UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

# Neke primene Furijeovih redova

MASTER RAD

Autor:
Marija Stojilković

Mentor:
Prof. dr Nebojša Dinčić

Niš, 2020.

*Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr Nebojši Dinčiću, na pomoći i konstruktivnim sugestijama tokom pisanja ove master teze.*

*Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici i dragim ljudima koji su mi uvek bili najveća podrška i puni razumevanja tokom studiranja.*

*Posebnu zahvalnost dugujem svojoj sestri i vereniku na bezuslovnoj ljubavi i veri u mene.*

# Predgovor

*„Matematika – to je jezik kojim govore sve prirodne nauke. Ne postoji nijedna matematička oblast, ma kako ona apstraktna bila, koja se ne bi mogla primeniti na pojave realnog sveta“.*
***Nikolaj Lobačevski***

Furijeov red je dobio naziv u čast francuskog matematičara i fizičara Žozefa Furije (1768-1830) koji je dao važan doprinos proučavanju trigonometrijskih redova, nakon početnih proučavanja od strane Leonarda Ojlera, Žana le Ron Dalambera i Danijela Bernulija. Ovu tehniku primenio je kako bi pronašao rešenje toplotne jednačine, a svoje početne rezultate objavio je 1807. i 1811. godine, dok je *Théorie analytique de la chaleur* objavio 1822. godine.

Iako je prvobitna motivacija bila da se reši toplotna jednačina, kasnije je postalo očito da se ista tehnika može primeniti i na širok spektar matematičkih i fizičkih problema. Osnovne rezultate je lako razumeti koristeći se modernom teorijom. Furijeovi redovi imaju mnogo primena u elektrotehnici, analizi vibracija, akustici, optici, obradi signala, obradi slika, kvantnoj mehanici i tako dalje. Ako sudimo o važnosti neke oblasti matematike po tome koliko je ona primenljiva, Furijeova analiza se kotira veoma visoko.

Kao što i sama tema govori, mi ćemo se u ovom radu osvrnuti na neke od primena Furijeovih redova.

U prve dve glave govorimo o samom nastanku Furijeovih redova, a takođe ćemo spomenuti neke od bitnijih teorema u teoriji Furijeovih redova u cilju što boljeg razumevanja njene primene koja sledi. Dalje, možemo pročitati o problemu sa kojim se susrela princeza Didona, Vajlovom kriterijumu jednakoraspodeljenosti, šta je to Vajerštrasova funkcija i kako je Riman doprineo njenom nastanku. Na kraju možemo saznati nešto više o krivama konstantne širine, konkretnije o Reloovom trouglu, obliku koji se provlači kroz mnoštvo sfera interesovanja, ali je prvi put matematički analiziran od strane Franca Reloa.

# Sadržaj

# 1 Uvod

## 1.1 Vektorski prostori

**Definicija 1.1.** *Neka je $K$ dato polje. Pod vektorskim prostorom nad poljem $K$ podrazumeva se uređena četvorka $(V, K, +, \cdot)$, gde je $V$ neprazan skup i $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ preslikavanja takva da za proizvoljne elemente $x$, $y$, $z \in V$ i proizvoljne $\alpha, \beta \in K$ važi:*

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\big(\exists 0 \in V\big)\big(\forall x \in V\big) \therefore x + 0 = x$
4. $\big(\forall x \in V\big)\big(\exists -x \in V\big) \therefore x + (-x) = 0$
5. $1 \cdot x = x$
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Elementi iz $V$ se nazivaju vektori, dok se elementi iz polja $K$ nazivaju skalari. Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, odnosno nad poljem $\mathbb{C}$, naziva se realan odnosno kompleksan vektorski prostor.

Primeri često korišćenih vektorskih prostora su:

1. Trivijalan vektorski prostor gde je $K$ ma koje polje, a $V$ se sastoji od jednog elementa tj. od 0, gde je jedino moguće sabiranje i množenje vektora skalarom na sledeći način: 0+0=0 i $\alpha \cdot 0 = 0$, $\forall \alpha \in K$.
2. Neka je $K$ polje, $n \in \mathbb{N}$ i $K^n$ skup svih uređenih n-torki iz $K$: $K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in K\}$. Za $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$ i $\alpha \in K$ definišimo operacije: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ i $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.
   Dakle, $K^n$ je n-dimenzioni vektorski prostor nad poljem $K$. Specijalno važni prostori su $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.
3. Neka je $X$ neprazan skup i $V$ vektorski prostor nad poljem $K$. Skup svih preslikavanja iz $X$ u $V$ sa oznakom $V^X$ je vektorski prostor nad $K$, gde je za proizvoljne $f, g \in V^X$ i $\alpha \in K$ definisano sledeće: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
4. Skup $\mathcal{C}[a, b]$ svih neprekidnih realnoznačnih funkcija definisanih na segmentu $[a, b]$ realne prave je realan vektorski prostor, gde se linearne operacije definišu kao pod 3. itd.

**Teorema 1.1.**

1. *Nula-vektor je jedinstven.*
2. *Za svaki $x \in V$ suprotan vektor -x je jedinstven.*
3. *Za svaki $x \in V$ i svaki $\alpha \in K$ je $0x = 0$ i $\alpha 0 = 0$.*
4. *Ako je $\alpha x = 0$, onda je $\alpha = 0$ ili $x = 0$.*
5. *Za svaki $x \in V$ i svaki $\alpha \in K$ je $(-1)x = -x$ i $(-\alpha)x = -(\alpha x)$.*

## 1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Kada kažemo konačan sistem od $n$ vektora datog vektorskog prostora misli se na proizvoljno preslikavanje skupa $\{1, 2, ..., n\}$ u prostor $V$, pa shodno tome sistem zapisujemo kao $x_1, x_2, ..., x_n$. Pod beskonačnim sistemom $\{x_a : a \in A\}$ prostora $V$ podrazumeva se preslikavanje indeksnog skupa $A$ u $V$, odnosno podskup skupa $V$ je indeksiran elementima skupa $A$, pri čemu se dopušta da se isti vektor iz tog podskupa indeksira različitim elementima iz $A$.

**Definicija 1.2.** *Neka je $x_1, x_2, ..., x_n$ konačan sistem vektora vektorskog prostora $V$ nad poljem $K$ i neka je $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sistem skalara iz $K$ iste dužine. Vektor $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ naziva se linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ sa skalarima $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.*
*Ako je pak $\{x_a : a \in A\}$ beskonačan sistem vektora iz $V$ i $\{\alpha_a : a \in A\}$ odgovarajući sistem skalara, onda je linearna kombinacija ovog sistema sa skalarima $\alpha_a$ vektor $y = \sum\{\alpha_a x_a : a \in A\}$, gde ovaj zapis znači da postoji konačan $S \subset A$ takav da je $\alpha_a = 0$, $a \in A \setminus S$ i $y = \sum\{\alpha_a x_a : a \in S\}$.*

**Definicija 1.3.** *Konačan sistem vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorskog prostora $V$ naziva se linearno zavisan ako je bar jedan njegov vektor jednak linearnoj kombinaciji ostalih; u suprotnom je linearno nezavisan. Prazan sistem vektora je po definiciji linearno nezavisan.*
*Beskonačan sistem vektora iz $V$ je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan; u suprotnom je linearno zavisan.*

Navedimo nekoliko zapažanja bez dokaza.

**Teorema 1.2.** *Neka je dat konačan ili beskonačan sistem vektora prostora $V$. Tada:*

1. *Ako sistem sadrži nula-vektor, onda je on linearno zavisan.*
2. *Ako sistem sadrži dva ista vektora, onda je linearno zavisan.*
3. *Ako je neki podsistem datog sistema linearno zavisan, onda je i ceo sistem linearno zavisan.*
4. *Ako je sistem linearno nezavisan, onda je svaki njegov podsistem linearno nezavisan.*

**Teorema 1.3.** *Sistem vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ je linearno nezavisan akko važi*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

**Teorema 1.4.** *Sistem vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ prostora $V$ je linearno zavisan akko je bar jedan njegov član linearna kombinacija ostalih članova sistema.*

**Teorema 1.5.** *Sistem vektora $x_1, x_2, ..., x_n$ prostora $V$ je linearno nezavisan akko proizvoljan vektor $y \in V$ koji se linearno izražava pomoću vektora prethodnog sistema ima jedinstveno takvo predstavljanje.*

## 1.3 Baza vektorskog prostora

**Definicija 1.4.** *Konačan ili beskonačan sistem vektora vektorskog prostora $V$ je **potpun** ako se svaki vektor prostora $V$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora tog sistema.*

**Definicija 1.5.** *Svaki potpun linearno nezavisan sistem vektora prostora $V$ naziva se **baza** vektorskog prostora $V$. Kažemo da je prostor konačnodimenzionalan ako ima bar jednu bazu sastavljenu od konačno mnogo vektora, u suprotnom je beskonačnodimenzionalan.*

**Teorema 1.6.** *Svaki konačan potpun sistem vektora datog prostora $V$ sadrži bazu tog prostora.*

**Teorema 1.7.** *Svaki konačan ili beskonačan linearno nezavisan sistem vektora prostora $V$ se može dopuniti do baze tog prostora, odnosno svaki vektorski prostor ima bazu.*

**Teorema 1.8.** *Neka je $x_1, x_2, ..., x_n$ proizvoljan sistem vektora prostora $V$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $x_1, x_2, ..., x_n$ *je baza za* $V$.
2. $x_1, x_2, ..., x_n$ *je maksimalan linearno nezavisan sistem u* $V$.
3. $x_1, x_2, ..., x_n$ *je minimalan potpun sistem u* $V$*; drugim rečima, ako se izostavi ma koji vektor, onda sistem prestaje da bude potpun.*

Izaberimo proizvoljnu fiksiranu bazu $e_1, e_2, ..., e_n$ i neka je $x \in V$ proizvoljan vektor. Na osnovu teoreme 1.5 $x$ se može predstaviti na jedinstven način:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

**Napomena 1.1.** *U primeru prostora $K^n$ nad poljem $K$, jednu bazu obrazuju vektori $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, $i = \overline{1, n}$, gde je $i$-ta komponenta 1, a sve ostalo su 0. Ova baza prostora se još naziva i* ***standardna*** *ili* ***kanonska baza****. Ona je najprikladnija za rad jer su koordinate vektora iz $K^n$ u odnosu na ovu bazu upravo njegove komponente.*

## 1.4 Normirani, metrički i unitarni prostori

**Definicija 1.6.** *Pod skalarnim proizvodom geometrijskih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se podrazumeva realni broj definisan sa:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

*Dalje, ako je jedan od vektora nula-vektor, onda je ovaj proizvod jednak nuli. Isto tako zaključujemo da ako su ova dva vektora jednaka imamo $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$, odakle sledi $\|\vec{a}\| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{\frac{1}{2}}$.*

**Teorema 1.9.** *Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su normalni akko je njihov skalarni proizvod jednak 0.*

**Napomena 1.2.** *Nula-vektor je po definiciji normalan na svaki vektor $\vec{x}$.*

Uopštimo sada prirodu geometrijskih vektora.

**Definicija 1.7.** *Neka je $V$ realan vektorski prostor. Pod skalarnim proizvodom na $V$ se podrazumeva proizvoljno preslikavanje $\langle \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ takvo da za proizvoljne $x, y, z \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važe sledeća svojstva:*

1. $\langle x, x \rangle > 0, \ \forall x \neq 0$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Par $(V, \langle \cdot \rangle)$, gde je $V$ realan vektorski prostor, a $\langle \cdot \rangle$ skalarni proizvod na $V$, naziva se **euklidski**[1] vektorski prostor.

[1] Euklid iz Aleksandrije (300. p.n.e. - 4. vek p.n.e.)- antički matematičar (često se naziva ocem geometrije)

**Primer 1.1.**

1. *Preslikavanje* $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definisano kao:*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

   *gde su* $x = (x_1, ..., x_n)$ *i* $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *je skalarni proizvod na* $\mathbb{R}$ *i još se naziva standardni skalarni proizvod.*

2. *Skalarni proizvod na prostoru* $\mathcal{C}[a, b]$ *neprekidnih realnoznačnih funkcija na* $[a, b]$ *je definisan sa:*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

U euklidskim prostorima je moguće definisati metričke pojmove kao što je rastojanje, dužina, ugao itd., što odgovara geometriji trodimenzionalnog prostora. Definicije ovih pojmova izlaze iz svojstava skalarnog proizvoda, pa je korektno definisati broj

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

koji se naziva **norma**, odnosno dužina vektora $x$. Hajde sada da spomenemo neke poznate nejednakosti.

**Teorema 1.10.** *(**Nejednakost Švarc**[2]**-Koši**[3]**-Bunjakovski**[4]) Neka su* $x$ *i* $y$ *proizvoljni vektori euklidskog vektorskog prostora* $V$*, tada važi*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

*Ako su ovi vektori jednaki, onda važi jednakost.*

Ako se ova nejednakost primeni, redom, za standardni skalarni proizvod na $\mathbb{R}^n$ i skalarni proizvod funkcija iz $\mathcal{C}[a, b]$ onda ima sledeći oblik:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{1.1}$$

$$\Big(\int_a^b f(t)g(t)dt\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

Nejednakost (1.1) je specijalan slučaj opštije nejednakosti (1.2).

**Teorema 1.11.** *(**Helderova**[5] **nejednakost**) Za realne brojeve* $p$ *i* $q$ *takve da je* $p > 1$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *važi:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2}$$

**Posledica 1.11.1.** *Za proizvoljne vektore* $x$ *i* $y$ *euklidskog vektorskog prostora* $V$ *i proizvoljan realan broj* $\alpha$ *važi:*

[2]Herman Švarc (1843-1921)- nemački matematičar
[3]Ogisten Luj Koši (1789-1857)- francuski matematičar
[4]Viktor Bunjakovski (1804-1889)- ukrajinski matematičar
[5]Oto Helder (1859-1937)- nemački matematičar

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
5. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \angle(x, y)$
6. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

**Definicija 1.8.** *Za proizvoljne vektore $x$, $y$ iz $V$ kažemo da su* ***ortogonalni*** *ako je $\langle x, y\rangle = 0$.*

**Napomena 1.3.** *Osobina 3. prethodne posledice je poznata kao nejednakost* ***Minkovskog***[6]*. Ova nejednakost u prostoru $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom glasi:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

*što je samo specijalan slučaj uopštenja nejednakosti Minkovskog; u zapisu za $p \geq 1$ glasi:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*Ako su vektori $x$ i $y \in V$ ortogonalni, onda važi jednakost pod 3. Što se tiče osobine 4. ona je poznata kao teorema o odnosu stranica trougla, dok je sa 5. izražena kosinusna teorema za trougao. Osobina 6. predstavlja pravilo paralelograma.*

**Definicija 1.9.** *Neka je $n : V \to \mathbb{R}$ preslikavanje gde je $V$ vektorski prostor tako da važe sledeći uslovi:*

1. $n(x) \geq 0$, $\forall x \in V$; $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $n(\alpha x) = |\alpha| n(x)$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $n(x, y) = n(x) + n(y)$, $\forall x, y \in V$

*Tada kažemo da je $n$ norma nad $V$, a uređeni par $(V, n)$* ***normiran*** *vektorski prostor.*

Dakle, zaključujemo da je **svaki euklidski vektorski prostor normiran**. Uvedimo sad pojam rastojanja u navedenom prostoru.

**Definicija 1.10.** *Pod rastojanjem između proizvoljnih vektora $x$ i $y$ euklidskog vektorskog prostora $V$ podrazumeva se broj:*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Definicija 1.11.** *Pod* ***metričkim prostorom*** *podrazumeva se par (X,d), gde je X proizvoljan neprazan skup, a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje takvo da je za proizvoljne $x, y, z \in X$ zadovoljeno:*

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ *akko* $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

[6]Herman Minkovski (1864-1909)- nemački matematičar i fizičar

Dakle, **svaki normirani i svaki euklidski prostor je metrički**.

