednost  $c$   $x_3$  koordinate, „slice” funkcije  $\mu$  je funkcija  $f_c$  dveju promenljivih definisana na sledeći način

$$f_c(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2, c).$$

Poznavanje kolekcije funkcija  $\{f_c : c \in [a, b]\}$  ekvivaletno je poznavanju  $\mu$  za sve tačke ploče  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, a \leq x_3 \leq b\}$ .

**Primer 2.3.1.** *Neka je  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Karakteristična funkcija skupa  $D$  je definisana na sledeći način*

$$\chi_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & ; \mathbf{x} \in D \\ 0 & ; \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

**Primer 2.3.2.** *Neka je dat objekat  $D \subset \mathbb{R}^3$  sa konstantnim koeficijentom atenuacije. Funkcija  $\chi_D$  modelira ovaj objekat. Objekat je određen svojim presecima sa ravnima  $H_c = \{(x_1, x_2, c) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$  na sledeći način*

$$D_c = D \cap H_c, \quad \forall c$$

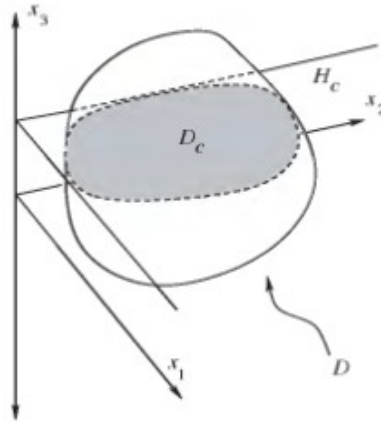
**Primer 2.3.3.** *Neka je koeficijent atenuacije objekta sadržanog u lopti poluprečnika 1 jednak*

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \|\mathbf{x}\| & ; \|\mathbf{x}\| \leq 1 \\ 0 & ; \|\mathbf{x}\| > 1 \end{cases}$$

*Tada je*

$$f_c(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + c^2} & ; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + c^2} \leq 1 \\ 0 & ; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + c^2} > 1 \end{cases}$$

*Ukoliko je  $|c| > 1$ , tada je  $f_c \equiv 0$ .*



Slika 2.2: Dvdimenzionalni „slice” trodimenzionalnog objekta

## 2.4 Razvoj CT uređaja

Sa pojavom prvog modela CT uređaja, javila se i težnja za usavršavanjem istog. Nastojalo se da snimci budu sto jasniji, tj. da se poboljša kontrastna i prostorna rezolucija tkiva. Takođe, cilj je bio da vreme trajanja pregleda bude smanjeno na minimum, kao i doza zračenja koju bi pacijent primio, imajući u vidu rizik od zračenja bolesnika rendgenskim zracima. Usavršavanje CT uređaja odvijalo se kroz nekoliko faza.

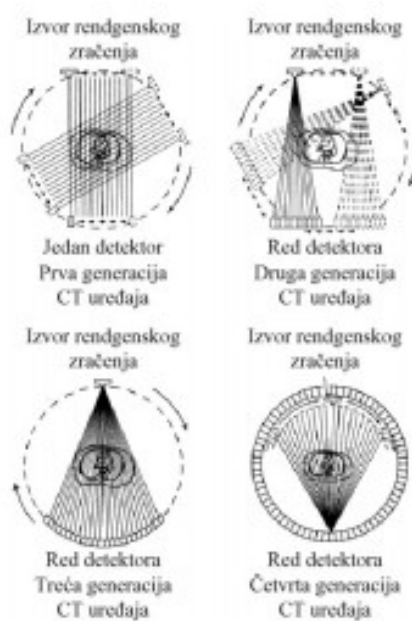
*Prva generacija CT uređaja* funkcionisala je na principu translacije i rotacije rendgenske cevi. Sadržala je samo jedan detektor. Koristio se uski, pravougaoni snop zraka usmeren prema detektoru. U skladu sa nedovoljno razvijenom tehnologijom, javili su se i nedostaci ove generacije. Pre svega, skeniranje je zahtevalo mnogo vremena (3-5 minuta), a pacijent je morao da bude nepomičan za to vreme, što je bilo neudobno. Dobijene slike su bile grube. Još jedan veoma bitan nedostatak prve generacije CT uređaja su velike doze zračenja pacijenta. Ova generacija CT uređaja je omogućavala snimanja mozga.

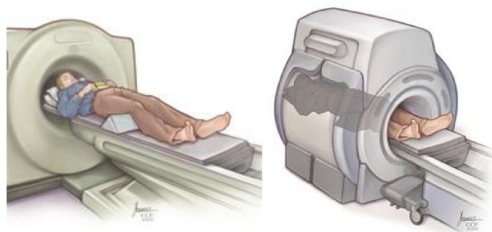
Princip rada *druge generacije CT uređaja* bio je isti kao i kod prve generacije (kretanje je i dalje translaciono-rotaciono). Sa ovom generacijom se javljaju i prvi znaci usavršavanja kao što su veći broj detektora (i do 16) i

širi, lepezasti snop rendgenskih zraka. Ovaj napredak smanjuje vreme trajanja ekspozicije, kao i zračenje pacijenta, što je od izuzetnog značaja. Osim mozga, omogućeno je snimanje ostatka tela pacijenta, organa trbusne duplje i grudnog koša.

U daljem razvoju CT uređaja, ukinuto je translaciono kretanje, pa se *treća generacija CT uređaja* zasniva samo na rotacionom kretanju rendgenske cevi i detektorskog luka sa 380-600 detektora oko snimanog dela tela za 360°. Korišćen je široki, lepezasti snop rendgenskih zraka. Trajanje ekspozicije po jednom sloju bilo je 1,4-14s. Ova naprednija generacija CT uređaja omogućila je preciznije snimke celog tela i svih organa.

*Četvrtu generaciju CT uređaja* prati povećane detektora na 1200 do 2000. Detektori su smešteni u kružni prsten što je omogućilo kontinuiranu rotaciju i metodu spiralnog snimanja. Vreme ekspozicije po jednom sloju se drastično smanjilo na jednu do tri sekunde.





Slika 2.3: CT uređaj

Pojava spiralnog CT uređaja dovodi do znatno kraćeg vremena trajanja pregleda, jer uređaj omogućava skeniranje celog tela pacijenta bez pauze između snimanja pojedinih slojeva tela što je bio slučaj kod prve tri generacije CT uređaja. Pregled organa trbušne duplje spiralnim CT aparatom danas traje najviše dva minuta, a dobija se i bolji kvalitet snimaka.

# Glava 3

## Furijeova transformacija

### 3.1 Furijeova transformacija funkcija u $L^1(\mathbb{R})$

**Definicija 3.1.1.** *Neka je funkcija  $f$   $L^1$ -funkcija definisana na  $\mathbb{R}$ . Furijeova transformacija funkcije  $f$ , u oznaci  $\hat{f}$ , je funkcija definisana na  $\mathbb{R}$ :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

**Definicija 3.1.2.** *Neka su funkcije  $f$  i  $\hat{f}$ , definisane na  $\mathbb{R}$ ,  $L^1$  funkcije. Tada*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (3.1)$$

*Formula (3.1) se naziva **inverzna Furijeova transformacija**.*

Napomenimo da se u literaturi sreću razne slične definicije Furijeove transformacije koje se obično razlikuju po multiplikativnom faktoru.

Inverzna Furijeova transformacija predstavlja osnovu svih rekonstrukcionih metoda za dobijanje slike koji se koriste u medicini.

Za Furijeovu i inverznu Furijeovu transformaciju često se koriste sledeće oznake

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

i

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

**Teorema 3.1.1.** *Neka je  $j$  pozitivan ceo broj. Ako funkcija  $f$  ima  $j$  integrabilnih izvoda, tada postoji konstanta  $C$  da važi*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^j}.$$

Za  $1 \leq \ell \leq j$ , Furijeova transformacija za  $f^{[\ell]}$  je tada na sledeći način

$$\widehat{f^{[\ell]}}(\xi) = (i\xi)^\ell \hat{f}(\xi).$$

## 3.2 Furijeova transformacija funkcija u $L^1(\mathbb{R}^n)$

Neka  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , tj.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , gde je  $x_i$   $i$ -ta koordinata vektora  $\mathbf{x}$ . Furijeova transformacija funkcije  $n$  promenljivih je takođe funkcija  $n$  promenljivih. Neka je  $\boldsymbol{\xi}$  tačka u prostoru Furijeovih transformacija funkcija  $n$  promenljivih, tj.  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

**Definicija 3.2.1.** *Neka je funkcija  $f$  definisana na  $\mathbb{R}^n$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je lokalno integrabilna ukoliko je integral*

$$\int_{\|\mathbf{x}\| < R} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

*definisan i konačan za svako  $R$ . Funkcija  $f$  je apsolutno integrabilna ili  $L^1$  funkcija ukoliko važi*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$$

**Definicija 3.2.2.** *Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Furijeova transformacija funkcije  $f$ , u oznaci  $\hat{f}$ , je*

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\mathbf{x} \quad \text{za} \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

Neka je  $\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\omega}$ ,  $r = \|\boldsymbol{\xi}\|$  je intenzitet  $\boldsymbol{\xi}$ , a  $\boldsymbol{\omega}$  njegov pravac. Neka je  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + t\boldsymbol{\omega}$ , gde je  $\boldsymbol{x}'$  ortogonalan na  $\boldsymbol{\omega}$ . Tada  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle = t$ , pa funkcija  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle$  zavisi samo od  $t$ . Važi da je

$$e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} = e^{irt}.$$

Furijeova transformacija u  $\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\omega}$  se može izraziti kao

$$\hat{f}(r\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_L f(\boldsymbol{x}' + t\boldsymbol{\omega}) e^{-irt} d\boldsymbol{x}' dt,$$

gde je  $L$   $(n-1)$ -dimenzionalni potprostor prostora  $\mathbb{R}^n$  ortogonalan na  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$L = \{\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\omega} \rangle = 0\}.$$

$d\boldsymbol{x}'$  je  $(n-1)$ -dimenzionalna Euklidska mera na  $L$ .

**Definicija 3.2.3 (Inverzna Furijeova transformacija).** Neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Ako je  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , tada

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\boldsymbol{\xi}$$

Multi-indeks je uređena  $n$ -torka nenegativnih, celih brojeva. Obično se označava malim, podebljanim grčkim slovom. Za  $\boldsymbol{\alpha}$ , multi-indeks, važi  $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  i  $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Neka je  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Tada je  $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  i  $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ .

**Teorema 3.2.1.** Neka je  $f$  neprekidna,  $L^1$ -funkcija koja ima neprekidan, apsolutno integrabilan,  $\boldsymbol{\alpha}$ -ti parcijalni izvod za svako  $\boldsymbol{\alpha}$  tako da je  $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$ . Tada postoji konstanta  $C$  da važi

$$|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leq \frac{C}{(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|)^k}$$

$i$

$$\widehat{\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} f}(\boldsymbol{\xi}) = (i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}).$$

**Teorema 3.2.2.** Neka je  $f$  neprekidna  $L^1$ -funkcija koja ima apsolutno integrabilan, neprekidan,  $j$ -ti parcijalni izvod. Tada je

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\boldsymbol{\xi}) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}).$$

### 3.3 Furijeova transformacija funkcija u $L^2(\mathbb{R})$

Neka je  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Za svako  $R > 0$ , definišimo

$$\hat{f}_R(\xi) = \int_{-R}^R f(x) e^{-ix\xi} d\xi$$

**Definicija 3.3.1.** *Furijeova transformacija funkcije  $f \in L^2(\mathbb{R})$  je određena sa*

$$\hat{f} = \lim_{R \rightarrow \infty} \hat{f}_R$$

Za funkciju  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definišemo

$$f_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

**Teorema 3.3.1 (Inverzna Furijeova formula).** *Neka je funkcija  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Inverzna Furijeova transformacija funkcije  $f$  je*

$$f = \lim_{R \rightarrow \infty} f_R$$

**Teorema 3.3.2 (Parsevalova formula).** *Ako je  $f$  apsolutno integrabilna i integrabilna sa kvadratom, tada je i  $\hat{f}$  kvadratno integrabilna i važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Naredna osnovna svojstva Furijeove transformacije funkcija u  $L^2(\mathbb{R})$  proizilaze iz osnovnih svojstava integrala.

- Linearnost

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

,

$$\mathcal{F}(\alpha f) = \alpha \mathcal{F}(f), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$



- Furijeova transformacija funkcije  $f(ax)$ , gde je  $a \in \mathbb{R}$ , je data sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

- Furijeova transformacija translirane funkcije  $f_t(x) = f(x - t)$  je

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t}$$

- Ako  $f$  ima realne vrednosti, tada je

$$\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$$

- $\hat{f}$  ima realne vrednosti, ako je funkcija  $f$  parna funkcija sa realnim vrednostima. Ako  $f$  je neparna funkcija sa realnim vrednostima, tada  $\hat{f}$  ima čisto imaginarne vrednosti. Ako je funkcija  $f$  parna, tada je i njena Furijeova transformacija parna i određena je na sledeći način

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx$$

**Teorema 3.3.3.** *Neka je  $j$  pozitivan ceo broj. Funkcija  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ima  $j$   $L^2$  izvoda ako i samo ako  $\xi^j \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ . Tada za  $1 \leq \ell \leq j$  važi*

$$\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (i\xi)^\ell \hat{f}(\xi).$$

### 3.4 Furijeova transformacija funkcija u $L^2(\mathbb{R}^n)$

**Definicija 3.4.1.** *Neka je  $f$  kompleksna funkcija definisana na  $\mathbb{R}^n$ . Funkcija  $f$  je  $L^2$ -funkcija ili kvadratno integrabilna ako važi*

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$$

Skup kvadratno integrabilnih funkcija sa normom  $\|\cdot\|_{L^2}$  označavamo sa  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Norma u  $L^2(\mathbb{R}^n)$  je definisana skalarnim proizvodom

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

**Teorema 3.4.1 (Koši-Švarcova nejednakost).** Neka su  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Tada je

$$|\langle f, g \rangle|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Analogno slučaju  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , definisaćemo Furijeovu transformaciju funkcije  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Definicija 3.4.2.** Neka je

$$\hat{f}_R(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\|\mathbf{x}\| < R} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}.$$

Furijeova transformacija  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  je

$$\hat{f} = \lim_{R \rightarrow \infty} \hat{f}_R$$

**Teorema 3.4.2 (Inverzna Furijeova transformacija).** Neka je  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  i

$$f_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| < R} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \rangle} d\boldsymbol{\xi}.$$

Tada je  $f = \lim_{R \rightarrow \infty} f_R$ .

Posmatraćemo sada osnovna svojstva Furijeove transformacije funkcija u  $L^1(\mathbb{R}^n)$  i  $L^2(\mathbb{R}^n)$

- Linearnost

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

,

$$\mathcal{F}(\alpha f) = \alpha \mathcal{F}(f), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- Furijeova transformacija funkcije  $f(ax)$ , gde je  $a \in \mathbb{R}$ , je data sa

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-i\langle \xi, x \rangle} d\mathbf{x} = \frac{1}{a^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

- Furijeova transformacija funkcije  $f_t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{t})$ , gde je  $\mathbf{t}$  vektor, je

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\langle \xi, t \rangle}$$

- Ako  $f(\mathbf{x})$  ima realne vrednosti, tada je

$$\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$$

- $\hat{f}$  ima realne vrednosti, ako je funkcija  $f$  parna funkcija sa realnim vrednostima. Ako  $f$  je neparna funkcija sa realnim vrednostima, tada  $\hat{f}$  ima čisto imaginarne vrednosti.

**Teorema 3.4.3 (*Parsevalova formula*).** *Neka je funkcija  $f$  apsolutno integrabilna i integrabilna sa kvadratom. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

## 3.5 Konvolucija

**Definicija 3.5.1.** *Neka je  $f$   $L^1$ -funkcija definisana na  $\mathbb{R}^n$  i  $g$  ograničena, lokalno integrabilna funkcija. Konvolucija funkcija  $f$  i  $g$  u oznaci,  $f * g$ , je funkcija na  $\mathbb{R}^n$  određena sa*

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

**Teorema 3.5.1.** *Neka su funkcije  $f, g, h$  definisane na  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Konvolucija ima svojstva komutativnosti, distributivnosti i asocijativnosti, tj.*

- $f * g = g * f$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$

**Teorema 3.5.2.** *Neka su  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Tada važi*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

**Teorema 3.5.3.** *Neka je funkcija  $f$  lokalno integrabilna, a  $g$  funkcija sa ograničenim nosačem i  $k$  neprekidnih parcijalnih izvoda. Tada i  $f * g$  ima  $k$  neprekidnih parcijalnih izvoda i važi*

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha}(f * g) = f * (\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha}g), \quad |\alpha| \leq k$$

# Glava 4

## Radonova transformacija

### 4.1 Prostor pravih u ravni

Prava u ravni je skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu oblika

$$ax + by = c,$$

gde je  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Prethodnu jednačinu možemo zapisati i na sledeći način:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Koeficijent  $(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$  definiše tačku  $\omega$  na jediničnoj kružnici<sup>6</sup>,  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , a konstanta  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  može biti bilo koji broj. Prave u ravni parametrizovane su parom koji čine jedinični vektor  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  i realan broj  $t$ .

Prava  $\ell_{t,\omega}$  je skup tačaka u  $\mathbb{R}^2$  koja zadovoljava jednačinu

$$\langle (x, y), \omega \rangle = t. \quad (4.1)$$

Vektor  $\omega$  je normalan na tu pravu.

U nekim slučajevima, pogodno je da tačku jediničnog kruga parametrizujemo realnim brojem. Stavićemo

$$\omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

---

<sup>6</sup> $S^1 \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = \|(x_1, x_2)\|_2 \stackrel{def}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Zapažamo da je  $\omega(\theta) = \omega(\theta + 2\pi)$  ista tačka jediničnog kruga, jer su  $\sin$  i  $\cos$   $2\pi$  periodične funkcije. Koristeći ovu parametrizaciju, dobijamo jednačinu

$$\langle (x, y), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = t,$$

čija su rešenja  $\ell_{t,\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{t,\omega(\theta)}$ .

Ako je  $(t, \omega) = (-t, -\omega)$ , skup tačaka koje zadovoljavaju (4.1) ostaje isti, pa sledi

$$\ell_{t,\omega} = \ell_{-t,-\omega}$$

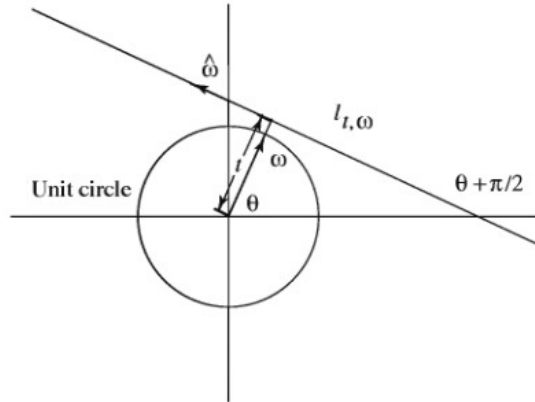
Takođe, iz jednakosti  $\ell_{t_1,\omega_1} = \ell_{t_2,\omega_2}$ , proizilazi da je ili  $(t_1 = t_2 \wedge \omega_1 = \omega_2)$  ili  $(t_1 = -t_2 \wedge \omega_1 = -\omega_2)$ .

Uređeni par  $(t, \omega)$  određuje orijentisanu pravu. Vektor  $\hat{\omega} = (-\omega_2, \omega_1)$  je ortogonalan sa  $\omega$  i zato paralelan pravoj  $\ell_{t,\omega}$ . Vektor  $\hat{\omega}$  biramo iz uslova da je determinanta matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}$$

jednaka  $+1$ , tj.  $\hat{\omega}(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Vektorom  $\hat{\omega}$  se definiše pozitivan pravac ili orijentacija prave  $\ell_{t,\omega}$ .

**Teorema 4.1.1.** *Parovi  $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^1$  su u bijekciji sa skupom orijentisanih pravih u ravni.*



Slika 4.1: Parametrizacija orijentisanih pravi u ravni

Vektor  $\omega$  je pravac normalan na pravu, a broj  $t$  nazivamo afini parametar prave;  $|t|$  predstavlja rastojanje prave od koordinatnog početka. Uređeni par  $(t, \omega)$  definiše dve poluravni:

$$H_{t,\omega}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \langle \mathbf{x}, \omega \rangle > t\}$$

i

$$H_{t,\omega}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \langle \mathbf{x}, \omega \rangle < t\},$$

čija je granica prava  $\ell_{t,\omega}$ .

Na osnovu predstavljanja  $\omega \in S^1$  na sledeći način

$$\omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

možemo poistovetiti  $\mathbb{R} \times S^1$  sa  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ . Zbog ovoga,  $d\theta$  se može koristiti kao element prave u  $S^1$ -pravcu. Integral funkcije  $h$  po  $S^1 \times \mathbb{R}$  je dat sa

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega(\theta)) dt d\theta,$$

koji se često označava

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) dt d\omega.$$

**Definicija 4.1.1.** Skup  $L^2(\mathbb{R} \times S^1)$  sadrži lokalno integrabilne funkcije sa realnim vrednostima za koje je kvadratni integral,

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^1)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t, \omega(\theta))|^2 dt d\theta,$$

konačan.