**Definicija 1.12.** *Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $X$ je **Košijev** ako važi sledeći uslov:*

$$\Big(\forall\varepsilon > 0\Big)\Big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall m, n \in \mathbb{N}\Big)\Big(m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon\Big)$$

**Definicija 1.13.** *Za metrički prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan kažemo da je **kompletan** ili potpun metrički prostor.*

**Napomena 1.4.** *Ako je svaki normiran prostor $(V, \|\cdot\|)$ sa metrikom $d$ definisanom kao u definiciji 1.10, kompletan, kažemo tada da je **Banahov**[7].*

**Definicija 1.14.** *Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i neka je definisano preslikavanje $\langle\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$. Preslikavanje $\langle\cdot\rangle$ se naziva skalarni proizvod, a uređeni par $(V, \langle\cdot\rangle)$ unitaran prostor, ako važe sledeći uslovi:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in V$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall x, y, z \in V$
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$, $\forall\alpha \in \mathbb{K}$
4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall x, y \in V$.

**Napomena 1.5.** *Kompletan unitaran prostor se naziva **Hilbertov**[8] **prostor**.*

Zahvaljujući osobini 1. prethodne definicije i u unitarnim prostorima se definiše norma vektora sa:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Tako je, na primer, norma vektora $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom data sa:

$$\|x\| = \big(x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + ... + x_n\overline{x_n}\big)^{1/2} = \big(|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2\big)^{1/2}.$$

U unitarnim prostorima važi teorema 1.10, a takođe se lako proverava da norma ima slična svojstva opisanim u posledici 1.11.1.

## 1.5 Ortogonalni sistemi

**Definicija 1.15.** *Sistem $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ elemenata unitarnog prostora $X$ je **ortogonalan** ako je norma svakog elemenata tog sistema ortogonalna, tj. ako je $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$. Ortogonalan sistem je **ortonormiran** ako su svi njegovi elementi normirani, odnosno ako važi da je $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dalje, koristeći definiciju 1.3 dolazimo do sledeće teoreme:

**Teorema 1.12.** *Svaki ortogonalan sistem unitarnog prostora je linearno nezavisan.*

Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu koja se može dobiti iz proizvoljne baze tog prostora primenom **Gram**[9]**-Šmitovog**[10] postupka ortonormiranja:

[7]Stefan Banah (1892-1945)- poljski matematičar
[8]David Hilbert (1862-1943)- nemački matematičar
[9]Jorgen Gram (1850-1916)- danski matematičar
[10]Erhard Šmit (1876-1959)- nemački matematičar

**Teorema 1.13.** *Neka je dat $x_1, x_2, ..., x_n$ linearno nezavisan sistem elemenata unitarnog prostora X. Tada postoji ortonormiran sistem elemenata $e_1, e_2, ..., e_n$ sa svojstvom da je skup svih linearnih kombinacija tj. lineal $\mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_j) = \mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_j)$, $\forall j = \overline{1, n}$.*

Dokaz.

Pođimo od definisanja vektora $e_1, e_2, ..., e_n$ indukcijom. Neka je $e_1' = x_1$, $e_1 = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|}$ i pretpostavimo da su definisani vektori $e_1, e_2, ..., e_j$, $j < n$, za koje je $\mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_j) = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_j)$. Očigledno je da $x_{j+1} \in X \setminus \mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_j)$.
Kako su poznati vektori $e_1, e_2, ..., e_j$ moguće je definisati vektore $e_{j+1}'$ i $e_{j+1}$ na sledeći način:

$$e_{j+1}' = x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_k \rangle e_k$$

i

$$e_{j+1} = \frac{e_{j+1}'}{\|e_{j+1}'\|}$$

Dakle, dobili smo ortonormiran sistem $e_1, e_2, ..., e_{j+1}$ za koji je:

$$\mathcal{L}(e_1, e_2, ..., e_{j+1}) = \mathcal{L}(e_1, e_2, ..., x_{j+1}) = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_{j+1}) \ \diamondsuit.$$

Posmatrajmo sada sve realne funkcije koje su integrabilne sa kvadratom (u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu) na segmentu realne prave $[a, b]$. Za dve funkcije iz ovog skupa kažemo da su ekvivalentne, ako su jednake skoro svuda na $[a, b]$. Ovako definisana relacija razlaže skup na klase ekvivalencije i označimo taj skup sa $R^2([a, b])$. Na njemu je definisan skalarni proizvod na sledeći način:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{1.3}$$

## 1.6 Ortogonalnost osnovnog trigonometrijskog sistema

Sistem funkcija za $\ell > 0$

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{\pi x}{\ell}, ..., \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}, ... \tag{1.4}$$

nazivamo **osnovnim trigonometrijskim sistemom**. U prostoru $R^2([-\ell, \ell])$ ovaj sistem je ortogonalan sa odgovarajućim skalarnim proizvodom definisanim kao u (1.3). Pokažimo to.

Kako je

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx = 2\ell$$

za $n = 0$, jer je $\cos 0 = 1$, za $n \neq 0$ je

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{-\ell}^{\ell} = 0$$

jer je $\sin n\pi = 0$. Ovo se može zapisati pomoću **Kronekerove**[11] **delte**

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\ell, & n = 0 \end{cases} = 2\ell\delta_{n,0} \tag{1.5}$$

Slično, za $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = 0. \tag{1.6}$$

Dalje, koristeći (1.3) i formule za transformaciju proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir:

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \tag{1.7}$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \tag{1.8}$$

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) \tag{1.9}$$

sledi

$$\begin{aligned} \Big\langle \cos\frac{m\pi x}{\ell}, \cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big\rangle &= \int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \\ &\overset{(1.7)}{=} \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell}dx + \int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(m+n)\pi x}{\ell}dx\Big) \\ &\overset{(1.5)}{=} \frac{1}{2}\big(2\ell\delta_{m-n,0} + 2\ell\delta_{m+n,0}\big) \\ &= \begin{cases} 2\ell, & m = n = 0 \\ \ell, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big\langle \sin\frac{m\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big\rangle &= \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{m\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \\ &\overset{(1.8)}{=} \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(m-n)\pi x}{\ell}dx - \int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{(m+n)\pi x}{\ell}dx\Big) \\ &\overset{(1.5)}{=} \frac{1}{2}\big(2\ell\delta_{m-n,0} - 2\ell\delta_{m+n,0}\big) = \begin{cases} \ell, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big\langle \cos\frac{m\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big\rangle &= \int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \\ &\overset{(1.9)}{=} \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{(m-n)\pi x}{\ell}dx + \int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{(m+n)\pi x}{\ell}dx\Big) \overset{(1.6)}{=} 0. \end{aligned}$$

[11]Leopold Kroneker (1823-1891)- nemački matematičar

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je ovaj sistem ortogonalan, dok su norme njegovih elemenata:

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \frac{\ell}{2}, \quad \left\|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right\|^2 = \ell \tag{1.10}$$

Iz sistema (1.4) dobijamo sledeći ortonormiran sistem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{\pi x}{\ell}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{\pi x}{\ell}, ..., \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}, ...$$

**Komentar 1.1.** *Analogno, možemo pokazati da je* $\left\{e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *ortonormiran sistem u odnosu na skalarni proizvod*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

## 1.7 Furijeovi koeficijenti i Beselova nejednakost

Postavlja se pitanje kako odrediti za neko fiksirano $x$ iz $X$, gde je $X$ unitaran vektorski prostor sa normom koja je definisana skalarnim proizvodom i gde je $e_1, ..., e_n$ linearno nezavisan sistem, linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$$

koja najbolje aproksimira vektor $x$. Drugim rečima, treba naći koeficijente $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tako da izraz

$$\| \ x - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) \ \| \tag{1.11}$$

ima minimalnu vrednost.

Ako je prostor $n-$dimenzionalan, onda je uvek moguće odrediti da gore navedeni izraz ima najmanju vrednost. Međutim, ako je prostor $X$ beskonačnodimenzionalan u opštem slučaju to nije moguće, pa se zadatak svodi na određivanje linearne kombinacije za koju je (1.11) minimalno.

Gram-Šmitov postupak nam je pokazao da linearno nezavisan sistem vektora uvek možemo zameniti ortogonalnim sistemom, pa na osnovu toga (1.11) imaće minimalnu vrednost

$$\begin{aligned}
\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 &= \big\langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,\ x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\big\rangle \\
&\overset{1.14}{=} \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^n \lambda_i\langle x, e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\|e_i\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i\|e_i\| - \frac{\langle x, e_i\rangle}{\|e_i\|}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i\rangle^2}{\|e_i\|^2}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

ako je

$$\lambda_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\|e_i\|^2}, \ i = \overline{1, n}. \tag{1.13}$$

**Definicija 1.16.** *Neka je dat* $e_1, e_2, ..., e_n$ *ortogonalan sistem unitarnog prostora* $X$*.* ***Furijeovi koeficijenti*** *vektora* $x \in X$ *u odnosu na ovaj sistem su skalari* $\lambda_i$ *definisani kao u* (1.13).

**Teorema 1.14.** ***(Minimalno svojstvo Furijeovih koeficijenata)*** *Neka je $e_1, e_2, ..., e_n$ ortogonalan sistem unitarnog prostora $X$. Ako su $\lambda_i$ Furijeovi koeficijenti elementa $x \in X$ u odnosu na sistem $e_1, e_2, ..., e_n$, tada je:*

$$\inf_{\lambda_1,...,\lambda_n} \|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2.$$

Neka je $e_1, e_2, ..., e_n$ ortogonalna baza unitarnog n-dimenzionog prostora $X$. U tom slučaju **Furijeovi koeficijenti vektora** $x \in X$ **predstavljaju koeficijente razlaganja tog vektora po elementima baze**. S druge strane, ako pogledamo jednakost (1.12) i ako su u toj jednakosti parametri $\lambda_i$ Furijeovi koeficijenti, tada se dobija **Beselova**[12] **jednakost**

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2.$$

Kako je $\|x - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 \geq 0$, sledi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Niz $\{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ je neopadajući i ograničen odozgo brojem $\|x\|^2$, pa je stoga red $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2$ konvergentan kada $n \to +\infty$. Na ovaj način smo dobili poznatu **Beselovu nejednakost** za element $x$ po ortogonalnom sistemu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2.$$

## 1.8 Parsevalova jednakost

**Definicija 1.17.** *Ortogonalan sistem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unitarnog prostora $X$ je* ***potpun****, ako iz $x \in X$ i $\langle x, e_n\rangle = 0$ za $n \in \mathbb{N}$, sledi $x = 0$.*

**Definicija 1.18.** *Ortogonalan sistem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Hilbertovog prostora $X$ je* ***zatvoren*** *u tom prostoru, ako $\forall x \in X$ i $\forall \varepsilon > 0$ postoji linearna kombinacija $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ takva da važi*

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| < \varepsilon.$$

**Teorema 1.15.** *Ortogonalan sistem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unitarnog prostora $X$ je zatvoren u $X$ akko za svako $x \in X$ važi* ***Parsevalova***[13] ***jednakost***

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \tag{1.14}$$

*gde su $\lambda_i$ Furijeovi koeficijenti u odnosu na $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Kod Hilbertovog prostora $X$ zatvoren ortonormiran sistem je isto što i potpun ortonormiran sistem u $X$, što opravdavamo sledećim tvrđenjem.

[12]Fridrih Besel (1784–1846)- nemački matematičar
[13]Mark Antoan Parseval (1755–1836)- francuski matematičar

**Teorema 1.16.** *Da bi ortonormiran sistem* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Hilbertovog prostora* $X$ *bio zatvoren u* $X$*, potrebno je i dovoljno da je on potpun u tom prostoru.*

**Teorema 1.17.** *Neka je* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ortogonalan sistem unitarnog prostora* $X$ *i neka su* $\lambda_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, Furijeovi koeficijenti elementa* $x \in X$ *u odnosu na ortogonalan sistem* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Tada delimične sume reda* $\sum \lambda_n e_n$ *čine Košijev niz koji konvergira elementu* $x$ *akko je zadovoljena Parsevalova jednakost.*

Navešćemo sada definiciju Furijeovog reda.

**Definicija 1.19.** *Neka je* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ortogonalan sistem unitarnog prostora* $X$ *i neka su* $\lambda_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, Furijeovi koeficijenti elementa* $x \in X$ *u odnosu na ortogonalan sistem* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Tada red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$$

*je* ***Furijeov red elementa x u odnosu na ortogonalan sistem*** $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$**.**

## 1.9 Periodične funkcije

Mnogi procesi u prirodi su periodičnog karaktera i moguće ih je reprezentovati periodičnim funkcijama, a kako se mi u ovom radu bavimo izučavanjem periodičnih funkcija u nastavku ćemo navesti niz rezultata koji će nam biti od koristi nadalje.

**Definicija 1.20.** *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je periodična ako postoji realan broj* $T \neq 0$ *tako da je* $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$*. Broj* $T$ *se naziva perioda funkcije f. Takođe, ako je* $T$ *perioda funkcije, tada je* $nT$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, perioda te funkcije.*

**Teorema 1.18.** *Svaka neprekidna periodična funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je ravnomerno neprekidna na* $\mathbb{R}$*.*

**Teorema 1.19.** *Ako je neprekidna periodična funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *različita od konstantne funkcije, tada ona ima najmanju periodu.*

**Definicija 1.21.** *Neka je f periodična funkcija. Ako postoji najmanja pozitivna perioda* $T$ *funkcije f, onda je* $T$ ***osnovna perioda*** *funkcije f.*

**Teorema 1.20.** *Neka je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodična sa osnovnom periodom* $T$*. Ako je funkcija integrabilna u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu* $[0, T]$*, tada je ona integrabilna na svakom konačnom segmentu realne prave. Pritom,* $\forall a \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

**Primer 1.2.** *Ispitati periodičnost funkcije* $f(x) = \sin x$ *i odrediti njen osnovni period.*

Pretpostavimo da je $T > 0$ period funkcije $\sin x$. Koristeći poznati trigonometrijski identitet za sinus zbira imamo:

$$\sin x = \sin(x+T) = \sin x \cos T + \sin T \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Za $x = 0$ imamo $\sin 0 = \sin T \Longrightarrow T = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Zamenom $T$ u prethodnom redu sledi

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x+k\pi) = \sin x \cos k\pi + \sin k\pi \cos x \\ \sin x &= \sin x(-1)^k \\ k &= 2n, \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Dakle, pozitivan period funkcije $\sin x$ je $T = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, dok je osnovni period $2\pi$.

**Primer 1.3.** *Ako je $T$ osnovni period realne funkcije $f$, dokazati da je $\frac{T}{|a|}$ osnovni period funkcije $x \longmapsto f(ax+b)$, gde je $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.*

Po zadatku važi da je $f(x) = f(x+T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Označimo sa $F(x) := f(ax+b)$ i pokažimo da je $F\big(x + \frac{T}{|a|}\big) = F(x)$.

$$\begin{aligned} F\big(x + \frac{T}{|a|}\big) &= f\big(a(x + \frac{T}{|a|}) + b\big) = f(ax + b + a\frac{T}{|a|}) \\ &= f(ax + b \pm T) = f(ax+b) = F(x) \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $\frac{T}{|a|}$ period, a sada pokažimo da je osnovni period tako što ćemo pretpostaviti suprotno tj. $(\exists \alpha > 1)$ tako da je $\frac{T}{\alpha|a|}$ osnovni period funkcije $f$. Tada

$$\begin{aligned} 0 = F\big(x + \frac{T}{\alpha|a|}\big) - F(x) &= f\big(ax + b \pm \frac{T}{\alpha}\big) - f(ax+b) \\ f\big(ax + b \pm \frac{T}{\alpha}\big) &= f(ax+b) \\ &\Rightarrow \frac{T}{\alpha} < T \end{aligned}$$

a to je kontradikcija jer je $T$ osnovni period funkcije $f$.