Funkcija  $h$  u  $\mathbb{R} \times S^1$  je neprekidna ako je  $h(t, \theta) \stackrel{def}{=} h(t, \omega(\theta))$   $2\pi$ -periodična po  $\theta$  i neprekidna kao funkcija na  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ .  $h$  je diferencijabilna ako je  $2\pi$ -periodična i diferencijabilna na  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$  i  $\partial_\theta h$  je  $2\pi$ -periodična. Diferencijabilnost višeg reda ima slične definicije.

**Definicija 4.1.2.** Neka je funkcija  $f$  definisana na  $\mathbb{R}^n$ . Tačka  $\mathbf{x}$  pripada **nosaču funkcije**  $f$  ako postoji niz tačaka  $\{\mathbf{x}_n\}$  da važi:

- $f(\mathbf{x}_n) \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$

Nosač funkcije  $f$  se označava sa  $\text{supp}(f)$ .

**Primer 4.1.1.** Neka je  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Nosač funkcije  $\chi_D$  je zatvorenje skupa  $D$ , tj. skup svih tačaka čije se granične vrednosti nizova nalaze u  $D$ . Podsetimo, takav skup se naziva zatvoren skup.

**Primer 4.1.2.** Nosač funkcije  $f(x) = x$  je skup  $\mathbb{R}$ , iako je  $f(0) = 0$ . Posmatrajmo funkciju  $f(x, y) = xy$ . Nosač ove funkcije je cela ravan, iako je  $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ . Nosač funkcije  $\chi_{(0,1)}(x)$  je  $[0, 1]$ .

**Definicija 4.1.3.** Za funkciju  $f$  kažemo da ima **ograničen nosač** ako postoji  $R$  da važi  $f(\mathbf{x}) = 0$  ako  $\|\mathbf{x}\| > R$ . Kažemo da je nosač funkcije  $f$  sadržan u lopti poluprečnika  $R$ .

## 4.2 Radonova transformacija

Razmotrićemo matematički model CT uređaja. Posmatraćemo dvodimenzionalnu krišku trodimenzionalnog objekta i njen atenuacioni koeficijent  $f$ . Slabljenje intenziteta X-zraka,  $I_{(t,\omega)}$ , duž prave  $\ell_{t,\omega}$  pri prodoru u objekat je dato diferencijalnom jednačinom koja predstavlja Beerov zakon<sup>7</sup>:

$$\frac{dI_{(t,\omega)}}{ds} = -fI_{(t,\omega)},$$

gde je  $s$  dužina duži koja se dobija u preseku objekta i prave kojom putuju X-zraci. Nakon integraljenja dobijamo

$$\int_{\ell_{t,\omega}} f ds = \log \left[ \frac{I_{0,(t,\omega)}}{I_{1,(t,\omega)}} \right],$$

---

<sup>7</sup>zakon povezuje slabljenje X-zraka sa osobinama objekta kroz koji X-zraci prolaze



gde  $I_{0,(t,\omega)}$  predstavlja početni intenzitet X-zraka u tački  $x_0$  u kojoj X-zraci prodiru u objekat, a  $I_{1,(t,\omega)}$  označava intenzitet X-zraka u tački  $x_1$  u kojoj X-zraci izlaze iz objekta.  $I_{0,(t,\omega)}$  i  $I_{1,(t,\omega)}$  su poznate vrednosti. Leva strana jednakosti predstavlja Radonovu transformaciju funkcije  $f$ . Cilj je odrediti nepoznatu funkciju  $f$  uz pomoć inverzne Radonove transformacije. Poznat je samo skup vrednosti  $\mathcal{R}f$  za konačan broj pravih  $\ell_{t,\omega}$  koje prolaze kroz objekat, što ujedno predstavlja i manu.

Radonova transformacija je integralna transformacija koja funkciju definisanu u ravni slika u funkciju definisanu na dvodimenzionalnom prostoru pravih u ravni, i čija vrednost na konkretnoj pravoj je jednaka krivolinijskom integralu funkcije po toj pravoj. Radonovu transformaciju je otkrio austrijski matematičar Radon<sup>8</sup> 1917. godine. Veoma bitnu ulogu ima u kompjuterizovanoj tomografiji.

**Definicija 4.2.1.** *Pretpostavimo radi jednostavnosti da je funkcija  $f$  definisana u ravni neprekidna sa ograničenim nosačem. Integral funkcije  $f$  duž prave  $\ell_{t,\omega}$  je*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(t, \omega) &= \int_{\ell_{t,\omega}} f \, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s\hat{\omega} + t\omega) \, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega_1 - s\omega_2, t\omega_2 + s\omega_1) \, ds\end{aligned}$$

Kolekcija integrala funkcije  $f$  duž pravih u ravni definiše funkciju na  $\mathbb{R} \times S^1$ , koja se naziva **Radonova transformacija funkcije  $f$** .

Kada je reč o upotrebi CT uređaja u medicini, često se pretpostavlja da je vazduh propustljiv za X-zrake, pa je koeficijent atenuacije (u matematici to je funkcija  $f$ ) jednak nuli u svim tačkama van posmatranog objekta (obično pacijenta). Uopšteno govoreći, posmatramo konačan broj kriški (kolutova) nekog objekta na osnovu kojih želimo da rekonstruišemo njegovu

---

<sup>8</sup>Johann Karl August Radon, 1887-1956, austrijski matematičar. Doktorirao je na Univerzitetu u Beču 1910. godine.

unutrašnjost. U skladu sa tim je i uslov da funkcija ima ograničen nosač, tj. da postoji oblast izvan koje je funkcija jednaka nuli, a posmatrano sa aspekta fizike koeficijent atenuacije je nula van te oblasti.

Međutim, nije nužno da funkcija bude neprekidna ili sa ograničenim nosačem. Za funkciju  $f$ , čija je restrikcija na svakoj pravoj lokalno integrabilna, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t\omega + s\hat{\omega})| ds < \infty \quad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^1 \quad (4.2)$$

možemo definisati Radonovu transformaciju. Funkcije za koje važi (4.2) se nalaze u *prirodnom domenu* Radonove transformacije. To su u stvari dva različita uslova:

- funkcija je dovoljno regularna da je njena restrikcija na bilo kojoj pravoj lokalno integrabilna
- funkcija teži nuli dovoljno brzo da nesvojstveni integral konvergira.

Posmatrajmo funkciju  $f \equiv 1$ . Funkcija ne opada u beskonačnosti, pa se ne nalazi u prirodnom domenu Radonove transformacije. Za funkciju  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$  integral (4.2) je divergentan u  $t = 0$ , pa ni ova funkcija ne pripada prirodnom domenu Radonove transformacije. Razumevanje prirodnog domena Radonove transformacije je od važnosti u matematici. U medicini pažnja je usmerena ka deo po deo neprekidnim funkcijama koje su nula van nekog diska.

**Teorema 4.2.1 (*Osnovna svojstva Radonove transformacije*).** *Neka su funkcije  $f$  i  $g$  definisane na prirodnom domenu Radonove transformacije. Tada važi*

- *Radonova transformacija je linearna*

$$\mathcal{R}(\alpha f) = \alpha \mathcal{R} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{R}(f + g) = \mathcal{R}f + \mathcal{R}g$$

- *Radonova transformacija je parna funkcija*

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \mathcal{R}f(-t, -\omega)$$

- Radonova transformacija je monotona. Ako je  $f$  nenegativna u prirodnom domenu Radonove transformacije, sledi

$$\mathcal{R}f(t, \omega) \geq 0 \quad \forall(t, \omega)$$

*Dokaz.* Linearnost Radonove transformacije sledi iz linearnosti integrala duž prave. Iz  $\ell_{t,\omega} = \ell_{-t,-\omega}$  zaključujemo o parnosti Radonove transformacije. Monotonost Radonove transformacije proizilazi iz analogne osobine integrala.

**Primer 4.2.1.** Neka je  $E \subset \mathbb{R}^2$ . Radonova transformacija funkcije  $\chi_E$  je dužina duži koja se dobija u preseku skupa  $E$  i  $\ell_{t,\omega}$ . Ako je skup  $E$  zatvoren, ograničen podskup  $\mathbb{R}^2$ , tada funkcija  $\chi_E$  pripada prirodnom domenu Radonove transformacije. Ovakve funkcije opisuju objekte sa konstantnim koeficijentom atenuacije.

**Primer 4.2.2.** Neka je data funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & ; (x, y) = (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Radonova transformacija date funkcije je  $\mathcal{R}f(t, \omega) = 0$  za svako  $(t, \omega)$ .

**Definicija 4.2.2.** Skup

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

predstavlja loptu u  $\mathbb{R}^n$  sa centrom u  $\mathbf{a}$  poluprečnika  $r$ .

$B_r(\mathbf{0})$  označavamo kraće sa  $B_r$ . Skup  $B_r(\mathbf{a})$  u  $\mathbb{R}^2$  se naziva disk.

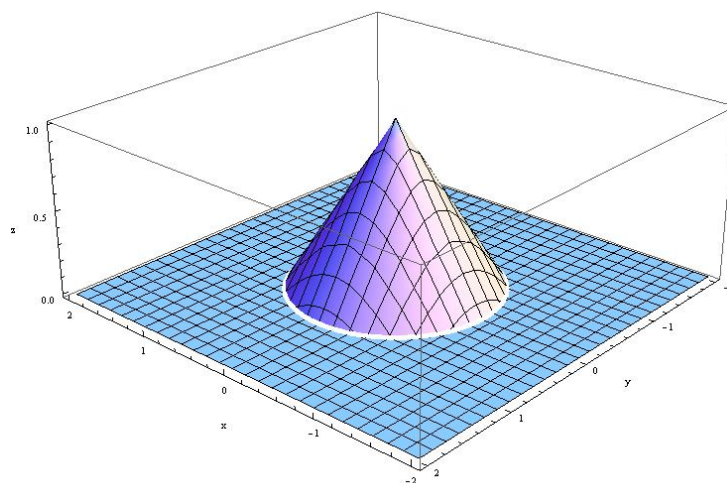
**Primer 4.2.3.** Posmatraćemo disk u  $\mathbb{R}^2$  poluprečnika 1 i funkciju  $\chi_{B_1}$ . Radonova transformacija funkcije  $\chi_{B_1}$  je

$$\mathcal{R}_{\chi_{B_1}}(t, \omega) = \begin{cases} 2\sqrt{1-t^2} & ; |t| \leq 1 \\ 0 & ; |t| > 1 \end{cases}$$

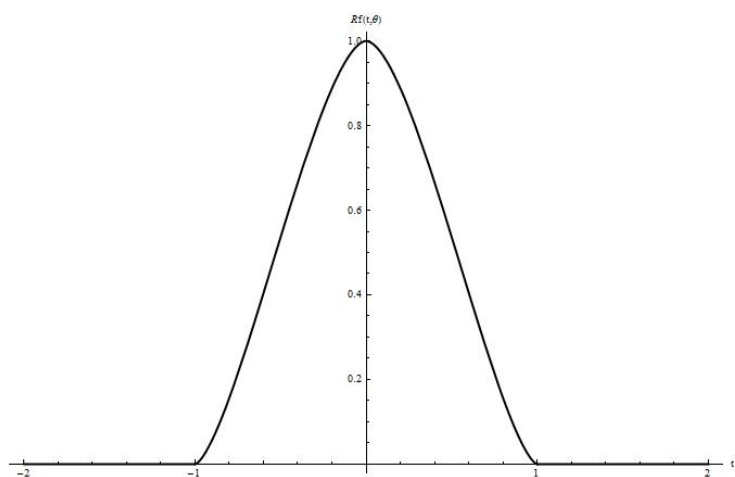
Za  $|t| > 1$  imamo pravu  $\ell_{t,\omega}$  koja ne preseca skup  $B_1$ .