**Primer 1.4.** *Neka su date dve funkcije $f_1$ i $f_2$ sa istim domenom i neka su $T_1$ i $T_2$ njihovi periodi redom. Pretpostavimo da su njihovi periodi samerljivi odnosno za $m, n \in \mathbb{N}$ važi*

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n}; \; NZD(m,n) = 1.$$

*Dokazati da je tada funkcija $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ periodična sa periodom $T = nT_2 = mT_1$.*

Pokažimo da je $f(x+T) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f_1(x+T) + f_2(x+T) = f_1(x + mT_1) + f_2(x + nT_2) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = f(x). \end{aligned}$$

**Primer 1.5.** *Ispitati period funkcije $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$.*

Na osnovu primera 1.3. osnovni period funkcije $\sin 3x$ je $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, a funkcije $\cos 2x$ je $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. S obzirom da su ova dva perioda samerljiva $T_1 : T_2 = 2 : 3$, zaključujemo da je osnovni period funkcije $f$ jednak $2\pi$.

**Primer 1.6.** *Odrediti period trigonometrijskog polinoma $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, gde je $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$ i $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$.*

$\frac{a_0}{2}$ ima period proizvoljan nenula realan broj. Dalje, prema primeru 1.3. funkcije $\sin kx$ i $\cos kx$ imaju osnovni period $\frac{2\pi}{k}$, a prema primeru 1.4. period funkcije $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ je $T_k = \frac{2\pi}{k}$, $k = \overline{1,m}$, Takođe, periodi funkcija $f_k$ i $f_{k+1}$ su srazmerni

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{2\pi k}{2\pi(k+1)} = \frac{k}{k+1}; \; NZD(k,k+1) = 1, k = \overline{1,m-1}$$

pa sledi da je period funkcije $f_k + f_{k+1}$ jednak $T = (k+1)T_{k+1} = 2\pi$, odnosno period trigonometrijskog polinoma je $T = 2\pi$.

## 1.10 Periodično produženje funkcije

Neka je zadata realna funkcija $f$ na intervalu $[a, a+T)$, gde je $a \in \mathbb{R}$. Označimo sa $F$ realnu funkciju koja se na $[a, a+T)$ poklapa sa $f$ i koja je $T-$periodična.

Za svako $x \in \mathrm{Dom}(F)$ postoji jedinstveno $x_0 \in [a, a+T)$ tako da $x = x_0 + kT$ za neki ceo broj k. Zbog pretpostavke o periodičnosti produženja imamo za $x_0 \in [a, a+T)$

$$F(x) = F(x_0 + kT) = F(x_0) = f(x_0).$$

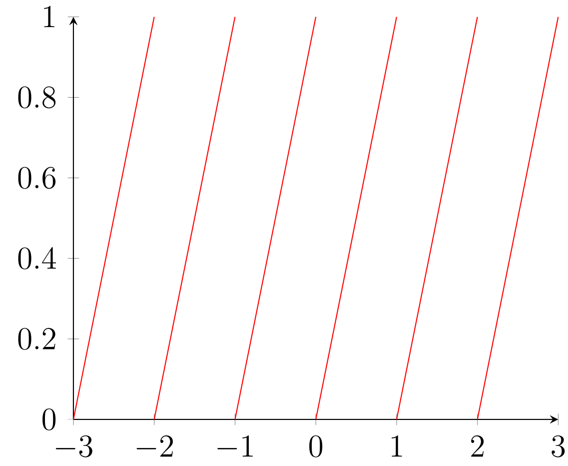
Dakle, periodično produženje funkcije $f$ se definiše kao $F(x) = f(x - kT)$, gde je odabrano $k \in \mathbb{Z}$ tako da $x - kT \in [a, a+T)$. Geometrijski, grafik funkcije $f$ se translira za vektor $kT, k \in \mathbb{Z}$.
Neka je funkcija $f$ data na intervalu $[0, a)$. Ona se može produžiti tako da njeno produženje bude parna ili neparna funkcija. Drugim rečima, funkciju $f$ dodefinišemo na $(-a, 0)$ tako da bude parna odnosno neparna na intervalu $(-a, a)$, stavljajući redom $f(x) = f(-x)$ odnosno $f(x) = -f(-x)$ za $x \in (-a, 0)$, a zatim dobijenu funkciju periodično produžimo na $\mathbb{R}$ čija je perioda $T = 2a$.

**Primer 1.7.** *Data je funkcija $f(x) = x$, $x \in [0, 1)$. Odrediti periodično, neparno i parno produženje ove funkcije.*

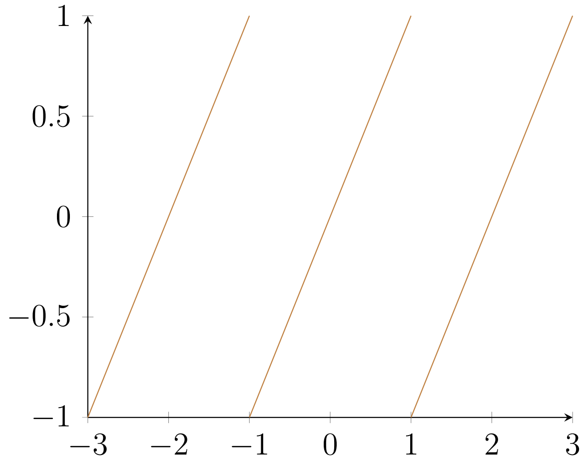
1. Prema prethodnom periodično produženje ove funkcije je $F(x) = f(x - kT) = x - k$, gde je $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $x - k \in [0, 1)$, tj. $x \in [k, k+1)$. Ovo svojstvo ima broj $k$ definisan kao najveći ceo deo broja $x$, te je funkcija $F(x) = x - [x] = \{x\}$. Dakle, funkcija $F$ nije ni parna ni neparna, ima period 1 i ima skokove u tačkama $x \in \mathbb{Z}$.

2. Dodefinisanje sada izvodimo sa $f(x) = -f(-x) = x$, $x \in (-1, 0]$, čime dobijamo funkciju $f(x) = x$ na $(-1, 1)$. U graničnim tačkama $\pm 1$ funkciju možemo da dodefinišemo na proizvoljan način ali stavićemo $f(\pm 1) = 0$ iz razloga koji će biti jasniji u kontekstu konvergencije Furijeovih redova. Dalje, sada ovu funkciju možemo produžiti na realnu pravu stavljajući $F_n(x) = x - 2k$, gde je $k \in \mathbb{Z}$ takav da $x - 2k \in (-1, 1)$. Ova funkcija $F_n$ je neparna, osnovnog perioda 2 i ima prekid prve vrste u tačkama $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

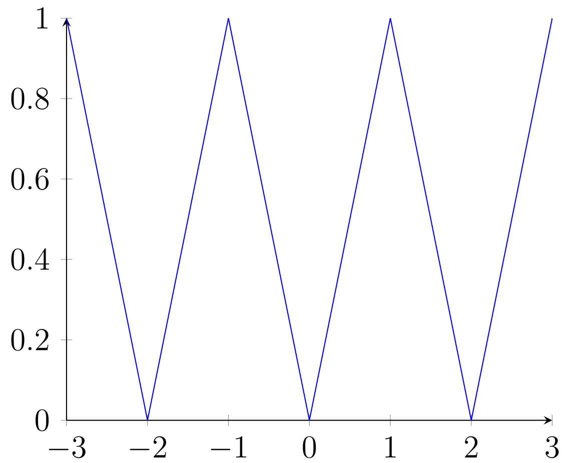
3. Dodefinisaćemo funkciju stavljajući $f(x) = -x$ za $x \in (-1, 0]$. U graničnim tačkama stavljamo $f(\pm 1) = 1$ da bi produženje bilo neprekidno. Njen analitički oblik biće $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$. Ovako dobijenu funkciju produžimo na $\mathbb{R}$ do funkcije $F_p = |x - 2k|$, gde je $k \in \mathbb{Z}$ takav da $x - 2k \in [-1, 1)$. Primetimo da je naša dodefinisana funkcija $F_p$ parna, neprekidna i sa osnovnim periodom 2.




Periodično produženje




Neparno periodično produženje




Parno periodično produženje

# 2 Klasični Furijeovi redovi

Pod klasičnim Furijeovim redovima podrazumevaju se redovi na unitarnom prostoru $R^2([-\ell, \ell])$ u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem funkcija za koji smo pokazali da je ortogonalan.

Za dokazivanje teoreme 2.3 potrebno nam je da navedemo sledeća dva rezultata.

**Teorema 2.1.** *Neka su funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne na segmentu $[a, b]$. Ako red $\sum f_n$ ravnomerno konvergira na $[a, b]$ ka sumi $s$, tada je $\forall c \in [a, b]$ red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt$$

*ravnomerno konvergentan na $[a, b]$, gde je $s \in R([a, b])$ i važi*

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt.$$

**Teorema 2.2.** *Neka niz $(f_n) \subset Y^X$ ravnomerno konvergira na skupu $X$ ka funkciji $f \in Y^X$. Tada niz $(gf_n)$ ravnomerno konvergira funkciji $fg$ na skupu $X$ za svaku funkciju $g \in B(X, \mathbb{R})$.*

**Napomena 2.1.** *Oznaka $Y^X$ predstavlja skup svih preslikavanja linearnih funkcija iz $X$ u $Y$, dok je $B(X, Y)$ skup svih ograničenih linearnih funkcija iz $X$ u $Y$.*

**Teorema 2.3.** *Neka je dat red*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{2.1}$$

*ravnomerno konvergentan na segmentu $[-\ell, \ell]$. Tada su, za $n \in \mathbb{N}$ definisani*

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx \tag{2.4}$$

***Furijeovi koeficijenti funkcije f u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem***.

Dokaz.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna na $[-\ell, \ell]$ jer su članovi ravnomerno konvergentnog reda (2.1) neprekidne funkcije na $[-\ell, \ell]$. Dalje, na osnovu teoreme 2.1 red (2.1) se može integraliti član po član na $[-\ell, \ell]$ , pa je

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\ell}^{\ell} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx + b_n \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx \right) = \ell a_0 + 0 = \ell a_0$$

odakle sledi (2.2), jer su funkcije $\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}$ i $\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ ortogonalne sa jedinicom. Kako su one i ograničene na $[-\ell,\ell]$ množenje izraza (2.1) ovim funkcijama dobićemo, na osnovu teoreme 2.2, da je dobijeni red ravnomerno konvergentan. Sada tako dobijene izraze možemo integraliti član po član na $[-\ell,\ell]$. I na kraju ako iskoristimo ortogonalnost trigonometrijskog sistema dolazimo do oblika za $a_n$ i $b_n$. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{+\infty} a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
&+ a_k\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx + b_n\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
&= 0+0+a_k\int_{-\ell}^{\ell}\frac{1+\cos\frac{2k\pi x}{\ell}}{2}dx + 0\\
&= \frac{1}{2}a_k\Big(2\ell + \int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{2k\pi x}{\ell}dx\Big)\\
&= a_k\Big(\ell + \frac{\ell}{4k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{\ell}\Big|_{-\ell}^{\ell}\Big)\\
&= a_k(\ell+0) = \ell a_k\end{aligned}$$

Analognim postupkom se dobija izraz za $b_n$ tj. (2.4). ♢

**Napomena 2.2.** *Za postojanje Furijeovih koeficijenata određenim prethodnim formulama, dovoljno je da funkcija $f$ bude apsolutno integrabilna na segmentu $[-\ell,\ell]$.*

**Definicija 2.1.** *Neka je funkcija $f$ apsolutno integrabilna na segmentu $[-\ell,\ell]$. Tada se ona može razviti u trigonometrijski red*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

*čiji su koeficijenti određeni formulama*

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\\
b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

**Napomena 2.3.** *Simbol " $\sim$ " znači da Furijeov red na desnoj strani predstavlja funkciju $f$, ali ništa ne kaže o njihovoj jednakosti.*

**Definicija 2.2.** *Neka je funkcija $f$ apsolutno integrabilna na segmentu $[-\ell,\ell]$. Tada **n-ta delimična suma** Furijeovog reda funkcije $f$ u tački $x\in[-\ell,\ell]$ je trigonometrijski polinom $n$-tog stepena:*

$$S_n(x;f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

*i)* *Ako je funkcija* $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ *parna tada su koeficijenti* $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, *pa je Furijeov red*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

*dok su koeficijenti* $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *dati sa*

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

*ii)* *S druge strane, ako je* $f$ *neparna tada su koeficijenti* $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, *pa je Furijeov red oblika*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

*gde je* $b_n$, $n \in \mathbb{N}$ *dato sa*

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

**Primer 2.1.** *Data je funkcija* $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

*i)* *Produžiti je periodično na* $\mathbb{R}$.

*ii)* *Odrediti Furijeove koeficijente.*

*iii)* *Odrediti delimične sume* $S_1$, $S_2$ *i* $S_3$ *i skicirati njihove grafike.*

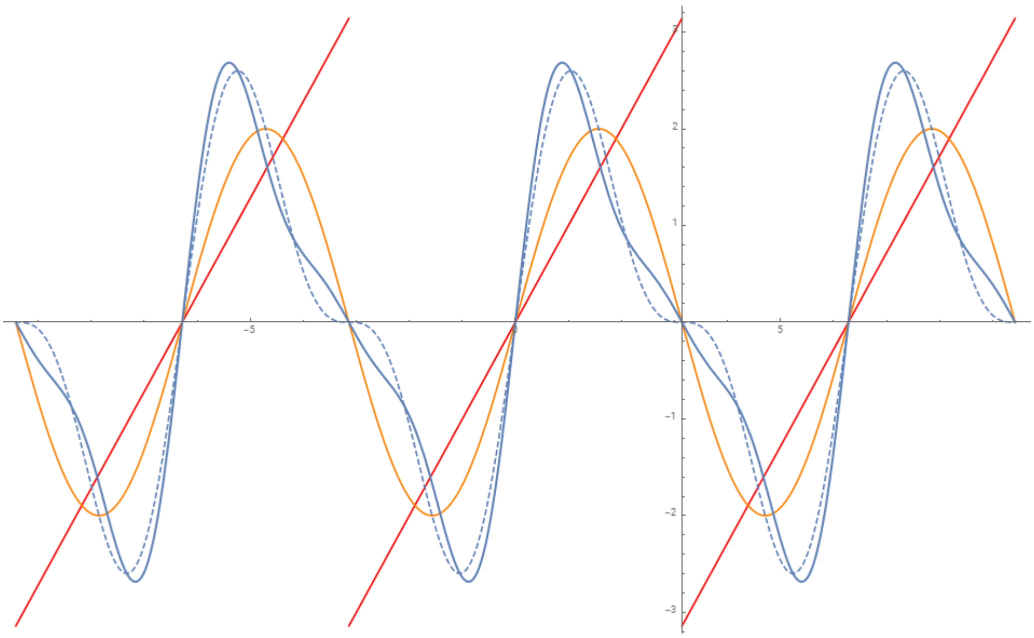
i) Stavljajući $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo traženo $2\pi$ produženje. Na primer, za $x \in (\pi, 3\pi)$ imamo $f(x) = f(x - 2\pi) = x - 2\pi$, dok za $x \in (-3\pi, -\pi)$ važi $f(x) = f(x + 2\pi) = x + 2\pi$.

ii) Funkcija je apsolutno integrabilna na $(-\pi, \pi)$ pa se može predstaviti Furijeovim redom. S obzirom da je ona neparna na $(-\pi, \pi)$ sledi da je $a_n = 0$ za $n \in \mathbb{N}_0$, dok $b_n$ nalazimo parcijalnom integracijom

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \overset{(\star)}{=} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
(\star) \int_0^{\pi} x \sin nx dx &= \left\{ u = x \Rightarrow dx = du;\ v = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \right\} \\
&= -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \\
&= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + 0 + 0 \\
&= -\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

iii) Zamenom $b_1 = 2$ u gore navedenu sumu dobijamo $S_1(x; f) \equiv S_1 = 2 \sin x$. Slično, $S_2 = 2 \sin x - \sin 2x$ i $S_3 = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$.



## 2.1 Konvergencija i kriterijumi konvergencije Furijeovih redova

Posmatrajmo sledeći primer:

**Primer 2.2.** *Neka su dati Furijeovi koeficijenti funkcije* $f \in R^2([-\ell, \ell])$ *odnosno* (2.2), (2.3), (2.4). *Kako je norma elemenata osnovnog trigonometrijskog sistema jednaka* (1.10), *tada Beselova nejednakost glasi*

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx.$$

*S obzirom da* $f \in R^2([-\ell, \ell])$ *sledi da je red* $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ *konvergentan, pa je* $\lim_{n\to+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0$. *Dakle, Furijeovi koeficijenti funkcije* $f$ *konvergiraju nuli, odnosno važi*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0.$$

U definiciji Furijeovih redova zahteva se apsolutna integrabilnost funkcije, a kako je to šira klasa od klase funkcija integrabilnih sa svojim kvadratom, u skladu sa primerom sledi teorema:

**Teorema 2.4.** *(**Riman**[14]) Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na konačnom ili beskonačnom intervalu* $(a, b)$, *tada je*

$$\lim_{|p|\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos px dx = \lim_{|p|\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin px dx. \tag{2.5}$$

**Posledica 2.4.1.** *Furijeovi koeficijenti apsolutne integrabilne funkcije konvergiraju nuli kada* $n \to +\infty$.

Na osnovu navedenih rezultata znamo da svaku apsolutno integrabilnu $2\ell-$periodičnu funkciju $f$ možemo razviti u Furijeov red. Postavlja se pitanje kada će taj red konvergirati. Pri ispitivanju Furijeovog reda u tački $x$ za nas su od praktičnog značaja sledeća dva slučaja:

[14]Georg Fridrih Bernhard Riman (1826-1866)-nemački matematičar

i) Kada je funkcija $f$ neprekidna u tački $x$.

ii) Kada funkcija $f$ ima prekid prve vrste u tački $x$, odnosno kada postoje granične vrednosti $f(x-0)$ i $f(x+0)$.

U nastavku ćemo navesti teoreme koje daju dovoljne uslove za konvergenciju reda, kao i vrednosti ka kojima Furijeov red konvergira.

**Teorema 2.5.** *Neka je $f$ apsolutno integrabilna $2\ell-$ periodična funkcija na segmentu dužine $2\ell$. Ako u tački $x$ postoje granične vrednosti $f(x\pm 0)$ i uopšteni levi i desni izvod $f'_{\pm}(x)$, onda Furijeov red funkcije $f$ konvergira u tački $x$ ka vrednosti*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

**Definicija 2.3.** *Funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je deo po deo neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$, ako postoji podela segmenta $\tau: a\equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$ tako da je $f'$ neprekidna funkcija na svakom intervalu $(x_{j-1},x_j)$, $j=\overline{1,n}$, pri čemu postoje granične vrednosti $\lim\limits_{t\to 0+} f'(x_{j-1}+t)$ i $\lim\limits_{t\to 0+} f'(x_j-t)$.*

**Teorema 2.6.** *Furijeov red funkcije $f$, deo po deo neprekidno diferencijabilne na segmentu $[-\ell,\ell]$, u svakoj tački intervala $(-\ell,\ell)$ konvergira ka vrednosti*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

*a u tačkama $-\ell$ i $\ell$ ka vrednosti*

$$\frac{f(-\ell)+f(\ell)}{2}.$$

Ova teorema je direktna posledica prethodne teoreme, jer na osnovu navedene definicije funkcija $f$ zadovoljava uslove teoreme 2.5.

**Teorema 2.7.** *Furijeov red funkcije $f$, neprekidne i deo po deo neprekidno diferencijabilne na segmentu $[-\ell,\ell]$ u svakoj tački intervala $(-\ell,\ell)$ konvergira ka vrednosti funkcije u toj tački, a u tačkama $-\ell$ i $\ell$ ka vrednosti*

$$\frac{f(-\ell)+f(\ell)}{2}.$$

Svi uslovi prethodne teoreme su zadovoljeni, prema tome ova funkcija u unutrašnjoj tački $-\ell < x < \ell$ konvergira ka vrednosti

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

a kako je zbog neprekidnosti $f(x\pm 0)=f(x)$, sledi dokaz ove teoreme.

**Zapažanje**: Primetimo da funkcija koja uz uslove prethodne teoreme zadovoljava još i to da se vrednosti u krajnjim tačkama $-\ell$ i $\ell$ poklapaju, Furijeov red navedene funkcije konvergira ka toj funkciji na segmentu $[-\ell,\ell]$.

**Primer 2.3.** *U primeru 2.1 ispitati konvergenciju Furijeovog reda date funkcije.*

Na osnovu teoreme 2.6 Furijeov red neprekidno diferencijabilne funkcije $f$ konvergira ka funkciji $f$ na $(-\pi,\pi)$, dok u tačkama $\pm\pi$ konvergira ka nuli. Prema tome, za $x\in(-\pi,\pi)$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

**Primer 2.4.** *Razviti u Furijeov red $2\ell-$periodičnu funkciju $f(x)$ koja je na $[-\ell,\ell]$ data sa*

$$f(x)=\begin{cases} c_1, & -\ell<x<c\\ c_2, & c<x<\ell\\ \dfrac{c_1+c_2}{2}, & x\in\{-\ell,c,\ell\}\end{cases}$$

*gde je $c\in(-\ell,\ell)$ zadat realan broj, a $c_1$ i $c_2\in\mathbb{R}$ konstante.*

Funkcija $f$ je apsolutno interabilna na $[-\ell,\ell]$, te se može razviti u Furijeov red. Nađimo $a_0, a_n$ i $b_n$.

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{\ell}\Big(\int_{-\ell}^{c}c_1dx+\int_{c}^{\ell}c_2dx\Big)=c_1+c_2+\frac{(c_1-c_2)c}{\ell}$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{c_1}{\ell}\int_{-\ell}^{c}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx+\frac{c_2}{\ell}\int_{c}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{c_1-c_2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{\ell}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{c_1}{\ell}\int_{-\ell}^{c}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx+\frac{c_2}{\ell}\int_{c}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{c_2-c_1}{n\pi}\Big(\cos\frac{n\pi c}{\ell}-(-1)^n\Big)$$

S obzirom da funkcija $f$ zadovoljava uslove teoreme 2.6 sledi

$$f(x)=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{(c_1-c_2)c}{2\ell}+\frac{c_1-c_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi c}{\ell}\cos\frac{n\pi c}{\ell}-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi c}{\ell}\big(\cos\frac{n\pi c}{\ell}-(-1)^n\big)\Big).$$

**Primer 2.5.** *Odrediti Furijeov red funkcije $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ na $[-\pi,\pi]$. Koristeći dobijeni red izračunati sumu*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

Ovo je specijalan slučaj prethodnog zadatka za $\ell=\pi,\ c=0,\ c_1=-1,\ c_2=1$. Dakle, za $x\in(-\pi,\pi)$

$$\operatorname{sgn}(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin{(2k-1)x}}{2k-1}$$

dok u tačkama $\pm\pi$ Furijeov red konvergira ka nuli. Gornja jednakost Furijeovog reda i $2\pi-$periodičnog produženja date funkcije važi u svim tačkama osim u $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Ako sada umesto $x$ stavimo $\dfrac{\pi}{2}$ imaćemo

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}.$$

## 2.2 Furijeov red u kompleksnoj formi

Neka je dat

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

Furijeov red funkcije $f$. Primenimo **Ojlerovu**[15] **formulu** $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ na opšti član Furijeovog reda

$$\begin{aligned} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} &= a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} + e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} - e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}. \end{aligned}$$

Uvođenjem oznaka

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ n > 0$$

dobijamo **Furijeov red funkcije f u kompleksnom obliku**

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} \tag{2.6}$$

čiji su koeficijenti dati sa

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} dx,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

**Napomena 2.4.** *Koristimo skalarni proizvod iz* komentara 1.1.

Obratno, ako je dat Furijeov red u kompleksnom obliku možemo ga izraziti u realnom obliku odgovarajućim relacijama:

$$a_0 = 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}),\ n \in \mathbb{N}$$

Ako su $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tada je $c_{-n} = \overline{c_n},\ a_n = c_n + \overline{c_n} = 2Re(c_n),\ b_n = i(c_n - \overline{c_n}) = -2Im(c_n)$.

Dalje, **n-ta delimična suma** Furijeovog reda u kompleksnom obliku glasi

$$S_n(x; f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}. \tag{2.8}$$

**Primer 2.6.** *Funkciju $f$ u primeru* 2.1 *razviti u Furijeov red u kompleksnoj formi.*

Koristeći (2.7) za $n \neq 0$ imamo

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx - \int_{-\pi}^{\pi} xi\sin nx dx\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$$

Za $n = 0$ je $c_0 = 0$. Prema teoremi 2.6 sledi jednakost tj. za $x \in (-\pi, \pi)$

$$x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{-inx}.$$

[15] Leonard Ojler (1707-1783)- švajcarski matematičar

## 2.3 Dirihleov integral i princip lokalizacije

Neka je funkcija $f$ apsolutno integrabilna na intervalu $[-\ell, \ell]$. Transformišimo $n-$tu delimičnu sumu funkcije $f$ zamenjujući u sumi izraze za Furijeove koeficijente

$$\begin{aligned} S_n(x; f) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ell} \left( \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi t}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} dt + \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi t}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} dt \right) \\ &\overset{2.1}{=} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi(t-x)}{\ell} \right) dt \end{aligned}$$

U sumi smo iskoristili adicionu formulu: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Označimo sa

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi t}{\ell}.$$

Sada za delimičnu sumu Furijeovog reda dobijamo sledeći izraz koji olakšava posao za njeno računanje:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) D_n(t-x) dt. \tag{2.9}$$

Funkcija $D_n(t)$ se naziva **Dirihleovo**[16] **jezgro**, a integral u (2.9) **Dirihleov integral**.

**Lema 2.1.** *Dirihlevo jezgro $D_n(t)$ je neprekidna, parna i periodična funkcija sa osnovnom periodom $2\ell$ za koju je*

1. $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} D_n(t)dt = 1$

3. $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{\ell}}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}}$, $t \neq 2k\ell$ *i* $k \in \mathbb{Z}$

Dokaz.

Neprekidnost, parnost i periodičnost Dirihleovog jezgra slede iz njegove definicije. Dalje,

1. $t = 0 : D_n(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2} + n$

2. $\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} D_n(t)dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi t}{\ell} dt \right) \overset{2.1}{=} \frac{2\ell}{2\ell} + \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{k\pi t}{\ell} dt = 1 + 0 = 1$

[16] Johan Peter Gustav Ležen Dirihle (1805-1859)- nemački matematičar

3.

$$
\begin{aligned}
D_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi t}{\ell} dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}}\Big(\sin\frac{\pi t}{2\ell} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\pi t}{2\ell}\cos\frac{k\pi t}{\ell}\Big) \\
&\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}}\left(\sin\frac{\pi t}{2\ell} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\frac{2k+1}{2}\frac{\pi t}{\ell} - \sin\frac{2k-1}{2}\frac{\pi t}{\ell}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}}\left(\sin\frac{\pi t}{2\ell} + \sin\frac{3\pi t}{2\ell} - \sin\frac{\pi t}{2\ell} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)\pi t}{2\ell} - \sin\frac{(2n-1)\pi t}{2\ell}\right) \\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{\ell}}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}}, \ t \neq 2k\ell, \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$(*)$ Pomnožili smo i podelili $D_n(t)$ sa $2\sin\dfrac{\pi t}{2l}$.

$(**)$ Iskoristili smo formulu: $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$.$\diamondsuit$

Za konvergenciju Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije $f$ neophodna je konvergencija niza $S_n(x;f)$. Međutim, granična vrednost u $D_n(t)$ ne postoji kada $n \to +\infty$, pa upravo zbog toga transformišimo Dirihleov integral u jednačini (2.9):

$$
\begin{aligned}
S_n(x;f) &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)D_n(t-x)dt \\
&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell-x}^{\ell-x} D_n(u)f(u+x)du \stackrel{1.20}{=} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} D_n(u)f(u+x)du \\
&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0} D_n(u)f(u+x)du + \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} D_n(u)f(u+x)du \\
&\stackrel{(***)}{=} \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} D_n(t)f(x-t)dt + \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} D_n(t)f(x+t)dt \\
&= \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} D_n(t)\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)dt.
\end{aligned}
$$

$(***)$ U prvom integralu uveli smo smenu $u=-t$, a zatim iskoristili činjenicu da je Dirihleovo jezgro parna funkcija.

**Stav 2.1.** *Za svako $\delta \in (0,\ell)$ i $x \in [-\ell,\ell]$ delimična suma $S_n(x;f)$ Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije $f$, osnovne periode $2\ell$, može se prikazati formulom*

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\ell}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)dt + o(1), \ n \to +\infty.$$

U skladu sa ovim stavom imamo sledeću teoremu:

**Teorema 2.8.** ***(Princip lokalizacije)*** *Ponašanje Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije u nekoj tački zavisi isključivo od vrednosti koje ta funkcija ima u nekoj okolini posmatrane tačke.*

**Komentar 2.1.** *Ako su vrednosti funkcija $f$ i $g$ jednake u nekoj okolini tačke $x$, onda su Furijeovi redovi ovih funkcija u posmatranoj tački konvergentni ili divergentni, pri čemu su sume njihovih redova u tački $x$ jednake, ukoliko su oni konvergentni. U opštem slučaju Furijeovi redovi funkcija $f$ i $g$ se razlikuju.*

## 2.4 Ravnomerna konvergencija i aproksimacija trigonometrijskim polinomima

Neka je funkcija $f$ integrabilna na $[-\ell, \ell]$ za koju je $f(-\ell) = f(\ell)$. Produžimo je na $\mathbb{R}$ tako da bude $2\ell-$periodična. Produženje je neprekidno upravo zbog $f(-\ell) = f(\ell)$.

Posmatrajmo nizove srednjih aritmetičkih sredina

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + ... + S_n(x)}{n+1} \tag{2.10}$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + ... + D_n(x)}{n+1} \tag{2.11}$$

gde je $S_n(x)$ $n-$ta delimična suma Furijeovog reda funkcije $f$, a $D_n(x)$ odgovarajuće Dirihleovo jezgro. Izrazi (2.10) i (2.11) se nazivaju, redom, **Fejerova** [17] **suma** $n-$tog reda funkcije $f$ i **Fejerovo jezgro**.

**Komentar 2.2.** *Nije teško primetiti da su Fejerova suma i jezgro u sličnoj vezi kao delimična suma i Dirihleovo jezgro, odnosno važi:*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\Phi_n(t-x)dt. \tag{2.12}$$

Na osnovu leme 2.1 lako se pokazuje sledeća lema.

**Lema 2.2.** *Fejerovo jezgro ima sledeća svojstva:*

1. $\Phi_n(x)$ *je parna, neprekidna,* $2\ell-$*periodična funkcija za koju je* $\Phi_n(0) = \dfrac{n+1}{2}$

2. $\Phi_n(x) = \dfrac{\sin^2 \frac{n+1}{2}\frac{\pi x}{\ell}}{2(n+1)\sin^2 \frac{\pi x}{2\ell}},\ \forall x \neq 2k\ell,\ k \in \mathbb{Z}$

3. $\Phi_n(x) \geq 0,\ \forall x$

4. $\dfrac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \Phi_n(x)dx = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{\delta\leq|x|\leq\ell} \Phi_n(x) = 0,\ \forall \delta \in (0, \ell).$

[17] Leopold Fejer (1880-1959)- mađarski matematičar

**Teorema 2.9.** ***(Fejer)*** *Ako je funkcija $f$ neprekidna na segmentu $[-\ell, \ell]$ i važi $f(-\ell) = f(\ell)$, tada niz Fejerovih suma ravnomerno konvergira na segmentu $[-\ell, \ell]$ ka funkciji $f$.*

Kao neposrednu posledicu Fejerove teoreme imamo Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji neprekidnih funkcija trigonometrijskim polinomima.