**Primer 4.2.4.** *Neka je funkcija  $f$  definisana na sledeći način:*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & ; x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & ; x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$



Slika 4.2: Konus definisan funkcijom  $f$



Slika 4.3: Grafik Radonove transformacije konusa

**Definicija 4.2.3.** Funkcija definisana na  $\mathbb{R}^n$  je radijalna funkcija ako njena vrednost zavisi samo od rastojanja od koordinatnog početka. Tada postoji funkcija jedne promenljive, označimo je sa  $F$ , tako da važi

$$f(\mathbf{x}) = F(\|\mathbf{x}\|).$$

**Primer 4.2.5 (Radonova transformacija radijalne funkcije).** Fiksiraćemo pravac  $\boldsymbol{\omega} = (1, 0)$ , pa sledi

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{t^2 + s^2}) ds\end{aligned}$$

Koristićemo smenu promenljivih  $r^2 = t^2 + s^2$ ,  $2rdr = 2sds$ . Dalje sledi

$$\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}) = 2 \int_t^{\infty} \frac{F(r)r}{\sqrt{r^2 - t^2}} dr$$

Dobili smo Radonovu transformaciju radijalne funkcije koja predstavlja jednodimenzionalnu integralnu transformaciju.

**Teorema 4.2.2.** Neka su  $f$  i  $g$  deo po deo neprekidne funkcije sa ograničenim nosačem. Tada je

$$\mathcal{R}[f * g](t, \boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(s, \boldsymbol{\omega}) \mathcal{R}g(t - s, \boldsymbol{\omega}) ds.$$

*Dokaz.* Fiksirajmo pravac  $\boldsymbol{\omega}$ . Koordinate  $(s, t)$  su definisane na sledeći način:

$$(s, t) \longmapsto s\hat{\boldsymbol{\omega}} + t\boldsymbol{\omega}$$

Ovo je ortogonalna smena promenljivih, pa je element površine u  $\mathbb{R}^2$  dat sa  $dsdt$ . Konvolucija funkcija  $f$  i  $g$  je sada

$$f * g(s\hat{\omega} + t\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\hat{\omega} + b\omega)g((s-a)\hat{\omega} + (t-b)\omega) da db.$$

U Radonovoj transformaciji  $f * g$  menjamo mesta integraciji

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[f * g](\tau, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(\tau\omega + s\hat{\omega}) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\hat{\omega} + b\omega)g((s-a)\hat{\omega} + (\tau-b)\omega) da db ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\hat{\omega} + b\omega)g((s-a)\hat{\omega} + (\tau-b)\omega) ds da db \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(b, \omega)\mathcal{R}g(\tau-b, \omega) db. \end{aligned}$$

**Komentar 4.2.1.** Radonova transformacija konvertuje konvoluciju u ravni u konvoluciju po afinom parametru.

**Komentar 4.2.2.** Glatkoća funkcije sa ograničenim nosačem se opaža u svojstvu brzine opadanja njene Furijeove transformacije. Takođe, glatkoća funkcije sa ograničenim nosačem ogleda se i u glatkoći njene Radonove transformacije po afinom parametru, što zaključujemo iz prethodne teoreme. Neka je  $f$  neprekidna funkcija sa ograničenim nosačem,  $\varphi$  radijalno simetrična funkcija sa ograničenim nosačem i neprekidnim parcijalnim izvodima reda  $k$ . Radonova transformacija konvolucije

$$\mathcal{R}(f * \varphi)(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(\tau, \omega)\mathcal{R}\varphi(t - \tau) d\tau,$$

je barem onoliko glatka koliko je glatka  $\mathcal{R}\varphi$  u  $t$ .

Neka je  $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v})$  za  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  translacija funkcije  $f$  za vektor  $\mathbf{v}$ . Povezanost Radonove transformacije funkcije  $f$  i funkcije  $f_{\mathbf{v}}$  nam daje sledeća teorema.

**Teorema 4.2.3.** *Neka je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija sa ograničenim nosačem. Tada je*

$$\mathcal{R}f_{\mathbf{v}}(t, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{R}f(t - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle, \boldsymbol{\omega}). \quad (4.3)$$

**Lema 4.2.1.** *Neka je  $f$  funkcija sa ograničenim nosačem i neprekidnim prvim parcijalnim izvodima. Tada je  $\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})$  diferencijabilna po  $t$  i*

$$\mathcal{R}\partial_x f(t, \boldsymbol{\omega}) = \omega_1 \partial_t \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})$$

$$\mathcal{R}\partial_y f(t, \boldsymbol{\omega}) = \omega_2 \partial_t \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}).$$

*Dokaz.* Dokaz ćemo izvesti za parcijalni izvod po  $x$ . Postupak je analogan i za parcijalni izvod po  $y$ . Neka je  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ . Parcijalni izvod funkcije  $f$  po promenljivoj  $x$  je definisan na sledeći način

$$\partial_x f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{h\mathbf{e}_1}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{-h}$$

Na osnovu (4.3) i linearnosti Radonove transformacije, zaključujemo

$$\mathcal{R} \left[ \frac{f_{h\mathbf{e}_1} - f}{-h} \right] (t, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\mathcal{R}f(t - h\omega_1, \boldsymbol{\omega}) - \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})}{-h}.$$

Zatim, pustimo da  $h \rightarrow 0$ .

Ovaj rezultat proširujemo i za parcijalne izvode viših redova.

**Teorema 4.2.4.** *Neka je funkcija  $f$  sa ograničenim nosačem i ima neprekidne parcijalne izvode reda  $k$ . Tada je  $\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})$   $k$ -puta diferencijabilna po  $t$  i, za nenegativne cele brojeve  $i$  i  $j$  za koje važi  $i + j \leq k$ , je*

$$\mathcal{R} [\partial_x^i \partial_y^j f] (t, \boldsymbol{\omega}) = \omega_1^i \omega_2^j \partial_t^{i+j} \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}).$$

Neka je  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  čvrsta rotacija ravni, tj. linearno preslikavanje tako da

$$\langle A\mathbf{v}, A\boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2.$$

Ukoliko je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija sa ograničenim nosačem, tada je  $f_A(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$ .

Veza između Radonove transformacije funkcije  $f_A$  i funkcije  $f$  data je narednom teoremom.

**Teorema 4.2.5.** *Neka je  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  čvrsta rotacija ravni i neka je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija sa ograničenim nosačem. Tada*

$$\mathcal{R}f_A(t, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{R}f(t, A\boldsymbol{\omega}).$$

*Dokaz.* Važi  $\langle A\boldsymbol{\omega}, A\hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle = 0$ .

$$\mathcal{R}f_A(t, \boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t A\boldsymbol{\omega} + s A\hat{\boldsymbol{\omega}}) ds = \mathcal{R}f(t, A\boldsymbol{\omega}).$$

**Primer 4.2.6.** *Posmatrajmo funkciju*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-1, 1] \wedge y = 0 \\ 0 & ; x \notin [-1, 1] \vee y \neq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}) = 0$  ako je  $\boldsymbol{\omega} \neq (0, \pm 1)$  i  $\mathcal{R}(0, (0, \pm 1)) = 2$ . U ovom slučaju, Radonova transformacija je nula osim za izvesne prave. Važiće da je  $\mathcal{R}f = \mathcal{R}\tilde{f}$  ako funkciju  $f$  zamenimo funkcijom  $\tilde{f}$  koja je 1 na nekom drugom podskupu od  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ukupne dužine 2. Ovo nam pruža netrivialne primere gde Radonova transformacija ne sadrži dovoljno informacija da bi razlikovala dve funkcije.

**Definicija 4.2.4.** *Kaže se da  $E \subset \mathbb{R}^n$  ima  $n$ -dimenzionalnu meru nula ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji familija lopti  $B_{r_i}(\mathbf{x}_i)$  da važi*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(\mathbf{x}_i)$$



*i*

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n < \varepsilon.$$

*Takav skup ne nosi nikakvu  $n$ -dimenzionalnu masu.*

Na primer, tačka je skup mere nula na pravoj, prava je skup mere nula u ravni, a ravan je skup mere nula u  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 4.2.6.** *Neka je funkcija  $f$  definisana u ravni čiji je nosač skup mere nula. Tada je skup uređenih parova  $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^1$  za koje je  $\mathcal{R}f(t, \omega) \neq 0$  skup mere nula.*

**Teorema 4.2.7.** *Neka je funkcija  $f$  definisana u ravni tako da važi da je  $f(x, y) = 0$  za  $x^2 + y^2 > R^2$ . Tada je*

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = 0 \quad \text{za} \quad |t| > R.$$

*Dokaz.* Za  $|t| > R$  bilo koja prava  $\ell_{t, \omega}$  se nalazi izvan nosača funkcije  $f$ , pa je na osnovu definije  $\mathcal{R}f(t, \omega) = 0$  za  $|t| > R$ .

Zapitajmo se da li važi obrat prethodne teoreme. Naredni primer će nam pomoći da dobijemo ispravan odgovor.