**Teorema 2.10.** ***(Vajerštras[18])*** *Ako je funkcija $f$ neprekidna na segmentu $[-\ell, \ell]$ i ako je $f(-\ell) = f(\ell)$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom $T(x)$ tako da je $\forall x \in [-\ell, \ell]$*

$$\left|f(x) - T(x)\right| < \varepsilon.$$

**Teorema 2.11.** ***(Vajerštras)*** *Ako je funkcija $f$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji algebarski polinom $P(x)$ tako da je $\forall x \in [a, b]$*

$$\left|f(x) - P(x)\right| < \varepsilon.$$

Klasa neprekidnih funkcija može se sa željenim stepenom tačnosti opisati klasom algebarskih polinoma. Pritom se svaka neprekidna funkcija može prikazati analitički u obliku ravnomerno konvergentnog reda čiji su članovi polinomi.
Dakle, za neprekidnu funkciju $f \in \mathcal{C}[a, b]$ i dato $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, postoji niz $P_n$ tako da je prema teoremi 2.11 za svako $x \in [a, b]$ $\left|f(x) - P_n(x)\right| < \varepsilon_n$ odakle sledi

$$P_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x), \;\; n \to \infty$$

te je stoga

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n+1}(x) - P_n(x)).$$

Poslednji red ravnomerno konvergira funkciji $f$ na $[a, b]$.

## 2.5 Zatvorenost trigonometrijskog sistema. Parsevalova jednakost

**Teorema 2.12.** *Osnovni trigonometrijski sistem funkcija je zatvoren u prostoru $R^2([-\ell, \ell])$.*

**Teorema 2.13.** *Za funkciju $f \in R^2([-\ell, \ell])$ važi Parsevalova jednakost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx$$

*a Furijeov red funkcije $f$ konvergira u srednjem na $[-\ell, \ell]$.*

Primenom Vajerštrasove teoreme može se pokazati da je osnovni trigonometrijski sistem funkcija potpun u $R^2([-\ell, \ell])$. Zaista, neka je $f \in R^2([-\ell, \ell])$ funkcija koja je ortogonalna sa svakim elementom osnovnog trigonometrijskog sistema. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom $T$ tako da je $\|f - T\| < \varepsilon$, $\forall x \in [-\ell, \ell]$. Kako je $\langle f, T \rangle = 0$, to je

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, T \rangle = \langle f, f - T \rangle \le \|f\| \|f - T\| < \varepsilon \|f\|$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon$ sledi da je $\|f\| = 0$, pa prema definiciji 1.17 osnovni trigonometrijski sistem je potpun u $R^2([-\ell, \ell])$.

[18] Karl Vajerštras (1815-1897)- nemački matematičar

**Primer 2.7.** *Data je funkcija* $f(x) = (\pi - |x|)^2$ *na* $[-\pi, \pi]$. *Dokazati da je*

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Funkcija je apsolutno integrabilna, te se može razviti u Furijeov red. Zbog parnosti funkcije je $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, a rešavanjem sledećih integrala dobijamo $a_0$ i $a_n$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}$$

Dakle, prema teoremi 2.7 sledi jednakost Furijeovog reda sa funkcijom $f$, odnosno red se poklapa sa $2\pi-$produženjem funkcije $f$ na celu realnu pravu

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx, \; x \in [-\pi, \pi]$$

Dalje, korišćenjem Parsevalove jednakosti sledi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^4 dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## 2.6 Diferenciranje i integraljenje Furijeovih redova

**Teorema 2.14.** *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu* $[-\ell, \ell]$, *pri čemu je* $f(-\ell) = f(\ell)$. *Ako je funkcija f deo po deo neprekidno diferencijabilna na* $[-\ell, \ell]$, *tada je*

$$f'(x) \sim \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} -na_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} + nb_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

*tj. Furijeov red izvoda funkcije f dobija se formalnim diferenciranjem Furijeovog reda za f.*

Sledeća tri rezultata su nam potrebna za dokaz teoreme koja ukazuje na mogućnost integracije Furijeovih redova.

**Lema 2.3.** *Neka funkcija f na segmentu* $\underline{[-\ell, \ell]}$ *ima neprekidne izvode zaključno do (k-1)-vog reda, pri čemu je* $f^{(j)}(-\ell) = f^{(j)}(\ell)$, $j = \overline{1, k-1}$. *Ako je* $f^{(k)}$, $k \geq 1$, *deo po deo neprekidna funkcija na* $[-\ell, \ell]$, *tada za Furijeove koeficijente funkcije f važe nejednakosti*

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \; |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \; n \in \mathbb{N}$$

*gde je* $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *niz pozitivnih brojeva za koje je red* $\sum \varepsilon_n^2$ *konvergentan.*

**Teorema 2.15.** *Ako su zadovoljeni uslovi prethodne leme, tada Furijeov red funkcije $f$ ravnomerno i apsolutno konvergira funkciji $f$ na segmentu $[-\ell, \ell]$ i važi ocena*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leq \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}} \tag{2.13}$$

*gde je $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva koji konvergira nuli.*

**Teorema 2.16.** ***(Vajerštrasov kriterijum)*** *Neka su članovi funkcionalnog reda $\sum f_n$ elementi prostora $Y^X$, gde je $Y$ Banahov prostor. Neka je brojni red $\sum a_n$ sa nenegativnim članovima konvergentan. Ako je $\|f_n(x)\| \leq a_n$ za svako $x \in X$ i svako $n \in \mathbb{N}$, tada je funkcionalni red $\sum f_n$ ravnomerno i apsolutno konvergentan na $X$, pri čemu je za svako $x \in X$*

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Teorema 2.17.** *Neka je funkcija $f$ neprekidna na segmentu $[-\ell, \ell]$ i neka je*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

*Tada je*

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)dx &= \int_0^t \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big)dx \\ &= \frac{a_0 t}{2} + \frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi t}{\ell} + \frac{b_n}{n}\Big(1 - \cos\frac{n\pi t}{\ell}\Big)\end{aligned}$$

*i red na desnoj strani poslednje jednakosti je ravnomerno konvergentan.*

Dokaz.

Funkcija

$$F(t) = \int_0^t \Big(f(x) - \frac{a_0}{2}\Big)dx$$

je neprekidna na segmentu $[-\ell, \ell]$ i pritom važi $F(\ell) = F(-\ell)$.

Funkcija $F$ ima neprekidan izvod tj. $F'(t) = f(t) - \dfrac{a_0}{2}$ je neprekidna funkcija na $[-\ell, \ell]$, pa na osnovu teoreme 2.15 Furijeov red funkcije $F$ ravnomerno konvergira ka njoj na $[-\ell, \ell]$.

Označimo sa $A_0, A_n$ i $B_n$, $n \in \mathbb{N}$, Furijeove koeficijente funkcije $F$. Tada je

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}. \tag{2.14}$$

Korišćenjem parcijalne integracije dobijamo da su koeficijenti oblika

$$A_n = -\frac{\ell}{n\pi} b_n; \quad B_n = \frac{\ell}{n\pi} a_n.$$

Dalje, kako je $F(0) = 0$, to je

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n = 0$$

odakle dobijamo

$$\frac{A_0}{2} = \frac{\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Koristeći lemu 2.3 imamo $|b_n| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{n}$, gde je $\varepsilon_n$ nula niz tako da $\sum \varepsilon_n^2 < \infty$, pa je odavde

$$\left|\frac{b_n}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Sada na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma 2.16 i na osnovu činjenice da je red $\sum \dfrac{1}{n^2}$ konvergentan sledi da red $\sum \dfrac{b_n}{n}$ ravnomerno konvergira. Konačno, zamenom dobijenih $A_0$, $A_n$ i $B_n$ u (2.14) sledi dokaz teoreme. $\diamondsuit$

# 3 Neki problemi Furijeovih redova

## 3.1 Vajlov kriterijum o jednakoraspodeljenosti

Neka je $x$ realan broj. Definišimo naredne dve funkcije

$$[x] := \max\{\alpha \in \mathbb{Z} | \alpha \leq x\}$$

$$\{x\} := x - [x]$$

Prva funkcija broju $x$ dodeljuje najveći ceo broj koji je manji ili jednak $x$. Vrednost ove funkcije u $x$ nazivamo **ceo deo broja** $x$. Druga funkcija broju $x$ dodeljuje broj koji je jednak razlici broja $x$ i njegovog celog dela i vrednost $\{x\}$ nazivamo **razlomljeni deo** broja $x$.

**Primer 3.1.** *Uzmimo brojeve* $x = 1.4121994$ *i* $y = -0.2032015$

$$[x] = 1; \ \ \{x\} = 0.4121994$$
$$[y] = -1; \ \ \{y\} = 0.7967995$$

Dalje, definišimo relaciju na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ tako što ćemo za dva broja $x, y \in \mathbb{R}$ reći da su u relaciji ako je njihova razlika $x - y \in \mathbb{Z}$. Nije teško pokazati da je ovo relacija ekvivalencije:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x - x = 0 \in \mathbb{Z}$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z}$
3. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x - y \in \mathbb{Z} \wedge y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Z}$

Činjenicu da za $x, y \in \mathbb{R}$ važi $x - y \in \mathbb{Z}$, zapisujemo kao $x \equiv y \pmod 1$.

Nije teško primetiti da u klasi ekvivalencije svakog realnog broja postoji jedinstven broj iz $[0, 1)$ i to je upravo broj $\{x\}$. U nastavku ćemo redukovanjem po modulu $\mathbb{Z}$ podrazumevati da umesto $x$ posmatramo $\{x\}$.

Posmatrajmo sada niz $x, 2x, 3x, ...$ gde je $x \neq 0$ proizvoljan realan broj. Postavlja se pitanje šta se dešava kada ovaj niz redukujemo po modulu $\mathbb{Z}$, tj. šta se dešava sa nizom $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, ...$

Neke zaključke nam daje sledeća teorema.

**Teorema 3.1.** *Neka je dat* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tada:*

*i) Ako je* $x \in \mathbb{Q}$ *tada je niz* $(\{nx\})_{n \in \mathbb{N}}$ *sačinjen od konačno mnogo različitih članova niza.*

*ii) Ako je* $x \in \mathbb{I}$ *tada su svi članovi niza* $(\{nx\})_{n \in \mathbb{N}}$ *međusobno različiti.*

Dokaz.

i) Pretpostavimo da $x \in \mathbb{Q}$. Sledi da je moguće predstaviti broj $x$ u obliku $x = \frac{p}{q}$, gde je $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ i $NZD(p, q) = 1$. Tada je $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{nx\} = \{(n + q)x\}$. Zaista, kako je $nx = n\frac{p}{q}$ i $(n + q)x = n\frac{p}{q} + p$ možemo zaključiti da je $\{nx\} = \{(n + q)x\}$. Dakle, niz je sačinjen od brojeva

$$\left\{\frac{p}{q}\right\}, \left\{\frac{2p}{q}\right\}, ..., \left\{\frac{(q-1)p}{q}\right\}, \left\{\frac{qp}{q}\right\} = \{p\} = 0$$

ii) Pretpostavimo da postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$ tako da je $\{n_1 x\} = \{n_2 x\}$, drugim rečima postoji $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tako da je $n_1 x - n_2 x = y$, tj. $x = \dfrac{y}{n_1 - n_2}$ odakle sledi da $x \in \mathbb{Q}$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $x \in \mathbb{I}$. $\diamondsuit$

Kroneker je pokazao da ako je $x \in \mathbb{I}$, tada je $\{\{nx\} | n \in \mathbb{N}\}$ gust skup u intervalu $[0, 1)$, tj. u ma kom podintervalu od $[0, 1)$ sadržan je bar jedan (beskonačno mnogo čak) element skupa $\{\{nx\} | n \in \mathbb{N}\}$. Mi ćemo u nastavku dobiti ovaj rezultat kao posledicu.

**Definicija 3.1.** *Za niz brojeva $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u $[0, 1)$ kažemo da je jednakoraspodeljen ako je za svaki interval $(a, b) \subseteq [0, 1)$*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\Big| \{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\} \Big|}{N} = b - a$$

*gde $\Big| \{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\} \Big|$ označava broj elemenata skupa $\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\}$.*

Ovo zapravo znači da za dovoljno veliko $N$ odnos broja članova niza $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do $N-$tog koji pripadaju intervalu $(a, b)$ i $N$ jednak je odnosu dužina intervala $(a, b)$ i $[0, 1)$.

U nastavku ćemo dati par zanimljivih tvrđenja.

**Lema 3.1.** *Neka je $f$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom 1 i neka je $x$ iracionalan broj, tada je*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(nx) \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx, \ N \to \infty.$$

Dokaz.

Proverimo prvo tačnost tvrđenja kada je $f$ jedna od funkcija $f_k(t) = e^{i2\pi kt}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neka je $f_0(t) = 1$, tada za svako $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_0(nx) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1 = \frac{N}{N} = 1 = \int_0^1 dt$$

Za $f_k(t) = e^{i2\pi kt}$, gde je $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dobijamo:

$$\int_0^1 f_k(t) dt = \int_0^1 e^{i2\pi kt} dt = 0.$$

Kako je $x \in \mathbb{I}$ samim tim je i $kx \in \mathbb{I}$, pa važi $|e^{i2\pi kx}| < 1$. Sada na osnovu ovoga sledi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_k(nx) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi nkx} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^{i2\pi kx})^n \\
&= \frac{1}{N} \Big[ \frac{1 - e^{i2\pi(N+1)kx}}{1 - e^{i2\pi kx}} - 1 \Big] \\
&= \frac{e^{i2\pi kx}}{N} \cdot \frac{1 - e^{i2\pi kNx}}{1 - e^{i2\pi kx}}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_k(nx) = \frac{e^{i2\pi kx}}{N}\cdot\frac{1-e^{i2\pi kNx}}{1-e^{i2\pi kx}} \longrightarrow 0,\ N\to\infty$$

pa sledi da je tvrđenje zadovoljeno za $f_k(t)=e^{i2\pi kt},\ k\in\mathbb{Z}$.

Ako funkcije $f$ i $g$ zadovoljavaju lemu, tada će i njihova linearna kombinacija zadovoljiti lemu tj. $\alpha f+\beta g$, gde su $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ proizvoljni. Dakle, imamo da tvrđenje važi za sve trigonometrijske polinome. Neka je sada $\varepsilon>0$ proizvoljno. Ako je $f$ proizvoljna neprekidna periodična funkcija sa periodom 1, na osnovu Vajerštrasove teoreme 2.10 postoji trigonometrijski polinom $P$ tako da

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Takođe, na osnovu prethodnog možemo zaključiti da je za dovoljno veliko $N$

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(nx)-\int_0^1 P(t)dt\Big|<\frac{\varepsilon}{3}$$

te je s toga

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(nx)-\int_0^1 f(t)dt\Big| &\le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big|f(nx)-P(nx)\Big|+\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(nx)-\int_0^1 P(t)dt\Big|\\ &+\int_0^1\Big|P(t)-f(t)\Big|dt<\frac{1}{N}\cdot N\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\int_0^1 dt=\varepsilon.\end{aligned}$$

Sada iz proizvoljnosti broja $\varepsilon>0$ sledi dokaz našeg tvrđenja. $\diamondsuit$

Tvrđenje koje smo upravo pokazali nam govori da je za neprekidnu i periodičnu funkciju sa periodom 1 dovoljno znati vrednost funkcije u tačkama niza $\{nx\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde $x\in\mathbb{I}$ da bismo izračunali integral date funkcije na intervalu $[0,1)$. Iz činjenice da funkcija ima periodu 1, može se zaključiti da je $\mathbf{f(nx)=f\big(nx-[nx]\big)=f(\{nx\})}$. Dakle, ovo pomoćno tvrđenje može se formulisati i na sledeći način:

Neka je $f$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom 1 i $x\in\mathbb{I}$, tada je

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{nx\}),\ N\to\infty.$$

**Kao posledica narednog tvrđenja dobija se da je $(\{nx\})_{n\in\mathbb{N}}$ gust u $[0,1)$.**

**Lema 3.2.** *Neka je $x\in\mathbb{I}$, tada je niz razlomljenih delova $\{x\},\{2x\},...,\{nx\},...$ jednakoraspodeljen u $[0,1)$.*

Dokaz.

Neka je $(a,b)$ proizvoljan fiksirani podinterval od $[0,1)$ i neka je $\chi_{(a,b)}$ karakteristična funkcija ovog intervala definisana na $[0,1)$:

$$\chi_{(a,b)}(t)=\begin{cases}1, & t\in(a,b)\\ 0, & t\in[0,1)\setminus(a,b)\end{cases}$$

Periodično ćemo produžiti ovu funkciju na $\mathbb{R}$ i to proširenje ćemo i dalje označavati sa $\chi_{(a,b)}$. Na osnovu definicije funkcije $\chi_{(a,b)}$, odnosno njenog proširenja, nije teško zaključiti da je

$$\Big|\{1 \leq n \leq N|\{nx\} \in (a,b)\}\Big| = \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(nx)$$

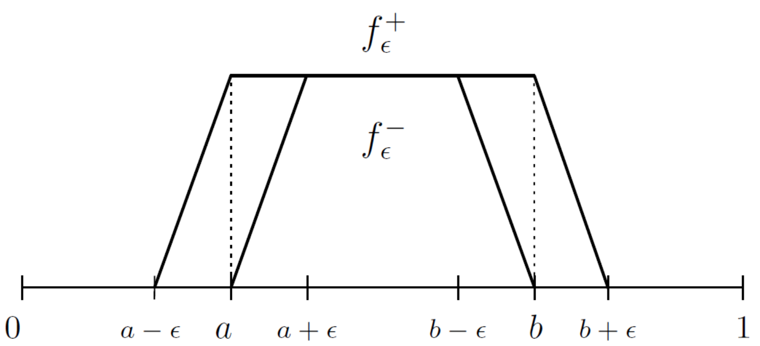
pa se dokaz svodi na dokazivanje granične vrednosti

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(nx) \longrightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t)dt,\ N \to \infty.$$

Ovim se poteškoće u radu sa razlomljenim delovima svode na jezik analize.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno malo tako da je $a+\varepsilon,\ b-\varepsilon \in (a,b)$ i $a-\varepsilon,\ b+\varepsilon \in [0,1)$. Definišimo funkcije $f_\varepsilon^-$ i $f_\varepsilon^+$ na sledeći način

$$f_\varepsilon^+(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a-\varepsilon) \\ \dfrac{t-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & t \in [a-\varepsilon, a) \\ 1, & t \in [a,b) \\ \dfrac{b+\varepsilon-t}{\varepsilon}, & t \in [b, b+\varepsilon) \\ 0, & t \in [b+\varepsilon, 1) \end{cases} \qquad f_\varepsilon^-(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a) \\ \dfrac{t-a}{\varepsilon}, & t \in [a, a+\varepsilon) \\ 1, & t \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon) \\ -\dfrac{t-b}{\varepsilon}, & t \in [b-\varepsilon, b) \\ 0, & t \in [b, 1) \end{cases}$$




zatim ih periodično produžimo na $\mathbb{R}$ i njihova periodična produženja označimo na isti način $f_\varepsilon^-,\ f_\varepsilon^+$.

Funkcija $f_\varepsilon^+$ ograničava odozgo funkciju $\chi_{(a,b)}$, dok $f_\varepsilon^-$ ograničava odozdo funkciju $\chi_{(a,b)}$ i obe se poklapaju sa funkcijom $\chi_{(a,b)}$ svuda sem na intervalima dužine $2\varepsilon$. Takođe, funkcije $f_\varepsilon^-$ i $f_\varepsilon^+$ su neprekidne sa periodom 1 što omogućava primenu prethodnog tvrđenja.

Dakle, važe nejednakosti

$$f_\varepsilon^-(t) \leq \chi_{(a,b)}(t) \leq f_\varepsilon^+(t),\ t \in \mathbb{R}$$

i

$$b-a-2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(t)dt$$

i

$$\int_0^1 f_\varepsilon^+(t)dt \leq b-a+2\varepsilon.$$

Ako sa $S_N$ označimo $S_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(nx)$ tada iz gore navedenih nejednakosti dobijamo

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(nx) \leq S_N \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(nx)$$

Primenom prethodne leme dobijamo

$$b-a-2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(t)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(nx) = \lim_{N\to\infty}\inf\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(nx) \leq \lim_{N\to\infty}\inf S_N$$

kao i

$$b-a+2\varepsilon \geq \int_0^1 f_\varepsilon^+(t)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(nx) = \lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(nx) \geq \lim_{N\to\infty}\sup S_N.$$

Sada iz proizvoljnosti broja $\varepsilon$ sledi

$$b-a \leq \lim_{N\to\infty}\inf S_N \leq \lim_{N\to\infty}\sup S_N \leq b-a$$

tj.

$$\lim_{N\to\infty} S_N = b-a = \int_a^b dt = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t)dt. \quad \diamondsuit$$

Sledeća posledica je uopštenje ove leme.

**Posledica 3.1.1.** *Ako je $f$ Riman integrabilna na $[0,1]$ i periodična sa periodom 1 i $x \in \mathbb{I}$, tada je*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(nx) \longrightarrow \int_0^1 f(t)dt,\ N\to\infty.$$

Pretpostavimo sada da je proizvoljan niz $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1)$ jednakoraspodeljen. Tada na osnovu činjenice da je svugde gust u $[0,1)$ moguće je dokazati

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k\xi_n} \longrightarrow \int_0^1 e^{i2\pi kt}dt,\ N\to\infty.$$

U slučaju kada je $k\neq 0$, onda

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k\xi_n} \longrightarrow 0,\ N\to\infty.$$

Takođe, nije teško pokazati da je za svaki podinterval $(a,b)\subseteq[0,1)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(\xi_n) = b-a$$

U skladu sa ovim zaključujemo da važi:

## Vajlov [19] kriterijum

Niz realnih brojeva $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1)$ je jednakoraspodeljen akko za svako $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ važi:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k\xi_n} \longrightarrow 0,\;\; N\to\infty.$$

**Primer 3.2.** *Pokažimo da niz $(\{nx\})_{n\in\mathbb{N}}$, kada je $x\in\mathbb{Q}$, nije jednakoraspodeljen.*

Kako je $x = \dfrac{p}{q}$ za neke $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ i $NZD(p,q)=1$ imamo da niz $(\{nx\})_{n\in\mathbb{N}}$ ima samo $q$ članova, te ukoliko bi niz bio jednakoraspodeljen, onda bi i njegov podniz bio jednakoraspodeljen, pa bi na osnovu Vajlovog kriterijuma važilo:

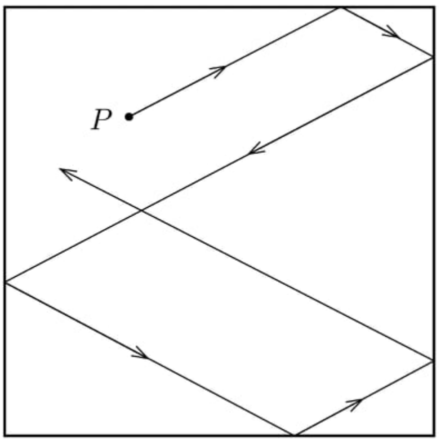
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kq}\sum_{j=1}^{kq} e^{i2\pi\{jx\}} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kq}k\Big(\sum_{j=1}^{q} e^{i2\pi\{jx\}}\Big) = \sum_{j=1}^{q}\frac{e^{i2\pi\{jx\}}}{q} \neq 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija, odnosno sledi da niz nije jednakoraspodeljen.

Navedimo jednu lepu interpretaciju svojstava raspodeljenosti niza $\{n\gamma\}$.

Posmatrajmo kvadrat sa stranicama koje imaju svojstvo reflektujućeg ogledala. Unutar kvadrata iz tačke $P$ izvire svetlosni zrak koji se kreće u njemu odbijajući se o stranice tako da je upadni ugao zraka jednak odbojnom uglu zraka.

*Kakva je putanja zraka?*




Kako bi se dao odgovor na ovo pitanje, glavna ideja je posmatrati mrežu formiranu od uzastopnog odbijanja zraka o stranice kvadrata. Polazna putanja zraka unutar kvadrata se uz adekvatan izbor osa može predstaviti sa

$$P + (x, \gamma x)$$

[19] Herman Vajl (1885-1955)- nemački matematčar

gde je $\gamma = tg(\varphi)$ određeno uglom koji zrak zaklapa sa horizontalnom osom. Kao rezultat se dobija da će putanja biti zatvorena i periodična ili će ona biti gusta unutar kvadrata. Prvi slučaj se dešava ako i samo ako je koeficijent pravca polazne putanje racionalan broj, dok će se drugi slučaj dobiti kada je $\gamma$ iracionalan broj (rezultat da putanja zraka predstavlja gust skup u kvadratu slediće iz Kronekerove teoreme).

## 3.2 Didonin problem ili izoperimetrijski problem

Legenda kaže da je feničanska princeza Didona nakon smrti njenih roditelja i svađe sa svojim bratom Pigmalionom, uzela veliku količinu novca i pobegla u Severnu Afriku sa ciljem da izgradi grad. Na tom putu joj se našao tamošnji vladar Jarbas, koji u početku nije želeo da proda zemlju Didoni. Međutim, Didona je bila dobar pregovarač i ponudila je određenu sumu novca Jarbasu za zemlju koju je moguće ograničiti samo volovljom kožom. Nakon pristanka Jarbasa, ona zemlju nije prekrila kožom, već je kožu isekla na sitne niti od kojih je načinila konopac i njime ograničila znatno veću površinu zemlje za izgradnju Kartagine. Didona je pri ograničavanju imala problem kako da ograniči što veću površinu, koji je rešen uz pomoć mudraca koje je povela sa sobom. Ovaj problem je poznat pod imenom **Didonin problem** ili u matematici kao **izoperimetrijski problem**. Opšta matematička definicija ovog problema glasi:

**Među prostim zatvorenim krivama iste dužine, pronaći krivu koja ograničava najveću površinu**.

U nastavku ćemo dati jedno od rešenja ovog problema, koje je objavio **Hurvic**[20] **(1901)**, ali najpre hajde da kažemo nešto o krivama.

### Krive u $\mathbb{R}^n$

Kriva u prostoru $\mathbb{R}^n$ je neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Ako je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ kriva, tada postoje koordinate $x_1, x_2, ..., x_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tako da za svako $t$ važi $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$. Očigledno, neprekidnost funkcije $\gamma$ na $[a, b]$ jednaka je neprekidnosti svih koordinatnih funkcija $x_1, ..., x_n$ na $[a, b]$.

**Orijentacija krive** zavisi od rasta parametra, drugim rečima $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ i $t_1 < t_2$, važi da je kriva $\gamma$ orijentisana od tačke $\gamma(t_1)$ ka tački $\gamma(t_2)$. Ako postoje tačke $t_1, t_2 \in [a, b]$, takve da $t_1 \neq t_2$ i $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = A$, onda je A tačka **samopreseka** krive $\gamma$. Specijalno, ako je $\gamma(a) = \gamma(b) = A$, onda je tačka A početak i kraj krive $\gamma$, ali nije tačka samopreseka. Dalje, ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$, onda kažemo da je $\gamma$ **zatvorena** kriva. Kriva $\gamma$ je **prosta**, ako nema tačaka samopreseka.

Funkcija $\gamma = (x_1, x_2, ...x_n)$ je **diferencijabilna** akko su sve koordinatne funkcije diferencijabilne tj. $\gamma' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$. Kriva $\gamma$ je **neprekidno diferencijabilna** akko $\gamma'$ postoji i neprekidna je funkcija. Za krivu $\gamma$ kažemo da je **glatka** ako je $\gamma'$ neprekidna funkcija i $\gamma'(t) \neq 0$ za svako $t \in [a, b]$. Kriva je **deo po deo glatka**, ako postoji podela segmenta $[a, b]$ tj. $\mathcal{P} : a = s_1 < ... < s_m = b$, tako da je kriva $\gamma$ glatka na svakom od segmenata $[s_{j-1}, s_j]$, $j = \overline{1, m}$.

U skladu s ovim dolazimo do termina **rektificijabilnosti** odnosno kriva ima dužinu i računa se na sledeći način:

[20]Adolf Hurvic (1859-1919)- nemački matematičar

**Teorema 3.2.** *Neka je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ glatka kriva. Tada je $\gamma$ rektificijabilna kriva i njena dužina je*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2} dt.$$

**Teorema 3.3.** *Ako je $\gamma$ deo po deo glatka kriva u $\mathbb{R}^n$, tada je $\gamma$ rektificijabilna kriva i njena dužina je*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2} dt.$$

*pri čemu zanemarujemo konačno mnogo tačaka $s_j$ u kojima ne postoji $\gamma'(s_j)$.*

Za dokaz izoperimetrijskog problema od značaja nam je **Grinova** [21] **formula**:

**Teorema 3.4.** *Neka je $C$ pozitivno orijentisana, deo po deo glatka, prosta zatvorena kriva u ravni i neka je $D$ oblast ograničena krivom $C$. Ako funkcije $P$ i $Q$ imaju neprekidne parcijalne izvode na otvorenoj oblasti koja sadrži $D$ onda*

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big) dx dy.$$

Iz Grinove formule se lako dokazuje da je površina oblasti $D$ koja je ograničena krivom $C$ data formulom:

$$P(D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

## Rešenje izoperimetrijskog problema

Dokaz izvodimo za slučaj kada je dužina krivih jednaka jedinici, a parametrizacija data po luku krive, dok će svi ostali slučajevi slediti iz pokazanog.

Neka je $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ deo po deo glatka prosta zatvorena kriva, tj. za $t \in [0, 1]$ je $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Kako je parametrizacija data po luku, to je za svako $t \in [0, 1]$ : $\big|\big(x'(t), y'(t)\big)\big| = 1$ odnosno $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$, pa je

$$\int_0^1 x'^2(t) + y'^2(t) dt = 1.$$

Površinu ograničenu krivom $\gamma$ možemo izračunati na osnovu Grinove formule

$$P_\gamma = \frac{1}{2} \Big| \int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt \Big|.$$

Funkcije $x(t), y(t)$ su neprekidno diferencijabilne i periodične sa periodom 1, a kako je $\gamma$ zatvorena kriva važi $x(0) = x(1)$ i $y(0) = y(1)$, pa se one mogu razviti u Furijeov red

[21] Džordž Grin (1793-1841)- engleski matematičar i fizičar

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i2n\pi t} \tag{3.1}$$

$$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{i2n\pi t} \tag{3.2}$$

gde su, ako pogledamo (2.7), Furijeovi koeficijenti dati u kompleksnom obliku:

$$a_n = \int_0^1 x(t)e^{-i2n\pi t}dt$$

$$b_n = \int_0^1 y(t)e^{-i2n\pi t}dt$$

Slično, zbog neprekidnosti funkcija $x'(t)$, $y'(t)$ i periodičnosti sa periodom 1, kao i zbog zatvorenosti krive, ove funkcije možemo razviti u Furijeov red koji se dobija formalnim diferenciranjem redova datim u (3.1) i (3.2):

$$x'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i2n\pi a_n e^{i2n\pi t}$$

$$y'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i2n\pi b_n e^{i2n\pi t}$$

Kako je sistem $\{e^{i2\pi kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ zatvoren u prostoru $\mathcal{C}[0,1]$, tada on zadovoljava Parsevalovu jednakost. Prema tome, imamo da važi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|i2n\pi a_n|^2 + |i2n\pi b_n|^2) = \int_0^1 x'^2(t) + y'^2(t)dt$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4n^2\pi^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{4\pi^2} \tag{3.3}$$

Zamenom prethodnih rezultata u $P_\gamma$ dobijamo:

$$P_\gamma = \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt\Big|$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{Z}}} \Big(i2\pi k a_n b_k - i2\pi n a_n b_k\Big)e^{i2\pi(n+k)t}dt\Big|$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{Z}}} \int_0^1 (i2\pi k a_n b_k - i2\pi n a_n b_k\Big)e^{i2\pi(n+k)t}\ dt\Big|$$

Dalje, zbog ortonormiranosti sistema $\{e^{i2\pi kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sledi da su svi članovi u dvostrukoj sumi nula sem onih za koje je $n = -k$. Napomenimo još i da važi $\overline{a_n} = a_{-n}$, $\overline{b_n} = b_{-n}$ te imamo:

$$P_\gamma = \frac{1}{2}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(i2\pi n a_n\overline{b_n} + i2\pi n a_n\overline{b_n}\Big)\Big| = 2\pi\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n\overline{b_n}\Big|. \tag{3.4}$$

Posmatrajmo sada nejednakosti koje su zadovoljene za svaki ceo broj $n$:

$$2|n||a_n\overline{b_n}| \leq 2n^2|a_n\overline{b_n}| \leq n^2(|a_n|^2 + |\overline{b_n}|^2).$$

Zamenom u (3.4) i korišćenjem (3.3) dobija se

$$P_\gamma \leq \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{\pi}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}$$

takozvana **Poenkareova**[22] **nejednakost**.