**Primer 4.2.7.** *Definišimo funkciju u polarnim koordinatama*

$$f_n(r, \theta) = r^{-n} \cos(n\theta)$$

*za svako  $n > 1$ . Ove funkcije ne pripadaju prirodnom domenu Radonove transformacije zato što mnogo brže teže ka  $\infty$  u  $r = 0$  nego  $r^{-1}$ . To je zato što se funkcije ne mogu integraliti duž bilo koje prave koja prolazi kroz  $(0, 0)$ . Sa druge strane, integrali Radonove transformacije  $\mathcal{R}f_n(t, \omega)$  apsolutno konvergiraju za svako  $t \neq 0$ , jer  $f_n$  teže nuli, kao i  $r^{-1}$  kada  $r \rightarrow \infty$  i  $n > 1$ .*

**Lema 4.2.2.** *Integrali*

$$\int_{\ell_{t, \omega}} f_n(t\omega + s\hat{\omega}) ds$$

*su apsolutno konvergentni i jednaki nuli za svako  $n > 1$ ,  $t \neq 0$ , i  $\omega \in S^1$ .*

*S obzirom da važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(-s \sin \theta, s \cos \theta)| ds = \infty$$

za svako  $\theta$ , funkcije  $f_n$  ne pripadaju prirodnom domenu Radonove transformacije. Međutim,  $\mathcal{R}f_n(t, \omega) = 0$  za  $\forall t \neq 0$ .  $\mathcal{R}f_n$  ima nosač mere nula  $\{0\} \times S^1$ .

Dodefinisaćemo funkcije  $f_n$  za svako  $n$  do funkcije  $F_n$  koja će pripadati prirodnom domenu Radonove transformacije da važi  $\mathcal{R}F_n(t, \omega) = 0$  za  $\forall(t, \omega)$ ,  $|t| > 1$ :

$$F_n(r, \theta) = \begin{cases} f_n(r, \theta) & , r > 1 \\ 0 & , r \leq 1 \end{cases}$$

Funkcije  $F_n$  ne iščezavaju van diska poluprečnika 1.

Prave  $\ell_{t, \omega}$ , gde je  $|t| > 1$ , se nalaze potpuno van diska poluprečnika 1. Na osnovu pomenute leme, sledi da je

$$\mathcal{R}F_n(t, \omega) = \int_{\ell_{t, \omega}} f_n ds = 0.$$

Takođe važi da su funkcije  $F_n$  ograničene u okolini tačke  $(0, 0)$ , pa je zato  $\mathcal{R}F_n(t, \omega)$  definisana za svako  $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^1$ . Dakle, zaključili smo da iako funkcija van diska poluprečnika  $r$  nije jednaka nuli, njena Radonova transformacija može iščezavati za svako  $t$  koje je  $|t| > r$ .

Dakle, u opštem slučaju obrat prethodne teoreme ne važi.

### 4.3 Inverzna Radonova transformacija

U rekonstruisanju slike u medicini, Furijeova transformacija i Radonova transformacija su povezane teoremom koja se naziva *centralna „slice” teorema*.

**Teorema 4.3.1 (Centrala „slice” teorema).** *Neka je  $f$  apsolutno integrabilna funkcija na prirodnom domenu  $\mathcal{R}$ . Za  $\forall r \in \mathbb{R}$  i jedinični vektor  $\omega$ ,*

važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}) e^{-itr} dt = \hat{f}(r\boldsymbol{\omega}).$$

*Dokaz.* Na osnovu definicije Radonove transformacije, sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}) e^{-itr} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}}) e^{-itr} ds dt.$$

Integral je apsolutno konvergentan, pa koristeći smenu promenljivih da je  $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $t = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle$  i Jakobijan jednak jedinici, dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}}) e^{-itr} ds dt = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle r} d\boldsymbol{x} = \hat{f}(r\boldsymbol{\omega}).$$

Centralna „slice” teorema nam pokazuje da dvodimenzionalna Furijeova transformacija,  $\hat{f}(r\boldsymbol{\omega})$ , je jednodimenzionalna Furijeova transformacija  $\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})$ .

Definisaćemo Furijeovu transformaciju funkcije  $f(\boldsymbol{x})$ ,  $\boldsymbol{x} = (x, y)$ , na sledeći način

$$\hat{f}(\boldsymbol{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle} dx dy.$$

Označićemo  $\mathcal{R}_\alpha[f](s) = \mathcal{R}[f](\alpha s)$ . Centralna „slice” teorema kazuje da je

$$\widehat{\mathcal{R}_\alpha[f]}(\sigma) = \hat{f}(\sigma \boldsymbol{n}(\alpha)),$$

gde je  $\boldsymbol{n}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Zaključujemo da je dvodimenzionalna Furijeova transformacija početne funkcije duž prave pod uglom nagiba  $\alpha$  je jednodimenzionalna Furijeova transformacija Radonove transformacije (uzete pod uglom  $\alpha$ ) te početne funkcije.

Neka je dat vektor  $\boldsymbol{\xi}$ . Skalarni proizvod  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle$  je konstantan duž bilo koje prave koja je normalna na pravac vektora  $\boldsymbol{\xi}$ . Prethodna teorema nam predstavlja izračunavanje Furijeove transformacije u  $\boldsymbol{\xi}$  u dva koraka.

- Kada integralimo funkciju duž bilo koje prave koja je normalna na pravac vektora  $\xi$ , dobijamo funkciju koja zavisi samo od afinog parametra.
- Potom, izračunavamo jednodimenzionu Furijeovu transformaciju dobijene funkcije koja zavisi samo od afinog parametra.

**Primer 4.3.1.** Neka je  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  i  $(t, \omega) = (x, \mathbf{e}_1)$ . Kako je  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2$ , Radonova transformacija funkcije  $f$  u  $(x, \mathbf{e}_1)$  je

$$\mathcal{R}f(x, \mathbf{e}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Furijeova transformacija  $\mathcal{R}f(x, \mathbf{e}_1)$  je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(x, \mathbf{e}_1) e^{-irx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-irx} dy dx$$

Kako je  $\langle r\mathbf{e}_1, (x, y) \rangle = rx$ , to je ovo definicija  $\hat{f}(r\mathbf{e}_1)$ .

Neka je

$$\tilde{h}(r, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) e^{-itr} dt$$

jednodimenzionalna Furijeova transformacija funkcije  $h(t, \omega)$  definisane na  $\mathbb{R} \times S^1$ . Ukoliko  $h(t, \omega) \in L^2(\mathbb{R})$  za fiksirano  $\omega$ , tada iz jednodimenzionalne Parsevalove formule sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t, \omega)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(r, \omega)|^2 dr$$

Uz pomoć Parsevalove formule za 2D-Furijeovu transformaciju i centralne „slice” teoreme dolazimo do Parsevalove formule za Radonovu transformaciju.

**Teorema 4.3.2 (*Parsevalova formula za Radonovu transformaciju*).** Neka je funkcija  $f$ , definisana na prirodnom domenu Radonove transformacije, kvadratno integrabilna. Tada

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega)|^2 |r| dr d\omega.$$

*Dokaz.* Dokazaćemo teoremu uz dodatnu pretpostavku da je  $f$  i apsolutno integrabilna. Na osnovu *centralne „slice” teoreme* i *parnosti Radonove transformacije funkcije  $f$* , iz koje sledi  $\widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) = \widetilde{\mathcal{R}f}(-r, -\omega)$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\hat{f}(r\omega)|^2 r dr d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega)|^2 |r| dr d\omega \end{aligned}$$

Ukoliko izuzmemo dodatnu pretpostavku za funkciju  $f$ , aproksimiraćemo istu apsolutno integrabilnim funkcijama. Neka je  $\varphi$  nenegativna, beskonačno diferencijabilna, radijalna funkcija na disku poluprečnika 1 sa totalnim integralom 1. Stavimo  $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-2} \varphi(\varepsilon^{-1} \mathbf{x})$  za  $\varepsilon > 0$ . Glatka funkcija sa ograničenim nosačem koja aproksimira funkciju  $f$  data je sa

$$f_\varepsilon = [\chi_{[0, \varepsilon^{-1}]}(r)f] * \varphi_\varepsilon$$

Za  $\varepsilon > 0$ , funkcije zadovoljavaju pretpostavke *centralne „slice” teoreme* i *Parsevalove formule za Radonovu transformaciju*, pa se prethodni argument može primeniti na  $f_\varepsilon$ . Pokazujući da važi

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega)|^2 |r| dr d\omega = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\widetilde{\mathcal{R}f_\varepsilon}(r, \omega)|^2 |r| dr d\omega$$

i da  $f_\varepsilon$  konvergira ka  $f$  u  $L^2(\mathbb{R}^2)$  kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dokaz teoreme je kompletan.

Definisaćemo operator diferenciranja reda  $\frac{1}{2}$  na sledeći način

$$D_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) |r|^{\frac{1}{2}} e^{irt} dr.$$

Sada možemo izraziti Parsevalovu formulu kao integral na prostoru orijentisanih pravih

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |D_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt d\omega.$$

**Komentar 4.3.1.** *Prethodna teorema implicira da  $\mathcal{R}$  nema ekstenziju koja je neprekidno preslikavanje prostora  $L^2(\mathbb{R}^2)$  na prostor  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^1)$  i da  $\mathcal{R}^{-1}$  ne može biti neprekidno preslikavanje prostora  $L^2(\mathbb{R}^2 \times S^1)$  na prostor  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ovo proizilazi iz*

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^1)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{h}(r, \omega)|^2 dr d\omega.$$

Pošto se  $|r|$  nalazi u granicama između 0 i  $\infty$  u Parsevalovoj formuli za Radonovu transformaciju, sledeće ocene ne mogu biti korektne

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^1)} \leq M \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \vee \quad \|\mathbb{R}f\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^1)} \geq M_1 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Centralna „slice” teorema i inverzna Furijeova transformacija za funkciju  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  nas dovode do inverzne Radonove transformacije.

**Teorema 4.3.3 (*Radonova inverzna formula*).** *Neka je  $f$  apsolutno integrabilna funkcija definisana na prirodnom domenu Radonove transformacije i neka je  $\hat{f}$  apsolutno integrabilna. Tada je*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{ir\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) |r| dr d\omega \quad (4.4)$$

*Dokaz.* Važi da je

$$\widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) = \widetilde{\mathcal{R}f}(-r, -\omega) \quad (4.5)$$

jer je  $\mathcal{R}f$  parna funkcija. Funkcije  $f$  i  $\hat{f}$  su apsolutno integrabilne, pa na osnovu *inverzne Furijeove transformacije* sledi

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\boldsymbol{\xi}$$

Koristeći *inverznu Furijeovu formulu u polarnim koordinatama* i *centralnu „slice” teoremu*, dobijamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{ir\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \hat{f}(r\boldsymbol{\omega}) r dr d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{ir\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \boldsymbol{\omega}) r dr d\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

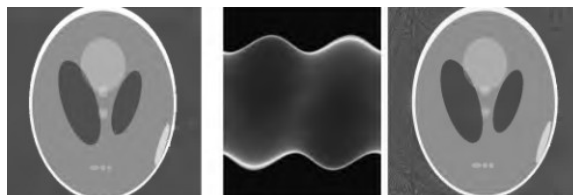
Koristeći (4.5) dokaz teoreme je kompletan.