Prirodno sledi pitanje, da li je moguće da važi jednakost tj. $P_\gamma = \frac{1}{4\pi}$ i ukoliko može, za koju krivu to važi?

Da bi važila jednakost mora da važi $2|n||a_n\overline{b_n}| = 2n^2|a_n\overline{b_n}|$, a odavde sledi da je $n = 0, \pm 1$. Iz $2n^2|a_n\overline{b_n}| = n^2(|a_n|^2 + |\overline{b_n}|^2)$ imamo da je $|a_n| = |\overline{b_n}|$. Dakle,

$$|a_1| = |\overline{a_1}| = |b_1| = |\overline{b_1}|.$$

Ako upotrebimo ovaj rezultat u (3.3) imamo da je

$$\frac{1}{4\pi^2} = |a_1|^2 + |\overline{a_1}|^2 + |b_1|^2 + |\overline{b_1}|^2 = 4|a_1|^2$$
$$\Longrightarrow |a_1| = \frac{1}{4\pi}$$

Sada funkcije $x(t),\ y(t)$ možemo zapisati u obliku

$$x(t) = \overline{a_1}e^{-i2\pi t} + a_0 + a_1 e^{i2\pi t}$$

$$y(t) = \overline{b_1}e^{-i2\pi t} + b_0 + b_1 e^{i2\pi t}$$

dok $a_1,\ b_1$ možemo zapisati kao

$$a_1 = \frac{1}{4\pi}e^{i2\pi\alpha}$$

$$b_1 = \frac{1}{4\pi}e^{i2\pi\beta}$$

gde je $|e^{i2\pi\alpha}| = |e^{i2\pi\beta}| = 1$ za $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Primenom Ojlerove formule $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ i primenom prethodnih rezultata u (3.4) zahtevajući da $P_\gamma = \frac{1}{4\pi}$ dobija se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} &= 2\pi|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1| \\
\frac{1}{4\pi} &= \frac{1}{8\pi}|e^{i2\pi(\alpha-\beta)} - e^{-i2\pi(\alpha-\beta)}| \\
\frac{1}{4\pi} &= \frac{1}{8\pi}|2i\sin 2\pi(\alpha-\beta)| \\
\frac{1}{4\pi} &= \frac{1}{4\pi}|\sin 2\pi(\alpha-\beta)| \\
1 &= |\sin 2\pi(\alpha-\beta)|
\end{aligned}$$

[22] Anri Poenkare (1854-1912)- francuski matematičar

odakle rešavanjem sledi da je $\alpha - \beta = \frac{2k+1}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$.

Konačno, sređivanjem $x(t)$ i $y(t)$ imamo da je

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \overline{a_1} e^{-i2\pi t} + a_1 e^{i2\pi t} \\ &= a_0 + \frac{1}{4\pi}\left(e^{-2\pi i(\alpha+t)} + e^{2\pi i(\alpha+t)}\right) \\ &= a_0 + \frac{1}{4\pi} \cdot 2\cos 2\pi(\alpha+t) \\ &= a_0 + \frac{\cos 2\pi(\alpha+t)}{2\pi}; \\ y(t) &= b_0 + \frac{\cos 2\pi(\beta+t)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Međutim zamenom $\beta = \alpha - \frac{2k+1}{4}$ u

$$\begin{aligned} \cos 2\pi(\beta+t) &= \cos\left(2\pi(\alpha+t) - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \\ &= \cos 2\pi(\alpha+t)\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) + \sin 2\pi(\alpha+t)\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \\ &= (-1)^k \sin 2\pi(\alpha+t) \end{aligned}$$

sledi da je

$$y(t) = b_0 \pm \frac{\sin 2\pi(\alpha+t)}{2\pi}. \tag{3.5}$$

Odnosno, znak u (3.5) zavisi od parnosti broja $k$ pri izboru ugla $\beta$.

Dakle, sva rešenja izoperimetrijskog problema su **kružnice** poluprečnika $\frac{1}{2\pi}$ čije su jednačine gore navedene, a od vrednosti $\alpha$ i znaka uz sinus zavisi orijentacija tog kruga.

## 3.3 Neprekidna nigde diferencijabilna funkcija

Znamo mnogo primera neprekidnih funkcija koje nisu diferencijabilne u jednoj tački, jedna takva je $f(x) = |x|$. Takođe, nije teško definisati funkciju koja je neprekidna za bilo koji najviše prebrojiv podskup realnih brojeva i nigde diferencijabilna na tom konačnom skupu.

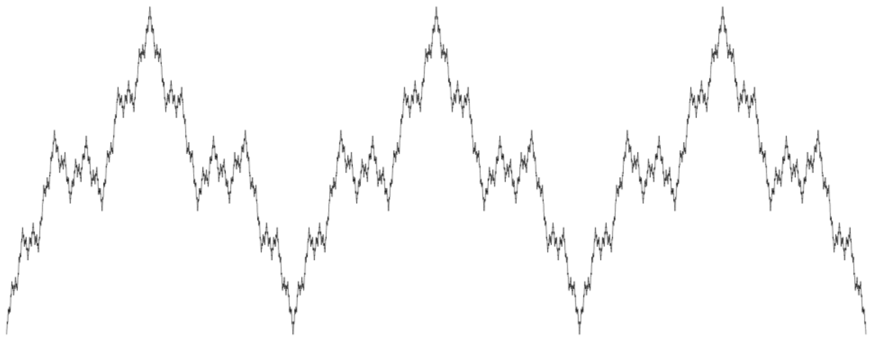
Riman je tvrdio da je jedna takva funkcija data redom

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

međutim on nikada svoju tvrdnju nije potkrepio dokazom. Ovo pitanje je zaintrigiralo mnoge, pa i Vajerštrasa koji je želeo da pronađe primer jedne ovakve funkcije, što mu je pošlo za rukom 1872. godine. On je pokazao da ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $b \in (0,1)$ i $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ za koje važi $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$, tada funkcija

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos a^n x$$

nije nigde diferencijabilna, što se može naslutiti sa slike:



**Hardi**[23] je 1916. godine pokazao da $R(x)$ nije diferencijabilna u tačkama $\gamma \cdot \pi$, gde je $\gamma$ proizvoljan iracionalan broj i u nekim tačkama $\alpha \cdot \pi$ gde je $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Rezultati su govorili u Rimanovu korist sve dok 1969. **Gerver**[24] nije u potpunosti otklonio sumnju dokazavši da je $R(x)$ zapravo diferencijabilna u tačkama $\dfrac{\pi p}{q}$ gde su $p, q$ neparni celi brojevi, a u svim ostalim tačkama nije.

Definišimo tzv. **odloženu sredinu** pre nego nastavimo dalje. Neka je dat Furijeov red

$$g(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

apsolutno integrabilne funkcije $g$ na $[-\pi, \pi]$ gde su $a_n,\ n \in \mathbb{Z},$ Furijeovi koeficijenti dati u kompleksnom obliku

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx.$$

Delimična suma i Fejerova suma su nam dobro poznate iz zapisa (2.8) i (2.10) pa ih obeležimo sa:

$$S_N(x; g) = \sum_{|n| \leq N} a_n e^{inx}$$

$$\sigma_N(x; g) = \frac{S_0(x; g) + ... + S_N(x; g)}{N + 1}$$

Odložena sredina se definiše preko Fejerove sume kao

$$\Delta_N(x; g) = 2\sigma_{2N-1}(x; g) - \sigma_{N-1}(x; g).$$

Transformišimo sada Fejerovu sumu:

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x; g) &= \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^{N} \sum_{|k| \leq l} a_k e^{ikx} \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{|n| \leq N} (N + 1 - |n|) a_n e^{inx} \\
&= \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{inx}
\end{aligned}$$

[23]Godfri H. Hardi (1877-1947)- engleski matematičar
[24]Džozef Gerver (1924-1996)- američki pronalazač i biznismen

Na osnovu prethodnog može se transformisati i odložena sredina:

$$\begin{aligned}\Delta_N(x;g) &= 2\sum_{|n|\le 2N}\Big(1-\frac{|n|}{2N}\Big)a_n e^{inx} - \sum_{|n|\le N}\Big(1-\frac{|n|}{N}\Big)a_n e^{inx}\\ &= \sum_{|n|\le N}\Big[2\Big(1-\frac{|n|}{2N}\Big)a_n e^{inx} - \Big(1-\frac{|n|}{N}\Big)a_n e^{inx}\Big] + 2\sum_{N<|n|\le 2N}\Big(1-\frac{|n|}{2N}\Big)a_n e^{inx}\\ &= \sum_{|n|\le N}\Big(2-\frac{|n|}{N}-1+\frac{|n|}{N}\Big)a_n e^{inx} + \sum_{N<|n|\le 2N}\Big(2-\frac{|n|}{N}\Big)a_n e^{inx}\\ &= \sum_{|n|\le N}a_n e^{inx} + \sum_{N<|n|\le 2N}\Big(2-\frac{|n|}{N}\Big)a_n e^{inx}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Teorema 3.5.** *Neka je $g$ neprekidna $2\pi-$periodična funkcija koja je diferencijabilna u nekoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$, tada je*

$$\sigma'_N(g)(x_0) = O(\log N)$$

*i*

$$\Delta'_N(g)(x_0) = O(\log N).$$

Dokaz.

Diferenciranjem izraza (2.12) u tački $x_0$, tj. diferenciranjem $\sigma_N(g)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(x_0-t)g(t)dt$ i uvođenjem smene za $s = x_0 - t$ dobijamo

$$\sigma'_N(g)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_N(x_0-t)g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_N(t)g(x_0-t)dt.$$

Na osnovu leme 2.2 imamo da je $\Phi_N(t)$ parna funkcija, te je stoga $\Phi'_N(t)$ neparna funkcija, pa važi

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_N(t)dt = 0.$$

Dakle, kako je i $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_N(t)g(x_0)dt = 0$ možemo zapisati

$$\sigma'_N(g)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_N(t)\big[g(x_0-t)-g(x_0)\big]dt.$$

S obzirom da je funkcija $g$ diferencijabilna u $x_0$ imamo

$$\big|\sigma'_N(g)(x_0)\big| \le C\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi'_N(t)||t|dt,\ C>0. \tag{3.7}$$

Pokažimo sada da $\Phi'_N(t)$ možemo ograničiti na dva načina:

$$\big|\Phi'_N(t)\big| \le A(N+1)^2;\ \ \big|\Phi'_N(t)\big| \le \frac{A}{|t|^2},\ A\ge 0.$$

Fejerovo jezgro $\Phi_N(t)$ je trigonometrijski polinom reda (N+1) čiji su koeficijenti ograničeni sa 1, pa je $\Phi'_N(t)$ trigonometrijski polinom čiji su koeficijenti manji od (N+1), odnosno sledi da je prva nejednakost

$$\left|\Phi'_N(t)\right| \leq A_1(N+1)^2,\ A_1 > 0.$$

U lemi 2.2 važi da je

$$\Phi_N(t) = \frac{\sin^2 \dfrac{(N+1)t}{2}}{2(N+1)\sin^2 \dfrac{t}{2}}.$$

Diferenciranjem po $t$ obeju strana prethodne jednakosti:

$$\begin{aligned}
\Phi'_N(t) &= \frac{\left(\sin^2 \dfrac{(N+1)t}{2}\right)' \cdot 2(N+1)\sin^2 \dfrac{t}{2} - \sin^2 \dfrac{(N+1)t}{2} \cdot \left(2(N+1)\sin^2 \dfrac{t}{2}\right)'}{4(N+1)^2 \sin^4 \dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{2(N+1)^2 \sin \dfrac{(N+1)t}{2} \cos \dfrac{(N+1)t}{2} \sin^2 \dfrac{t}{2}}{4(N+1)^2 \sin^4 \dfrac{t}{2}} - \frac{2(N+1)\sin \dfrac{t}{2} \cos \dfrac{t}{2} \sin^2 \dfrac{(N+1)t}{2}}{4(N+1)^2 \sin^4 \dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{\sin{(N+1)t}}{4\sin^2 \dfrac{t}{2}} - \frac{\sin^2 \dfrac{(N+1)t}{2} \cos \dfrac{t}{2}}{2(N+1)\sin^3 \dfrac{t}{2}}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Dalje, ako iskoristimo činjenice da je $\left|\sin \dfrac{(N+1)t}{2}\right| \leq C(N+1)|t|$ i $\left|\sin \dfrac{t}{2}\right| \geq c|t|$ gde je $|t| \leq \pi$ i $c > 0$, nije teško zaključiti da (3.8) možemo ograničiti sa $\dfrac{A_2}{|t|^2}$ za neko $A_2 > 0$.

Uzimajući da je $A = \max\{A_1, A_2\}$ dobijamo tražene nejednakosti. Znajući sada ovo ako se vratimo u (3.7) sledi da je:

$$\begin{aligned}
\left|\sigma'_N(g)(x_0)\right| &\leq C \int\limits_{\pi \geq |t| \geq 1/(N+1)} \left|\Phi'_N(t)\right||t|dt \ + \ C \int\limits_{|t|<1/(N+1)} \left|\Phi'_N(t)\right||t|dt \\
&\leq C \cdot A \int\limits_{\pi \geq |t| \geq 1/(N+1)} \frac{1}{|t|}dt \ + \ C \cdot A \cdot (N+1)^2 \int\limits_{|t|<1/(N+1)} |t|dt \\
&= 2\ CA \int\limits_{1/(N+1)}^{\pi} \frac{1}{|t|}dt \ + \ 2\ CA \cdot (N+1)^2 \int\limits_{0}^{1/(N+1)} |t|dt \\
&= O(\log(N+1)) = O(\log N).
\end{aligned}$$

Iz definicije odložene sredine neposredno imamo da je $\Delta'_N(g)(x_0) = O(\log N)$, pa je teorema dokazana. $\diamondsuit$

**Teorema 3.6.** *Neka je* $0 < \alpha < 1$, *tada je*

$$f_\alpha(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$$

*neprekidna i nigde diferencijabilna funkcija na* $\mathbb{R}$.

Dokaz.

Na osnovu činjenice da je za svako $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left|2^{-n\alpha}e^{i2^n x}\right| = 2^{-n\alpha}$$

i na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma 2.16 dobijamo da red kojim je zadata funkcija apsolutno ravnomerno konvergira, a kako su sve funkcije $2^{-n\alpha}e^{i2^n x}, n \in \mathbb{N}_0$, neprekidne onda je i neprekidna $f(x)$. Takođe primećujemo da je funkcija $f$ prema teoremi 2.3 data Furijeovim redom, kao i to da je $2\pi$ periodična:

$$f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha}e^{i2^n(x+2\pi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha}e^{i2^n x} \cdot e^{i2^{n+1}\pi} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\alpha}e^{i2^n x} = f(x).$$

Pretpostavimo da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija $f$ diferencijabilna u tački $x_0$, tada na osnovu prethodne teoreme imamo $\Delta'_N(f)(x_0) = O(\log N)$.