Na slici (4.4) levo je prikazan matematički fantom kojeg su u medicini za potrebe rekonstruisanja slike uveli Sep (Larry Shepp<sup>9</sup>) i Logan (Benjamin F. Logan<sup>10</sup>). Slika opisuje funkciju koja modelira koeficijent atenuacije „slice”-a ljudske glave. Najveća atenuacija je predstavljena belom bojom (lobanja), a najmanja atenuacija crnom bojom (vazduh oko lobanje). Slika u sredini predstavlja primenu Radonove transformacije, tj. krivolinijski integral funkcije prikazane na prvoj slici. Horizontalna koordinatna osa je ugaona promenljiva,  $\theta$ , za koju je  $\boldsymbol{\omega}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , dok vertikalna koordinatna osa predstavlja afini parametar. Ugao  $\theta$  se kreće između 0 i  $2\pi$ . Kao i ranije, velika gustina je prikazana belom bojom, a crnom bojom manja gustina. Poslednja, treća slika prikazuje rekonstrukciju fantoma uz pomoć formule (4.4). Zapažamo da rekonstruisana slika je skoro pa istovetna sa originalnom, prvom slikom.

---

<sup>9</sup>američki matematičar

<sup>10</sup>američki inženjer



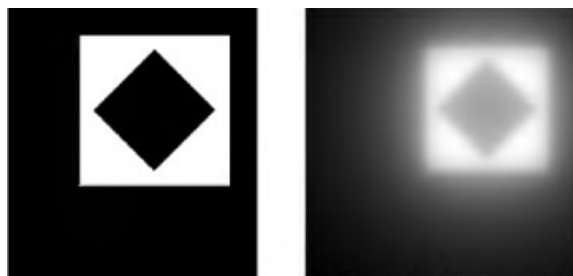
Slika 4.4: Grafički prikaz Radonove transformacije

### 4.3.1 Filtered Back-projection

Za pravac  $\omega$  prava u familiji  $\{\ell_{t,\omega} | t \in (-\infty, \infty)\}$  koja prolazi kroz tačku  $\mathbf{x}$  je prava sa afnim parametrom  $t = \langle \mathbf{x}, \omega \rangle$ . *Back-projection formula* je određena na sledeći način

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}f(\langle \mathbf{x}, \omega(\theta) \rangle, \theta) d\theta.$$

Vrednost u  $\mathbf{x}$  je polovina sredine Radonove transformacije funkcije  $f$  po svim pravama koje prolaze kroz  $\mathbf{x}$ . Pomenuta back-projection formula nije ispravna, što možemo uočiti kada je uporedimo sa inverznom Radonovom formulom (4.4). Ona ne daje zadovoljavajuće rezultate pri rekonstrukciji slike, što se ogleda i na primeru rekonstrukcije crno bele slike. Iako je objekat prepoznatljiv, primenom back-projection formule, on je ipak mutan (slika 4.5).

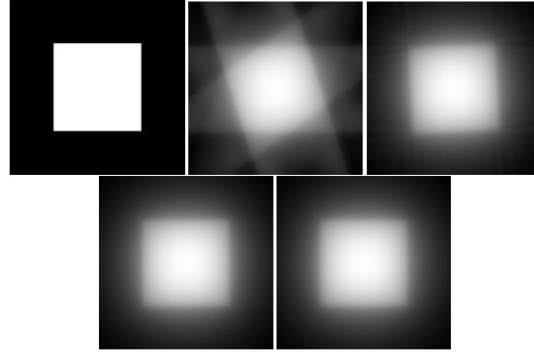


Slika 4.5: Primena back-projection formule

Koliko god pravaca budemo koristili pri rekonstrukciji slike, uvek ćemo dobijati kao rezultat nedovoljno jasnu sliku zbog šuma i buke. Vidi sliku



(4.6). U inverznoj formuli Radonove transformacije (4.4),  $|r|$  ima ulogu da nisko frekventne komponente potisne, dok su visoko frekventne komponente sa  $|r|$  pojačane. Otuda nam je jasna nekorektnost back-projection formule, kao i potreba za *filtriranom back-projection formulom (filtered back-projection formulom)*.



Slika 4.6: Back-projection formula primenjena na kvadratu u 5, 25, 100 i 1000 pravaca

Tumačićemo Radonovu inverznu formulu kao proces koji se sastoji iz dva koraka:

1. Filter, koji se primenjuje na Radonovu transformaciju i deluje samo na afini parametar, je radijalni integral. Kao rezultat primene filtera dobija se

$$\mathcal{GR}f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) e^{irt} |r| dr \quad (4.6)$$

2. Ugaoni integral se opisuje kao back projection primenjen na filtriranu Radonovu transformaciju. Funkcija  $f$  je predstavljena na sledeći način

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\mathcal{GR})f(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega$$

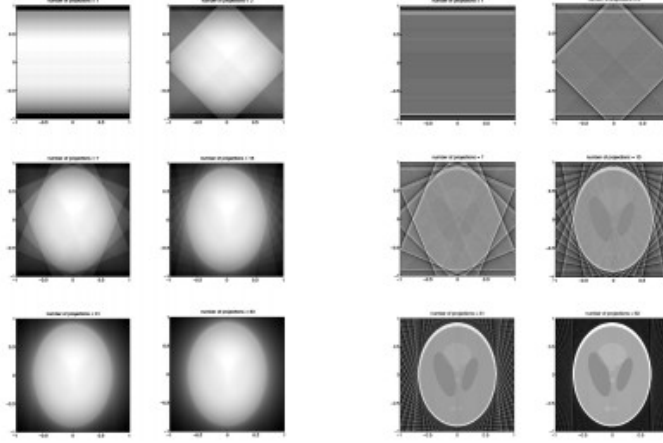
Oдавde lako zaključujemo zašto inverznu Radonovu transformaciju često nazivamo *filtered back-projecton formula*.

Drugi korak je jednostavan, dok prvi korak zahteva više pažnje. Izuzećemo  $|r|$ , pa će funkcija  $f$ , kao rezultat primene jednodimenzionalne Furijeove transformacije na  $\mathcal{R}f$ , imati oblik

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{ir\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \hat{f}(r\boldsymbol{\omega}) dr d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Ova formula je u stvari back-projection formula.

Na sledećoj slici uočavamo razliku između back-projection formule, primenjene na slici levo, i filtrirane back-projection formule, primenjene na slici desno, na primeru matematičkog fantoma.



Slika 4.7: Razlika između back-projection formule i filtrirane back-projection formule

Podsetimo se da važi  $\widehat{\partial_t g}(\xi) = (i\xi)\hat{g}(\xi)$ . Ako bi u inverznoj Radonovoj formuli umesto  $|r|$  bilo  $r$ , tada bi važilo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \partial_t \mathcal{R}f(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega},$$

što predstavlja back-projection formulu izvoda Radonove transformacije po  $t$ . Ako je  $f$  realna funkcija, onda je ova funkcija čisto imaginarna. Diferenciranje je lokalna operacija, pa nije teško ovo razumeti. Da bismo videli razliku između  $r$  i  $|r|$ , uvešćemo *Hilbertovu transformaciju*.

## 4.4 Hilbertova transformacija

Podsetimo, signum funkcija je definisana sledeći način:

$$\operatorname{sgn}(r) = \begin{cases} 1 & ; r > 0 \\ 0 & ; r = 0 \\ -1 & ; r < 0 \end{cases}$$

**Definicija 4.4.1.** *Neka je funkcija  $g$   $L^2$ - funkcija definisana na  $\mathbb{R}$ . **Hilbertova transformacija funkcije  $g$  je***

$$\mathcal{H}g = \mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sgn}(\hat{g})).$$

*Ako je  $\hat{g}$  apsolutno integrabilna, tada je*

$$\mathcal{H}g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(r) \operatorname{sgn}(r) e^{itr} dr.$$

Zapažamo da Hilbertova transformacija funkcije  $g$  je funkcija čija je Furijeova transformacija funkcija  $\operatorname{sgn}(\hat{g})$ . Hilbertova transformacija nije lokalna operacija, što je slučaj sa diferenciranjem. Da bismo izračunali  $\mathcal{H}g(t_0)$ , gde je  $t_0$  data tačka, moramo znati vrednost  $g(t)$  za svako  $t$ .

**Primer 4.4.1.** *Neka je*

$$f(x) = \frac{\sin x}{\pi x}.$$

Furijeova transformacija funkcije  $f$  je

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-1,1]}(\xi) = \begin{cases} 1 & ; |\xi| \leq 1 \\ 0 & ; |\xi| > 1 \end{cases}$$

Hilbertova transformacija funkcije  $f$  je

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\frac{\sin x}{\pi x}\right) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^1 e^{ix\xi} dx - \int_{-1}^0 e^{ix\xi} dx \right] \\ &= i \frac{1 - \cos x}{\pi x} \end{aligned}$$

Navešćemo neke aproksimacije Hilbertove transformacije.

**Teorema 4.4.1.** *Neka je  $\{\phi_\varepsilon\}$  uniformno ograničena familija lokalno integrabilnih funkcija koje tačkasto kovergiraju ka  $\text{sgn}(\xi)$  kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ako je funkcija  $f$  kvadratno integrabilna, tada je njena Hilbertova transformacija data limesom u srednjem (konvergencija po  $L^2$ -normi)*

$$\mathcal{H}f(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\phi_\varepsilon \hat{f}).$$

Ako je  $f$  dovoljno glatka, da  $\hat{f}$  iščezava, tada  $\mathcal{H}f(t)$  možemo predstaviti na sledeći način

$$\mathcal{H}f(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ir\xi} d\xi$$

Za  $\varepsilon > 0$ , možemo definisati aproksimativnu Hilbertovu transformaciju kao

$$\mathcal{H}_\varepsilon f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{h}_\varepsilon) = f * h_\varepsilon,$$

gde je

$$h_\varepsilon = \frac{i}{\pi} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}$$

inverzna Furijeova transformacija funkcije  $\hat{h}_\varepsilon$ , a  $\hat{h}_\varepsilon$  je određena sa

$$\phi_\varepsilon(\xi) = \hat{h}_\varepsilon(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|},$$

za svako  $\varepsilon > 0$ . Ovako određena familija funkcija  $\phi_\varepsilon$  zadovoljava uslove prethodne teoreme.

**Teorema 4.4.2.** *Neka funkcija  $f$  ima ograničen nosač i neka za  $\alpha > 0$  zadovoljava Helderov uslov sa konstantom  $\alpha$ , tj.*

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq M.$$

Tada važi

$$\mathcal{H}(f) = \frac{i}{\pi} P.V.(f * \frac{1}{s}).$$

**Posledica 4.4.1.** *Neka je  $f$  neprekidna funkcija koja zadovoljava Helderov uslov sa konstantom  $\alpha$  i ima nosač u  $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$ . Tada je*

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{f(t-s) - f(t)}{s} ds, \quad \text{za } t \in \left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right].$$

## 4.5 Aproksimativni inverzi Radonove transformacije

Računanjem Hilbertove transformacije možemo ispravno naći inverznu Radonovu transformaciju. Izmereni podaci su predstavljeni funkcijom  $g_m$  na prostoru pravih. Inverzna Radonova transformacija zahteva da se nađu  $\partial_t g_m$ , međutim, dobijeni podaci često nisu diferencijabilni. Ako funkcija  $g_m$  ima operator diferenciranja reda  $\frac{1}{2}$ , ona ne predstavlja Radonovu transformaciju  $L^2$ - funkcije, što znamo iz Parsevalove formule, pa je ovo razlog zašto želimo naći aproksimativnu inverznu Radonovu formulu. Imajmo u vidu da je svaka aproksimacija Hilbertove transformacije vodi do aproksimacije inverzne Radonove transformacije.

Na osnovu osobine konvolucije za parcijalne izvode važi

$$\partial_x(f * g) = \partial_x f * g = f * \partial_x g$$

Podsetimo se da je  $\mathcal{H}_\varepsilon f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{h}_\varepsilon) = f * h_\varepsilon$ , pa je aproksimativna inverzna Radonova formula data sa

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \mathcal{H}_\varepsilon(\partial_t \mathcal{R}f)(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle), \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi h_\varepsilon * (\partial_t \mathcal{R}f)(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle), \boldsymbol{\omega} \, d\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Koristeći da je  $h_\varepsilon = \frac{i}{\pi} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}$  i  $\partial_t f * g = f * \partial_t g$ , dalje sledi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}f(s, \boldsymbol{\omega}) \partial_t h_\varepsilon(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle - s) \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \left[ \mathcal{R}f(s, \boldsymbol{\omega}) \frac{\varepsilon^2 - (t - s)^2}{(\varepsilon^2 + (t - s)^2)^2} \, ds \Big|_{t=\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \right] d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Neka je  $\hat{\psi}(r)$  ograničena, parna funkcija za koju važi  $\hat{\psi}(0) = 1$  i  $\hat{\psi}(r) = 0$  za  $|r| > W$ . Za  $l$  funkcija na  $\mathbb{R} \times S^1$  definiše

$$\mathcal{G}_\psi(l)(t, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{l}(r, \boldsymbol{\omega}) e^{irt} \hat{\psi}(r) |r| \, dr$$

i

$$\mathcal{R}_\psi^{-1} l(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{G}_\psi(l)(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle, \boldsymbol{\omega}) \, d\boldsymbol{\omega}.$$

Označimo  $f_\psi = \mathcal{R}_\psi^{-1} \circ \mathcal{R}f$ . Na osnovu teoreme (4.2.2), sledi

$$\mathcal{R}(f * g)(t, \boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}f(t - \tau, \boldsymbol{\omega}) \mathcal{R}g(\tau, \boldsymbol{\omega}) \, d\tau$$

Koristeći teoremu o konvoluciji za Furijeovu transformaciju, dobijamo

$$\widetilde{\mathcal{R}f * g}(r, \boldsymbol{\omega}) = \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \boldsymbol{\omega}) \widetilde{\mathcal{R}g}(r, \boldsymbol{\omega}).$$

Pretpostavimo da je  $g$  radijalna funkcija takva da  $\mathcal{R}g$  ne zavisi od  $\omega$ . Filtrirana back-projection formula za  $f * g$  daje

$$f * g = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \widetilde{\mathcal{R}f}(r, \omega) \widetilde{\mathcal{R}g}(r) e^{ir\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} |r| dr d\omega$$

Kada ovaj rezultat uporedimo sa definicijom funkcije  $f_\psi$ , zaključujemo da ukoliko možemo naći radijalnu funkciju,  $k_\psi$ , definisanu na  $\mathbb{R}^2$ , da važi

$$\mathcal{R}(k_\psi)(t, \omega) = \psi(t),$$

onda

$$f_\psi(\mathbf{x}) = k_\psi * f(\mathbf{x})$$

Egzistencija funkcije  $k_\psi$  oblika  $k_\psi(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}$  je posledica naredne teoreme

**Teorema 4.5.1.** *Neka  $\psi$ , dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na  $\mathbb{R}$ , zadovoljava sledeće uslove:*

- $\psi(t) = \psi(-t)$
- Postoji konstanta  $M$  da  $|\psi(t)| \leq M \wedge |\psi'(t)| \leq M$
- $\psi$  i  $\psi'$  su apsolutno integrabilne

Tada postoji ograničena, neprekidna funkcija  $g(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x}\|)$  u prirodnom domenu Radonove transformacije da je  $\mathcal{R}g = \psi$ .

Sada možemo rezultat predstaviti teoremom.

**Teorema 4.5.2.** *Neka je funkcija  $\hat{\psi}$  ograničena, parna funkcija za koju važi  $\hat{\psi}(0) = 1$  i  $\hat{\psi}(r) = 0$  za  $|r| > W$ . Neka je  $\psi$  apsolutno integrabilna funkcija. Tada je*

$$f_\psi(\mathbf{x}) = k_\psi * f(\mathbf{x}),$$

gde je  $k_\psi(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}$ .

Vratimo se na trenutak medicini. Kada funkciju  $f$  zamenimo funkcijom  $f_\psi$ , dobicemo zamućeniju sliku. Da bismo umanjili novonastalu zamućenost, možemo povećati nosač funkcije  $\hat{\psi}$ , pri čemu će funkcije  $\psi$  i  $k_\psi$  biti oštrije izražene. Ovaj postupak nas ipak dovodi do druge poteškoće—šum u slici će biti intenzivniji.

## 4.6 Radonova transformacija podataka sa ograničenim nosačem

U medicini je pažnja usmerena na podatke koji imaju ograničen nosač, pa ćemo pretpostaviti da je funkcija  $f$  jednaka nuli izvan diska poluprečnika  $R$ . Tada je  $\mathcal{R}f(t, \omega) = 0$  za  $|t| > R$ . Za nenegativan ceo broj  $n$  važi

$$M_n(f)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle)^n d\mathbf{x} \quad (4.7)$$

Ukoliko  $f$  ima ograničen nosač, onda su ovi integrali dobro definisani za bilo koje  $n \in \mathbb{N}_0$ . Za dovoljno veliko  $n$  ovi integrali možda nemaju smisla ukoliko vrednost funkcije  $f$  nije jednaka nuli van diska sa konačnim poluprečnikom. Stavivši  $\mathbf{x} = t\omega + s\hat{\omega}$ , napisaćemo ovaj integral u smislu  $\mathcal{R}f$

$$\begin{aligned} M_n(f)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega + s\hat{\omega})t^n ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega)t^n dt. \end{aligned}$$

Funkcija  $M_n(f)(\omega)$  se naziva *n-ti moment Radonove transformacije funkcije f*. Integral je dobro definisan ako je  $\mathcal{R}f$  jednaka nuli za  $|t| > R$ . Izrazićemo  $\omega$  kao funkciju od  $\theta$

$$\omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

Koristeći binomnu teoremu, dobijamo



$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}(\theta))^n &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^n \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x \cos \theta)^j (y \sin \theta)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cos^j \theta \sin^{n-j} \theta x^j y^{n-j}
\end{aligned}$$

Vratimo se sada (4.7). Dobićemo trigonometrijski polinom stepena  $n$

$$\begin{aligned}
M_n(f)(\theta) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cos^j \theta \sin^{n-j} \theta \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) x^j y^{n-j} dx dy \\
&= \sum_{j=0}^n a_{nj} \sin^j \theta \cos^{n-j} \theta.
\end{aligned}$$

gde su

$$a_{nj} = \binom{n}{j} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) x^j y^{n-j} dx dy$$

Ako funkcija ima ograničen nosač, tada je  $M_n(f)(\theta)$  trigonometrijski polinom stepena  $n$ .

**Teorema 4.6.1.** *Neka funkcija  $f$  ima ograničen nosač. Tada:*

- $\mathcal{R}f$  ima ograničen nosač
- Za sve nenegativne cele brojeve  $n$ , postoje konstante  $\{a_{n0}, a_{n1} \dots a_{nn}\}$  da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega}(\theta)) t^n dt = \sum_{j=0}^n a_{nj} \sin^j \theta \cos^{n-j} \theta$$

Pitamo se: Da li postoji funkcija  $f$  definisana na domenu Radonove transformacije koja je jednaka nuli van diska poluprečnika  $R$  da je  $h = \mathcal{R}f$ , gde funkcija  $h$  zadovoljava sledeće :

- $h(t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^1$
- $h(t, \omega) = h(-t, -\omega)$
- $h(t, \omega) = 0$  za  $|t| > R$ .
- $m_n(h)(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega(\theta)) t^n dt$  je trigonometrijski polinom stepena  $n$ ,  
gde je  $n$  nenegativan ceo broj.
- $h(t, \omega)$  je dovoljno glatka funkcija.

Helgason<sup>11</sup> i Ludvig<sup>12</sup> su dali potvrđan odgovor na postavljeno pitanje. Alen Kormak je takođe proučavao prethodno opisan problem.

## 4.7 Neprekidnost Radonove transformacije i inverzne Radonove transformacije

Izmerene podatke u CT uređaju predstavljamo kao Radonovu transformaciju deo po deo neprekidne funkcije  $f$  sa ograničenim nosačem. Problem nastaje jer svi izmereni podaci sadrže buku nastalu usled čak i malog pomeraja pacijenta prilikom snimanja (bilo da je to unutrašnji pomeraj: disanje, kucanje srca, ... ili spoljašnji pomeraj), pa podaci mogu biti neverodostojni. U nameri da ovaj problem bude prevaziđen, preslikavanje  $f \mapsto \mathcal{R}f$  bi trebalo biti neprekidno, jer u suprotnom promene koje se dešavaju tokom pregleda CT uređajem imaju veći uticaj na merenja koja se vrše. Osetljivost  $\mathcal{R}f$  kvantifikuju procene neprekidnosti preslikavanja  $f \mapsto \mathcal{R}f$  na promene koje se dešavaju unutar CT uređaja tokom snimanja. Ukoliko se zapitamo koliko je rekonstrukcioni metod dobijanja slike osetljiv na greške, u stvari mi govorimo o svojstvima neprekidnosti inverzne Radonove transformacije. Procene neprekidnosti inverznog preslikavanja,  $h \mapsto \mathcal{R}^{-1}h$ , kvantifikuju

---

<sup>11</sup>islandski matematičar rođen 1927. godine

<sup>12</sup>nemački matematičar, 1886-1982

uticaj grešaka koje su prisutne u izmerenim podacima na kvalitet rekonstrukcione slike. Procene za  $\mathcal{R}^{-1}$  su veoma bitne u procesu rekonstruisanja slike.