Uzmimo da je $N = 2^{n-1}$. Zamenom $N$ u (3.6) dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_N(x;f) &= \sum_{|k|\le 2^{n-1}} a_k e^{ikx} + \sum_{2^{n-1}<|k|\le 2^n} \left(2 - \frac{|k|}{2^{n-1}}\right) a_k e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k\alpha}e^{i2^k x} + \left(2 - \frac{2^n}{2^{n-1}}\right)2^{-n\alpha}e^{i2^n x} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k\alpha}e^{i2^k x}\end{aligned}$$

gde je $a_k = 0$ kada $k$ nije stepen dvojke. Odavde sledi

$$\Delta_{2N}(x;f) = \Delta_{2^n}(x;f) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k\alpha}e^{i2^k x}.$$

Posmatrajmo sada sledeću razliku

$$|\Delta'_{2N} - \Delta'_N| = \left|(2^{-n\alpha}e^{i2^n x})'_x\right| = \left|2^{-n\alpha}e^{i2^n x} i 2^n\right| = 2^{n(1-\alpha)} \ge C \cdot 2^{(n-1)(1-\alpha)}$$

za neko $C > 0$, odakle dobijamo kontradikciju jer $N^{1-\alpha} = 2^{(n-1)(1-\alpha)}$ raste brže od $\log N$ tj.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^{1-\alpha}}{\log N} = +\infty.$$

Dakle, $f$ ne može biti diferencijabilna niti u jednoj tački jer ovaj limes nije konačan broj. $\diamondsuit$

Ovo je primer kompleksne funkcije realnog argumenta koja je neprekidna i nigde diferencijabilna na $\mathbb{R}$ i ne mora da znači da će njen imaginarni i realni deo imati istu osobinu, ali uz manje modifikacije moguće je dokazati da je realni deo funkcije $f_\alpha(x)$ dat sa

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos 2^n x$$

gde nije teško primetiti da je ovo zapravo $W(x)$, dok je imaginarni deo

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \sin 2^n x.$$

Obe funkcije su neprekidne i nigde diferencijabilne.

**Primer 3.3.** *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-periodična funkcija definisana na $[0,1]$ sa*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

*tada je redom $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(4^n x)}{4^n}$ zadata neprekidna i nigde diferencijabilna funkcija.*

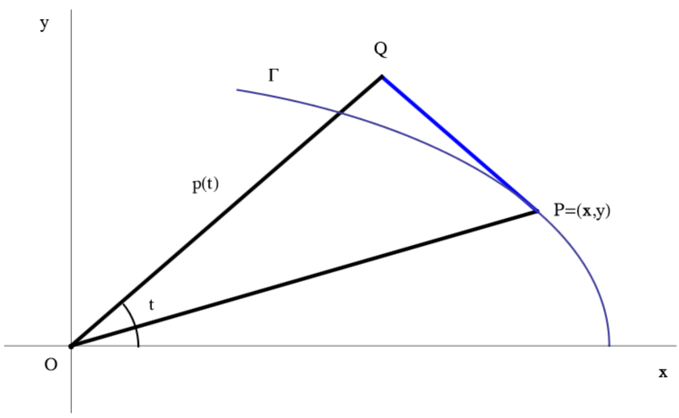
**Primer 3.4.** *Neka je data funkcija $\varphi(x) = |x|,\ -1 \leq x \leq 1$. Produžimo je za sve realne brojeve $x$ stavljajući $\varphi(x+2) = \varphi(x)$.*
*Tada sledi da je $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ neprekidna i nigde diferencijabilna funkcija.*

## 3.4 Krive konstantne širine

U ovom poglavlju ćemo se baviti konveksnim glatkim krivama $\Gamma$ u ravni koje imaju konstantnu širinu i bez gubljenja opštosti možemo pretpostavljati da okružuju koordinatni početak. Najprostiji primer krive koja ima konstantnu širinu je kružnica.

Krive koje imaju konstantnu širinu, a da to nisu kružnice prvi je izučavao i eksplicitno definisao nemački profesor mašinskog inženjerstva **Franc Relo** (1829-1905) čiji su se otac i deda bavili pravljenjem mašina. Te krive se u njegovu čast nazivaju Reloovim krivama, a ovde ćemo se osvrnuti na samo jednu Reloovu krivu - Reloov trougao.

Neka je data zatvorena, konveksna i glatka kriva $\Gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [0, 2\pi]$ u ravni bez samopreseka i na njoj tačka $P$ i tangenta $T_P$ na $\Gamma$. Konstruišimo normalu iz koordinatnog početka na tangentu $T_P$ i sa $Q$ označimo tačku preseka. Ako je $t$ ugao u radijanima koji duž $OQ$ zaklapa sa pozitivnim delom $x-$ose, dužinu duži $OQ$ označavaćemo sa $p(t)$. Na ovaj način je definisana **support** funkcija krive $\Gamma$, što se vidi sa slike:




Parametarsku jednačinu krive $\Gamma$ moguće je izraziti u zavisnosti od support funkcije:

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = p(t)\cos t - p'(t)\sin t \\ y(t) = p(t)\sin t + p'(t)\cos t \end{cases}$$

Ove relacije važe za svaku tačku na $\Gamma$ u kojoj je tangenta definisana. Parametar $t$ preko koga je definisana support funkcija naziva se **ugaoni parametar** i uzima vrednosti iz intervala $[0, 2\pi]$. Ako je funkcija $p(t)$ dva puta diferencijabilna i $2\pi$ periodična, tada će Furijeov red date funkcije konvergirati ka $p(t)$ u svakoj tački $t$, tj.

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Posmatrajmo sve paralelne prave koje imaju fiksiran pravac. Neke od njih seku konveksnu krivu $\Gamma$ u dve tačke, neke niti u jednoj, a postoje tačno dve prave koje sa $\Gamma$ imaju jednu zajedničku tačku. Dakle, za svako $P \in \Gamma$ postoji jedinstveno $P^* \in \Gamma$ tako da $T_P || T_{P^*}$.

**Definicija 3.2.** *Širina krive $\omega$ u tački $P$ predstavlja rastojanje između tangenti $T_P$ i $T^*_P$.*

U opštem slučaju širina $\omega(t)$ zavisi od tačke $P$ i parametra $t$, pa funkciju $\omega(t)$ nazivamo **trenutnom širinom** i ona može biti izražena preko support funkcije kao

$$\omega(t) = p(t) + p(t + \pi),\ t \in [0, 2\pi).$$

Funkcija $\omega(t)$ je $\pi-$periodična. Ako vrednost $\omega(t)$ u tački $t$ ne zavisi od izbora tačke $P$, onda se za $\Gamma$ kaže da je **konstantne širine**.

Definišimo sa $\overline{\omega}$ **srednju vrednost širine**, tj.

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(t)dt = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} \omega(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} \omega(t)dt\Big) \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \omega(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(t) + p(t+\pi)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(t+\pi)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} p(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)dt
\end{aligned}$$

Odavde imamo da je $a_0 = \dfrac{\overline{\omega}}{2}$, odnosno

$$p(t) = \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt. \tag{3.9}$$

Pre nego damo Furijeov red za trenutnu širinu, transformišimo

$$p(t + \pi) = \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos{(t + \pi)k} + b_k \sin{(t + \pi)k}$$

tako što sumu na desnoj strani posmatramo kao zbir sume sa parnim odnosno neparnim indeksima, a kako je za

- $k \equiv_2 0$

$$a_k \cos{(kt + \pi k)} + b_k \sin{(kt + \pi k)} = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

- $k \equiv_2 1$

$$\begin{aligned}
&a_k \cos(kt+\pi k) + b_k \sin(kt+\pi k)\\
&= a_k \cos(kt+\pi) + b_k \sin(kt+\pi)\\
&= a_k\big(\cos kt \cos\pi - \sin kt \sin\pi\big) + b_k\big(\sin kt \cos\pi + \sin\pi \sin kt\big)\\
&= -a_k \cos kt - b_k \sin kt
\end{aligned}$$

sledi

$$p(t+\pi) = \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos 2kt + b_{2k}\sin 2kt - \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)t + b_{2k-1}\sin(2k-1)t\Big).$$

Ako i funkciju $p(t)$ razdvojimo na dve sume dobićemo

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= p(t) + p(t+\pi)\\
&= \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos 2kt + b_{2k}\sin 2kt + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)t + b_{2k-1}\sin(2k-1)t\\
&+ \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos 2kt + b_{2k}\sin 2kt - \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_{2k-1}\cos(2k-1)t + b_{2k-1}\sin(2k-1)t\Big)\\
&= \overline{\omega} + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos 2kt + b_{2k}\sin 2kt.
\end{aligned}$$

**Komentar 3.1.** *Red $\omega - \overline{w}$ "meri" odstupanje širine u $t$ od srednje vrednosti širine.*

Primetimo da ukoliko su parni koeficijenti uz nekonstantne harmonike u redu koji reprezentuju $p(t)$ jednaki nuli tj. $a_{2k} = b_{2k} = 0$ za $k \neq 0$, tada je trenutna širina jednaka srednjoj širini za svako $t$, pa je u tom slučaju kriva $\Gamma$ konstantne širine. Dakle, support funkcija krive $\Gamma$ koja ima konstantnu širinu ima formu:

$$p(t) = \frac{\overline{\omega}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos(2k+1)t + b_{2k+1}\sin(2k+1)t. \tag{3.10}$$

Definišimo sada dijametar krive $\Gamma$ kao

$$d = \sup_{t_1,t_2\in[0,2\pi]} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$$

Sledeća teorema je opšte poznata u teoriji krivih konstantne širine.

**Teorema 3.7.** *Ako je $\Gamma$ kriva konstantne širine $\omega$, tada je $d = \pi \cdot \omega$.*

Još jedan važan rezultat jeste da je površinu ograničenu krivom $\Gamma$ moguće izračunati pomoću support funkcije i to primenom Grinove formule. Sredimo najpre sledeće:

$$\begin{aligned}
x(t)y'(t) - x'(t)y(t) &= \Big(p(t)\cos t - p'(t)\sin t\Big)\cdot\Big(p'(t)\sin t + p(t)\cos t + p''(t)\cos t - p'(t)\sin t\Big)\\
&- \Big(p'(t)\cos t - p(t)\sin t - p''(t)\sin t - p'(t)\cos t\Big)\cdot\Big(p(t)\sin t + p'(t)\cos t\Big)\\
&= p^2(t)\cos^2 t + p(t)p''(t)\cos^2 t - p'(t)p(t)\cos t\sin t - p'(t)p''(t)\sin t\cos t\\
&+ p^2(t)\sin^2 t + p(t)p'(t)\sin t\cos t + p(t)p''(t)\sin^2 t + p'(t)p''(t)\sin t\cos t\\
&= p^2(t)\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big) + p(t)p''(t)\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big) = p^2(t) + p(t)p''(t).
\end{aligned}$$

Dakle, površina je data sa

$$P_\Gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big[p^2(t)+p(t)p''(t)\Big]dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big[p^2(t)-p'^2(t)+p'^2(t)+p(t)p''(t)\Big]dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} p^2(t)-p'^2(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} p'^2(t)+p(t)p''(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} p^2(t)-p'^2(t)dt$$

gde korišćenjem parcijalne integracije i korišćenjem činjenice da je $\Gamma$ zatvorena kriva odnosno $p(2\pi)=p(0);\ p'(2\pi)=p'(0)$, drugi integral jednak je nuli.

U prethodnoj formuli moguće je primeniti Parsevalovu jednakost za (3.9) odakle ćemo dobiti

$$P_\Gamma = \frac{\pi}{4}\Big(\overline{\omega}^2 - 2\sum_{k=2}^{\infty}(k^2-1)(a_k^2+b_k^2)\Big) \tag{3.11}$$

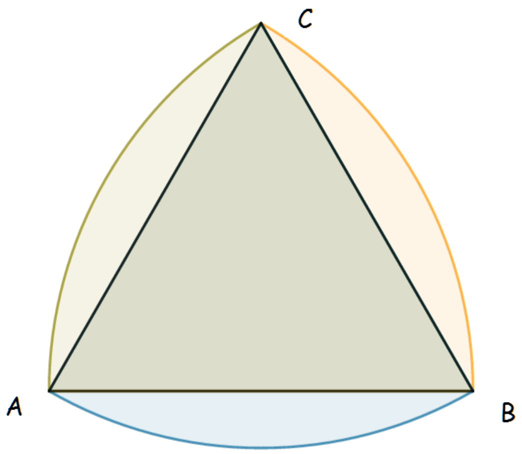
gde su $a_k,\ b_k$ Furijeovi koeficijenti funkcije $p(t)$. Ali ako je kriva $\Gamma$ konstantne širine tj. ako važi (3.10), onda uz manje modifikacije površina je data sa

$$P_{\Gamma^*} = \frac{\pi}{4}\Big(\overline{\omega}^2 - 8\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)(a_{2k+1}^2+b_{2k+1}^2)\Big).$$

## Reloov trougao

Reloov trougao je lako konstruisati ali i ne toliko lako analizirati njegova svojstva.

**Konstrukcija**: Konstruišimo jednakostraničan trougao $ABC$ stranice $r$. Zatim konstruišimo lukove: $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ koji leže na kružnici poluprečnika $r$ sa centrima u $A, B, C$ redom i odgovarajućim uglovima od $60°$. **Reloov trougao je kriva koja se dobija uniranjem ova tri luka**.




**Teorema 3.8.** *Među krivama date konstantne širine $\omega$ najmanju površinu obuhvata Reloov trougao, a najveću kružnica.*

Dokaz ove teoreme kao i teoreme 3.7 može se naći u [4] str. 133.

**Primer 3.5.** *Naći površinu koju ograničava Reloov trougao širine $\omega = 2$, ako je data support funkcija*

$$p(t) = 1 + \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\cos t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)}\cos 3(2n+1)t.$$

Zbog jednostavnijeg računanja koristimo formulu (3.11), pa je

$$\begin{aligned}
P_{\Gamma^*} &= \frac{\pi}{4}\Big(2^2 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^2(2n+1)^2-1}{\pi^2(2n+1)^2(3n+1)^2(3n+2)^2}\Big)\\
&= \frac{\pi}{4}\Big(4 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{36(n+\frac{2}{3})(n+\frac{1}{3})}{\pi^2(2n+1)^2(3n+1)^2(3n+2)^2}\Big)\\
&= \frac{\pi}{4}\Big(4 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(3n+2)(3n+1)}{\pi^2(2n+1)^2(3n+1)^2(3n+2)^2}\Big)\\
&= \frac{\pi}{4}\Big(4 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2(3n+1)(3n+2)}\Big)\\
&= \pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2(3n+1)(3n+2)}\\
&= 2(\pi - \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

I ovo je najmanja moguća površina koja može biti ograničena krivom konstantne širine $\omega = 2$.

Upravo svojstvo dato poslednjom teoremom daje prednost Reloovom trouglu, npr. novčić u obliku Reloovog trougla bio bi najekonomičniji mogući oblik kovanice, ako biramo između kovanica oblika koji su ograničeni krivama konstantne širine.

Poznato je da Watt-ova bušilica koristi burgije oblika Reloovog trougla za bušenje oblika približan kvadratu, tačnije to bi bio "kvadrat" sa zaobljenim temenima. Takođe, Wankel-ov motor sa unutrašnjim sagorevanjem sadrži ovalno kućište koje okružuje rotor, a on je oblika Reloovog trougla. Ovakav oblik rotora je rezultat težnje da se smanji radna zapremina motora. Još jedna od zanimljivosti jeste da prozori na katedrali Notr Dam imaju oblik Reloovog trougla.

# Literatura

[1] E. M. Stein and R. Shakarchi: Fourier analysis, an introduction, Princeton University Press, 2011.

[2] A. Zygmund: Trigonometric series Vol I and II, 3rd edition, Cambridge Univerzity Press, 2003.

[3] R. Osserman: The isoperimetric inequality, Bulletin of the American Mathematical Society 84 (6) (1978)

[4] H. Groemer: Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics, Cambridge University Press, 1996.

[5] H. L. Resnikoff: On Curves and Surfaces of Constant Width, 2013.

[6] Ljubiša Kočinac: Linearna algebra i analitička geometrija, Univerzitet u Nišu, 1991.

[7] Dragan Đorđević: Matematička analiza 4, materijali sa predavanja, 2014.

[8] Radoslav Dimitrijević: Realna analiza funkcija više promenljivih, Niš, 1999.

[9] Nebojša Dinčić: Osnovi Furijeove analize, zbirka rešenih zadataka, Niš, 2014.

# Biografija

Marija Stojilković rođena je 21.11.1992. godine u Leskovcu. Osnovnu školu "Radoje Domanović" u Bošnjacu završila je kao odličan učenik. Prirodno-matematički smer Gimnazije u Leskovcu završava takođe odličnim uspehom.

Školske 2011/12. godine je upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu i završila ih školske 2014/15. Iste godine upisuje master akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, smer Verovatnoća, statistika i finansijska matematika.