U medicini, Radonova transformacija predstavlja idealizaciju. Uopšteno, funkcija  $f$  je ograničena, tj.  $f \leq M$ , i jednaka je nuli van diska poluprečnika  $L$  i verovatno prekidna. Gruba procena Radonove transformacije funkcije  $f$  je

$$|\mathcal{R}f(t, \omega)| = \left| \int_{\ell_{t, \omega}} f ds \right| \leq 2ML,$$

gde  $2L$  predstavlja gornju granicu dužina preseka  $\ell_{t, \omega}$  sa nosačem funkcije  $f$ .

Neka je

$$\|\mathcal{R}f(t, \omega)\|_{1, \infty} = \max_{\omega \in S^1} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f(t, \omega)| dt$$

i

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

Podsetimo, funkcija za koju važi  $\|f\|_1 < \infty$  je *apsolutno integrabilna* ili  $L^1$  *funkcija*. Skup ovakvih funkcija označavamo sa  $L^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Teorema 4.7.1.** *Neka je funkcija  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  definisana na prirodnom domenu Radonove transformacije. Tada je*

$$\|\mathcal{R}f\|_{1, \infty} \leq \|f\|_1$$

Radonova transformacija je linearna, pa za funkcije  $f$  i  $g$ , koje su definisane na prirodnom domenu Radonove transformacije, važi

$$\|\mathcal{R}f - \mathcal{R}g\|_{1, \infty} \leq \|f - g\|_1$$

Snimanje CT uređajem zahteva određeno vreme, pa veoma lako može doći do toga da se pacijent pomeri. Neka je  $f_{\boldsymbol{\tau}}$ , funkcija  $f$  translirana za vektor  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ , data sa

$$f_{\boldsymbol{\tau}}(x, y) = f(x - \tau_1, y - \tau_2)$$

Ukoliko pacijent promeni svoj položaj i veoma malo tokom snimanja, izmerene podatke ćemo bolje predstaviti  $\{\mathcal{R}f_{\tau(\omega)}(t, \omega)\}$ , gde  $\{\tau(\omega)\}$  predstavljaju vektore u  $\mathbb{R}^2$  koji opisuju poziciju pacijenta kao funkcije od  $\omega$ . Važi

$$\|\mathcal{R}f - \mathcal{R}f_{\tau}\|_{1,\infty} \leq \max_{\omega \in S^1} \|f - f_{\tau(\omega)}\|_1$$

Ukoliko pomeraji pacijenta nisu veliki i funkcija  $f$  ne varira brzo, merenja  $\{\mathcal{R}f_{\tau(\omega)}(t, \omega)\}$  se ne razlikuju mnogo od  $\{\mathcal{R}f(t, \omega)\}$ .

Funkcije sa ograničenim nosačem dopuštaju bolje  $L^2$  procene.

**Teorema 4.7.2.** *Neka funkcija  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  iščezava van diska poluprečnika  $L$ . Tada, za  $\forall \omega$  važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt \leq 2L \|f\|_{L^2}^2$$

*Dokaz.* Funkcija  $f$  iščezava van diska poluprečnika  $L$ , pa je

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{-L}^L f(t\omega + s\hat{\omega}) ds$$

Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt &= \int_{-L}^L \left| \int_{-L}^L f(t\omega + s\hat{\omega}) ds \right|^2 dt \\ &\leq 2L \int_{-L}^L \int_{-L}^L |f(t\omega + s\hat{\omega})|^2 ds dt \end{aligned}$$

Teorema nam pokazuje da ukoliko  $f$  iščezava van ograničenog skupa, mi ne nadgledamo samo ukupne  $L^2$  norme  $\mathcal{R}f$ , već i  $L^2$  norme po svakom pravcu  $\omega$  posebno.

**Teorema 4.7.3.** *Neka funkcija  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  iščezava van diska poluprečnika  $L$ . Tada, za  $\forall \boldsymbol{\omega}$  važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})|^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} dt \leq 2\|f\|_{L^2}^2$$

*Dokaz.* Posmatrajmo  $f(x, y) = \chi_{[0, L^2]}(x^2 + y^2)f(x, y)$   
Na osnovu Koši Švarcove nejednakosti,  $\forall |t| \leq L$ , važi

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})|^2 &= \left| \int_{-L}^L f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}}) \chi_{[0, L^2]}(s^2 + t^2) ds \right|^2 \\ &\leq 2 \int_{-L}^L |f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}})|^2 ds \int_0^{\sqrt{L^2 - t^2}} ds \\ &= 2\sqrt{L^2 - t^2} \int_{-L}^L |f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}})|^2 ds \end{aligned}$$

Dalje sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathcal{R}f(t, \boldsymbol{\omega})|^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} dt \leq \int_{-L}^L \frac{2\sqrt{L^2 - t^2}}{\sqrt{L^2 - t^2}} \int_{-L}^L |f(t\boldsymbol{\omega} + s\hat{\boldsymbol{\omega}})|^2 ds dt = 2\|f\|_{L^2}^2$$

## 4.8 n-dimenzionalna Radonova transformacija

Afine hiperravne u prostoru  $\mathbb{R}^n$  predstaviceмо na sledeći način

$$\ell_{t, \boldsymbol{\omega}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle = t\},$$

gde je  $t \in \mathbb{R}$  i  $\boldsymbol{\omega}$  jedinični vektor u  $\mathbb{R}^n$ . Kao i ranije, i sada važi da je

$$\ell_{t, \boldsymbol{\omega}} = \ell_{-t, -\boldsymbol{\omega}}.$$

Izbor vektora  $\omega$  predstavlja orijentaciju u hiperravni.

Posmatrajmo vektore  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$  za koje važi  $\langle \omega, e_j \rangle = 0$  i  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  za  $i, j = 1, \dots, n-1$ .

$\langle \omega, e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  je ortonomirana baza u  $\mathbb{R}^n$ . Definišimo nove ortogonalne koordinate,  $(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ , na  $\mathbb{R}^n$  na sledeći način

$$x = t\omega + \sum_{j=1}^{n-1} s_j e_j.$$

**Definicija 4.8.1.** *n-dimenzionalna Radonova formula je definisana na sledeći način*

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{\ell_{t, \omega}} f d\sigma_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(t\omega + \sum s_j e_j\right) ds_1 \dots ds_{n-1}.$$

Kao i ranije,  $n$ -dimenzionalna Radonova transformacija je parna funkcija, tj.  $\mathcal{R}f(t, \omega) = \mathcal{R}f(-t, -\omega)$ .

**Teorema 4.8.1 (Centralna „slice” teorema).** *Ako je  $f$  apsolutno integrabilna funkcija na  $\mathbb{R}^n$ , tada je*

$$\widetilde{\mathcal{R}}f(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-irt} dt = \hat{f}(r\omega).$$

**Teorema 4.8.2 (Inverzna Radonova formula).** *Neka je  $f$  glatka funkcija sa ograničenim nosačem u  $\mathbb{R}^n$ . Tada je*

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{R}}f(r, \omega) r^{n-1} e^{ir\langle \omega, x \rangle} dr d\omega. \quad (4.8)$$

Ukoliko je dimenzija prostora neparna, tj. ako je  $n = 2k + 1$ , tada  $r$  integral u (4.8) možemo izračunati kao

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{R}}f(r, \omega) r^{n-1} e^{ir\langle \omega, x \rangle} dr = (-1)^k \partial_t^{2k} \mathcal{R}f(t, \langle \omega, x \rangle),$$

pa uz (4.8) dobijamo

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{(-1)^k}{2(2\pi)^{2k}} \int_{S^{n-1}} (\partial_t^{2k} \mathcal{R}f)(\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x} \rangle, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}.$$

Laplasov operator na  $\mathbb{R}^n$  je definisan sa  $\Delta_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 f$ . Za koordinate  $(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ , takođe važi i  $\Delta_{\mathbb{R}^n} f = \partial_t^2 f + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{s_j}^2 f$ . Sledeća teorema nam daje vezu između  $\mathcal{R}(\Delta_{\mathbb{R}^n} f)$  i  $\mathcal{R}f$ .

**Teorema 4.8.3.** *Neka je funkcija  $f$  dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija sa ograničenim nosačem na  $\mathbb{R}^n$ . Tada važi*

$$\mathcal{R}(\Delta_{\mathbb{R}^n} f) = \partial_t^2 \mathcal{R}f.$$

# Literatura

- [1] Charles L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of Medical imaging*. University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, 2007.
- [2] Marija Frković, Klaudija Višković, *Radiološka oprema*, Zagreb, 2011.
- [3] Prof. dr Momčilo Babić, *Medicinski leksikon*, 1999.
- [4] Rade R. Babić, *Tesla o X-zracima*, Vojnosanitetski pregled 63(11), 2006, 979-982.
- [5] Timothy F. Feeman, *The Mathematics of Medical Imaging, Beginner's Guide*, Springer, 2010.
- [6] Richard B. Gunderman, *Osnovi radiologije, Klinička slika • Patofiziologija • Imidžing*, Data Status, Beograd, 2016.
- [7] Joerg Wilhelm Oestmann, Christoph Wald, Janne Crossin, *Osnovi kliničke radiologije, Od slike do dijagnoze*, Data Status, Beograd, 2008.
- [8] [www.bib.irb.hr](http://www.bib.irb.hr).
- [9] <https://digitalcommons.colby.edu>
- [10] <https://www.wikipedia.org>
- [11] <https://ivamilosevic5.wordpress.com>
- [12] <https://my.clevelandclinic.org>
- [13] <https://velikirecnik.com>
- [14] <https://www.sk.rs>



- [15] <http://www.desy.de>
- [16] <https://www.opsteobrazovanje.in.rs>
- [17] <https://fizikaokonas.wordpress.com>
- [18] <https://www.fer.unizg.hr>

## Biografija

Svetlana Stanković je rođena 17.06.1992. godine u Nišu. Osnovnu školu „Dobrosav Jovanović Stanko” (danas „Stefan Nemanja”) u Nišu, kao i gimnaziju „Bora Stanković”, prirodno-matematički smer, u Nišu, završila je odličnim uspehom. Osnovne studije, odsek matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu upisala je 2011. godine i završila 2015. godine. Iste godine upisuje master studije na smeru Matematički modeli u fizici koje završava 2019. godine.